

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**Departamento de Didáctica de la Matemática**



**Significados institucionales y personales  
del teorema central del límite en la  
enseñanza de estadística en ingeniería**

TESIS DOCTORAL

Hugo Alejandro Alvarado Martínez

GRANADA, 2007

## ÍNDICE

	Página
<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, SU CONTEXTUALIZACIÓN Y RELEVANCIA</b>	5
1.1. Introducción	5
1.2. El contexto institucional. La formación estadística de los ingenieros	5
1.2.1. Introducción	5
1.2.2. Perspectiva internacional	6
1.2.3. Acreditación	7
1.2.4. Caracterizaciones generales de la carrera de ingeniería con base científica	8
1.2.5. Formación estadística de ingenieros	9
1.2.6. Contexto de innovación pedagógica en la Universidad Católica de la Santísima Concepción	11
1.3. El teorema central del límite y su interés en estadística	12
1.3.1. Interés en estadística	12
1.3.2. Importancia del teorema central del límite en la ingeniería y otras áreas	14
1.4. Delimitación del problema de investigación	16
1.5. Objetivos del trabajo de investigación	17
1.6. Hipótesis del estudio	20
1.7. Metodología del estudio	22
1.7.1. Introducción	22
1.7.2. Metodología del análisis de texto	23
1.7.3. Metodología de la experimentación y observación del proceso de estudio	25
1.7.4. Metodología de la evaluación del aprendizaje	27

<b>CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO</b>	31
2.1. Introducción	31
2.2. Marco teórico	32
2.2.1. Introducción	32
2.2.2. Significado institucional y significado personal de un objeto matemático	34
2.2.3. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de Prácticas	36
2.2.4. Relaciones entre objetos: funciones semióticas y sus tipos	39
2.2.5. Evaluación de la comprensión	40
2.2.6. Criterios de idoneidad de un proceso de estudio	41
2.3. El teorema central del límite. Evolución histórica de su significado en estadística	42
2.3.1. Introducción	42
2.3.2. Ideas precursoras. Aproximación de la distribución binomial por la normal	43
2.3.3. Distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas con media y varianzas finitas	46
2.3.4. Suma de variables no idénticamente distribuidas y variables continuas	48
2.3.5. Distribuciones con rango infinito	51
2.3.6. Estudio de condiciones necesarias y suficientes para el teorema	54
2.3.7. Uso actual del teorema central del límite en estadística	56
2.3.8. Conclusiones del estudio histórico	60
 <b>CAPÍTULO 3. INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE</b>	 65
3.1. Introducción	65
3.2. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje del teorema central del límite	65
3.2.1. Comprensión del teorema central del límite	65
3.2.2. Comprensión de las distribuciones muestrales	68
3.2.3. Diseño de enseñanza del teorema central del límite con recurso didáctico del ordenador	76

3.2.4. Comprensión de la distribución normal	81
3.3. Conclusiones del estudio de las investigaciones previas	83
<b>CAPÍTULO 4. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA</b>	85
4.1. Introducción	85
4.2. Muestra de textos de libros universitarios seleccionados	86
4.3. Campos de problemas	86
4.4. Lenguaje	106
4.5. Procedimientos	111
4.6. Enunciados diferenciados del teorema	117
4.7. Propiedades	121
4.8. Argumentos	131
4.9. Conclusiones sobre el análisis de los textos	137
<b>CAPÍTULO 5. DISEÑO DE UN PROCESO DE ESTUDIO DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE PARA INGENIEROS</b>	139
5.1. Introducción	139
5.2. Descripción general del proceso de estudio	140
5.3. Configuraciones epistémicas	144
5.4. Análisis de la primera lección	146
5.4.1. Elementos de significado y configuraciones epistémicas	146
5.4.2. Trayectoria didáctica	148
5.5. Análisis de la segunda lección	161
5.5.1. Elementos de significado y configuraciones epistémicas	161
5.5.2. Trayectoria didáctica	163
5.6. Análisis de la tercera lección	172
5.6.1. Elementos de significado y configuraciones epistémicas	172
5.6.2. Trayectoria didáctica	174
5.7. Conclusiones sobre el significado institucional pretendido del teorema central del límite	184
<b>CAPÍTULO 6. SIGNIFICADOS IMPLEMENTADOS DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE</b>	189
6.1. Introducción	189

6.2. Observación de la primera lección	190
6.2.1. Análisis de actividades desarrolladas en el aula	190
6.2.2. Análisis de ejercicios realizados por los alumnos fuera de clase	193
6.2.3. Significado institucional implementado en la primera lección	206
6.3. Observación de la segunda lección	207
6.3.1. Análisis de actividades desarrolladas en el aula	208
6.3.2. Análisis de ejercicios realizados por los alumnos fuera de clase	216
6.3.3. Significado institucional implementado en la segunda lección	233
6.4. Observación de la tercera lección	234
6.4.1. Análisis de actividades desarrolladas en el aula	234
6.4.2. Análisis de ejercicios realizados por los alumnos fuera de clase	242
6.4.3. Significado institucional implementado en la tercera lección	246
6.5. Conclusiones sobre el significado implementado del teorema central del límite	247
<b>CAPÍTULO 7. SIGNIFICADO PERSONAL DE LOS ESTUDIANTES SOBRE EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE AL FINALIZAR EL PROCESO DE ESTUDIO</b>	251
7.1. Introducción	251
7.2. Objetivos e instrumentos de evaluación	252
7.2.1. Objetivos	252
7.2.2. Proceso de construcción	252
7.3. Análisis a priori del significado evaluado	253
7.4. Resultados en el cuestionario	268
7.4.1. Respuestas a cada ítem	269
7.4.2. Resultados globales	281
7.5. Resultados en problemas abiertos	286
7.5.1. Resultados en el problema 1	287
7.5.2. Resultados en el problema 2	298
7.6. Resultados de la prueba de ensayo	309
7.7. Resumen de resultados en las tres pruebas abiertas	323

7.8. Conclusiones sobre el significado personal de los estudiantes	326
7.8.1. Concordancias entre significado personal y significado implementado	326
7.8.2. Diferencias entre significado personal y significado implementado	328
7.9. Conclusiones sobre la idoneidad del proceso de estudio	330
<b>CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES</b>	337
8.1. Introducción	337
8.2. Conclusiones en relación a los objetivos	337
8.3. Conclusiones en relación a las hipótesis	344
8.4. Principales aportaciones de la investigación	348
8.5. Implicaciones para la enseñanza del teorema central del límite en un curso de estadística universitaria	349
8.6. Perspectivas futuras de investigación	349
<b>REFERENCIAS</b>	351



## INTRODUCCIÓN

El teorema central del límite es uno de los fundamentales en estadística y estudia el comportamiento de la suma de variables aleatorias, cuando crece el número de sumandos, asegurando su convergencia hacia una distribución normal en condiciones muy generales. Este teorema, del cual existen diferentes versiones que se han ido desarrollando a lo largo de la historia, tiene una gran aplicación en inferencia estadística, pues muchos parámetros de diferentes distribuciones de probabilidad (como la media, momentos, coeficiente de correlación, proporción) pueden expresarse en función de una suma de variables. Permite también aproximar muchas distribuciones de uso frecuente: binomial, Poisson, chi cuadrado, t-student, gamma, etc., cuando sus parámetros crecen y el cálculo se hace difícil. Por otro lado, la suma de variables aleatorias aparece en forma natural en muchas aplicaciones de procesos de simulación de la ingeniería: determinación de masa forestal, carga soportada por una estructura, tiempo de espera de servicios, etc.

Todo ello hace explicar por qué muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación y, en consecuencia, este teorema es una componente importante de la formación estadística de los ingenieros, ya que por otro lado, su enseñanza plantea interrogantes importantes al profesor. El teorema se apoya y relaciona entre sí con otros conceptos y procedimientos básicos en estadística, como los de variable aleatoria y sus transformaciones, distribución muestral, convergencia, momentos, simetría, tipificación, cálculo de probabilidades, etc., algunos de los cuales podrían plantear problemas de aprendizaje.

En este trabajo se aborda la problemática de la enseñanza y aprendizaje del teorema central del límite en los estudios de ingeniería, particularmente en Chile. Utilizando el enfoque ontosemiótico desarrollado por Godino (Godino y Batanero, 1994, 1998a, 2003; Godino, 2002a; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) es posible acercarse a este teorema general y universal, desde una diversidad de puntos de vista.

## Introducción

En el Capítulo 1 se contextualiza la investigación, presentando la problemática de las carreras de ingeniería, y haciendo especial mención a establecer el perfil de competencias de un ingeniero, que permitirá determinar las habilidades y destrezas en la formación estadística de los ingenieros. También se analiza la importancia del teorema central del límite en estadística y la problemática didáctica que implica su enseñanza a alumnos de ingeniería.

El Capítulo 2 presenta los fundamentos de esta investigación. Después de presentar un resumen del marco teórico utilizado, se analiza la evolución histórica, identificando los campos de problemas que dan origen al teorema, lo que será la base para el posterior estudio del significado de referencia del mismo.

En el Capítulo 3 se describe las investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del teorema central del límite y otros temas relacionados, centrándose principalmente en la comprensión de la distribución normal y sus propiedades, la de las distribuciones muestrales y el efecto de la enseñanza basada en ordenador sobre el aprendizaje de las distribuciones muestrales.

El Capítulo 4 explica el *significado institucional de referencia* del teorema central del límite, que servirá de base para el diseño de un proceso de estudio y la interpretación de las respuestas de los alumnos a algunas de las tareas planteadas a lo largo del mismo y en la fase de evaluación. Este significado se identifica a partir del análisis de contenido de una muestra de libros de texto de estadística, utilizados para la enseñanza de ingenieros en Chile. Para formar la muestra, se seleccionan textos de probabilidad y estadística con distintos enfoques que incluyen el teorema. A continuación, se identifican los elementos de significados más relevantes en la formación del ingeniero.

En el Capítulo 5 se analiza el diseño de un proceso de estudio sobre el teorema central del límite, dirigido a la formación de ingenieros. A partir del significado institucional de referencia se han seleccionado los elementos de significado, organizándolos en un proceso de estudio, que los contextualiza en ejemplos relacionados con la ingeniería y los secuencia en orden de dificultad progresiva en base al tiempo disponible. Se tuvo en cuenta tres posibles tipos de configuraciones epistémicas: manipulativa, algebraica y computacional, que se alternan a lo largo del proceso y permiten introducir significados complementarios del teorema central del límite. Con ello se describe el *significado institucional pretendido*.

Finalizado el diseño del proceso de estudio, se llevó a cabo la observación de su

desarrollo formando parte de un curso de estadística en la Universidad Católica de la Santísima Concepción de Chile, donde participaron 134 estudiantes.

En el Capítulo 6, se analiza la observación realizada de algunos episodios del proceso de estudio en cada una de las tres lecciones de que se compone. El análisis incluye una muestra de las actividades desarrolladas colectivamente en la clase y de las tareas realizadas individualmente por los alumnos, así como de las pruebas de evaluación llevadas a cabo al finalizar cada una de las lecciones. La finalidad es describir el *significado institucional implementado*.

En el Capítulo 7 se describe la evaluación final del aprendizaje llevada a cabo a partir de un cuestionario con ítems de opciones múltiples y verdadero/falso, dos problemas abiertos y un proyecto de aplicación a la ingeniería. Ello permite describir el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado. Asimismo, permite valorar la idoneidad didáctica (cognitiva, epistémica, mediacional y emocional) del proceso de estudio. La tesis finaliza con el Capítulo de conclusiones y referencias.

Esta tesis realiza diversas aportaciones al campo de la educación estadística y en concreto a la investigación sobre enseñanza y aprendizaje del teorema central del límite que se pueden reseñar de la siguiente forma:

- El análisis histórico y de libros de texto permite describir con detalle el significado de referencia del teorema central del límite en un curso estándar de ingeniería, y mostrar la diversidad posible de significados de dicho objeto matemático.
- El proceso de estudio implementado, es en sí mismo novedoso, al incorporar actividades no habituales, como las basadas en la simulación de experimentos aleatorios con materiales manipulativos y ordenador, así como del estudio de las condiciones para la convergencia. Dicho proceso permite conectar, asimismo la aproximación de varias distribuciones clásicas a la normal con el teorema central del límite, ampliando el significado de dicho teorema, respecto a lo que es habitual en los libros de texto de ingeniería.
- El análisis del aprendizaje de los estudiantes, amplía notablemente los estudios realizados sobre la comprensión del teorema central del límite, al abarcar una serie de propiedades no consideradas en las investigaciones previas (como corrección de continuidad, condiciones de la convergencia, efecto de los parámetros). También se aborda la capacidad de reconocimiento de los campos de problemas, uso correcto de

## *Introducción*

procedimientos, lenguaje y capacidad de argumentación, que no han sido consideradas con anterioridad.

Incluso con las limitaciones razonables de todo estudio didáctico, pensamos que los resultados suponen un avance en la didáctica de la inferencia estadística. Es de esperar que otros trabajos posteriores puedan continuar la línea iniciada en esta Memoria.

# **CAPÍTULO 1.**

## **PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, SU CONTEXTUALIZACIÓN Y RELEVANCIA**

### **1.1. INTRODUCCIÓN**

Como se ha indicado en la introducción, el problema de investigación se centra en la enseñanza del teorema central del límite en las carreras de ingeniería y de ingeniería civil. Aunque los resultados serían aplicables en general a estudiantes de ingeniería, los alumnos que forman parte de la muestra cursan sus estudios en la Universidad Católica de la Santísima Concepción de Chile.

Con objeto de contextualizar el problema, comienza este capítulo presentando la problemática de las carreras de ingeniería, haciendo especial mención a la situación en Chile, aunque dentro de una perspectiva internacional. Se hace especial referencia a la problemática de la acreditación; que conlleva a establecer el perfil de competencias de un ingeniero y por tanto, ayudará a determinar las habilidades y destrezas en la formación estadística de los ingenieros. Seguidamente se analiza la importancia del teorema central del límite en estadística y la problemática didáctica que implica su enseñanza a estos alumnos.

Todo ello servirá para delimitar la investigación y describir sus objetivos generales y específicos. Finaliza este capítulo haciendo un resumen de las fases que componen la investigación empírica y las principales características de la metodología empleada en cada una de ellas.

### **1.2. EL CONTEXTO INSTITUCIONAL. LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE LOS INGENIEROS**

#### **1.2.1. INTRODUCCIÓN**

Según la Accreditation Board for Engineering and Technology (1997) de EE.UU.,

## Capítulo 1

*Ingeniería* es la profesión en la cual el conocimiento de las ciencias naturales y matemáticas, obtenido por estudio, experiencia y práctica, es aplicado con criterio al desarrollo de formas de emplear, económicamente, los materiales y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad.

El Consejo Superior de Educación de Chile define las *Ciencias de la Ingeniería* como el conjunto creciente de disciplinas basadas en las Matemáticas y las Ciencias Naturales, que se orientan hacia las prácticas creativas del diseño en ingeniería y que sientan las bases de las materias que diferencian la especialidad. Ellas comprenden el desarrollo de técnicas matemáticas o numéricas, la modelación, la simulación y otras técnicas experimentales con énfasis en la identificación y solución de problemas prácticos en ingeniería. Incluyen temas como resistencia de materiales, mecánica de fluidos, termodinámica, circuitos eléctricos y electrónicos, ciencias de los materiales, informática, mecánica de suelos, control automático, aerodinámica, fenómenos de transferencia, pudiendo comprender también estudios sobre el medio ambiente u otros propios de una determinada disciplina o especialidad.

La acreditación de carreras de ingeniería en Chile ha puesto en evidencia la existencia de numerosas especialidades que no llegan a alcanzar los estándares internacionales, lo que establece un contexto de análisis y evaluación. Esta situación se deriva, particularmente, de las formas como se ha utilizado el concepto de “ingeniería” en el país. Para tratar de mejorar la situación, la CNAP (Comisión Nacional de Acreditación de Pregrado) hizo una convocatoria en 2001, para analizar la acreditación de las carreras de Ingeniería Civil en todas sus especialidades. Esto conlleva a garantizar las *competencias específicas* necesarias que han de adquirir los futuros profesionales ingenieros.

### 1.2.2. PERSPECTIVA INTERNACIONAL

Existen carreras de ingeniería desarrolladas bajo sistemas de acreditación internacionales, en especial la Accreditation Board for Engineering Technology (ABET, EE.UU.), Canadian Council of Professional Engineers (CEAB, Canadá), Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería (CACEI, México) y países de la alianza del cono sur (MERCOSUR), presionados por los tratados de libre comercio, que han establecido criterios estándares de acreditación de carreras de ingeniería que corresponden a dos objetivos distintos:

- a. Carreras de base científica, que fluctúan entre 4 y 5 años (6 años en pocos casos, Chile entre ellos), orientadas al diseño, gestión y producción.
- b. Carreras con base científica limitada y fuerte componente tecnológico que fluctúan entre 3 y 4 años, orientadas a la supervisión y producción.

La primera orientación tiene fuerte base científica, basada en el cálculo matemático de varias variables, ecuaciones diferenciales y física. La segunda es de tipo más tecnológico, con una base científica más orientada a las aplicaciones tecnológicas, supervisión y control. En algunos casos la base matemática de esta carrera llega al nivel de Álgebra Superior (ABET, 1997; Instituto de Ingenieros, 2002). Dos ejemplos bien conocidos de esta situación son los casos de Inglaterra, donde coexisten los Chartered Engineers (base científica) y los Incorporated Engineers (base tecnológica), y de Estados Unidos, donde coexisten los grados de Bachelor of Science in Engineering y Bachelor of Engineering Technology. Veinte años atrás el paralelo chileno era muy cercano, con los Ingenieros Civiles e Ingenieros de Ejecución.

### **1.2.3. ACREDITACION**

La acreditación permite la regulación de la educación superior que busca asegurar la calidad y pertinencia de la oferta educativa. Le corresponde, por lo tanto, establecer criterios orientadores que integren tanto los intereses del país y de los postulantes, como el derecho de las instituciones a ejercer su autonomía. Considerando como un importante referente la perspectiva internacional, la cual será cada vez más relevante en la práctica, a medida que Chile asuma compromisos comerciales con países desarrollados, la CNAP ha considerado la acreditación de los dos tipos de ingenierías citadas anteriormente (CNAP, 2003):

- Ingenierías con base científica, que otorgan una Licenciatura en Ciencias de la Ingeniería y conducen a un título profesional de Ingeniero Civil o uno esencialmente equivalente (actualmente hay 30 ingenierías civiles).
- Ingenierías con base tecnológica, que conducen a un título de Ingeniero en un área de especialidad o de Ingeniero de Ejecución, y que pueden otorgar una Licenciatura en la especialización correspondiente al título (actualmente hay 51 especialidades de ingenierías y 57 de ejecución).

La CNAP define las expectativas que, respecto de los principales rubros de análisis, deben satisfacer las carreras de ingeniería, en el marco de sus propias competencias y de la misión y de las orientaciones generales de la institución a la que pertenecen, que se concretan en un perfil profesional y una estructura curricular particular. Estos criterios se describen a continuación para las carreras con base científica, donde se interesa este estudio.

### **1.2.4. CARACTERIZACIONES GENERALES DE LA CARRERA DE INGENIERÍA CON BASE CIENTÍFICA**

La carrera de ingeniería con base científica (CNAP, 2003), conduce al título profesional de Ingeniero Civil o uno esencialmente equivalente, y al grado académico de licenciado en Ciencias de la Ingeniería. Esta carrera *debe* contar con una fuerte base científica y orientarse al diseño, gestión y producción. La carrera *debe* garantizar que los profesionales que titula:

- Han adquirido las competencias necesarias para aplicar un cuerpo distintivo de conocimientos científicos, matemáticos y tecnológicos en un contexto empresarial, tomando en consideración las restricciones impuestas por las finanzas, la legislación, la ética y las personas.
- Tengan capacidad de innovación, creatividad y habilidad específica, centrada en el diseño, gestión y producción de proyectos de desarrollo, procesos de producción y procedimientos de operación y mantenimiento en áreas de infraestructura, bienes y servicios para la industria y la comunidad, en diversos ámbitos de la ingeniería.
- Cuentan con las competencias necesarias para prever el comportamiento de un diseño o los resultados de un programa, y para evaluar costos y beneficios de las actividades propuestas.
- Son capaces de desarrollar las competencias necesarias para una educación permanente y continua, incluyendo estudios de postítulo y postgrado.

La ingeniería de base científica, que en Chile otorga el grado de licenciado en Ciencias de la Ingeniería, incluye las carreras de Ingeniería Civil (6 años) y de algunas carreras de Ingeniería de 5 años. En el caso de las carreras tecnológicas también existen sistemas de acreditación (ABET es uno), pero está menos desarrollado el intercambio internacional. Las capacidades o competencias esperadas han sido publicadas por

agencias acreditadoras (FEANI, Federation Euroeenne D`Associations Nationales D`Ingenieurs) o cuerpos profesionales para la carrera de base científica.

Las reuniones internacionales recientes en torno al tema de reconocimiento mutuo de títulos de Ingeniería y de Sistemas de Acreditación revelan una notable concordancia conceptual en los estándares, que se refieren esencialmente a las carreras homólogas de base científica. Los países que han desarrollado sistemas de acreditación en ingeniería han expresado la importancia de los aspectos esenciales en la caracterización de una carrera de ingeniería, que inciden directamente en la capacidad industrial y su sostenibilidad en el tiempo, con las correspondientes implicancias en la economía y competitividad nacionales.

Es por ello altamente improbable que en Chile se acrediten como tales carreras de ingeniería que no se ajusten a las características internacionalmente reconocidas. Entre otros factores, juegan un papel importante los compromisos internacionales que Chile ha contraído en materia de reconocimiento de estudios. En particular deben citarse los acuerdos mercosur y Chile-Canadá, los cuales implican explícitamente procesos de acreditación de carreras de ingeniería con criterios comparables.

#### **1.2.5. FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE INGENIEROS**

El Instituto de Ingenieros de Chile destaca la importancia de la estadística, como base esencial de conocimientos en ingeniería, puesto que sus aplicaciones llevan a modelos matemáticos necesarios para el diseño, control y optimización. Históricamente los programas de estadística han sido realizados por especialistas, siendo fuertemente técnicos y ligados al conocimiento matemático. Hoy en día, la tendencia es a tener un currículo cada vez menos técnico y cada vez más práctico.

La importancia de la estadística para el aumento de la calidad en la industria ha sido subrayada (Montgomery y Runger, 1996). Muchas compañías se han dado cuenta de que la baja calidad de un producto tiene un efecto muy pronunciado en la productividad global de la compañía, su posición competitiva y, finalmente, en la rentabilidad de la empresa. La estadística es un elemento decisivo en el incremento de la calidad, ya que las técnicas estadísticas pueden emplearse para describir y comprender la *variabilidad* en los procesos industriales, que es el resultado de cambios en las condiciones bajo las que se llevan a cabo estos procesos. También en las Conferencias Internacionales sobre Enseñanza de la Estadística (ICOTS) se han organizado sesiones especiales sobre la formación estadística de los ingenieros (e.g., Mac Gillivray, 2000a y

## Capítulo 1

b; Martín, 2006; Romeu, 2006).

En muchas Facultades de Ingeniería, la asignatura de estadística es de carácter mínimo dentro del plan de estudios, y suele estar ubicado en el segundo año. Los *contenidos mínimos* de un curso tradicional en ingeniería son: Estadística descriptiva univariada, estadística descriptiva bivariada, distribuciones muestrales, estimación puntual de parámetros, estimación por intervalos de parámetros, pruebas de hipótesis, elementos de muestreo, regresión lineal múltiple. A pesar de que la estadística en estas carreras se fundamenta en una sólida base matemática, el interés es complementarla con la *estadística aplicada*, que se puede dividir en tres campos de estudio, como sugiere Moore (1995):

1. El *análisis de datos* se ocupa de los métodos y las ideas necesarias para organizar y describir datos utilizando gráficos, resúmenes estadísticos y descripciones matemáticas más elaboradas. La revolución informática ha devuelto de nuevo el análisis de datos al centro de la estadística aplicada.
2. La *obtención de datos* proporciona métodos para obtener datos que permiten dar respuestas claras a preguntas concretas. Los conceptos básicos sobre cómo obtener muestras y diseñar experimentos son quizás las ideas estadísticas que han tenido una mayor influencia.
3. La *inferencia estadística* va más allá de los datos disponibles para obtener conclusiones sobre un universo más amplio. La inferencia estadística no sólo obtiene conclusiones, sino que acompaña estas conclusiones con una afirmación sobre su fiabilidad. En general, se discuten los razonamientos utilizados en la inferencia estadística, presentándose cómo se utiliza en la práctica en algunas situaciones sencillas y más complejas.

Otro dato de interés son los bajos resultados globales en las evaluaciones de la asignatura, lo que implica que la estadística es un tópico difícil para los alumnos. En la Tabla 1.2.5.1, se presentan los resultados académicos en la asignatura de Estadística de los estudiantes de las cinco especialidades de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Se observa en seis años el bajo porcentaje de alumnos que aprueban la asignatura (Calificación final) y es más preocupante la calificación parcial donde se evalúa el tema de las distribuciones muestrales (Prueba parcial). Sin embargo, el segundo semestre de 2005, período donde

se implementó la propuesta del diseño del teorema central del límite, se aprecia un aumento de aprobación de alumnos y una pequeña mejora en la prueba de contenidos donde se presentó el objeto de estudio.

**Tabla 1.2.5.1.** Porcentaje de estudiantes *aprobados* en la asignatura de Estadística

Año	Calificación final	Prueba Parcial
2001(1)	29	
2001(2)	60	
2002(2)	52	27
2003(1)	46	
2003(2)	35	13
2004(1)	37	25
2004(2)	30	28
2005(1)	34	35
2005(2)	58	46
2006(1)	35	24
2006(2)	41	50

(1) Primer semestre; (2) Segundo semestre

Actualmente existen altos grados de deserción estudiantil y reprobación de los alumnos de Ingeniería y un no despreciable grado de desmotivación de los estudiantes. Una posible causa (estudio realizado en proyectos internos) es que el objetivo en los cursos ha sido que los alumnos adquieran conocimientos, pero no necesariamente potenciar habilidades, análisis crítico y actitudes que permitan fortalecer su futuro profesional.

#### 1.2.6. CONTEXTO DE INNOVACIÓN PEDAGÓGICA EN LA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN

En asignaturas de Probabilidad y Estadística para ingenieros las sesiones de clase se han desarrollado sólo en el aula, presentando a los estudiantes actividades de ejercicios y problemas con desarrollo algebraico y demostraciones de propiedades deducidas de teoremas y corolarios. Algunas razones para seguir esta metodología es no contar con un programa de estadística licenciado para los estudiantes y también la tradición de los profesores. De acuerdo a la experiencia docente, se observa que existen diferencias en los estudiantes de ingeniería con respecto al ritmo de aprendizaje y que muchos no muestran un trabajo sistemático de estudio clase a clase.

Una de las perspectivas del Plan Estratégico de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de la Santísima Concepción (en adelante UCSC) es la *Perspectiva del aprendizaje*, o conjunto de objetivos tendientes a lograr las competencias,

habilidades y tecnologías necesarias para el desarrollo y crecimiento futuro de la Facultad.

Dentro de esta perspectiva y de uno de los lineamientos estratégicos institucionales, *la investigación y su conexión con la docencia*, se sitúa este trabajo que continuará otros proyectos internos de investigación y de docencia, en particular los proyectos DIN 05/1997 “Caracterización del estudiante de ingeniería en relación al rendimiento académico”, DIN 05/2001 “Diseño y aplicación de una metodología innovadora de aprendizaje en Ciencias Básicas a partir de variables causales de rendimiento académico” y FAD 08/2000 “Desarrollo de propuesta metodológica de organización académica y administrativa para ingeniería marítimo portuaria”, algunos de cuyos resultados se han publicado en Alvarado y cols. (2000, 2003) y Parra y cols. (2001). En esta investigación se intenta llevar a cabo:

- a. *Acciones* para potenciar en los estudiantes las habilidades y destrezas de acuerdo a los requerimientos de las especialidades. Para ello, y en base al marco teórico se diseñará un proceso de estudio del teorema central del límite, acorde a las carreras de ingeniería y sus necesidades actuales.
- b. *Acciones* para mejorar la metodología de enseñanza-aprendizaje de acuerdo a las competencias de egreso. Para ello se identificarán metodologías afines a las características de los alumnos y las competencias de egreso deseadas.

La población de interés en el presente trabajo, son los alumnos de segundo año universitario de la Universidad Católica de la Santísima Concepción que cursan una asignatura de estadística en la Facultad de Ingeniería (Ingeniería en: Acuicultura, Marítimo Portuario, Informática, Industrial y Civil). También es posible que los resultados sean aplicables a otros estudiantes de ingeniería que tengan una base matemática similar al inicio del estudio del teorema central del límite.

### **1.3. EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE Y SU INTERÉS EN ESTADÍSTICA**

#### **1.3.1. INTERÉS EN ESTADÍSTICA**

Un objeto de creciente preocupación en la Educación Matemática es investigar acerca del significado, comprensión y aplicación de conceptos estocásticos en todos los

niveles educacionales. En el caso particular de la enseñanza de la estadística en la universidad, uno de los problemas didácticos principales es la enseñanza de la inferencia (Moore, 1997; Artigue, Batanero y Kent, 2007). La investigación en psicología se ha interesado desde hace años por la comprensión de la inferencia y ha mostrado, por un lado, el uso e interpretación incorrectamente generalizado del contraste de hipótesis por los investigadores y profesionales (Morrison y Henkel, 1970; Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Batanero, 2000; Batanero y Díaz, 2006). Por otro lado, incluso en las situaciones de la vida diaria, se hacen frecuentes errores en la toma de decisiones bajo incertidumbre y no se mejora con la formación estadística (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

Uno de los resultados más notables de la teoría estadística es el teorema central del límite, estudiado por varios matemáticos destacados, que fue establecido por primera vez en 1738 por Abraham De Moivre, bajo condiciones muy restringidas. A principios del siglo XIX Laplace lo formuló de manera más general; pero no fue hasta 1901 cuando el eminente probabilista de San Petersburgo, A. M. Liapounov (1857-1918) lo estableció finalmente en condiciones muy generales y proporcionó una demostración completa y rigurosa, empleando herramientas matemáticas mucho más sofisticadas.

El nombre de “teorema central” fue acuñado por George Polya en 1920, para subrayar que de todos los teoremas de distribuciones límite, éste es justamente el más importante. En términos generales, este teorema explica por qué la distribución normal aparece con tanta frecuencia en fenómenos biológicos, físicos, astronómicos, químicos, ingenieriles, etc., al establecer que (Wisniewski y Velasco, 2001, pp. 211) *“La suma de un gran número de variables aleatorias independientes tiende a seguir de manera asintótica una distribución normal, siempre que determinadas condiciones queden satisfechas”*.

Intuitivamente, nos indica que al tomar una muestra aleatoria de tamaño suficientemente elevado, la distribución de la media de dicha muestra- y de otros estadísticos, tales como la proporción o la mediana- puede aproximarse mediante una distribución normal, cuya media (valor esperado) precisamente coincide con el valor del parámetro que tratamos de estimar.

Mediante el teorema central del límite podemos obtener distribuciones aproximadas (asintóticas) de otras distribuciones tales como la binomial, Poisson, chi cuadrado, etc., mediante la consideración de la *suma de variables aleatorias*, ya que el

teorema se cumple, independientemente de la distribución de partida de la población. Se verá con más detalle en la evolución histórica de su significado institucional en estadística, Sección 2.3.

Desde el punto de vista didáctico en este teorema se reúnen *elementos diversos* cuya comprensión debe adquirir el estudiante antes de abordarlo, tales como: variable aleatoria, distribución normal, muestra aleatoria, estadístico, distribuciones muestrales, etc., lo que hace rico y complejo su estudio. Muchos alumnos tienen dificultad con el cálculo de probabilidades o incluso con el análisis matemático y, sin embargo, es necesario que adquieran comprensión y competencia en las diferentes distribuciones de probabilidad y en las nociones básicas de muestreo, ya que las dificultades de comprensión de estos conceptos influyen en los errores de aplicación de los procedimientos inferenciales, tales como la estimación por intervalos o los contrastes de hipótesis (Vallecillos, 1996, 1999). Por lo tanto tenemos que buscar medios didácticos que los hagan asequibles a los alumnos.

La comprensión del teorema central del límite y su implicación sobre las distribuciones muestrales es un tema en el que se han descrito dificultades por parte de los estudiantes quienes no perciben el efecto del tamaño de la muestra en la variabilidad (Méndez, 1991; Rubin, Bruce y Tenney, 1991) o no comprenden que la esperanza matemática de las distribuciones muestrales depende del valor del parámetro desconocido en la población (Vallecillos, 1996, 1999). Por otro lado, el uso de la tecnología no siempre produce una comprensión efectiva de las distribuciones muestrales (delMas, Garfield y Chance, 1998, 1999).

### **1.3.2. IMPORTANCIA DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE EN LA INGENIERÍA Y OTRAS ÁREAS**

En muchas situaciones prácticas de la *ingeniería*, las ciencias exactas y la economía, se considera que una variable aleatoria representa la suma de un número considerable de variables aleatorias independientes (cuyas distribuciones particulares pueden ser arbitrarias o incluso desconocidas). Pero, gracias a este teorema, se acepta que la variable aleatoria que resulta de sumar todas estas variables se aproxima mediante la distribución normal. A modo de ejemplo se citan los siguientes (Wisniewski y Velasco, 2001):

- a. Imagínese el caso del consumo de energía eléctrica por cada familia. Es evidente

que la mayoría de las familias consumen electricidad de manera desordenada y aleatoria. Así, para cada familia  $k$ , puede haber una variable aleatoria  $X_k$  que rija el consumo particular de energía eléctrica, con su distribución de probabilidad y parámetros (media y varianza) respectivos. Distintas familias pueden consumir energía eléctrica de modo muy diferente y con diferentes distribuciones de probabilidad. Sin embargo, gracias al teorema central del límite, se puede asegurar que la cantidad total de energía eléctrica consumida en una ciudad o una zona de esta, producto de la suma total de las contribuciones individuales de numerosas familias, puede aproximarse mediante una distribución normal. Lo mismo ocurre en otras situaciones como el consumo de agua o gas doméstico.

- b. Pequeñas partículas de polvo suspendidas en un líquido que está en reposo son objeto de movimientos aparentemente aleatorios (movimiento browniano, cuya ley fue estudiada por Albert Einstein). El *movimiento browniano* es, en realidad, el resultado final de numerosos bombardeos de las moléculas del líquido (tan pequeñas que son invisibles aun bajo potentes microscopios), y cada molécula contribuye “con su grano de arena” a la suma resultante final del movimiento aleatorio de una partícula de polvo suspendida, que es la resultante vectorial de todas las contribuciones individuales de los desplazamientos aleatorios de cada molécula.
- c. Cabe señalar, que una característica de los *errores de medición*, cuando una cantidad es la suma de un gran número de contribuciones pequeñas, consiste en que la contribución individual de cada término es despreciable, y la probabilidad de que cualquier error en una medición individual pueda afectar a la suma resultante es prácticamente cero. El impacto que pueda tener el teorema central del límite en las ciencias de ingeniería, se basa precisamente en las distribuciones de probabilidad asociadas a la medición de datos ingenieriles, como por ejemplo: tiempo de falla, tasas de falla, proporciones de defectuosos, flujos eléctricos, resistencia de materiales, ancho de banda para comunicaciones, diámetros de árboles, oscilaciones de temperaturas de operación, etc.

Por otro lado, la mayor parte del uso moderno de la estadística en la ciencia y la ingeniería, se dirige más hacia la inferencia que a la descripción, en que la mayoría de las aplicaciones de la estadística, los datos disponibles consisten en una muestra. En la inferencia estadística lo que se desea hacer es tomar una decisión acerca de una población determinada. En particular, la comprensión de la unidad de distribuciones

muestrales, en que está presente el teorema central del límite, es fundamental en los procedimientos inferenciales de estimación puntual de parámetros, estimación por intervalos de confianza y la prueba de hipótesis. Por ejemplo, si en un lote de 5000 circuitos integrados contienen exactamente 50 circuitos defectuosos, al seleccionar una muestra de 100 dispositivos se espera un 1% de circuitos defectuosos, pero esta cantidad puede ser cero, dos o cinco por ciento, dependiendo de los dispositivos específicos contenidos en la muestra. Es así, como el proceso de muestreo -elemento importante en el teorema central del límite- introduce cierta variabilidad en los resultados observados en el sentido en que la proporción de unidades defectuosas puede cambiar de la proporción real de éstas.

#### **1.4. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

Las anteriores consideraciones conducen a mostrar interés por realizar una investigación específica sobre la enseñanza del teorema central del límite a ingenieros, en el contexto chileno. Una vez contextualizado este estudio, se procedió a delimitarlo y organizarlo en cuatro etapas, que son las empleadas por Tauber (2001) en su estudio sobre la distribución normal:

*Etapa 1. Análisis epistémico:* El fin de esta fase es fijar el *significado institucional de referencia*, que es la base del diseño de la secuencia didáctica. Este trabajo se centrará en la descripción del significado histórico del teorema central del límite y el que se presenta del teorema en los libros de estadística para ingenieros.

*Etapa 2. Selección de elementos de significados y diseño de una secuencia de enseñanza:* Se trata de seleccionar a partir del significado de referencia unos campos específicos de problemas, así como el resto de elementos de significado, además de unas configuraciones didácticas para abordarlos. También se fijarán los contextos particulares de aplicación, relacionados con áreas de interés para el alumno. Todo ello se secuenciará y enlazará convenientemente para producir un proceso del estudio del teorema central del límite que tenga en cuenta los estudiantes y el contexto en que se produce la enseñanza y en su caso, la forma en que se resuelven.

*Etapa 3. Determinación del significado institucional implementado:* Por medio de las observaciones de las sesiones de clase en estadística en relación al tema del teorema

central del límite, se describe la enseñanza tal y como es llevada a cabo. Asimismo se observan algunos posibles conflictos semióticos que los alumnos ponen de manifiesto en el transcurso de la enseñanza.

*Etapa 4. Evaluación del proceso de aprendizaje y significado personal de los alumnos:* Se caracterizan los elementos de significado puestos en juego por los alumnos, por medio del análisis de sus soluciones escritas a un cuestionario y algunos problemas y proyecto abierto, para describir el significado personal logrado y evaluar la comprensión de los alumnos sobre el teorema central del límite.

En síntesis, este trabajo permitirá avanzar desde un contexto de enseñanza - considerando criterios de idoneidad y la caracterización de la comprensión mostrada por estudiantes de ingeniería- a la planificación de un proceso de enseñanza-aprendizaje para el teorema central del límite. En lo que sigue se describen los objetivos de la investigación.

## **1.5. OBJETIVOS DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN**

Como se ha indicado, en esta memoria, se presentará un estudio sistemático del significado institucional pretendido e implementado sobre el teorema central del límite en un curso dirigido a estudiantes de ingeniería de segundo año que cursan Estadística. Asimismo se valora el significado personal adquirido por los estudiantes en un proceso de estudio y se determinan los criterios de idoneidad didáctica de dicho proceso.

El estudio se ha basado en el enfoque ontosemiótico desarrollado por Godino (Godino y Batanero, 1994, 1998a; Godino, 2002a; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) y parte del análisis previo de la evolución histórica del significado del teorema central del límite y de las investigaciones realizadas sobre este tema. En síntesis, este trabajo da continuidad a las investigaciones realizadas en la Universidad de Granada, en la línea de la educación estadística. Dentro del marco teórico citado los objetivos general y específicos son los siguientes:

### **Objetivo General**

*Diseñar y evaluar un proceso de estudio dirigido sobre el teorema central del límite a estudiantes de ingeniería que tenga en cuenta la evolución histórica del*

## Capítulo 1

*teorema, el contexto educativo, tipos de estudiantes y el marco teórico en que se basa la investigación.*

### **Objetivos Específicos**

Este objetivo general se descompone en los siguientes objetivos específicos:

*O1. Realizar un análisis epistemológico de la evolución histórica del teorema central del límite desde el punto de vista de su significado, identificando los diversos campos de problemas abordados, así como las diversas formulaciones (enunciados) del mismo.*

Este objetivo se desarrolla en el Capítulo 2 (Sección 2.3), donde se hace un análisis de la evolución histórica del teorema central del límite. Se comienza discutiendo los primeros campos de problemas, que parten de problemas prácticos, por ejemplo, la necesidad de Laplace por aproximar la distribución de la suma de errores y la búsqueda de aproximaciones para la distribución binomial. Se sigue con el razonamiento de Laplace, y el primer enunciado del teorema central del límite. A continuación se describen los progresivos campos de problemas y contribución de diferentes autores que tratan de generalizarlo y estudiar sus condiciones de validez y aplicaciones.

*O2. Describir el significado que se presenta del teorema central del límite en los libros de estadística para ingenieros, identificando los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos usualmente utilizados en la enseñanza a ingenieros en una muestra representativa de libros de texto destinados a estos estudiantes.*

En relación con este objetivo, en el Capítulo 4 se ha desarrollado un análisis de la aparición de los diferentes elementos de significados presentes en los 16 libros de textos específicos analizados. Se han identificado las diferentes categorías de los elementos de significado más comunes del teorema central del límite. Así también, se muestra la complejidad del teorema y sus múltiples conceptos relacionados, por medio de variados ejemplos y de las muchas definiciones y propiedades presentes en los textos.

*O3. Seleccionar los elementos de significados más adecuados a la construcción de*

*la propuesta didáctica, contextualizándolos en unos campos específicos de problemas con aplicación a la ingeniería y definiendo las configuraciones didácticas adecuadas para abordar su enseñanza. Secuenciar y organizar estos elementos y configuraciones en un proceso de estudio viable para la enseñanza del teorema central del límite a ingenieros y analizar esta propuesta con objeto de determinar el significado de referencia pretendido en el proceso de estudio.*

La propuesta didáctica construida se analiza en el Capítulo 5. En dicha propuesta se conjugaron varios factores, como la incorporación de las tres configuraciones epistémicas (manipulativa, algebraica y computacional), el tiempo estimado de ejecución de las lecciones, las exigencias del programa de la asignatura de estadística para ingenieros y de los conceptos previos requeridos que deben tenerse en cuenta. Con ello se determina el significado institucional de referencia pretendido.

*O4. Experimentar el proceso de estudio, observación del mismo y llevar a cabo una primera evaluación de su idoneidad, para los fines pretendidos.*

El proceso de estudio diseñado se experimentó dentro de un curso de estadística dirigido a ingenieros en su segundo año de estudios. Participaron en el estudio 134 estudiantes que habían seguido previamente un curso de Cálculo de Probabilidades, organizado en dos grupos. En el Capítulo 6 se hace una descripción resumida del proceso de observación de la experiencia de enseñanza, con un análisis más pormenorizado de algunas de las actividades llevadas a cabo, así como de evaluaciones parciales del aprendizaje realizadas al finalizar cada una de las tres lecciones. Como resultado se proporciona una descripción del significado institucional realmente implementado y se describen algunos de los conflictos semióticos observados, así como la forma en que fueron resueltos en el aula.

*O5. Evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado.*

En el Capítulo 7 se describen los resultados de varias evaluaciones llevadas a cabo con diferentes instrumentos, algunas de las cuáles sólo se realizan sobre una parte de los alumnos. Los instrumentos incluyen un cuestionario de opciones múltiples con justificación de algunas preguntas, dos problemas abiertos y un proyecto abierto de aplicación.

Los resultados de la evaluación sirven para analizar el aprendizaje logrado por los estudiantes en diversos elementos de significado del teorema y analizar las concordancias y diferencias entre el significado personal logrado y el significado institucional implementado. También permite dar una valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado.

## 1.6. HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

Una vez planteado un problema de investigación, los métodos para tratar de obtener respuestas al mismo dependerán de las ideas previas del investigador sobre lo que espera encontrar. Por tanto, se hace necesario exponer las hipótesis del trabajo y cómo han sido generadas a lo largo de la investigación.

En esta investigación se tomará el término hipótesis en el sentido que le atribuye Bunge (1985), quien denomina *hipótesis factual* a las proposiciones que se refieren a hechos no sujetos hasta el momento a experiencia y corregibles a la vista del nuevo conocimiento. Para el autor, esta hipótesis va más allá de la evidencia (datos) que trata de explicar para utilizarlos como evidencia en favor o en contra de las hipótesis. Otra característica es que las hipótesis no pueden quedar establecidas por una experiencia: los datos no pueden validar sino sólo refutar las hipótesis.

Refiriendo al autor se seguirán tres condiciones para formular las hipótesis: 1) Tienen que ser formalmente correctas y no vacías semánticamente; 2) Deben estar fundadas en el conocimiento previo o al menos ser compatibles con el cuerpo de conocimiento científico sobre el problema; 3) Deben ser empíricamente contrastables mediante los datos empíricos controlados por técnicas y teorías científicas.

Siguiendo estos supuestos, la investigación parte de una serie de hipótesis, en un principio definidas de forma difusa y que han ido configurándose y perfilándose a lo largo del trabajo. A continuación se describen estas hipótesis, que deben entenderse en el sentido de expectativas iniciales sobre los resultados del trabajo.

La lectura de los antecedentes de este trabajo, así como los resultados de otros trabajos planteados dentro del mismo marco teórico por otros profesores (en particular Tauber, 2001 y Cobo, 2003) indicaban la complejidad de los conceptos estadísticos. Las primeras hipótesis, que se plantean a continuación, aluden a que esta complejidad se presentaría en el significado institucional (histórico, de referencia, pretendido e implementado) sobre el teorema central del límite.

*H1: El significado del teorema central del límite tiene un carácter complejo, debido a la multiplicidad de elementos y su interrelación, y ha ido surgiendo lentamente a lo largo de la historia en un proceso complejo. Diversos campos de problemas dieron lugar a enunciados diferenciados del teorema.*

*H2: Asimismo, es complejo el significado del teorema central del límite presentado en los textos de estadística dirigido a ingenieros y se encontrarán una variedad de enfoques y aproximaciones. En relación a los campos de problemas, se evidenciarán nuevos campos de aplicación y faltarán los campos más complejos. Las herramientas para resolver los problemas serán de menor complejidad que las usadas en el estudio histórico, lo que conllevará una menor rigurosidad en las demostraciones del teorema.*

*H3: La introducción de tres configuraciones epistémicas (manipulativa, computacional y algebraica) permitirá introducir elementos originales en el significado de referencia pretendido en la investigación. En particular la introducción del ordenador permitirá variación en los campos de problemas, lenguaje y modos de argumentación.*

Estas hipótesis se justifican también por los resultados similares que sobre otros conceptos estadísticos y probabilísticos han sido obtenidos por Ortiz (1999) y Sánchez-Cobo (1999) en sus estudios sobre los libros de texto. Para tratar de analizarlas se llevó a cabo el estudio histórico (Capítulo 2) y de libros de texto (Capítulo 4).

Aunque se esperaba que tanto a lo largo de la enseñanza, como al finalizar la misma, los alumnos mostrasen una comprensión razonable de los diversos elementos de significado introducidos en la enseñanza, se suponía esperar también una variabilidad, tanto en alumnos como en contenidos comprendidos. Es decir, debido a la complejidad del significado institucional del teorema central del límite, se pensaba que esta complejidad se reflejaría en los significados personales de los estudiantes sobre el tema.

Además, aunque algunos autores (Méndez, 1991; delMas, Garfiel y Chance, 1999) han descrito dificultades específicas sobre el teorema central del límite, se partió del supuesto básico de que la rica variedad de los significados personales no ha sido suficientemente explorada en las investigaciones previas. A continuación se plantean estas ideas sobre el significado personal de los estudiantes en forma de hipótesis.

*H4: A lo largo de la enseñanza surgirán conflictos semióticos, algunos de los cuáles se harán explícitos a través de las preguntas de los estudiantes en clase o de las respuestas a actividades escritas. La gama de dificultades y conflictos planteados ampliará los resultados de las investigaciones previas sobre el teorema central del límite.*

*H5: Se espera también que una parte importante de estas dificultades y conflictos quede superada al finalizar la enseñanza y que los estudiantes usen correctamente un gran abanico de elementos de significado del teorema central del límite en sus respuestas a las tareas de evaluación, incluso en el caso en que no lleguen a una respuesta totalmente correcta.*

*H6: Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos al cuestionario, se espera describir tipologías de estudiantes que correspondan a significados personales diferenciados sobre el teorema central del límite.*

Para tratar de analizar estas hipótesis se llevó a cabo una experimentación del proceso de estudio, que se describe con detalle en el Capítulo 6. Asimismo se ha llevado a cabo una evaluación final del aprendizaje a partir de diversos instrumentos. Las técnicas de análisis de estos datos incluyen métodos cualitativos y cuantitativos, univariantes y multivariantes.

Finalmente, en el capítulo de conclusiones se vuelve sobre todas estas hipótesis para realizar una discusión de las mismas, en vista de los datos recogidos, y para ver en qué medida estos datos las apoyan o contradicen.

## **1.7. METODOLOGÍA DEL ESTUDIO**

### **1.7.1. INTRODUCCIÓN**

Puesto que la parte empírica de la investigación consta de diversas fases, la metodología se adapta a los objetivos específicos de cada una de ellas, a objeto de describir los distintos significados institucionales y personales del teorema central del límite en una institución particular, así como valorar los criterios de idoneidad del proceso de estudio implementado.

### **1.7.2. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE TEXTOS**

En esta fase de la investigación (Capítulo 4) y en correspondencia con los objetivos planteados, se seleccionarán los textos y capítulos relacionados directamente con el teorema, para luego realizar un análisis de contenido.

Como indica Weber (1985), el análisis de contenido es un tipo de medición aplicado a un texto, que se basa en la idea de que las unidades del texto pueden clasificarse en un número reducido de categorías. Sirve para efectuar inferencias mediante la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione y Matalón, 1991). Su objeto final es la búsqueda del significado, cuya percepción depende de la existencia de las señales y de las características de los significantes: *"Es un proceso complejo, seguramente el que más esfuerzo intelectual requiere de entre todas las técnicas de análisis de datos y es uno de los pocos campos de los comprendidos en las etapas finales del proceso de investigación en la que el investigador desempeña un papel individual y creativo"* (Fox, 1981, pp. 704).

Gil Flores (1994), señala que el dato es inseparable del proceso que lo registra y del modo en que se comunica, ya que el investigador no puede captar la realidad, sino lo que registra son las elaboraciones que hace de la misma. En el análisis de datos cualitativos intervienen la elaboración conceptual y el lenguaje en que se expresa la información, que es el resultado del modo en el que el investigador se acerca al problema e interacciona con el objeto de su estudio. En este caso, el acercamiento es desde el marco teórico, tratando de delimitar el significado de referencia para la investigación.

El análisis de contenido comienza por elegir la unidad de contenido a analizar. Luego se elaboran un conjunto de categorías, junto con un fundamento lógico que sirva para asignar las unidades a estas categorías (Fox, 1981; Weber, 1985). El proceso de análisis será inductivo, revisando en forma continua los capítulos relacionados con el tema, hasta llegar a establecer los resultados finales.

Teniendo en cuenta los objetivos planteados, se considera que al analizar el teorema central del límite en una muestra amplia y representativa de textos de estadística universitaria, esta arrojará una visión aproximada de lo que los alumnos reciben en la educación universitaria. Varios investigadores en la línea de didáctica de la probabilidad y estadística señalan la importancia de este recurso didáctico. Por ejemplo, según Ortiz (1996, 1999) un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y

## Capítulo 1

programas oficiales. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos, debiendo el profesor que los usa mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto. En Ortiz y cols. (2000) se muestran ejemplos de estos problemas en relación a la enseñanza de la probabilidad.

Tauber (2001) realizó una descripción del significado institucional de la distribución normal en los libros de texto universitarios, en el momento en que la incorporación del ordenador hace plantear una revisión de los textos. Su estudio, mediante el análisis de textos, muestra la complejidad sistémica de un concepto, trabajando sólo dos campos de problemas definidos en el significado de referencia.

Cobo (2003) describió los elementos de significado de las medidas de posición central en libros de textos de educación secundaria. Analizó una muestra de 22 libros que incluyen el tema, considerando 14 textos de 3º curso de E.S.O. y 8 libros de 4º curso de E.S.O. El análisis epistémico del tema, revela su complejidad, tanto en lo que respecta a la media, como a la mediana y la moda, en virtud de la gran cantidad y variedad de elementos de significado que intervienen, incluso en el nivel elemental, lo que implica que su estudio sea más complejo de lo que pueda parecer a simple vista.

La riqueza de esta metodología de análisis de textos, es que constituye una base para determinar la correspondencia entre el significado de un concepto estadístico entregado por el profesor y la comprensión del significado del concepto por parte del alumno. Lo anterior, lleva a realizar el análisis que se presenta en éste, que sigue el marco teórico y la pauta de Ortiz (1999), Tauber (2001) y Cobo (2003).

Para el análisis de los libros de texto, se seleccionarán aquellos capítulos en los que se trata el teorema central del límite, específicamente concerniente a las distribuciones muestrales, en los cuales están también los elementos previos de la comprensión del teorema. Los pasos a seguir en el análisis de contenido son los siguientes:

- Determinar los textos de estadística universitaria a analizar;
- Seleccionar los capítulos, mediante una lectura detallada de los que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas;
- Determinar los elementos de significados, a partir del análisis epistémico presentado en el Capítulo 2, como guía para establecer el significado del teorema

que se da en la institución universitaria;

- Elaborar tablas comparativas que recogen los elementos de significados en los distintos textos seleccionados;
- Análisis comparativo de contenido, entre lo que los autores de los libros seleccionados consideran más adecuado para este nivel educativo y el análisis del significado de referencia realizado en el Capítulo 2;
- Presentación de conclusiones, mediante el análisis descriptivo de la información obtenida.

En relación a la muestra de textos seleccionada se podrá obtener una visión general del contenido del teorema, que los autores consideran más adecuado para la enseñanza universitaria. El análisis se llevará a cabo con libros de texto universitario, que incluyen en unos de sus capítulos contenidos relativos al teorema central del límite. Los libros a analizar se presentan en la Sección 4.2 y se han considerados aquellos textos conocidos y utilizados entre los docentes universitarios y que aparecen en la bibliografía del programa de curso de probabilidad y estadística. Algunos libros son nuevos, de menor difusión, pero con un enfoque novedoso, que permitirán enriquecer el estudio del significado del teorema.

### **1.7.3. METODOLOGÍA DE LA EXPERIMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO**

Durante el segundo semestre del curso 2005 se llevó a cabo una experimentación del proceso de estudio que fue observado y posteriormente analizado. La metodología de esta parte de la investigación se encuadra en los métodos cualitativos y más particularmente en la observación participante, puesto que el investigador convive con los individuos que estudia y refleja sus actividades e interacciones en notas de campo que toma durante o inmediatamente después de los hechos (Goetz y Lecompte, 1988). En esta experiencia hubo dos grupos de estudiantes. En uno de los grupos el investigador participó como observador; otro investigador participó como profesor y en el segundo al contrario. Los dos grupos fueron enseñados con el mismo material y método, proponiéndose las mismas actividades. La evaluación final se realizó en forma conjunta.

## **Población y muestra**

La población de interés en nuestro trabajo, son los alumnos de ingeniería, y en particular en Chile. Son alumnos con un conocimiento variado de estadística, que han realizado un curso previo de Cálculo de Probabilidades, así como cursos de Cálculo y Álgebra y conocen el uso de algunas aplicaciones informáticas, como la hoja Excel, etc.

Los grupos que participan en la investigación son 134 alumnos de la asignatura Estadística (sigla MAT 2203) en el curso del segundo semestre 2005 en la UCSC de Chile. Esta asignatura corresponde a un ramo de carácter mínimo y tiene como prerrequisito el curso de Probabilidades. Por tanto, los alumnos poseen conocimiento aceptable de cálculo de probabilidades de sucesos, variables aleatorias y de las distribuciones clásicas de probabilidades. Debe tenerse en cuenta que las carreras de Ingeniería en Acuicultura y Marítimo Portuario presentan características socio económicas y calificaciones de ingreso a la universidad bajo el promedio de las otras carreras de ingeniería.

Junto a lo señalado, conviene hacer explícito el reconocimiento y agradecimiento a todos los alumnos participantes por su colaboración e interés, así como por la buena voluntad para completar las actividades propuestas.

## **Instrumentos**

*Diario de observación.* Corresponde al método de observación (Fox, 1981) donde los datos pueden tomarse directamente porque son accesibles al investigador el cual fue elaborado durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza. El objetivo principal de realizar un diario de observación fue describir la enseñanza, tal como fue llevada a cabo, lo que permitió luego, comparar entre el significado institucional local previsto y el efectivamente observado, además de tomar nota de las dificultades planteadas por los alumnos, para poder interpretar mejor los datos recogidos por escrito de las actividades. No se usó guión estructurado de observación, pero al realizar las observaciones, se tuvieron en cuenta algunas de las recomendaciones dadas por Bisquerra (1989). Por ejemplo, se realizaron los registros en el campo e inmediatamente después de cada clase, se revisaron las notas de observación y agregó cualquier hecho que hubiera pasado inadvertido. Las notas de campo se tomaron lo más completas que fue posible, con el fin de cubrir todo lo que sucedía en la clase.

La observación se centró en recolectar todas las preguntas y dudas planteadas

por los alumnos tanto en el aula, como por el foro de la plataforma virtual, con el fin de detectar los elementos de significado que presentaban mayores dificultades. También, se detalló la manera en que se fue desarrollando cada clase, para poder comparar luego con lo que se tenía previsto y de esta manera poder determinar qué elementos de significado se habían trabajado, cuáles se habían dejado de lado o cuáles presentaron más dificultades.

*Informes escritos de actividades.* Al tratar de evaluar el significado personal de un alumno o de un grupo de alumnos, se ha de tener en cuenta que es un *constructo inobservable*, por lo que sus características deben ser inferidas de sus respuestas. Según Dane (1990) la medición se refiere al caso en que, por medio de las preguntas planteadas a los alumnos, se pretende obtener una estimación de conocimientos y capacidades de los sujetos, que no son accesibles por simple observación.

Como complemento de la observación de clases, se seleccionaron tres tipos de actividades para ser resueltas por los alumnos con papel y lápiz y el ordenador. El objetivo de recoger los informes escritos de diversas tareas era identificar los elementos de significado que los alumnos aplicaban en la resolución para poder luego comparar con el significado institucional local previsto y observado.

Las tareas teóricas y prácticas tenían el carácter de *muestras de trabajo*, según la terminología de Fox (1981), debido a que para resolverlas se requiere de una combinación de destrezas y conceptos que se necesitan para actuar en una situación determinada. La combinación de destrezas requeridas incluye el conocimiento estadístico y la capacidad argumentativa. Según este autor, la tarea debe ser un prototipo de una situación real, que en nuestro caso correspondería a la situación de análisis de datos a que estos alumnos pueden enfrentarse en su futura vida profesional.

Los datos del diario de observación se analizan cualitativamente, en forma narrativa. Los datos de las tareas escritas se analizan primero cualitativamente para categorizar las respuestas y luego se presentan los resultados globales en tablas de frecuencias.

#### **1.7.4. METODOLOGÍA DE LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE**

##### **Muestra participante e instrumentos**

La evaluación del aprendizaje se hace sobre la misma muestra de alumnos,

aunque no todos ellos responden a los diversos instrumentos, que son los siguientes:

1. Un *cuestionario*, el cual se implementa para analizar la comprensión de los elementos de significado del teorema central del límite y permite recoger en dos sesiones, datos relativos a una variedad de conocimientos de los alumnos, aunque con carácter más superficial. Es una prueba de tipo objetivo, ya que para cada pregunta podemos determinar si la respuesta es correcta o no. Participan en el mismo 134 alumnos. El instrumento construido se encuadra dentro de la teoría psicométrica de maestría de dominio (Martínez Arias, 1995), ya que podemos considerar que la puntuación total en la prueba está relacionada con el grado de maestría o habilidad de los sujetos en un dominio dado de conocimientos, en este caso, sobre el teorema.
2. Dos *problemas abiertos* (participan 134 y 106 estudiantes respectivamente) y un *proyecto personal* libre de aplicación del teorema central del límite (participan 83 estudiantes). Se trata de pruebas de ensayo con la que se evalúa un nivel de comprensión de datos de alto nivel (lectura más allá de los datos en la terminología de Curcio, 1989), y capacidad de argumentación de los alumnos. La tarea propuesta en el proyecto es totalmente abierta, también tiene el carácter de muestra de trabajo.

### **Análisis de datos**

El análisis de datos del cuestionario se realiza por diversos métodos. Una vez aplicado este instrumento, se presentan las tablas de frecuencia de resultados a los diferentes ítems, así como el estudio de las puntuaciones parciales y globales en el total del cuestionario.

Se realiza también un análisis cluster de estos mismos ítems con el fin de observar las agrupaciones de respuestas correctas/incorrectas en los diversos ítems (Afifi y Azen, 1980; Afifi y Clark, 1990; Peña, 2002). De ello se deduce la interrelación entre una serie de elementos de significado, que en líneas generales ha coincidido con lo esperado a nivel teórico. Asimismo, el análisis cluster de sujetos sirve para describir tres tipologías de estudiantes que se identifican como configuraciones cognitivas específicas en relación al significado personal sobre el teorema central del límite.

En relación con los dos problemas abiertos y el proyecto de aplicación, como primer paso se ha realizado un análisis a priori categorizando los elementos de significado previstos institucionalmente. Los datos obtenidos luego de aplicar la prueba se han sometido a un proceso de varios pasos:

- Se efectuó una primera lectura de los informes entregados por los alumnos, realizándose a partir de ella y del análisis previo, la definición de diversas variables estadísticas, que corresponden a los elementos de significado, que potencialmente era posible aplicar en cada pregunta.
- Se codificaron los datos de acuerdo a tres categorías para cada una de las variables: elemento aplicado en forma correcta, incorrecta y no aplicado.
- A partir de las tablas de datos obtenidas, se presentan tablas de frecuencias de los distintos elementos aplicados correcta e incorrectamente por el total de alumnos, discriminando los elementos de significado utilizados. Por medio de un estudio descriptivo, y del estudio de las diferencias entre el número de elementos (correcta e incorrectamente aplicados), se realizó la comparación entre el significado institucional local previsto y el personal construido por los alumnos del grupo.



## CAPÍTULO 2.

### FUNDAMENTOS DEL ESTUDIO

#### 2.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 1 se ha presentado la problemática internacional de acreditación de las carreras de ingeniería. Dentro de este contexto, el propósito a largo plazo es determinar qué *competencias* se favorecen en la enseñanza del teorema central del límite, así como también analizar la problemática didáctica de la *comprensión* del teorema en estudiantes universitarios.

Una de las ideas más aceptadas en la Educación Matemática es que los estudiantes deberían comprender las matemáticas. Al respecto, Sierpinska y Lerman (1996) se cuestionan: ¿Cómo enseñar de modo que los estudiantes comprendan?, ¿Qué es lo que no comprenden exactamente?, ¿Qué comprenden y cómo?

Godino (2002b) ayuda a discernir algunas características de las nociones cognitivas de competencia entendida como “saber hacer” y comprensión que implica saber qué hacer y por qué. Para dicho autor, la expresión “A es *competente* para realizar la tarea T”, indica que el sujeto A domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica t que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias, se dice que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que “conoce cómo hacer” la tarea. En cambio, la expresión, “A *comprende* la técnica t que permite realizar la tarea T” indica que A conoce por qué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas. Ambas nociones se complementan mutuamente; la competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento.

Siguiendo estas ideas en este capítulo se presentan los fundamentos de esta investigación. La perspectiva didáctica que se empleará está basada en el modelo teórico denominado “enfoque ontosemiótico” propuesto por Godino y sus colaboradores (Godino, 1999a y b, Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002a; Godino, Batanero y Roa,

2005). Este enfoque teórico proporciona una perspectiva pragmática-antropológica sobre el conocimiento matemático y propone tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: epistemológica, cognitiva e instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a), teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002a; Godino y Batanero, 2003; Godino, Batanero y Roa, 2005) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino Batanero y Font, 2007).

Para complementar los fundamentos del estudio, en segundo lugar se usará el marco teórico ya presentado para analizar la evolución histórica del teorema central del límite, a partir de los problemas que lo originaron, con el fin de identificar las dificultades surgidas hasta llegar a la etapa actual. La finalidad es mostrar que la expresión “teorema central del límite” puede tener distinto significado para diferentes personas o instituciones. Se mostrarán algunos problemas prácticos y luego teóricos que han llevado al enunciado del teorema central del límite, la identificación de los conceptos y propiedades relacionados con él y a la definición del lenguaje, procedimientos y argumentos necesarios en la resolución de problemas.

## 2.2. MARCO TEÓRICO

### 2.2.1. INTRODUCCIÓN

El enfoque onto-semiótico toma los siguientes supuestos como base:

- Las matemáticas constituyen un quehacer humano, que se orienta a dar respuesta a ciertas situaciones problemáticas internas o externas a la propia matemática. Los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.), surgen de esta actividad y evolucionan progresivamente.
- Las matemáticas se pueden ver como un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. Los sistemas de símbolos dados por la cultura no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental que modifican al propio sujeto que los utiliza como mediadores.
- La matemática es también un sistema conceptual lógicamente organizado. La organización lógica de los conceptos, los teoremas y las propiedades también

explica el gran número de problemas implicados en el aprendizaje de las matemáticas. Un sistema no se reduce a la suma de componentes aislados, porque lo que constituye un sistema son precisamente las interrelaciones entre sus componentes (Godino y Batanero, 1998b).

Una de las características de este modelo es que problematiza la naturaleza de un objeto matemático. Se parte del supuesto de que una misma expresión matemática designa entidades diversas. Esta modelización tiene en cuenta, entre otros, los siguientes supuestos:

- Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el contenido;
- Variedad de actos y procesos de interpretación;
- Múltiples contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan estos procesos.

Considerando la idea de Chevallard (1991), para definir el objeto como un emergente de un sistema de praxemas u objetos materiales ligados a las prácticas, los autores presentan el objeto matemático como un emergente de un sistema de prácticas. Se parte de la *situación-problema* como noción primitiva, considerándola como cualquier circunstancia en la que debe realizar actividades de matematización que incluye, según Freudenthal (1991) lo siguiente:

- Construir o buscar soluciones que no son inmediatamente accesibles;
- Inventar una simbolización adecuada para representar la situación y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas;
- Justificar las soluciones propuestas (validar o argumentar);
- Generalizar la solución a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Cuando una clase de situaciones-problemas comparten soluciones, procesos, etc., se considera que están agrupadas en un *campo de problemas*. El sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, para luego comunicar su solución a otras personas, validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas, de este modo está

realizando distintos tipos de *prácticas*. A partir de las nociones primitivas de *situación-problema*, *campo de problemas* y *práctica*, y con el fin de estudiar los procesos cognitivos y didácticos, se desarrollan las nociones derivadas de *prácticas significativas* y el *significado de un objeto*, para las cuales se postulan dos dimensiones interdependientes, una personal y otra institucional. De acuerdo con los autores, una práctica es significativa para una persona o para una institución, si cumple una función para resolver el problema, comunicar, validar o entender su solución. Las prácticas significativas están orientadas a un objetivo que implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona y las herramientas semióticas que mediatizan la acción (Godino y Batanero, 1994).

### **2.2.2. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL Y SIGNIFICADO PERSONAL DE UN OBJETO MATEMÁTICO**

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Puesto que se comparte la misma problemática, las prácticas sociales son compartidas, y suelen tener rasgos específicos, generalmente condicionados por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento, por lo que están ligadas a la institución, a cuya caracterización contribuyen.

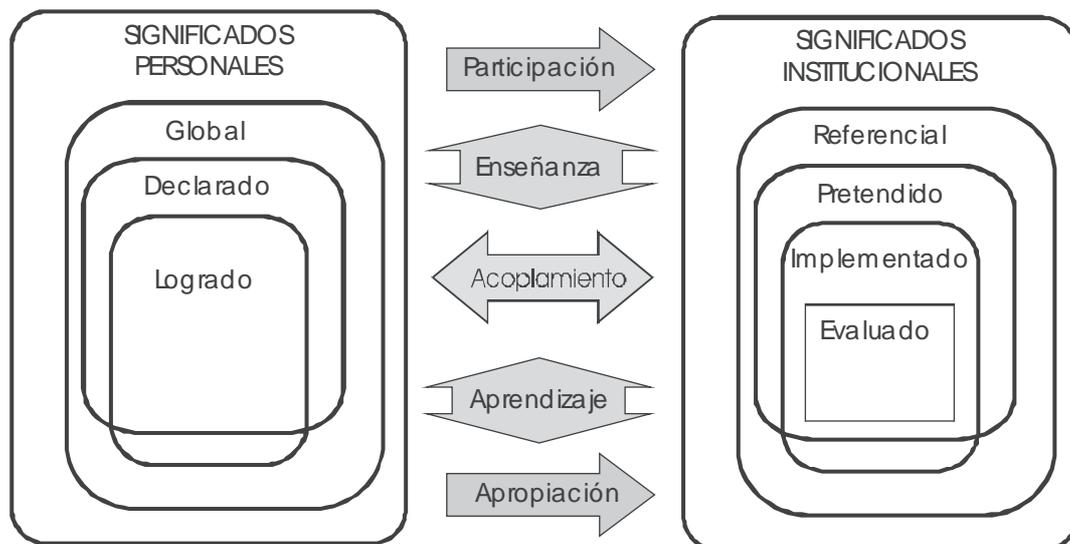
Particularmente, esta investigación se centrará en los campos de problemas asociados al teorema central del límite, como por ejemplo, encontrar la distribución en el muestreo de la media y de la proporción muestral para muestras de tamaño grande, así como su uso en la construcción de los intervalos de confianza y contrastes de hipótesis. Prácticas características de los problemas descritos serían realizar transformaciones algebraicas con las variables que intervienen o calcular la probabilidad que la media muestral tome un valor determinado en un intervalo dado, para muestras grandes. Algunas de ellas sólo son realizadas por probabilistas, estadísticos profesionales y otras pueden ser realizadas también por los alumnos.

Al considerar una institución escolar, como la educación universitaria, el significado construido por un estudiante particular sobre el teorema central del límite, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada, por lo que conviene distinguir entre significado institucional y significado personal de un objeto matemático.

- *El significado institucional* de un objeto matemático, es el compartido dentro de una institución.
- *El significado personal* es el que el alumno tiene inicialmente o es adquirido a lo largo del proceso de estudio.

El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Este proceso es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento el objeto matemático es reconocido como tal por la institución. Luego sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado. Este proceso de construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto. El aprendizaje es progresivo a lo largo de la vida del sujeto, como consecuencia de la experiencia y enseñanza recibida, y los objetos construidos son los constituyentes del conocimiento subjetivo.

**Figura 2.2.2.1.** Tipos de significados institucionales y personales



La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su uso en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la Figura 2.2.2.1 (Godino, 2002a, pp. 141). En la parte central de la figura se indican las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, que implica el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Asimismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de

prácticas que soporta los significados institucionales y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

En resumen, para los distintos objetos matemáticos se debe tener en cuenta las dimensiones epistemológica (institucional) y la cognitiva (personal). En particular, en este trabajo diferenciamos el *significado institucional de referencia*, que será definido a partir del análisis de libros de texto en el Capítulo 4, el *significado institucional pretendido* (descrito a partir del análisis del proceso de estudio diseñado en el Capítulo 5) y el *implementado* (que se deduce de la observación de la enseñanza en el Capítulo 6). Respecto al significado personal, se podrá diferenciar en el Capítulo 7 entre el *evaluado* (parte del significado que se evalúa con los diferentes instrumentos de evaluación), *declarado* (deducido de las respuestas de los estudiantes a estos instrumentos) y *logrado* (la parte del significado personal que está de acuerdo con el significado institucional implementado). Asimismo, se describirán las diferencias entre el significado institucional implementado y el significado personal de los estudiantes, es decir el conjunto de conflictos y dificultades manifestados por los mismos en el proceso de evaluación.

La diferenciación de significado institucional y personal de un objeto matemático permite establecer un punto de vista más completo la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los conocimientos del sujeto. Según Godino (1996b), la comprensión personal de un objeto es, en este modelo, la “apropiación” del significado institucional de dicho objeto.

Los procesos de instrucción matemática tienen como principal objetivo, para este autor, el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales. El sujeto debe apropiarse de los sistemas de prácticas compartidas en el seno de las instituciones de las que es miembro, pero también la institución tiene que adaptarse a las posibilidades cognitivas e intereses de sus miembros potenciales.

### **2.2.3. OBJETOS INTERVINIENTES Y EMERGENTES DE LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS**

En las prácticas matemáticas intervienen objetos matemáticos que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma escrita, oral, gráfica o incluso por gestos. También de los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que dan cuenta de su organización y estructura. Los objetos emergentes son “objetos institucionales” si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una

institución, y “personales” si corresponden a una persona<sup>1</sup>.

Los autores proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, que denominan “elementos del significado” (entendiendo aquí el significado en el sentido sistémico-pragmático) y que a su vez se organizan en sistemas conceptuales, teorías, etc.

- *Situaciones-problemas*: Situaciones fenomenológicas que originan actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones) de donde surge el objeto; a veces las podemos categorizar en “tipos” o “campos” de problema. Por ejemplo, para el teorema central del límite serían situaciones problemas la “búsqueda de una aproximación a la distribución binomial cuando  $n$  es grande” o “determinación de la distribución de la suma o la media de variables aleatorias”.
- *Lenguaje*: Representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática. Las notaciones, gráficos, palabras y otras representaciones del objeto que se pueden usar para referirnos a él. El lenguaje es esencial en la teoría del aprendizaje debido a su función comunicativa e instrumental, que modifica el propio sujeto que los utiliza como mediadores.
- *Procedimientos*: Modos de actuar ante situaciones o tareas (algoritmos, operaciones, reglas de cálculo). Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, o comunicar la solución a otras personas, validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas, etc., realiza distintos tipos de acciones que se llegan a algoritmizar.
- *Conceptos- definición*: (introducidos mediante definiciones o descripciones, por ejemplo: media, distribución muestral, ...). En caso que aborda este trabajo, y puesto que el objeto a estudiar es un teorema, se considerarán sus diversos enunciados en esta categoría, ya que se dan las descripciones del objeto. Se podría también incluir en esta categoría las definiciones de objetos ligados al teorema, como “distribución muestral”, “muestra”, etc. Pero, por limitar la investigación, ésta no se centra específicamente en ellas, aunque es posible en un momento dado referirse a alguno.
- *Proposiciones*: Se tratarán específicamente en este trabajo las propiedades

---

<sup>1</sup> En la idea de “objetos personales” los autores incluyen las concepciones, esquemas, representaciones internas, etc.

asociadas al teorema central del límite y objetos relacionados, que no se limitan a descripciones de dichos objetos sino los ponen en relación. Aparte del propio teorema (que se ha incluido en la categoría anterior), aparecerán propiedades tales como las referidas a la media o varianza de la suma de variables aleatorias o la corrección de continuidad.

- *Argumentos*: Finalmente, todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución. La forma usual de demostración en matemáticas es la deductiva, que es la más extendida en los libros universitarios. Este tipo de argumentación se completa o sustituye por otras como la búsqueda de contraejemplos, generalización, análisis y síntesis, simulaciones con ordenador, demostraciones, etc.

El modelo descrito es recursivo, ya que, según el nivel de análisis, cada unidad primaria puede estar compuesta por entidades de los restantes tipos. En este caso, el “objeto” de estudio es una proposición (el teorema central del límite), pero de todos modos pone en juego problemas, lenguaje, propiedades, procedimientos, enunciados y propiedades.

### **Configuraciones de objetos**

Los seis tipos de entidades primarias descritos anteriormente están relacionados entre sí formando *configuraciones*, que Godino, Contreras y Font (2006) definen como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

La constitución de estos objetos y configuraciones, tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante “secuencias de prácticas” que los autores interpretan como procesos matemáticos. La progresiva formación de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación.

En este trabajo se describirán tres *configuraciones epistémicas* utilizadas en la enseñanza para facilitar la comprensión de los estudiantes: manipulativa, computacional

y algebraica, que se diferenciarán especialmente por las herramientas (procedimientos y lenguajes) proporcionadas para resolver los problemas y que originan el uso de conceptos y propiedades específicas. También se mostrarán -aunque de un modo somero- *configuraciones cognitivas* diferenciadas en cuanto a los elementos de significado comprendidos por grupos de estudiantes como resultado de la evaluación (Capítulo 7).

#### **2.2.4. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIONES SEMIÓTICAS Y SUS TIPOS**

Los problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos no aparecen aislados en la actividad matemática, sino que se ponen en relación durante la misma. Para describir esta interacción Godino y Batanero (1998b) utilizan la noción de función de signo (dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí) y se refieren a la idea de *función semiótica*, que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

Con la función semiótica los autores quieren describir las correspondencias entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (contenido, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio de correspondencia durante la actividad matemática. Los cinco tipos de entidades considerados pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas. Las funciones semióticas y la ontología matemática introducida en el marco teórico descrito, tienen en cuenta la naturaleza relacional de las matemáticas y generalizan la noción de representación, que no queda asumido en exclusividad por el lenguaje.

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes, quedando los otros dos implícitos. El signo por tanto, no explicita la correspondencia entre expresión y contenido, sino que alguien debe hacer una posible *interpretación*. Cuando la interpretación que hace un alumno no está de acuerdo con lo

esperado desde la institución de enseñanza, se produce un *conflicto semiótico* que explica muchas de las dificultades y errores observados en el aprendizaje.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). Además, es preciso distinguir entre *significados elementales o sistémicos*, definiéndolos de la siguiente manera:

- *Significado elemental*: El contenido de la función semiótica, es un objeto preciso, determinable sin ambigüedad en las circunstancias espacio-temporales fijadas.
- *Significados sistémicos*: Cuando el contenido de la función semiótica es un sistema de prácticas (Godino y Batanero, 1994; 1998a). Este significado sistémico de un objeto matemático se concibe como una entidad compuesta y organizada (sistema), tiene un carácter teórico y trata de explicar la complejidad de los procesos didácticos, pero no puede ser descrito en su totalidad.

#### 2.2.5. EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN

Godino (1996a) sugiere que para analizar la comprensión es preciso responder a dos preguntas: *qué* comprender, y *cómo* lograr la comprensión. Su modelo de la comprensión tiene dos ejes: uno *descriptivo*, que indica los aspectos o componentes de los objetos a comprender, y otro *procesual* que indica las fases o niveles necesarios en el logro de la “buena” comprensión. Esta investigación se centrará principalmente en el eje descriptivo.

Godino (1996b) también recuerda que la comprensión personal es inobservable (sería un constructo, en términos psicológicos) mientras que el significado, como conjunto de prácticas, es por lo menos potencialmente observable. El autor concibe la evaluación como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. La evaluación de la comprensión de un sujeto tiene que ser relativizada a los contextos institucionales. Una institución dirá que un sujeto “comprende” el significado de un objeto si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas que configuran el significado de dicho objeto institucional, además de fundamentarlas y reflexionar sobre el proceso seguido.

Cuando se quiere caracterizar el significado de un objeto en una institución o

para una persona, las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. Por lo tanto, en esta investigación y siguiendo el marco teórico, se infiere la comprensión personal de los alumnos participantes sobre el teorema central del límite mediante el análisis de las respuestas (entendidas como prácticas), realizadas por la persona en la resolución de tareas problemáticas o ítems de evaluación propuestas.

#### **2.2.6. CRITERIOS DE IDONEIDAD DE UN PROCESO DE ESTUDIO**

Además de estudiar con detalle la comprensión adquirida por los estudiantes sobre los diferentes elementos de significado incluidos en el proceso de estudio, este trabajo se interesa por analizar el punto hasta el cuál el proceso de instrucción ha sido eficaz. Para ello se analizarán los criterios de idoneidad propuestos por Godino, Contreras y Font (2006).

- *Idoneidad epistémica*: Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia. Incluye también las conexiones o apertura hacia otras configuraciones epistémicas que constituyen la trayectoria correspondiente. Valoraremos este tipo de idoneidad, comparando el significado institucional implementado en el proceso de estudio, con el significado institucional de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: Expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente, la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. Se valorará comparando el significado personal evaluado en los alumnos con el significado institucional implementado.
- *Idoneidad semiótica*: Tiene en cuenta las posibilidades que ofrece una configuración didáctica para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados. Se puede deducir del análisis de la observación del proceso de estudio y del punto hasta el cuál se resuelven los conflictos semióticos presentados.
- *Idoneidad mediacional*: Es el grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad (Godino, Contreras y Font, 2006). Para aumentar esta idoneidad el proceso de estudio incorpora tres

configuraciones epistémicas: manipulativa, computacional y algebraica, para facilitar la comprensión progresiva y generalización del teorema. También se pone a disposición de los estudiantes el software @risk, materiales manipulativos y una plataforma de ayuda al estudio.

- *Idoneidad emocional*: Describe el grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Se aumentará contextualizando el proceso de estudio en situaciones del área de la ingeniería y se evaluará mediante una encuesta de opinión al finalizar el proceso.

## 2.3. EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE SU SIGNIFICADO EN ESTADÍSTICA

### 2.3.1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo al marco teórico de este trabajo, el significado de un objeto matemático no es único ni estable en el tiempo. En la actualidad conocemos como teorema (o teoremas) central del límite a una serie de resultados acerca del comportamiento de la distribución de la suma (o media) de variables aleatorias, cuya expresión más conocida es la siguiente:

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita  $\mu$  y varianza  $0 < \sigma^2 < \infty$ , entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \xrightarrow{\text{aprox}} N(0,1) \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{aprox}} N(0,1).$$

Aunque intuitivamente se puede comprender este teorema señalando que la media de una muestra de tamaño adecuado sigue aproximadamente una distribución normal, independientemente de la distribución original de la variable en la población, aun cuando no se ha llegado a esta comprensión intuitiva de una manera sencilla. Por otro lado, ni la demostración matemática del teorema central del límite es simple, a pesar de su utilidad y su uso generalizado en todas las aplicaciones de la estadística matemática, este uso es correcto.

En esta sección se inicia el estudio de la evolución histórica del teorema central

del límite a partir de los problemas que lo originaron y desde su primera forma simple a su formato actual, el cual servirá para identificar diferentes significados institucionales del teorema a lo largo de su desarrollo. Primeramente, se examinarán los inicios del teorema cuando la teoría de la probabilidad todavía no había sido considerada parte de la matemática rigurosa y se mostrarán las dificultades surgidas hasta llegar a la etapa actual.

Por consiguiente, se continuará la evolución del teorema a partir de los diferentes campos de problemas que lo originaron y las prácticas matemáticas que llevaron a la solución de los mismos, así como la contribución de diferentes matemáticos a su historia, que finaliza con la solución dada por Lévy, Feller y Cramer en el año 1930. La finalidad es identificar los diferentes campos de problemas, procedimientos y otros elementos que permitan mostrar la evolución del significado del teorema y comprender las dificultades posteriores en el aprendizaje de los alumnos.

Las notaciones que se ocuparán en adelante para un mejor seguimiento en las demostraciones del teorema son las siguientes:

$X_1, X_2, \dots$	: variables aleatorias (v.a.);
v. a. i.i.d.	: v. a. independientes e idénticamente distribuidas;
$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$	: suma de $n$ variables aleatorias;
$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$	: suma de $n$ varianzas, donde $X_i$ tiene varianza $\sigma_i^2 < \infty$ ;
$\varphi(t) = E(e^{itX})$	: función característica de $X$ ;
$X \sim B(n, p)$	: la v.a. $X$ tiene distribución binomial de parámetros $n$ y $p$ ;
$N(\mu, \sigma)$	: distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$ ;
$P(S_n = 0)$	: probabilidad que la suma de $n$ variables aleatorias sea cero;
$E(X_i) = 0$	: la esperanza o media de la v. a. $X_i$ es cero;
$E(X_i^k) < \infty$	: el momento de orden $k$ de la v. a. $X_i$ está acotado.

### 2.3.2. IDEAS PRECURSORAS. APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL POR LA NORMAL

Distintos autores han encontrado fórmulas de cálculo para la distribución binomial y otras distribuciones discretas, en las que intervienen los términos factoriales. Un problema es que, al aumentar el valor de  $n$ , estos términos crecen muy rápidamente, por lo que el cálculo de las probabilidades de los valores de la variable en la

distribuciones exactas es demasiado laborioso, incluso hoy día<sup>2</sup>. Mucho antes de la aparición de los ordenadores, este problema llevó a distintos matemáticos a tratar de encontrar valores aproximados de estas probabilidades para valores de  $n$  grandes y a estudiar las condiciones en que estas aproximaciones podrían utilizarse con un error acotado. Estos estudios inician el interés hacia los teoremas de límite y dan origen al primer campo de problemas relacionados con el mismo:

*CPI: ¿En qué condiciones y mediante qué funciones o distribuciones de probabilidad puede aproximarse la distribución binomial, cuando aumentamos progresivamente el valor de  $n$  (tamaño de una muestra)?*

Según Xiuyu (2003) la mayor contribución de De Moivre (1667-1754) en el desarrollo histórico del teorema central del límite es lo que llamamos hoy la aproximación a la distribución binomial por la normal. De Moivre primero publicó comentarios sobre este tópico en 1730 en su “Miscellanea Analytica”. Los resultados finales aparecieron en su “Doctrine of Chances” (1733), donde mostró (en notación moderna) que:

Sea  $X \sim B(n, p)$ ,  $P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ , entonces, para valores grandes de  $n$ ,  $X$  sigue una distribución aproximadamente normal  $N(\mu, \sigma)$  de media  $\mu = np$  y desviación típica  $\sigma = \sqrt{npq}$ ; es decir la variable  $Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$  sigue una distribución normal  $N(0,1)$ .

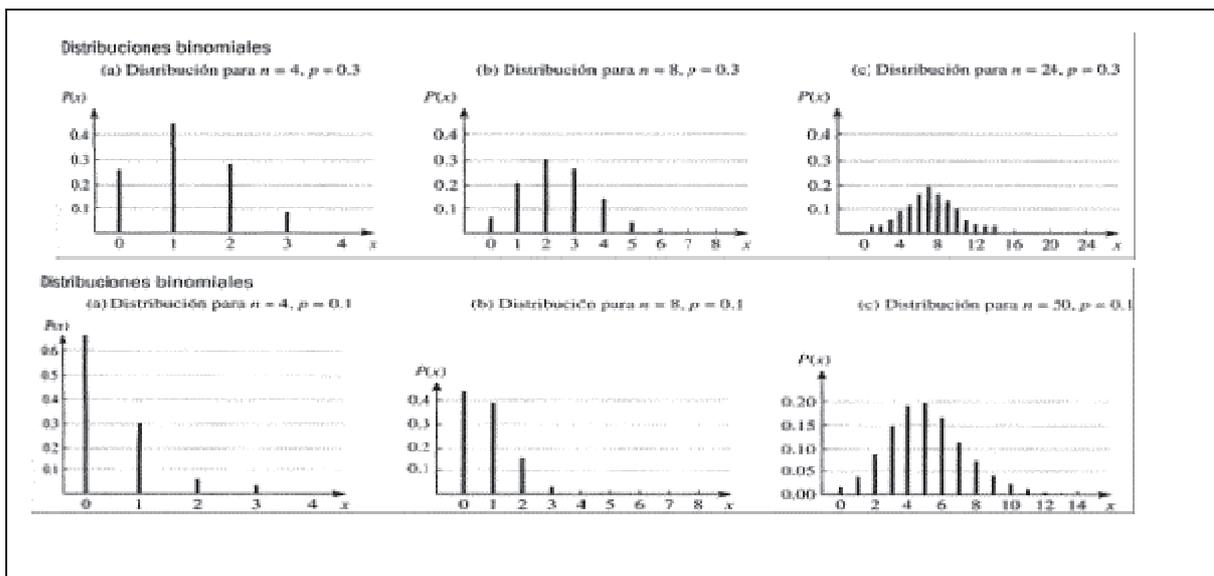
De Moivre investigó los límites de la distribución binomial cuando el número de ensayos aumenta, encontrando una relación con la función  $e^{-x^2}$ . Además, intentó determinar, para valores grandes del número de ensayos  $n$ , la probabilidad de ocurrencia del valor central  $\frac{n}{2}$  de una distribución binomial, aproximándola a la expresión  $\frac{2}{(k\sqrt{n})} \cdot \frac{1}{2n}$ . Stirling descubrió que  $k$  es igual a  $\sqrt{2\pi}$ . Hoy se sabe que la probabilidad del valor modal de la distribución binomial para dos acontecimientos igualmente probables,

---

<sup>2</sup> Aunque los ordenadores permitan hacer los cálculos en poco tiempo, el error puede llegar a ser grande, debido al número de operaciones y el error cometido en cada una de ellas por truncamiento.

es decir  $p = \frac{1}{2}$ , está dado en forma factorial y coincide con el encontrado por De Moivre: La probabilidad de  $x = n/2$  éxitos en  $n = 2x$  ensayos es  $\frac{(2x)!}{x!x!} \cdot \frac{1}{2^{2x}}$ . Esto se deduce, primero, aplicando la ley de los grandes números (Teorema de Bernoulli) a la frecuencia relativa de éxito  $X/n$ , que converge a la probabilidad de éxito  $p$ , cuando aumenta al número  $n$  de repeticiones; y reemplazando en la fórmula de la distribución Binomial  $n = 2x$  y  $p = \frac{1}{2}$ . De Moivre encontró el papel que desempeña la función  $e^{-x^2}$  como límite de la distribución, en principio no la relacionó con la distribución normal  $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2}$ , pero en la segunda edición de su libro introdujo la distribución normal como límite de la binomial.

**Figura 2.3.2.1.** Distribuciones de probabilidad binomial para diversos valores de sus parámetros



En el proceso de estudio se mostrará esta aproximación intuitivamente a los alumnos con figuras similares a la Figura 2.3.2.1, donde se presenta cómo la forma de la distribución binomial  $bin(n,p)$  para distintos valores de sus parámetros  $n$  y  $p$  se aproxima a la función de densidad normal. Por ejemplo, en la Figura 2.3.2.1 se muestran valores para  $p = 0,3$  con  $n = 4, 8, 24$  y para  $p = 0,1$  con  $n = 4, 8$  y  $50$ . Se puede justificar visualmente una primera intuición de la aproximación de De Moivre, aunque persiste el problema de cómo una distribución continua puede aproximar otra discreta y ello llevará a introducir la corrección de continuidad.

### 2.3.3. DISTRIBUCIÓN DE LA SUMA DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS IDÉNTICAMENTE DISTRIBUIDAS CON MEDIA Y VARIANZAS FINITAS

Debido a que la distribución binomial puede considerarse como la suma de variables aleatorias idénticamente distribuidas (la binomial  $B(n, p)$  es la suma de  $n$  variables aleatorias binomiales  $B(1, p)$  o variables de Bernoulli), la demostración que la distribución binomial se aproximaba mediante la distribución normal, es un caso particular de lo que sería posteriormente el teorema central del límite y llevó a varios matemáticos a tratar de generalizar este resultado para otros tipos de distribuciones llegando a un nuevo campo de problemas:

*CP2: Encontrar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas (o de la media de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas).*

Este campo era diferente del anterior y tenía una aplicación práctica inmediata pues, conocida la distribución de la media muestral, sería posible obtener estimaciones y realizar contrastes de hipótesis sobre la media poblacional. El interés de estas aplicaciones explica el número de matemáticos que se interesaron por la distribución de la media o de la suma. Un primer caso de este problema sería aquél en que las variables fueran uniformes discretas (CP2.1).

El trabajo probabilístico de Laplace sobre la suma de variables aleatorias jugó un rol importante en el desarrollo del teorema desde un comienzo. Ya en uno de sus primeros artículos de 1776, estuvo trabajando en calcular distribuciones de probabilidad de la suma de ángulos de inclinación de meteoros. Afrontó el problema de la desviación entre la media aritmética de los datos (obtenido con errores observacionales) y los valores teóricos, suponiendo que todos estos ángulos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución rectangular entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Puesto que la distribución de la media es equivalente a la de la suma (excepto un factor constante, que es el valor  $n$  por el que se divide), el problema se centró en hallar la distribución de la suma de los datos, todos los cuales tienen la misma distribución y son independientes. Debido a la considerable elevación de cuerpos celestiales, no fue capaz de representar un cálculo exacto y así necesitó de una aproximación (Fisher, 2000). Fue en el proceso de encontrarla, que Laplace eventualmente, vino a formular otra versión del teorema central del límite.

Antes de 1810, la distribución de la media aritmética había sido estudiada por

muchas distribuciones de rango finito, con resultados de fórmulas complicadas por ejemplo, para una variable aleatoria discreta uniformemente distribuida entre los enteros  $-a$  y  $a$ , se obtuvo una suma de números combinatorios bastante compleja (véase Xiuyu, 2003, pp. 5). Fue necesario buscar aproximaciones más simples, que son cubiertas por el teorema central del límite de Laplace. Laplace logró su primer resultado en 1785, calculando una aproximación para  $P(S_n = 0)$  ( $S_n$  es la suma de los  $n$  posibles errores), y llegando a la siguiente aproximación:

$$P(S_n = 0) \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi na(a+1)}}$$

*CP2.2: Distribución de la suma de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas en el caso general.*

Laplace generalizó posteriormente, en el año 1809, el trabajo de De Moivre referido a la distribución binomial a la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas con media y varianza finita. En 1810 publicó una memoria, donde estableció y probó más formalmente la siguiente versión del teorema central del límite:

*Sea  $X$  una variable aleatoria valorada entera que toma valores enteros*

*$\{-a, \dots, 0, \dots, a\}$  con probabilidad  $P(X = x) = \binom{x}{2a}$ , entonces para una muestra*

*$n$  grande, la suma  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  está distribuida aproximadamente en forma*

*normal  $N(\mu, \sigma)$  de media  $n\mu$  y desviación típica  $\sqrt{n}\sigma$  siendo  $\mu, \sigma$  la media y desviación típica de la distribución de partida.*

Laplace dio una demostración “rigurosa” para el caso *discreto* del teorema central del límite usando la función característica  $\varphi(t) = E(e^{itX})$  que se desarrolla en serie de potencias hasta el segundo término e invierte para hallar a qué distribución corresponde (técnica de la probabilidad inversa). La idea principal de la demostración de Laplace para una distribución discreta arbitraria puede encontrarse en Fisher (2000).

Sea la probabilidad  $P(S_n - n\mu = x)$  para  $x$  menor que  $\sqrt{n}$ , siendo  $\mu$  la media

de la distribución de partida. Despreciando los términos de orden superiores a dos,

obtiene lo siguiente:  $P(S_n - n\mu = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2n\sigma^2}\right)$ . Esto significa que

$S_n - n\mu$  se aproxima asintóticamente a la distribución normal  $N(0, \sqrt{n}\sigma)$ . Laplace intentó argumentar dos generalizaciones, no logrando demostraciones rigurosas:

- Debido a que la distribución límite es independiente de  $a$  (sólo depende de  $a$  a través de la media y la varianza), el resultado es válido también para una *distribución discreta con rango infinito*, en el caso de que existan los momentos finitos (Podemos considerar este otro caso particular del campo de problemas CP2.3).
- Probó que los resultados también se cumplen para *variables aleatorias con distribución continua y acotada*. Se considerará esta argumentación como un nuevo campo de problemas (CP4) ya que se introducen nuevos conceptos como el de variable continua, función de densidad, etc. y se utilizan nuevas herramientas, como la integral. Primero, Laplace estudió la variable aleatoria discreta  $X$  que toma valores enteros muy grandes  $\{-a, \dots, 0, \dots, b\}$ ; con la probabilidad  $P(X = x)$  dada anteriormente, consideró la función de densidad de la variable continua de la forma  $f(x) = \left(\frac{x}{a+b}\right)$ , y la integral de esta función la trató como una suma.

Gauss derivó en 1809 la función de densidad normal  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$  en su trabajo “Teoría motus corporum celestium”. Su descubrimiento estuvo abierto a muchas críticas, sin embargo tuvo un impacto grande en Laplace. Stigler (1986) sugiere que no hay indicios que Laplace haya pensado en que esta función pudiese representar una función de densidad para una distribución de probabilidad, y debe haber encontrado el resultado en el trabajo de Gauss en 1810.

#### 2.3.4. SUMA DE VARIABLES NO IDÉNTICAMENTE DISTRIBUIDAS Y VARIABLES CONTINUAS

##### Contribución de Poisson

De todos los que aportaron al teorema central del límite en el siglo XIX, la contribución de Siméon Denis Poisson en dos artículos (publicados en 1824 y 1829) fue

la de mayor influencia entre los autores posteriores a Laplace. Tratando de probar que todos los procedimientos en el mundo físico están gobernados por leyes matemáticas claras, intentó suministrar un análisis matemático más exacto al teorema de Laplace. La contribución de Poisson al teorema central del límite fue doble (Fisher, 2000):

- Mejoró y generalizó la demostración de Laplace. Comienza estableciendo una demostración del teorema para variables independientes distribuidas idénticamente; primero para una suma de éstas y luego para una combinación lineal de ellas. Luego generalizó su demostración a la *suma de variables aleatorias con distribuciones diferentes*; este es otro paso nuevo (CP3). Tratando de probar esta generalización, en su demostración considera las variables continuas, las que dan origen a otro campo de problemas (CP4), cuyo bosquejo de demostración se describe a continuación.
- Discutió la validez del teorema central del límite, principalmente dando algunos contraejemplos. De este modo inicia un nuevo campo de problemas, esta vez estrictamente matemático que consistirá en *encontrar condiciones suficientes y necesarias para la validez del teorema central del límite* (CP6).

En su artículo de 1824, Poisson da una demostración más rigurosa del teorema central del límite para *variables continuas* (de este modo introduce el concepto de variable aleatoria continua). Se describe resultados generales (Mether, 2003) de la última parte del artículo de Poisson. Para una variable aleatoria  $X$ , que toma valores en el intervalo  $[a,b]$  con función de densidad continua  $f_i(x)$ , la versión de Poisson del teorema central del límite puede ser resumida de la siguiente forma:

*Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con funciones de densidad que se anulan fuera del intervalo  $[a, b]$ . Si la función característica está acotada para valores entre 0 y 1, entonces  $X_1 + \dots + X_n$  se distribuye aproximadamente como una normal  $N(\mu, \sigma)$ , siendo  $\mu = \sum E(X_i)$  y  $\sigma^2 = \sum E(X_i)$ . Esta aproximación es mejor cuando  $n$  es grande y los valores del intervalo donde se calcula la aproximación se aproximan a la media (Fisher, 2000).*

Poisson concibió el teorema central del límite como una herramienta en el cálculo de probabilidades clásicas, más que como un teorema matemático en sí mismo. En consecuencia, Poisson no formuló explícitamente condiciones de validez para el teorema. Parece claro desde el análisis de su demostración y de los ejemplos que utiliza, que él asumió que las varianzas de las componentes de la suma están acotadas para que la varianza de la suma sea de orden  $n$ . Aunque no indica explícitamente esta idea, sin embargo, discutió unos pocos contraejemplos donde el teorema central del límite no se cumple, ni tampoco la condición. Uno de estos ejemplos es la llamada variable distribuida Cauchy donde la densidad de probabilidad toma la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ que no puede aproximarse mediante una distribución normal.}$$

### **Contribución de Dirichlet y Bessel**

Dirichlet y Bessel siguieron principalmente los pasos de las demostraciones de Laplace y Poisson, pero introdujeron el llamado “factor de continuidad” en la demostración, para establecer el resultado de Poisson para valores arbitrarios de  $n$ . Siguieron caminos diferentes para lograr la demostración, pero la regla era la misma. Bessel además hizo notar que Poisson usó el mismo factor de continuidad, aunque en una forma ligeramente diferente, cuando estableció la fórmula para  $n=1$ .

*CP5: Encontrar estimaciones para el error cometido en las aproximaciones de las sumas de variables aleatorias mediante la distribución normal.*

Dirichlet fue el primero en intentar estimar el error de la aproximación, aunque no fue muy afortunado y su técnica fue diferente de la moderna. Dirichlet había estimado anteriormente los errores para otras aproximaciones no probabilísticas, y mostró que estas mismas técnicas pueden ser aplicadas para la teoría de probabilidad tan bien como lo habían sido para la matemática pura.

### **Contribución de Cauchy**

Cauchy fue uno de los primeros matemáticos que consideró seriamente la teoría de probabilidad como matemática pura. Contribuyó en diferentes campos de la matemática, y también encontró un nuevo camino para probar el teorema central del límite. Primero estableció una cota superior para la diferencia entre el valor exacto y la

aproximación y luego especificó condiciones para que esta cota tienda a cero.

Cauchy en su demostración usó la función característica para variables independientes e idénticamente distribuidas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con función de densidad simétrica y rango finito. Siguió la línea de la demostración de Poisson, pero consideró la distribución de la función  $\sum_{i=1}^n w_i x_i$  que aproxima asintóticamente a la distribución normal de media cero y varianza  $\sigma^2 \sum_{i=1}^n w_i$ , bajo la condición que la función lineal sea el mejor estimador lineal insesgado de un parámetro, es decir,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . Así, Cauchy encontró una cota superior y específica condiciones para esta cota cuando tiende a cero. (Hald, 1998).

### **2.3.5. DISTRIBUCIONES CON RANGO INFINITO**

Con la demostración de Cauchy finalizó el primer período (1810-1853) de desarrollo del teorema central del límite. La demostración presentada en este período fue insatisfactoria en tres aspectos (Hald, 1998):

- El teorema no fue probado para distribuciones de rango infinito.
- No se explicitaron las condiciones, en términos de los momentos, bajo el cual el teorema se cumple.
- La razón de convergencia para el teorema no fue estudiada.

Estos problemas fueron resueltos por matemáticos rusos, entre 1870 y 1910. Dos soluciones fueron dadas por Chebyshev y Markov, usando el “método de los momentos” y por Liapounov, usando la función característica. La demostración de Liapounov es considerada como la primera demostración “rigurosa”. En lo sucesivo, el tema se centrará en lo que sigue en los probabilistas Chebyshev, Markov y Liapounov, reconocidos en el grupo de la escuela de San Petersburgo por ser los que más han contribuido al teorema central del límite; aunque otros matemáticos rusos como Nekrosov y Sleshinsky se implicaron en el trabajo con el mismo problema (Seneta, 1984).

### **Contribución de Chebyshev y Markov**

El artículo de Chebyshev en 1887, usualmente es considerado el comienzo de la demostración rigurosa del teorema central del límite. En él estableció lo siguiente

(Seneta, 1984):

*Sean  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , variables aleatorias independientes con densidad de probabilidad dada. Si*

*i)  $E(X_i) = 0 \quad \forall i$ , la media de estas variables es cero y*

*ii)  $|E(X_i^k)| \leq C \quad \forall i, k \geq 2$  los momentos de orden superior a dos están acotados; entonces cuando  $n \rightarrow \infty$  la distribución de la suma es aproximadamente normal  $N(\mu, \sigma)$ , siendo  $\mu = \sum_{i=1}^n X_i$  y  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$ .*

En su demostración, la cual es incompleta, Chebyshev usó el “método de los momentos”, cuyos inicios fueron desarrollados por el autor citado. Este método fue más tarde simplificado y completado por Markov, quien también completó la demostración de Chebyshev del teorema central del límite. En 1898, después de la demostración de Chebyshev, Markov estableció que se necesitaba añadir una condición para que el teorema fuese correcto. Primero, propuso la condición de que la suma de varianzas esté uniformemente acotada en el origen. Después reemplazó la condición anterior por la de que las esperanzas  $E(X_n^2)$  estén acotadas cuando  $n$  tiende a infinito. Después de la demostración de Liapounov del teorema usando la función característica en 1901, Markov trabajó para lograr el mismo nivel de generalidad con el método de los momentos. Finalmente lo logró en 1913 cuando presentó un artículo que dio una demostración rigurosa del teorema central del límite bajo la condición de Liapounov y usando el método de los momentos.

### **Teorema de Liapounov**

Liapounov, un estudiante de Chebyshev, como Markov, con los cuales integra la escuela de San Petersburgo, consiguió introducir demostraciones rigurosas en la teoría de probabilidad. En su demostración del teorema central del límite, no siguió a Chebyshev y Markov en el uso del método de los momentos, sino que como Laplace usó la función característica. La demostración de Liapounov, publicada en 1901, es considerada la primera demostración completa del teorema, en la forma siguiente (Uspensky, 1937):

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con las siguientes propiedades:

$E(X_i) = 0 \quad \forall i$  y  $E|X_i|^k \leq \infty \quad \forall i, k \geq 2$ , entonces usando el teorema de continuidad y unicidad de la función característica concluyó que la distribución de la suma es aproximadamente normal.

En su demostración, usa un lema fundamental que es la clave a la simplicidad y rigurosidad de su demostración:

Sea  $S_n$  una variable que depende del entero  $n$ , con media 0 y varianza 1. Si la función característica de la variable  $S_n$  converge uniformemente a la función característica de la distribución normal en algún intervalo finito, entonces la función distribución de la variable  $S_n$  tiende uniformemente a la distribución normal.

Liapounov no separó explícitamente este lema fundamental de su demostración, en la que está contenido implícitamente. Algunos otros que contribuyeron al teorema central del límite como Linderberg y Lévy, usaron este lema en su mejora del teorema (Uspensky, 1937).

En este sentido es posible observar que en el período comentado se trabajó el teorema bajo el supuesto sólo de variables independientes, a diferencia del primer período cuyo supuesto eran variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Una aplicación de la demostración del teorema dada por Liapounov al caso de variables independientes e idénticamente distribuidas es la siguiente:

Sean  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita  $\mu$  y varianza  $0 < \sigma^2 < \infty$ , entonces

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \rightarrow N(0,1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

La demostración de este teorema utiliza la función característica y la expansión de Taylor (Ver Xiuyu, 2003, pp. 14, Parzen, 1987, pp. 474). También ver Meyer, 1992,

pp. 333, donde se demuestra mediante la función generadora de momentos.

### 2.3.6. ESTUDIO DE CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA EL TEOREMA (CP6)

El tercer y último capítulo en la historia del teorema central del límite de 1920 a 1937, comienza con la demostración de Linderberg y las demostraciones de Lévy y Feller que añadieron condiciones necesarias al teorema.

#### La Condición de Linderberg

El 1922, Linderberg publicó una demostración elemental del teorema central del límite que se aplica a vectores aleatorios. Su demostración fue la base de los trabajos de Lévy y Feller sobre el mismo problema. El teorema es el siguiente (Cam, 1986):

##### *Teorema (Condición de Linderberg)*

*Sean  $X_i$  variables aleatorias independientes con esperanza  $E(X_i)=0$  y varianzas  $\sigma_i^2$  finitas. Si los momentos de tercer orden están acotados, entonces la distribución de la suma se aproxima a la distribución normal.*

La condición anterior es llamada generalmente condición de Linderberg y su formulación matemática se puede ver en textos de teoría de la probabilidad (Shiryayev (1984, pp.326, Loève 1976, pp. 274). En textos de probabilidad moderna, este teorema es presentado usando la función característica, aunque Linderberg no la usó. En su demostración, encontró una cota para el  $\sup_x |F(x) - \Phi(x)|$ , donde  $\Phi(x)$  es la distribución de probabilidad normal, en términos del tercer momento. El método de demostración de Linderberg se olvidó en toda la primera mitad del siglo XX. Trotter en un artículo publicado en 1959 hizo muy popular el método de Linderberg, pero cuando el teorema límite comenzó a ser ampliado para espacios de dimensión infinita, la fuerza del método de Linderberg fue finalmente reconocida. Actualmente, la condición de Linderberg es usada en muchos casos donde la convergencia a la distribución normal es considerada con variables distribuidas no idénticamente. La fuerza del método de Linderberg está basada principalmente en dos puntos:

1. Puede ser aplicado en un contexto muy general.

2. Considera la razón de convergencia en el teorema límite.

Cabe señalar que el método de Linderberg no dio un orden óptimo de la razón de convergencia, para variables reales independientes e idénticamente distribuida con tercer momento finito para el orden  $n$  (Paulauskas, 1999). Linderberg dio una demostración rigurosa para la condición *suficiente* del teorema central del límite, sin embargo, no probó la condición *necesaria* del teorema. También, Poisson muestra, alrededor del año 1824, que la aproximación a la distribución normal no siempre se cumple para variables independientes arbitrarias. Esta carencia fue particularmente remediada por Lévy y Feller en 1935 y 1937.

### Teorema de Feller

Feller en un artículo publicado en 1935 entrega las condiciones necesarias y suficientes para el teorema central del límite, pero el resultado es algo limitado. Feller consideró en la convergencia normal de la suma, una secuencia infinita  $X_i$  de variables aleatorias independientes, y usó los segundos momentos finitos para cambiar orígenes y escala de valores de las sumas consecutivas de la forma  $\frac{1}{a_n}(\sum X_i - c_n)$ , a fin de evitar que tomen valores infinitos. Luego dio las condiciones de restricción para cada variable  $x_k/a_n$  que tiende a cero en probabilidad. Así Feller da, en ese sentido, una solución más amplia al teorema, pero desde que puso esta restricción y porque sólo trató la suma de normales, no puede ser considerada la solución final. Este teorema de Feller es frecuentemente llamado el “Teorema de Linderberg-Feller”, al usar la condición de Linderberg. La demostración puede verse en Shirayev (1984, pp. 332) y está basada en la estimación de las colas de las varianzas en términos del comportamiento de la función característica en el origen.

### Contribución de Lévy

Lévy probó la condición de Linderberg en 1925 usando la función característica (Cam, 1986), tratando en primer lugar el caso de segundos momentos infinitos y primeros momentos finitos o infinitos (CP2.3, que Laplace intento argumentar sin éxito). Publicó algunos artículos relacionados con el teorema central del límite entre los años 1925 y 1930, usando principalmente la función característica en su demostración. A partir de 1930, evitó usar la función característica y en su artículo de 1935,

presentado sólo unos pocos meses después del de Feller<sup>3</sup>, estableció algunas ideas relacionadas con el teorema central del límite (Cam, 1986):

- Dio las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas normales a la distribución normal.
- También dio las condiciones necesarias y suficientes para el caso general de sumas de variables aleatorias independientes.
- Por último, intentó dar las condiciones necesarias y suficientes para sumas de variables aleatorias dependientes, que aparecen en los procesos estocásticos tipo martingalas. Consideramos este caso el último campo de problemas (CP7) en la historia del teorema central del límite.

Lévy tuvo algunos problemas con la demostración del teorema central del límite para el caso de martingalas, que no fue completamente satisfactoria. Su demostración de la condición necesaria y suficiente para el caso general de variables independientes fue correcta, pero se basó en un lema hipotético, que no había sido probado todavía (como la demostración de Feller) y es el siguiente:

*“Si la suma  $S = X + Y$  de dos variables aleatorias independientes ( $X$  e  $Y$ ) tiene una distribución normal, entonces también lo son  $X$  e  $Y$ ”*

El año siguiente 1936, Cramer probó el lema (como un teorema), por lo que, con la ayuda de este teorema se muestra la validez del uso de sumas normales y de los teoremas de Lévy y Feller donde generalmente se aplica. En 1937, Feller y Lévy refinaron la demostración, después de usar el resultado de Crámer. El teorema central del límite fue así probado con las condiciones necesarias y suficientes (Cam, 1986) y se cierra el capítulo final de esta historia.

### 2.3.7. USO ACTUAL DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE EN ESTADÍSTICA

Desde el punto de vista de las aplicaciones de la teoría de probabilidades, dos son los principales casos en que se usa el teorema central del límite: *i*) las variables

---

<sup>3</sup> A pesar que el artículo trató el mismo problema, ambos autores negaron tener algún contacto previo.

aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas y *ii*) las variables aleatorias son independientes, pero no están idénticamente distribuidas (Parzen, 1987).

Hemos visto que la validez del teorema central del límite en condiciones bastante generales de las variables aleatorias fue conjetura de Laplace y Gauss a principios del siglo XIX. Sin embargo, las primeras condiciones satisfactorias de cumplimiento, apoyadas por una demostración rigurosa no llegan a alcanzarse hasta Lyapounov en 1901. En las décadas de 1920 y 1930 se utilizó el método de funciones características para extender el teorema en varias direcciones y obtener condiciones necesarias y suficientes bastante generales de su validez, en el caso en que las variables aleatorias son independientes.

En años más recientes, continúa el estudio de este teorema, que sigue inquietando a los matemáticos en su generalización, produciendo trabajos acerca de la extensión del teorema al caso de variables aleatorias dependientes (Ver Loève, 1976, para el estudio definitivo del teorema y sus extensiones).

### **Aplicaciones en inferencia estadística**

Es claro que las distribuciones muestrales forman el puente entre la probabilidad y la inferencia ya que se utilizan para obtener información acerca de la distribución de un estadístico (Vallecillos, 1996). Un resultado principal según Devore (2001) es el teorema central del límite, que es la base para muchos procedimientos inferenciales donde aparecen grandes tamaños de muestra.

En la inferencia estadística uno de los elementos importantes de estudio es la elección del tamaño adecuado de una muestra aleatoria de una población de interés. Además, el tamaño muestral es uno de los supuestos básicos en el análisis inferencial. Cuando la muestra no es lo suficientemente grande y además proviene de una distribución no-normal, es habitual emplear métodos inferenciales, como los no paramétricos o métodos exactos para las distribuciones de probabilidades clásicas. En el caso, en que para un tamaño de muestra suficientemente grande, aplicamos el teorema central del límite y se asume en una prueba una hipótesis para la media poblacional que el estimador de la media se distribuye normalmente.

Distintos temas de inferencia estadística, como pueden ser la estimación puntual, estimación por intervalos y las pruebas de hipótesis, hacen uso del teorema central del límite y su importancia es destacada en los campos de problemas obtenidos en la Sección 4.3, de donde surge la necesidad de uso del teorema. A continuación se ilustra

una aplicación típica del teorema central del límite en inferencia, para determinar valores razonables de la media poblacional; mediante el siguiente ejemplo obtenido de Walpole y cols. (1999, pp. 218). Sin el formalismo de las pruebas de hipótesis, se muestra la implicancia del teorema en los principios y la lógica que se utilizan en las pruebas de hipótesis. Este elemento es importante en la toma de decisión para los ingenieros.

---

Un importante proceso de fabricación produce partes de componentes cilíndricos para la industria automotriz. Es importante que el proceso produzca partes que tengan una media de 5 milímetros. El ingeniero involucrado hace la conjetura de que la media de la población es de 5,0 milímetros. Se lleva a cabo un experimento en el que 100 partes elaboradas por el proceso se seleccionan al azar y se mide el diámetro de cada una de ellas. Se sabe que la desviación estándar de la población es  $\sigma = 0,1$ . El experimento indica un diámetro promedio de la muestra  $\bar{X} = 5,027$  mm. Esta información de la muestra ¿parece apoyar o refutar la conjetura del ingeniero?

---

Si los datos apoyan o no la conjetura, depende de la probabilidad de que los datos similares a los que se obtuvieron en este experimento ( $\bar{X} = 5,027$ ) puedan ocurrir con facilidad cuando de hecho  $\mu = 5,0$ . Es decir, ¿qué tan probable es que se pueda obtener  $\bar{X} = 5,027$  con  $n = 100$  si la media de la población es  $\mu = 5,0$ ? Si la probabilidad es bastante baja, se puede argumentar que los datos no apoyan la conjetura de que  $\mu = 5,0$ .

En otras palabras, la pregunta concreta es, si  $\mu = 5,0$ , ¿Cuál es la probabilidad de que  $\bar{X}$  se desvíe a lo más en 0,027? En lenguaje simbólico, se pide calcular la probabilidad siguiente  $P(|\bar{X} - 5| \geq 0,027)$ . Como no se conoce la distribución inicial y el tamaño muestral es grande, se recurre al teorema central del límite estandarizando  $\bar{X}$ . Si la conjetura  $\mu = 5,0$  es cierta,  $\frac{\bar{X} - 5}{0,1/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$ . Así, el cálculo de la probabilidad nos

queda  $2P\left[\frac{\bar{X} - 5}{0,1/\sqrt{100}} \geq 2,7\right] = 2P[Z \geq 2,7] = 2(0,0035) = 0,007$ . Como conclusión, con apoyo

del teorema central del límite, es posible señalar que este experimento con  $\bar{X} = 5,027$  no proporciona evidencia que apoye la conjetura de que  $\mu = 5,0$ .

### Aplicaciones en ingeniería

Son múltiples las investigaciones experimentales en distintas áreas de la ingeniería que implican el empleo de datos experimentales y muestras aleatorias para

inferir el valor de un parámetro de una población que caracteriza un fenómeno de interés. Variados ejemplos de aplicación del teorema central del límite en el ámbito de la ingeniería, son dados en la Sección 1.3.2 de la importancia del teorema en ingeniería y otras áreas y en la Sección 4.3 referidos a los campos de problemas. Por ejemplo, en las ciencias forestales las funciones de densidad han sido ampliamente usadas para modelar la distribución de los diámetros de una superficie en un bosque o rodal. Se han desarrollado muchas aproximaciones para el desarrollo de dichos modelos, siendo las distribuciones Normal y de Weibull las más utilizadas (Reinolds y cols., 1988). En esta área son varias las aplicaciones del teorema central del límite:

1. Una de las más importantes es aquella para el desarrollo de los inventarios forestales, los cuales consisten en un muestreo de una superficie de un bosque, para poder determinar estimadores de los totales poblacionales sobre variables de interés para el manejo del bosque. Estas variables son generalmente estimadores de volúmenes, las cuales reflejan el valor económico del bosque. Habitualmente en los inventarios, la unidad muestral está definida como una parcela de una superficie determinada, en la cual se encuentra un número mínimo de árboles, cantidad que debe ser lo suficientemente grande para que se cumpla el teorema central del límite (alrededor de 40).
2. Otra aplicación importante es la referida a los ensayos experimentales instalados dentro de un bosque debido a que también necesitan un número mínimo de árboles dentro de cada réplica para que se cumpla el teorema central del límite.

Carrasco (2002) estudió el problema para determinar los tamaños muestrales mínimos en la aplicación del teorema central del límite, para poblaciones forestales que poseen distintas características de edad, manejo y condición edafoclimática. En su trabajo, describió un proceso de simulación seleccionando un rango de combinaciones de parámetros de la distribución de Weibull, para obtener los tamaños de muestra mínimo con el objetivo de realizar inferencias adecuadas con el menor número de muestras posibles a obtener de una población forestal. Los resultados generales de este estudio revelaron que no es necesario una muestra lo suficientemente grande (mayor de 30) para que se cumpla el teorema. Por lo tanto, el tamaño de muestra dependerá de la estructura del bosque y su relación con el parámetro de forma  $c$  de la distribución de Weibull. Además, cuando los valores de  $c$  son cercanos a 3,6 la distribución de Weibull

es similar en su forma a una distribución normal. Otros resultados son dados también para el caso de los bosques coetáneos:

- a. Cuando el bosque se encuentre recién establecido, el tamaño de muestra necesario para la correcta aplicación del teorema central del límite, puede ser tan pequeña como  $n = 5$ ;
- b. Cuando el bosque se encuentre en la fase de cierre de copas el tamaño de muestra mínimo deberá ser de  $n = 10$ ;
- c. Cuando el bosque se encuentre bajo la condición de cosecha, el tamaño de muestra mínimo deberá ser de  $n = 20$ ;
- d. Para los bosques heteroetáneos el tamaño de muestra mínimo necesario para la aplicación del teorema central del límite deberá ser superior a  $n = 60$ , un número mayor dependerá de la parametrización de la distribución de Weibull.

Aplicando estos resultados al uso de los inventarios forestales, los costos de estos pueden ser reducidos debido a que las unidades muestrales pueden ser de menor tamaño. En otro caso, se puede aumentar el número de unidades muestrales lo cual trae consigo una mejor estimación del total poblacional.

### 2.3.8. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO HISTÓRICO

El presente estudio ha mostrado cómo el teorema central del límite es uno de los más importantes en estadística matemática y teoría de la probabilidad, a través del interés mostrado por numerosos matemáticos célebres. La aplicación más conocida del teorema establece que si se cumplen algunas condiciones, entonces la *distribución de la media aritmética* de un número de variables aleatorias independientes se aproxima a la distribución normal según el número de variables crece indefinidamente. Es decir, no es necesario conocer la distribución actual de las variables. A medida que crece el número de variables, la suma de éstas pueden ser tratadas como una distribución normal. En la Tabla 2.3.8.1 se presenta un resumen cronológico de la evolución del teorema central del límite.

Tabla 2.3.8.1. Desarrollo histórico del teorema central del límite

Fechas	Campo de problema	Herramientas	Enunciados del teorema y propiedades
1713	CP1: Aproximación de ciertas distribuciones (e.g. binomial) para valores grandes de sus parámetros.	Paso al límite	<i>Pre-desarrollo</i>
1733			Teorema de Bernoulli (De Moivre)
1785	CP2: Suma de v.a. discretas independientes e idénticamente distribuidas.	Función característica (Laplace)	E4: teorema para v.a.i.i.d. discretas, caso uniforme (Laplace)
1809	CP2.1: v.a. uniforme discreta.	Desarrollo en serie	E4: teorema para v.a.i.i.d. discretas, caso de media y varianza acotadas (Laplace)
	CP2.2: v.a. discretas i.i.d., media y varianza acotadas.		Densidad normal (Inicio de teoría de los errores por Gauss y Laplace)
1824	CP3: Suma v.a. discretas independientes no idénticamente distribuidas.	Variable aleatoria	E5: teorema en forma general. Caso v.a. i. no i.d. (Poisson)
1853	CP4: Suma v.a. continuas.	Factor de discontinuidad de Dirichlet (Bessel) Función característica y teorema de la función inversa (Cauchy)	Caso v.a. continuas i.i.d. con densidad simétrica y rango finito (Cauchy)
1887	CP5: Estimaciones del error de aproximación.		E5: teorema en forma general. Variables aleatorias con rango infinito
1898	CP6: Condiciones de validez del teorema.		Comienzo de la demostración rigurosa (Chebychev) Condición necesaria para el teorema de Chebyshev (Markov)
1901		Función característica (Liapounov)	Condición de Liapounov (Liapounov, Markov)
1913		Método de los momentos (Markov)	
1922			Condiciones necesarias y suficientes.
1925			Teorema aplicado al espacio de Hilbert (Linderberg)
1935	CP7: Suma de variables aleatorias dependientes.		Condición de Linderberg (Lindeberg, Lévy)
1936	CP2.3: Teorema para v.a. con rango infinito.		Teorema para v.a. con rango infinito (Lévy) Condición necesaria y suficiente del teorema con resultado limitado (Feller)
1937			Lema de Feller (Feller, Cramer) Refinamiento de demostración (Feller- Lévy)

Se ha seguido de cerca la historia del teorema central del límite, identificando

## Capítulo 2

diferentes campos de problemas, que se pueden resumir de la forma siguiente:

CP1: Aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$

CP2: Distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas

- CP2.1: Variables con distribución uniforme discreta
- CP2.2: Variables discretas acotadas
- CP2.3: Variables discretas no acotadas

CP3: Distribución de la suma de variables aleatorias no idénticamente distribuidas

CP4: Distribución de la suma de variables aleatorias continuas

- CP4.1: Variables acotadas
- CP4.2: Variables con momentos acotados

CP5: Estimación del error de aproximación en el teorema central del límite

CP6: Búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para el teorema central del límite

CP7: Distribución de la suma de variables aleatorias dependientes.

En la Tabla 2.3.8.1, la primera columna muestra la evolución histórica de los campos de problemas. Se comienza discutiendo los primeros campos de problemas que parten de problemas prácticos por ejemplo, la necesidad de Laplace por aproximar la distribución de la suma de errores y la búsqueda de aproximaciones para la suma de variables aleatorias. Siguiendo así el razonamiento de Laplace, quién fue el primero en descubrir el teorema central del límite. Después muchos otros matemáticos contribuyeron al teorema, tratando de generalizarlo y originando campos de problemas cada vez más abstractos y ligados al método deductivo, propio de la matemática.

Poisson dio ejemplos de distribuciones que no pueden ser aproximadas por el teorema central del límite y como estableció una demostración más rigurosa para el caso continuo. Además, Dirichlet y Bessel probaron eventualmente el teorema de Poisson, y Cauchy define la primera cota superior para la diferencia entre la distribución de la suma y la distribución normal. Tras de esta primera etapa, los matemáticos rusos mostraron la primera demostración rigurosa del teorema. Primero Chebyshev y Markov con el método de los momentos, después Liapounov propuso la condición de Liapounov y usó la función característica en su demostración. Luego de los rusos, fue Linderberg quien dio la palabra final con relación a la condición suficiente de la propuesta de la

condición de Linderberg. No obstante, el caso no fue cerrado, Linderberg no probó la condición necesaria del teorema. Finalmente Feller y Lévy probaron la condición necesaria para el teorema que fue rigurosamente mostrada por Cramer, llegándose así a la forma en la que el teorema central del límite permanece hoy. La condición de Linderberg ha sido mejorada un poco (Cam, 1986) y el teorema central del límite ha dado las condiciones necesarias y suficientes para varias variables dependientes, pero los principios básicos de Linderberg, Lévy y Feller aún son usados.

Se tratará de relacionar estos resultados con la enseñanza actual del tema, analizando cuáles de los anteriores campos de problemas se presentan en los libros destinados a la formación de los ingenieros y si se trata de los primitivos campos ligados a las aplicaciones o, por el contrario, se presentará el teorema de una forma puramente matemática y descontextualizada. El objeto de interés es ver también si el orden de introducción es paralelo al desarrollo histórico y si las herramientas utilizadas en la resolución son nuevas (relativas a las usadas históricamente).

La segunda columna muestra algunas de las herramientas matemáticas (procedimientos y conceptos previos) empleadas para la demostración del teorema, la mayor parte de las cuáles no están al alcance de los estudiantes. Es por ello que un objetivo del diseño de este proceso de estudio será encontrar otras herramientas que permitan trabajar con el teorema central del límite a nivel de aplicación. Este trabajo no tendrá el nivel de formalidad que muestra el estudio histórico, pero permitirá a los estudiantes un grado de comprensión suficiente para las aplicaciones. Para determinarlas se partirá del estudio de libros de texto, que se describe en el Capítulo 4 y que mostrará la forma en que diferentes profesores abordan la enseñanza del teorema a ingenieros.

La última columna de la tabla muestra los resultados de los trabajos en relación al teorema central del límite, que consisten en sus diferentes enunciados, condiciones de validez y algunas propiedades relacionadas. Todos ellos serán también cotejados con el estudio de los libros de texto, para con ello, tomar decisiones sobre el significado institucional de referencia que servirá de base en el diseño del proceso de estudio.



## **CAPÍTULO 3.**

### **INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**

#### **3.1. INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se describirán las investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del teorema central del límite, usadas como marco de referencia para basar este trabajo. En lo que sigue se examinan y clasifican estos estudios, que han analizado los elementos importantes del teorema o su uso en inferencia estadística, centrándose principalmente en la comprensión de la distribución normal y sus propiedades, de las distribuciones muestrales y del efecto de la enseñanza basada en ordenador sobre dicha comprensión.

Este trabajo se ubica dentro del campo de investigación en Didáctica de la Matemática, específicamente en la línea de investigación de didáctica de la probabilidad y estadística. Los fundamentos para esta investigación han sido proporcionados por las investigaciones sobre enseñanza de la inferencia estadística de Vallecillos (1994), Behar (2001), Gallardo (2001), Moreno (2003), Olivo (2006), Olivo y cols. (2006) y principalmente de Tauber (2001), de la que esta investigación es continuación.

#### **3.2. INVESTIGACIONES SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**

##### **3.2.1. COMPRENSIÓN DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**

EL teorema central del límite es uno de los teoremas estadísticos más importantes, pero son escasas las investigaciones específicas sobre su enseñanza, aunque muchos autores han publicado sugerencias didácticas para facilitar su comprensión por ejemplo, usando simulaciones o gráficos (e.g., Stent y McAlevey, 1990; Glencross, 1988).

### Capítulo 3

En relación con la comprensión del teorema central del límite y los diversos conceptos y procedimientos implícitos en él, Méndez (1991) lleva a cabo una investigación con expertos y alumnos noveles. Su estudio tiene como propósito extraer datos fenomenológicos para representar las creencias que los sujetos tienen sobre los aspectos fundamentales del teorema, clasificar los errores más comunes y observar el alcance de las creencias de los alumnos reflejadas en la representación experta.

En primer lugar, realiza un análisis de 10 libros de estadística básica e identifica cuatro propiedades básicas que deben entenderse para poder lograr una comprensión sólida del teorema, que resume de la siguiente forma:

1. La media de la distribución muestral es igual a la media de la población, e igual a la media de una muestra cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito;
2. La varianza de la distribución muestral es menor que la de la población (cuando  $n > 1$ );
3. La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada a medida que se incrementa el tamaño muestral y es aproximadamente normal, independientemente de la forma de la distribución en la población;
4. La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión a medida que el tamaño muestral crece.

A partir de textos escritos por expertos matemáticos, representó el conjunto de conocimientos implícito en el teorema central del límite por medio de un mapa conceptual, utilizando las cuatro propiedades anteriores como base de un modelo mental de especialistas sobre el teorema. Este modelo lo usó para tener un marco a partir del cual investigar la comprensión del teorema, definiendo dos niveles de comprensión:

- El primer nivel está definido por las habilidades y conocimientos requeridos para resolver los ejercicios presentados en los libros de texto;
- El segundo nivel representa aspectos adicionales de conocimiento que generalmente no están incluidos en los libros de texto.

Estos dos niveles de comprensión se obtuvieron como resultado del análisis realizado a las respuestas de dos tests que el investigador entregó a los dos grupos seleccionados. Cada uno de los tests tenía la finalidad de elicitar razonamientos en

relación con conceptos que requieren diferentes niveles de interpretación. El test I, era un cuestionario con ítems de elección múltiple, con problemas clásicos extraídos de los libros de texto analizados previamente. El test II, presentaba 23 situaciones diferentes que estaban destinadas a explicitar el conocimiento declarativo y procedimental, diversas representaciones, diversas formas de abstracción y creencias de los participantes. Como segunda fase de la investigación se realizaron entrevistas clínicas a un grupo de alumnos que resolvieron los tests.

En el estudio se tomaron tres grupos de sujetos, según si eran principiantes, (separando los que tenían algún estudio previo de estadística y los que no lo tenían), o si eran expertos (estudiantes de doctorados en estadística y economía). El objetivo general de la investigación era observar cómo los sujetos comprenden o no el teorema central del límite, y en particular observar la comprensión de los cuatro puntos básicos descritos.

Los estudiantes que estaban realizando estudios de doctorado mostraron relativamente, una buena comprensión del teorema y de sus elementos implícitos, pero tal comprensión era excesivamente formal. Carecían de capacidad de expresión intuitiva y además, sus explicaciones eran correctas superficialmente, pero no mostraban una comprensión profunda. Generalmente intentaban dar explicaciones a sus respuestas basándose en los axiomas de probabilidad.

En general, ninguno de los grupos presentó demasiado conocimiento del uso del vocabulario técnico y además, los estudiantes de doctorado presentaban falta de conocimiento en la utilización de expresiones cualitativas. No se encontraron demasiadas diferencias en los otros dos grupos de estudiantes, quienes en su mayoría, usaban los datos disponibles sin tener en cuenta la población de la que provenían y sin considerar el tamaño de la muestra.

Tomando como base estas conclusiones, el autor recomienda que en un curso introductorio de estadística se tenga en cuenta la naturaleza de los materiales de aprendizaje, los conceptos y los procedimientos que se quieren enseñar. Esta investigación proporciona tres modelos de estudiantes típicos que debieran tenerse en cuenta a la hora de diseñar un curso.

Recomienda la utilización de datos para ayudar a los alumnos a observar los aspectos principales del teorema central del límite, así como la utilización de material manipulable como por ejemplo, simulación por medio del lanzamiento de dados, para crear representaciones de los procesos muestrales y de la distribución muestral de la

media. También sugiere el uso del ordenador para realizar simulaciones en las que el tamaño de muestra sea muy grande. Destaca la importancia de que el profesor sea consciente de los diversos niveles de comprensión que puedan adquirir sus alumnos. Aconseja además, que se propicie la comprensión intuitiva antes de conducir a los alumnos a un pensamiento más formal.

Afirma que los libros de texto generalmente se centran en el uso cuantitativo de los conceptos, sin considerar los aspectos cualitativos, lo que lleva a los alumnos a utilizar un lenguaje formal pero sin tener una comprensión profunda del concepto.

### 3.2.2. COMPRESIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES

En un curso introductorio de estadística, el estudio de las distribuciones muestrales se reduce a la distribución de la media, proporción y otros estadísticos, para el caso asintótico. Es decir, este estudio es generalmente una aplicación directa del teorema central del límite. En lo que sigue se analizan algunas investigaciones relacionadas con el tema.

#### **Variabilidad y representatividad muestral**

Como indica Moses (1992), la idea central de la inferencia es que una muestra proporciona "alguna" información sobre la población y de este modo aumenta el conocimiento sobre la misma. El autor indica que la inferencia estadística es una colección de métodos para aprender de la experiencia y su comprensión requiere el equilibrio adecuado entre dos ideas aparentemente antagónicas: *la representatividad muestral* y *la variabilidad muestral*. La representatividad implica que la muestra tendrá a menudo características similares a las de la población, si ha sido elegida con las precauciones adecuadas. La variabilidad indica el hecho de que no todas las muestras son iguales entre sí.

La heurística de la representatividad descrita por Kahneman, Slovic y Tversky (1982), consiste en tener en cuenta sólo uno de estos dos componentes, calculando la probabilidad de un suceso sólo sobre la base de la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. No se tiene en cuenta el tamaño de la muestra y la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. Estos autores hablan de la existencia de una "ley de los pequeños números", consistente en creer que las pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Este error puede tener

importantes consecuencias de cara a la investigación experimental, ya que los científicos que creen en la "ley de los pequeños números" sobreestiman la potencia de sus métodos estadísticos, subestiman la amplitud de sus intervalos de confianza y tienen unas expectativas injustificadas en la replicabilidad de experimentos realizados con pequeñas muestras. Esta heurística ha sido comprobada en muy diversos tipos de estudiantes (Sedlmeier y Gigerenzer, 1997).

Con objeto de estudiar las concepciones de los estudiantes sobre variabilidad y representatividad muestral Rubin, Bruce y Tenney (1991) entrevistaron a doce estudiantes del equivalente al último curso de Bachillerato que nunca habían recibido ningún curso sobre estadística. En la entrevista se preguntaban seis cuestiones abiertas sobre muestreo e inferencia estadística.

Encontraron que los estudiantes investigados, al construir una distribución muestral, estaban influenciados por la idea de la representatividad de la muestra. Las entrevistas evidencian que en la clase de matemáticas se subraya la representatividad muestral e induce en los estudiantes una concepción en la cual la muestra representativa, es la única que se obtiene si se muestrea correctamente o al menos en la mayoría de las ocasiones. Los estudiantes entrevistados subestimaron la frecuencia de valores muestrales cerca de la cola de la distribución y sobrestimaron la frecuencia de la muestra modal. En unas situaciones las respuestas estaban guiadas por la representatividad mientras que en otras el concepto de variabilidad muestral era más fuerte. El tamaño de la muestra no parece operar apropiadamente para separar las dos ideas. En definitiva, los estudiantes tenían modelos inconsistentes de la relación entre muestras y población, incluso en problemas simples sobre distribuciones binomiales.

### **Niveles de razonamiento sobre inferencia**

Moreno y Vallecillos (2001) y Moreno (2003) analizan la comprensión de la idea de muestra en estudiantes de secundaria, describiendo un modelo de niveles de comprensión, basado en la taxonomía SOLO, extendiendo y completando el trabajo de Watson y Moritz (2000) sobre muestreo. Definen cuatro niveles de razonamiento en relación a la inferencia, diferenciando en cada nivel el uso de los conceptos de población y muestra, proceso inferencial, tamaño de la muestra y tipos de muestreo. Un resumen del esquema de razonamiento en inferencia estadística (Vallecillos y Moreno, 2002) se presenta a continuación en la Tabla 3.2.2.1:

**Tabla 3.2.2.1.** Esquema de Razonamiento en Inferencia Estadística (ERIE)

Constructos	N1: Idiosincrásico	N2: De transición	N3: Cuantitativo	N4: Analítico
Población y muestra (PM)	Conceptos de población y muestra usuales. No identifica la población y ni la muestra. Confunde población y muestra	Concepto de población estadística. Población se identifica de tipo discreta. Identifica población o muestra en contexto concreto	Concepto de población estadística. Población de tipo discreta/continua. Identifica población y muestra sólo en ciertos contextos	Concepto de población estadística. Concepto de espacio muestral. Identifica completamente población y muestra y su relación
Proceso de inferencia (PI)	Criterio subjetivo. Concepción previa	Criterio subjetivo y/o numérico con errores. Concepción determinista	Criterio numérico informal. Concepción identidad	Criterio numérico y expresión formal. Concepción correcta
Tamaño de la muestra (TAM)	No reconoce características de variabilidad muestral. Indiferencia ante el tamaño de la muestra	Importancia de la variabilidad muestral. Interés en el tamaño muestral en algunos contextos	Reconoce la influencia del tamaño de la muestra en la estimación. Relaciona el tamaño de la muestra con la estimación en contextos numéricos	Valora la sensibilidad del tamaño de la muestra. Relaciona el tamaño de la muestra con la estimación en todos los contextos
Tipos de muestreo (TIM)	Concepto de muestreo. No encuentra diferencias entre los tipos de muestreo aleatorios. No reconoce las fuentes de sesgo	Métodos de muestreo aleatorios. Diferentes tipos de muestreo. Indican posibilidad de sesgos	Tipos de muestreo aleatorio. Diferentes tipos de muestreo aleatorio. Reconoce posibilidad de sesgos	Métodos de muestreo y estimación. Reconoce distintos métodos adecuados. Valoran sensibilidad en el sesgo

En este marco, para caracterizar y evaluar el razonamiento en inferencia estadística elemental definen un primer nivel preestructural llamado *idiosincrásico*, en el cual el pensamiento estadístico inferencial del aprendiz se centra en aspectos irrelevantes al identificar y relacionar la población con la muestra estudiada, realizar una inferencia estadística, identificar los sesgos introducidos por determinados procesos de muestreo o valorar la importancia del tamaño de la muestra. El estudiante emplea el modo de representación icónico mostrando un pensamiento intuitivo.

El segundo nivel *de transición* se caracteriza porque el alumno aborda la tarea centrándose en sólo un aspecto relevante de ella. Las respuestas se sitúan en el modo de representación icónico y el simbólico concreto y se espera que la respuesta del alumno incluya algún principio estadístico que utilizará para formular su conclusión. El estudiante empleará alguna característica estadística para identificar la población y la muestra estudiada, realizar una inferencia estadística, justificar la influencia del tamaño de la muestra, identificar distintos tipos de muestreo y reconocer sesgos en los diferentes muestreos.

A este nivel uniestructural, sigue el nivel *cuantitativo* donde los alumnos exhibirán las características del nivel multiestructural, empleando en la tarea generalmente el modo simbólico concreto y para centrarse en varios de sus aspectos relevantes. Esto no significa que integren los diferentes aspectos empleados para la resolución de la tarea.

Por último, en el cuarto nivel denominado *analítico*, las respuestas de los alumnos manifestarán las características del nivel relacional y funcionarían consistentemente en el modo simbólico concreto. Es decir, se esperarían respuestas que integren distintas partes o distintos aspectos entre sí de manera que el conjunto tenga una estructura coherente y con significado. La respuesta del alumno en este nivel sugerirá que identifica adecuadamente la población y la muestra objeto de estudio, justificará y reconocerá la influencia del tamaño de la muestra al realizar una inferencia estadística, diferenciará muestreos aleatorios de los no aleatorios y reconocerá los sesgos introducidos por estos.

En esta investigación, cuya población objetivo serán estudiantes universitarios con base de cálculo diferencial y cálculo de probabilidades, se considerarán los constructos de población / muestra y tamaño de la muestra en las distribuciones muestrales estando los estudiantes situados en los niveles de transición, cuantitativo y principalmente analítico. Así se ampliará el estudio de la inferencia estadística; donde la variabilidad de la suma o promedio de variables aleatorias se describe por la dispersión de su distribución de muestreo y estando determinada no tan solo por el tamaño de la muestra, sino además por la población de origen y la sensibilidad de sus parámetros.

Previo a la formalización del teorema, se utilizará la simulación para explorar la variabilidad de muestras estadísticas de una distribución de probabilidades. Se entenderá la población como un número finito de posibles resultados para alguna característica medible de interés y la población de estudio al conjunto de todos los entes a los cuales se pueden aplicar las conclusiones obtenidas de la estimación. Los instrumentos de evaluación que se aplicarán, permitirán caracterizar las dificultades que podrían establecerse acerca de parámetro y estadístico, valorar la naturaleza de la población, las habilidades previas de cuantificar la incertidumbre en las variables aleatorias y el estudio aproximado de las distribuciones muestrales de estadísticos clásicos.

### **Comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral**

Well, Pollatsek y Boyce (1990) realizaron una investigación con estudiantes de psicología sobre la comprensión de las distribuciones de la media en el muestreo, cuyo fin era identificar las razones que conducen a utilizar la heurística de la representatividad y los diversos juicios que realizan los sujetos al justificar sus respuestas. Puesto que la distribución de la media es asintóticamente normal, la comprensión de las distribuciones en el muestreo está también relacionada con la de la distribución normal; elementos importantes en la comprensión del teorema central del límite.

Dicha investigación estuvo compuesta de varios experimentos en los que recogieron datos con cuestionarios, recibiendo instrucción sólo en el tercero. En el primero se comparó el rendimiento de un mismo grupo de sujetos en relación con dos versiones de enunciados de problemas, cada una de las cuales presentaba dos variantes: una relacionada con el grado de exactitud con el que la población es representada por la distribución de las medias muestrales y la otra, en la que se debía realizar una estimación del porcentaje de que un determinado valor promedio sea mayor que  $X$  ( $X$  es un determinado valor para cada problema), es decir, en este caso se utilizaba la cola superior de la distribución muestral que es una distribución normal.

En el segundo experimento se presentó a los sujetos un mismo enunciado con tres versiones relacionadas con la estimación de porcentajes en una sola cola de la distribución muestral, en las dos colas y en el intervalo central. Además de seleccionar la respuesta correcta como en los dos experimentos anteriores, se pidió a los sujetos que expresaran las razones de su elección. La construcción de estos problemas se basó en las respuestas dadas por los alumnos en el primer experimento. Los resultados obtenidos para la estimación de porcentajes en el centro de la distribución fue mucho mejor que para las otras versiones, lo cual condujo a los investigadores a intentar obtener más información al respecto. En consecuencia, quitaron la versión relacionada con la exactitud y agregaron una versión relacionada con la estimación de porcentajes en ambas colas de la distribución (tercer experimento).

En el último experimento se adoptó una estrategia distinta, dándoles a los sujetos una breve instrucción sobre el concepto de distribuciones muestrales y pidiéndoles luego que explicaran sus razonamientos. Se pasó un pretest, en el que se le entregaba al sujeto una hoja con el enunciado de uno de los problemas. Una vez que el sujeto lo

resolvía, el entrevistador hacía una breve explicación en relación con la diferencia entre distribución muestral y poblacional, por último, el sujeto podía experimentar con el ordenador para luego expresar sus conclusiones. Los sujetos implicados fueron 114 estudiantes en el primer experimento, 151 estudiantes en el segundo, 120 estudiantes en el tercero y 27 sujetos del departamento de Psicología en el último.

Se concluye que los sujetos utilizan información del tamaño muestral en forma más apropiada cuando se les pregunta sobre la exactitud de las medias muestrales o sobre la región central de la distribución muestral que cuando se les pide información sobre las colas de las distribuciones muestrales. Esto sugiere que la variable más importante que influye en el éxito de la tarea es la similitud entre la media muestral y poblacional. En general, los sujetos parecen comprender que los promedios de muestras más grandes se acercan más a la media de la población, pero no comprenden las implicaciones de esto sobre la variabilidad de la media muestral. Esto sigue aconteciendo aún después de haberlos instruidos al respecto e incluso después de que los mismos sujetos han podido experimentar realizando simulaciones con ordenador.

### **Comprensión intuitiva del concepto de distribución muestral**

Con un enfoque diferente Saldanha y Thompson (2002) y Saldanha (2004) analizan las concepciones espontáneas de los estudiantes de secundaria sobre las distribuciones muestrales. Para ello se basan en experimentos realizados con el software probability simulator, que simula la extracción de secuencias de bolas de colores (blancas y negras).

Los investigadores piden en primer lugar, que los estudiantes extraigan muestras de 10 bolas de una población (la proporción de bolas blancas y negras es desconocida) y observen la variabilidad de la proporción en las diferentes muestras (por ejemplo, extrayendo 5 ó 10 muestras). Al comienzo del experimento la proporción de bolas blancas y negras en la población desconocida es  $\frac{1}{2}$ ; pero, debido a la fluctuación del muestreo, la proporción en la muestra puede variar. Los investigadores analizan si los estudiantes consideran o no inusual (raro) ciertos valores de la proporción muestral, bajo la hipótesis de equiprobabilidad en la composición de la población.

Posteriores experimentos tienen como fin que el alumno pase de considerar la proporción en una sola muestra, a considerar la proporción como variable aleatoria en las muestras y luego, el conjunto de proporciones muestrales como una distribución muestral. Se analizan las concepciones de los estudiantes y se observa como construyen

la idea de distribución muestral y conciben una distribución hipotética (como debieran ser estas distribuciones muestrales) en caso de equiprobabilidad. La última fase es tratar de hacer una inferencia sobre la composición de una nueva población, cuando se obtiene una distribución muestral empírica y no se conoce la composición de la población. Aunque muchos alumnos llegan a concebir que hay por ejemplo, “mayoría de blancas” si la distribución muestral es muy sesgada hacia las blancas, en algunos casos se observa una concepción multiplicativa que impide a los estudiantes razonar desde la distribución muestral al parámetro en la población.

### **Diversos niveles de concreción de un concepto en el estudio de la inferencia**

Un problema relacionado con la comprensión de la idea de distribución y en general de la inferencia, son según Schuyten (1991), los diversos niveles de concreción de un mismo concepto que se necesitan usar cuando se introduce el estudio de la inferencia estadística. Esta investigadora obtiene sus conclusiones a partir de su experiencia docente en cursos introductorios de estadística en psicología y educación, más que en una investigación planeada.

El alumno, en estadística descriptiva usa como unidad de análisis el sujeto (un elemento de la población). La media  $\bar{X}$  se refiere a una muestra de tales elementos y es un valor numérico constante, puesto que no se quiere extender los resultados más allá de dicha muestra.

En inferencia, se introduce la media teórica o esperanza matemática  $\mu$  de *la población concreta*, y la media  $\bar{X}$  de la muestra particular con la que se está trabajando, ya no se considera un único valor sino una variable aleatoria, un caso particular de otra población: la población de todas las posibles medias de todas las posibles muestras de tamaño dado que podríamos extraer de la población de interés. Por ello se considera la media de la muestra como un *estadístico* y la media de la población como un *parámetro*.

Al considerar la población de todas las medias, se cambia también la unidad de análisis, que ya no es el sujeto sino la muestra de tamaño dado. Se estudia la distribución muestral de todas estas medias, distribución que a su vez tiene una media o esperanza matemática:  $E(\bar{X})$ . Para el alumno diferenciar entre estos tres niveles de medias y las dos unidades de análisis supone una gran dificultad conceptual.

En su investigación Schuyten (1991) encuentra también la dificultad del uso de

un lenguaje formal, que no todos los estudiantes son capaces de comprender, constituyendo las fórmulas, en algunas oportunidades, un obstáculo insalvable para la comprensión de los conceptos estadísticos.

Los estudiantes no diferencian, en ocasiones, el conocimiento declarativo de un concepto del conocimiento procedimental, por lo que no comprenden que haya diversas fórmulas o procedimientos de cálculo para algunos estadísticos, como es el caso de la mediana. El uso de las tablas estadísticas, como las tablas de la distribución normal es también complicado, y en esta investigación alrededor de la cuarta parte de los estudiantes mostraron dificultades en su manejo. Los estudiantes no llegan a concebir la tabla como una función que puede ser usada en dos sentidos; directo para obtener una probabilidad dado un número e inverso o para obtener un número dada la probabilidad.

### **El papel de las distribuciones muestrales en el contraste de hipótesis**

Han sido varios los autores que han tratado de analizar los errores en la comprensión del contraste estadístico de hipótesis y se han centrado preferentemente en las dificultades sobre la interpretación del nivel de significación. Estos trabajos que se describen en Vallecillos (1994, 1996, 1998, 1999), Batanero (2000, 2006), Behar (2001) y Thomson, Saldaña y Liu (2004) han dado razones de tipo psicológico para la explicación de tales errores. También García (2002, 2007) y Díaz y de la Fuente (2004).

Utilizando el marco teórico sobre el significado de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994), la investigación de Vallecillos (1994) realiza un estudio epistemológico y matemático del contraste de hipótesis, relacionándolo con la problemática de la inducción en las ciencias empíricas y analizando hasta qué punto la inferencia estadística proporciona una solución a esta problemática. De este análisis teórico determina una serie de elementos de significado sobre el contraste estadístico de hipótesis, mostrando la complejidad conceptual del tema y la multitud de conceptos que el alumno debe integrar para lograr una comprensión completa del mismo. Uno de estos elementos es el de distribución muestral del estadístico.

Para realizar el estudio se confecciona un cuestionario de evaluación del significado personal construido por estudiantes del curso introductorio de estadística al finalizar el mismo. Después de varias muestras piloto se pasó el cuestionario a una muestra de 436 estudiantes universitarios de la Universidad de Granada en diversas especialidades. El cuestionario contiene ítems de opciones múltiples, ítems en los cuales el alumno debe justificar una respuesta, y problemas abiertos. El análisis cualitativo y

cuantitativo de las respuestas, incluyendo métodos multivariantes, como análisis factorial y análisis clúster, permitió determinar diferentes componentes en el significado que los alumnos atribuyen al contraste de hipótesis.

El trabajo se complementa con entrevistas clínicas a un grupo reducido de alumnos. Como consecuencia, se describen concepciones erróneas respecto al nivel de significación, hipótesis y la lógica global del proceso (Vallecillos, 1995). También se estudian las relaciones entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental de los estudiantes. Los errores detectados aparecen en todas las muestras de estudiantes, incluidos alumnos que cursan la licenciatura de matemáticas.

Uno de los factores determinados por Vallecillos se refiere a las relaciones entre el parámetro y el estadístico de contraste. Sobre este factor se observa la falta de comprensión de la variabilidad del estadístico en el muestreo y la confusión entre estadístico y parámetro. Así mismo se observa una falta de comprensión del papel que juega la distribución del estadístico en la determinación del nivel de significación y las regiones críticas y de aceptación.

En conclusión, observa las siguientes dificultades de comprensión en las distribuciones muestrales que se conectan con el tema de la distribución normal y por ende del teorema central del límite:

- Dificultad de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de las distribuciones asintóticas en el muestreo;
- Confusión entre estadístico y parámetro, lo que sugiere que los alumnos tienen dificultad en diferenciar entre los datos empíricos y el modelo que se usa para describirlos.

### **3.2.3. DISEÑO DE ENSEÑANZA DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE CON RECURSO DIDÁCTICO DEL ORDENADOR**

En la investigación de Lipson (1997), se trabajan las distribuciones muestrales con dos grupos de alumnos, uno de los cuales usa el programa *Minitab* y el otro un paquete diseñado por Rubin, llamado *Sampling Laboratory*.

Los estudiantes que participaron en esta investigación provenían de distintos cursos y algunos ya habían realizado cursos previos de estadística. La experiencia se llevó a cabo en tres sesiones de una hora. En la primera clase, de tipo tradicional, se introdujo las distribuciones en el muestreo, a partir de un ejercicio de muestreo

utilizando una caja con bolas blancas y rojas, obteniendo luego el histograma correspondiente. Luego, se dividió en forma aleatoria a los alumnos en los dos grupos que usarían cada programa. En las dos clases siguientes los alumnos debían realizar simulaciones con el ordenador para analizar distribuciones muestrales de diferentes tamaños de muestra y luego debían responder a determinadas cuestiones.

Al finalizar la clase introductoria, el investigador pidió a los estudiantes que realizaran un mapa conceptual basado en los siguientes términos: medidas de posición central, constante, distribución, estimación, distribución normal, población, parámetro poblacional, proporción de la población, muestra, distribución muestral, proporción muestral, estadístico muestral, variabilidad muestral, forma, dispersión y variable. Podían utilizar estos términos o agregar o quitar los que les parecieran. Al finalizar las sesiones con el ordenador se les pidió que revisaran sus mapas y si los consideraban pertinentes que los modificaran.

Para realizar el análisis de los mapas se clasificaron diversas proposiciones identificadas por expertos en el área, y luego se compararon las proposiciones observadas en ambos mapas conceptuales de tal manera que esto permitía observar si había habido evolución en el aprendizaje después del trabajo con el ordenador. No se encontraron grandes diferencias entre los estudiantes que habían trabajado con distintos programas, aunque los resultados mostraron que las actividades de simulación con el ordenador estaban asociadas con un desarrollo en la comprensión de muchos estudiantes. El análisis de los mapas conceptuales permitió al investigador observar que cada alumno construía un mapa conceptual exclusivo lo cual coincide con la teoría de que la comprensión es construida por el estudiante sobre la base de su propia estructura cognitiva, y no sólo con lo que haya recibido del profesor.

En delMas, Garfield, y Chance (1998) y Chance, Garfield y delMas (1999) se analiza el efecto de la simulación por ordenador en el desarrollo de la comprensión de las distribuciones muestrales. En la primera de estas investigaciones se plantea un modelo de evaluación basado en diversas teorías de procesamiento de información, teorías pedagógicas y diversas investigaciones relacionadas con el razonamiento estadístico. Dicho marco o modelo de evaluación / instrucción consta de los siguientes componentes:

### Capítulo 3

- Un pretest que evalúa el conocimiento previo requerido y las intuiciones que pueden afectar las interacciones de los estudiantes con la actividad planteada. Los resultados del pretest son usados como la base de discusiones con los estudiantes para clarificar concepciones erróneas que pueden interferir con el aprendizaje de la actividad;
- Un listado de objetivos de evaluación final que especifican el aprendizaje deseado y son usados para desarrollar la actividad de aprendizaje;
- Ítems de autoevaluación involucrados en las actividades de aprendizaje, mediante los que los estudiantes realizan y evalúan sus predicciones, para promover cambios conceptuales;
- Un postest de resultados deseados que evalúan los tipos correctos de razonamiento conceptual o los errores;
- Un postest que consta de ítems que podrían ser incluidos en un examen final del curso para evaluar la retención a largo plazo.

Los autores han realizado una investigación en la que trabajan con el micromundo *Sampling distributions*, diseñado específicamente para trabajar las distribuciones muestrales y una actividad basada en el modelo descrito, con el fin de evaluar la efectividad de las actividades planteadas por los investigadores. Las cuestiones básicas de esta investigación son: Identificar los problemas de aprendizaje, diseñar una técnica instruccional para mejorarlas, determinar si es o no efectiva y extraer consecuencias para continuar la investigación.

La experiencia se llevó a cabo en tres fases o versiones, en cada una de las cuales se iban modificando las actividades o el software para tratar de mejorar la comprensión de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales. En la primera versión se instruyó a los estudiantes sobre cómo crear una distribución muestral por medio del programa, de esta manera realizaron varias simulaciones para distintos tamaños de muestras y luego se les pidió estudiar las siguientes cuestiones:

- Relación entre tamaño muestral y dispersión de la distribución muestral;
- Determinar a partir de qué tamaño muestral los estadísticos de la distribución comienzan a estabilizarse;
- Analizar si los estadísticos obtenidos son buenos estimadores de los parámetros de la población;

- Estudiar si el comportamiento de los estadísticos de la distribución muestral, concuerda con lo previsto por el teorema central del límite.

Estas actividades son realizadas con poblaciones normales u otras con diversas formas, como U, asimétrica o uniforme. Las preguntas y actividades están organizadas de tal forma que dirijan la atención de los estudiantes hacia diversos puntos del teorema central del límite y que permitan evaluar sus hipótesis acerca del comportamiento de las distribuciones muestrales. Esta primera versión se administró a 79 estudiantes de un curso introductorio de estadística en una universidad privada y 22 estudiantes que habían tomado un curso previo de estadística básica.

Los instrumentos utilizados en esta primera versión fueron un pretest al iniciar la actividad con el ordenador y un post test al finalizarla. Cada test constaba de cinco problemas, en cada uno de los cuales se presentaba el gráfico de una distribución correspondiente a una población y cinco histogramas adicionales que representaban posibles distribuciones de medias muestrales para muestras aleatorias de una población particular. Estas cinco distribuciones muestrales representaban una distribución normal, una distribución asimétrica positiva y otra negativa, una distribución simétrica bimodal o trimodal y dos distribuciones irregulares. Los estudiantes debían seleccionar en cada problema cuál era el histograma que representaba a la distribución muestral correspondiente a la población, además de responder a otras preguntas. Los histogramas de las posibles distribuciones muestrales fueron diseñados de tal manera que los estudiantes pudieran mostrar diversos tipos de razonamientos correctos o erróneos. Las cuestiones realizadas en la actividad se obtuvieron de la fase piloto de la investigación.

Los resultados de la primera versión mostraron un cambio positivo del pretest al post test, pero un número significativo de alumnos parecía no comprender las implicaciones básicas del teorema central del límite. En consecuencia, los investigadores decidieron mejorar el software y realizar una segunda experiencia, en la que los estudiantes realizaron sus propias predicciones y las evaluaron usando el programa. De esta forma el pretest de la primera versión formó parte de la actividad con el ordenador. En la nueva actividad se hizo más énfasis en las comparaciones de la forma y la dispersión que en los parámetros y estadísticos, requiriendo que los estudiantes realizaran una comparación directa de sus predicciones en el pretest con las distribuciones muestrales producidas por medio del programa.

### Capítulo 3

En esta segunda versión participaron 149 estudiantes, 32 de los cuales asistían a una universidad privada, 94 habían tomado un curso introductorio de estadística y 13 habían tomado un curso en la Escuela de Educación. 141 dieron respuestas a todos los ítems del pretest y postest. Los investigadores concluyeron que había evidencia de diferentes tipos de razonamiento, en las respuestas de los alumnos clasificándolos de la siguiente forma:

- “*Razonamiento correcto*”: cuando los estudiantes eligen los dos histogramas correctos para el problema planteado;
- “*Buen razonamiento*”: cuando los estudiantes eligen para el mayor tamaño de muestra un histograma que se asemeja a la distribución normal y con menor variabilidad que el histograma elegido para el menor tamaño de muestra;
- “*Razonamiento de mayor a menor*”: cuando los estudiantes eligen un histograma con menos variabilidad para el mayor tamaño de muestra o un histograma con una variabilidad similar a la de la población, o ambos histogramas tienen la forma de la población;
- “*Razonamiento de menor a mayor*”: cuando los estudiantes eligen un histograma de variabilidad menor para el mayor tamaño muestral, es decir, cuando esperan que la distribución muestral más semejante a la población es la que tiene un menor tamaño muestral.

En una tercera versión del software se incluía un programa que permitiera visualizar la distribución y los estadísticos para cada muestra. Se modificó la actividad para potenciar este nuevo elemento del programa, de tal manera que la actividad de la segunda versión requería aproximadamente de una hora para su resolución y en la tercera versión se necesitaban dos horas.

La tercera versión fue administrada en un estudio piloto como parte del curso introductorio de estadística en la Universidad del Pacífico, a 31 estudiantes y en la Universidad de Minnesota a 24 estudiantes. En este caso, en el pretest se incluyeron cuestiones relacionadas con los conceptos que los investigadores consideraban como prerrequisitos para comprender las distribuciones muestrales tales como, lectura de gráficos, medidas de posición, variabilidad e identificación de formas comunes de distribuciones.

Como conclusiones generales, los autores destacan que la presentación de información en grandes cantidades no siempre conduce a una buena comprensión de las distribuciones muestrales, y que se debe confrontar a los estudiantes con sus concepciones erróneas para promover un mejor aprendizaje. Concluyen además que los estudiantes aprenden mejor cuando las actividades están estructuradas de tal manera que los ayude a evaluar la diferencia entre sus propias creencias sobre el azar y los resultados empíricos. Todas estas conclusiones las han publicado en los trabajos citados y otros posteriores (Chance, delMas y Garfield, 2004; delMas, Garfield y Chance, 2004, Garfield, delMas y Chance, 2004).

En resumen, los investigadores que han diseñado cursos para estudiar el efecto de la enseñanza basada en ordenador de las distribuciones muestrales han concluido que:

- a. No hay grandes diferencias en el aprendizaje de los alumnos que han usado diferentes programas. Esta conclusión permite usar en el trabajo futuro de intervención en el aula el paquete estadístico @RISK, que está a disposición de los alumnos en el laboratorio de informática de la UCSC;
- b. La simulación, en general, mejoró la comprensión de los estudiantes. Este resultado sugiere que es interesante usar la simulación como uno de los recursos didácticos dentro del curso futuro de intervención;
- c. Sin embargo, el ordenador añade nueva información en el aprendizaje y esto requiere un costo y esfuerzo añadido por parte de los estudiantes. Será necesario en consecuencia, evaluar el trabajo de los alumnos, tanto con métodos convencionales (cuestionarios) como con una prueba de ensayo en la que deben mostrar su capacidad de uso del ordenador.

#### **3.2.4. COMPRENSIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL**

En la revisión de investigaciones, existen muy pocas centradas en el estudio específico de la distribución normal. Una excepción es la investigación de Tauber (2001), quien aborda el estudio de la distribución normal desde una perspectiva didáctica, basado principalmente en un modelo propuesto por Godino (1999a), que presenta tres dimensiones: epistemológica, semiótica-cognitiva e instruccional, cada una de las cuales se apoyan respectivamente en la teoría de los significados institucionales y

personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a), teoría de las funciones semióticas (Godino, 1998) y teoría de las trayectorias didácticas (Godino, 1999b).

Este trabajo constituye uno de los antecedentes básicos de la investigación, en el sentido de que el teorema central del límite explica el uso generalizado de la distribución normal, comparte el mismo marco teórico y se interesa también por la comprensión de los alumnos universitarios sobre una de las proposiciones básicas en inferencia estadística (Los resultados han sido publicados en Batanero, Tauber y Meyer, 1999; Batanero, Tauber y Sánchez, 2001 y 2004 y Tauber, Batanero y Sánchez, 2005).

Las investigaciones del tema, según Tauber (2001), sugieren que son muchos los elementos del significado de la distribución normal que no han recibido todavía atención por parte de los investigadores y que se requiere un estudio sistemático de la problemática específica de la distribución normal tanto desde el punto de vista epistémico (análisis del concepto y su presentación en textos y en secuencias de enseñanza) como cognitivo (comprensión de los estudiantes, dificultades y errores).

El trabajo de Tauber (2001) es novedoso al abordar un estudio sistemático de la distribución normal, desde el punto de vista de la enseñanza y del aprendizaje. A continuación, se señalan las *aportaciones del estudio*:

1. Respecto a la enseñanza, una primera aportación es la descripción del significado institucional del tema en los libros de texto universitarios, sobre todo en un momento en que la incorporación del ordenador hace necesario plantear una revisión de los textos. El análisis puede servir de base para la construcción de secuencias de enseñanza o instrumentos de evaluación.
2. En segundo lugar, la autora diseñó una secuencia de enseñanza basada en el uso de ordenadores, no limitándose a seleccionar los elementos del significado institucional de referencia, sino también formulando problemas más realistas, incorporando los recursos gráficos y de cálculo que posibilita el ordenador y entremezclando actividades tradicionales, tales como exposición del profesor o resolución de problemas con papel y lápiz con otras basadas exclusivamente en el uso del ordenador. Esta secuencia de enseñanza puede ser útil para los profesores de los cursos universitarios de estadística y ser la base para el diseño de otras secuencias sobre contenidos estadísticos diferentes.

3. El análisis de la diferencia entre la secuencia diseñada y el significado institucional de referencia, así como el análisis de la secuencia de enseñanza tal como fue observada, proporciona también una información valiosa a los profesores, al permitirles prever las dificultades y posibilidades inducidas por la decisión de incorporar un ordenador en sus clases, así como al proporcionarles información sobre formas plausibles de trabajo con este recurso didáctico.
4. Se describen dificultades y errores en un tema en que la investigación previa es prácticamente inexistente. Asimismo, se describen las diferencias en la evaluación de dos tipos de alumnos: aquellos que tienen conocimientos previos de estadística, adquiridos en la educación secundaria o en cursos anteriores a la universidad y los que no los tienen. Esto es también importante al implementar objetivos realistas de aprendizaje para los dos tipos de alumnos.

### **3.3 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS**

En este capítulo se han descrito y clasificado las investigaciones relacionadas con la enseñanza del teorema central del límite y sus consecuencias, para elaborar el marco de referencia en el cual basar este trabajo. Se destacan para finalizar algunos puntos que tendremos presentes en el mismo.

Primero, las investigaciones previas han sido realizadas en un curso introductorio de estadística con estudiantes de psicología, economía y matemática, generalmente con estudiantes que no han tenido un curso previo de estadística en la universidad. En este contexto, se analizarán los errores en la comprensión del teorema central del límite en una asignatura de carácter mínimo, con estudiantes de ingeniería que tienen base sólida en matemática y de probabilidades.

Segundo, son escasas las investigaciones específicas sobre la enseñanza del teorema central del límite. Además, en las existentes, se ha analizado la comprensión de los alumnos tan sólo en elementos muy aislados del teorema, en particular, las dificultades de comprensión del efecto del tamaño muestral y la confusión entre los conceptos media muestral y población *v/s* parámetro y estadístico.

Por otro lado, Tauber (2001) en su estudio sobre la distribución normal, señala algunas limitaciones del mismo que apoyan la necesidad de la investigación que ahora se presentan:

### Capítulo 3

- a. El estudio de Tauber se hizo en una asignatura de libre configuración, en la cual los alumnos participantes tienen unas actitudes positivas hacia la materia, reforzadas por la novedad que para ellos supone el uso de la tecnología, que saben importante para su formación;
- b. No se ha avanzado en el uso de la distribución normal para la inferencia, por ejemplo en el trabajo con distribuciones muestrales o en contraste de hipótesis que es un tema abierto y que se intentará analizar en este trabajo.

En sus conclusiones Tauber realiza las siguientes sugerencias sobre futuras investigaciones, que se tratarán de seguir en este trabajo:

- a. *Estudio de la comprensión de la distribución normal dentro de la inferencia.* Tauber solamente trabajó con dos de los campos de problemas definidos en el significado de referencia y no tuvo en cuenta los campos de problema específicos del teorema central del límite. En consecuencia, se continuará su trabajo estudiando el significado del teorema central del límite en campos de problemas asociados con las distribuciones muestrales, incluyendo su aplicación a la construcción de intervalos de confianza y determinación del tamaño de la muestra.
- b. *Analizar el proceso de aprendizaje y el significado personal individual en relación al teorema central del límite.* La evaluación llevada a cabo por Tauber se ha efectuado a partir del análisis de las respuestas escritas de los alumnos a tareas realizadas en clase y en las evaluaciones finales con un cuestionario y una prueba de ensayo. Se pretende en este trabajo seguir la metodología de Tauber centrándonos en el teorema central del límite para complementar la información obtenida por la autora.

En resumen, la revisión de estas investigaciones permitirá abordar el estudio del aprendizaje del teorema central del límite en un proceso específico de estudio, desde un punto global y didáctico. Se compararán los resultados obtenidos con los de las investigaciones descritas y se señalarán las dificultades específicas en la comprensión del teorema. Finalmente se llevará a cabo un análisis de la idoneidad del proceso de estudio implementado.

## CAPÍTULO 4.

# SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Una vez introducidos los fundamentos del trabajo, se pasará a la primera etapa de la parte experimental del mismo, que se centra en el análisis del significado que del teorema central del límite se presenta en una muestra de libros universitarios. Con ello se continúa con el segundo objetivo específico, siguiendo la metodología y filosofía de análisis de otros trabajos desarrollados en el grupo de investigación, en particular por Ortiz (1999), Sánchez-Cobo (1999), Tauber (2001), Cobo (2003) y Estepa y Moya (2007). Todos ellos señalan la importancia del libro de texto como recurso didáctico.

Como se ha indicado anteriormente, este capítulo será la base del posterior diseño del estudio sobre el teorema central del límite dirigido a ingenieros. Además, servirá para establecer el significado institucional de referencia del teorema en esta investigación ya que, según el marco teórico, el significado de un concepto matemático puede variar en distintas instituciones y por otro lado, tampoco el significado en una institución escolar, como por ejemplo, la enseñanza universitaria, tiene que corresponder exactamente con el atribuido por la de los matemáticos profesionales.

El objetivo de este capítulo es en consecuencia, describir el *significado institucional de referencia del teorema central del límite*, que servirá de pauta para diseñar el proceso de estudio, construcción de los instrumentos de evaluación y la interpretación de las respuestas de los alumnos en los sucesivos capítulos. En primer lugar, se selecciona una muestra amplia con distintos enfoques de textos de probabilidad y estadística dirigidos a ingenieros que incluyen el teorema. A continuación, se analiza el contenido del capítulo o capítulos relacionados con el teorema central del límite, clasificando los elementos de significados diferenciados y poniendo algunos ejemplos que ayuden al lector a comprender esta clasificación. Por último, se organiza la información en tablas para realizar una síntesis del significado del teorema central del

límite en los distintos textos analizados.

## **4.2. MUESTRA DE TEXTOS DE LIBROS UNIVERSITARIOS SELECCIONADOS**

Se sigue los pasos en el análisis de contenido del teorema, descrito en la Sección 1.7.2 de metodología del análisis de texto y se describe el significado del teorema de acuerdo al marco teórico. Se considerarán variados textos formales e introductorios de probabilidad y estadística, adecuados a la enseñanza de ingenieros, a objeto de contar con un espectro amplio del significado en cuestión. Así, el significado construido del teorema para esta investigación será el producto del análisis del conjunto de los contenidos en dichos libros, que engloba a todos ellos.

Los libros consultados se presentan en la Tabla 4.2.1 y se pueden clasificar en:

♠) Textos de estadística aplicada a la ingeniería; ☆) textos de probabilidad y estadística matemática; ♣) textos clásicos de probabilidad y estadística, por tener varias ediciones del libro y prestigio del autor; ☉) textos de estadística aplicada moderna, con un enfoque distinto a los demás; ☺) textos de estadística aplicada con énfasis en los ejercicios y problemas.

El análisis específico en los distintos elementos de significado del teorema, se llevará a cabo con 16 textos que están marcados con un código [N] en la Tabla 4.2.1, debido a que son los más consultados por los estudiantes de ingeniería y no requieren de un nivel avanzado de conocimiento en matemática; se advertirá que algunos campos de problemas del cual surge la idea del teorema central del límite no están al alcance de estudiantes de pregrado. Además, se han considerados textos de cada categoría de clasificación.

## **4.3. CAMPOS DE PROBLEMAS**

En primer lugar se analizará los campos diferenciados de problemas cuya resolución hace surgir la idea del teorema central del límite, partiendo del estudio histórico previo de la Sección 2.3. Estos campos de problemas llevan a la emergencia de los objetos matemáticos, como entidades culturales socialmente compartidas; ya que los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de dichos problemas. A continuación, se analizará la presencia en los libros de texto de los campos de problemas analizados en la Sección 2.3. Se referirá indistintamente a la distribución de la suma o la media de

variables aleatorias, pues son equivalentes salvo una constante.

**Tabla 4.2.1.** Libros de textos incluidos en el análisis

Nº	Título	Autores	Editorial	Edición
1	Introduction to the theory of statistics	A. Mood, F. Graybill, D. Boes	Mc Graw Hill	1974
2	Introducción a la teoría de la probabilidad y la inferencia	W. Feller	Limusa	1975
3	Probabilidade: um curso em nível intermediário	B. James	Euclides. Impa	1981
[4]	Estadística para ciencias e ingeniería	J. Kennedy, A. Neville	Harla	1982
5	Probabilidad e inferencia estadística	J. Kalbfleisch	AC, Madrid	1984
6	Tratamiento estadístico de datos	L. Lebart, A. Morineau, Fénélon	Marcombo, Boixareu	1985
[7]	Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones	E. Parzen	Limusa	1987
[8]	Probabilidad y estadística	M. De Groot	Addison-Wesley	1988
9	Estadística	J. Freund, R. Smith	Prentice Hall	1989
[10]	Probabilidad y aplicaciones estadística	P. Meyer	Addison-Wesley	1992
[11]	Probabilidad y estadística	G. Canavos	Mc Graw Hill	1992
[12]	Probabilidad y estadística para ingenieros	I. Miller, J. Freund, R. Johnson	Prentice Hall	1992
[13]	Probabilidad y estadística para ingenieros	R. Scheaffer, J. McClave	Grupo Editorial Iberoamericano	1993
14	Ejercicios y problemas de cálculo de probabilidades	J. Montero, L. Pardo, D. Morales, V. Quesada	Díaz de Santos	1993
[15]	Estadística matemática con aplicaciones	W. Mendenhall, D. Wackerly, R. Scheaffer	Grupo Edit Iberoame	1994
16	Introducción a la teoría de la probabilidad y la inferencia estadística	A. Durand, S. Ipiña	Rueda	1994
[17]	Estadística. Modelos y métodos	D. Peña	Alianza U.	1995
18	Estadística aplicada básica	D. S. Moore	Antoni Bosch	1995
[19]	Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería	D. Montgomery, G. Runger	Mc Graw Hill	1996
20	Workshop statistics. Discovery with data	A. Rossman	Springer	1996
[21]	Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias	W. Mendenhall, T. Sincich	Prentice Hall	1997
22	Estadística para ingenieros	R. Ardanuy, Q. Martín	Hespérides	1998
[23]	Probabilidad y estadística para ingenieros	R. Walpole, R. Myers, S. Myers	Prentice Hall, Pearson	1999
24	Problemas de probabilidades y estadística	C. Cuadras	EUB, Barcelona	1999
25	elements of Large-Sample Theory	E. L. Lehmann	Springer	1999
[26]	Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias	G. Velasco, P. Wisniewski	Thompson	2001
[27]	Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias	J. Devore	Thompson	2001
[28]	Problemario de probabilidad	P. Wisniewski, G. Velasco	Thompson	2001
[29]	Estadística elemental	R. Johnson, P. Kuby	Thompson	2004

*CPI: Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$*

Respecto a este campo se ha encontrado la aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$  por la normal, conocido como aproximación de De Moivre-Laplace. Producto de esta tendencia asintótica surge el teorema central del límite, así como su generalización y formalización (Ver sección 2.3.2). Según

Mendenhall y Sincich (1997) una condición necesaria para aplicar esta aproximación, establece que tanto  $np - 2\sqrt{npq}$  como  $np + 2\sqrt{npq}$  han de variar entre 0 y  $n$ . Esta condición se satisfará si  $np \geq 4$  y también  $nq \geq 4$ . Cabe aclarar, que en estos casos siempre procede aplicar corrección de continuidad, toda vez que la binomial es una variable aleatoria discreta, mientras que la normal es continua.

Un ejercicio típico de este campo es estimar el número de éxitos en  $n$  ensayos del experimento aleatorio. Por ejemplo, se lanza una moneda al aire 300 veces, si sale cara le damos el valor 1 y si sale sello el valor 0. Cada lanzamiento es una variable independiente que se distribuye según el modelo de Bernoulli, con media 0,5 y varianza 0,25. Empleando la aproximación normal a la distribución binomial, podemos encontrar la probabilidad de obtener menos de 104 o más de 160 caras. La solución consiste en obtener la esperanza y varianza de la nueva variable suma de estas 300 variables independientes y calcular la probabilidad mediante la normal tipificada. Se presenta otro ejemplo situado en el área de la ingeniería:

---

Supóngase que un sistema está formado por 100 componentes cada una de las cuales tiene una confiabilidad igual a 0,95. (Es decir, la probabilidad de que la componente funcione correctamente durante un tiempo específico es igual a 0,95). Si esas componentes funcionan independientemente una de otra, y si el sistema completo funciona correctamente cuando al menos funcionan 80 componentes, ¿cuál es la confiabilidad del sistema? (Meyer, 1992, pp. 331).

---

Con el propósito de guiar los análisis de este capítulo y mostrar la complejidad del teorema, así como sus contextos de aplicación, se presenta a continuación una de las soluciones clásicas al problema anterior. Esto servirá para introducir algunos de los elementos de significado del teorema central del límite de el marco teórico, que se analizarán con más detalle en las secciones siguientes.

a) Definamos las variables aleatorias  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{la componente } i \text{ funciona correctamente en el tiempo } t \\ 0 & \text{la componente } i \text{ no funciona correctamente} \end{cases}$

Tenemos que las variables se distribuyen Bernoulli  $X_i \sim B(p = 0,95)$  donde  $p$ : proporción de componentes que funcionan correctamente en un tiempo específico;

b) Consideremos una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  y definamos la nueva variable aleatoria  $S_n$ : número de componentes que funcionan correctamente en el sistema. Es decir,  $S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i$  ;

c) Calculemos la esperanza y varianza de la variable de interés y apliquemos sus propiedades,  
 $E(S_n) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = n \cdot p = 1000 \cdot 0,95 = 95$   
 $Var(S_n) = Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot 0,95 \cdot 0,05 = 4,75$  . Así, la desviación estándar es

$$\sigma_{S_n} = \sqrt{4,75} = 2,18;$$

d) La pregunta se traduce en lenguaje simbólico. Es decir, se pide calcular  $P(80 \leq S_n \leq 100) = ?$

e) Como el tamaño de la muestra  $n = 100$  es grande, aplicamos el teorema central del límite, obteniendo:

$S_n \approx N(np, \sqrt{npq})$  Luego procedemos al cálculo, usando la corrección de continuidad:

$$P(80 \leq S_n \leq 100) \approx P(79,5 \leq S_n \leq 100,5) = P\left(\frac{79,5 - 95}{2,18} \leq \frac{S_n - 95}{2,18} \leq \frac{100,5 - 95}{2,18}\right) \approx \phi(2,52) - \phi(-7,1) = 0,994;$$

f) Por la tanto, la probabilidad que funcione el sistema es de un 99,4%.

*CP2: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas*

El gran interés de este campo de problemas reside en el hecho que la tendencia hacia la distribución normal aparece *cualquiera que sea* la distribución común de las variables aleatorias. Como sugieren Lebart, Morineau y Fénelon (1985), si un fenómeno aleatorio es el resultado de la adición de múltiples causas aleatorias, independientes y del mismo orden de importancia, hay que esperar ver aparecer una distribución normal. Esto explica y justifica el uso predominante de la distribución normal en estadística.

En esta clase de problemas se aproxima el modelo de la distribución normal a distribuciones de probabilidades clásicas discretas para ciertos valores de sus parámetros. En relación con la evolución histórica del teorema, en este campo se distingue tres subcampos, que se analiza a continuación.

- *CP2.1: Variables con distribución uniforme discreta*

La distribución de medias muestrales establece la relación entre la media y la desviación estándar poblacionales, y la media y la desviación estándar de las medias muestrales. La distribución exacta no siempre es útil, ya que la media de una muestra pequeña se distribuye normalmente sólo cuando las muestras se extraen de una población normal, pero que no tendrán una distribución normal cuando la población muestreada sea uniforme, esté sesgada o siga una distribución no normal.

El teorema central del límite proporciona información adicional muy importante describiendo por completo la distribución muestral asintótica de la media muestral. Además de dar su valor central (media), y medida de dispersión (desviación estándar), se añade una indicación de cómo está distribuida. En otras palabras, incluso si la población muestreada no es normal, la distribución muestral de la media se comporta normalmente bajo ciertas condiciones, como se observa en el siguiente ejemplo:

---

Considérese una población que consta de cinco enteros igualmente probables: 1, 2, 3, 4 y 5. Se estudiará una porción de la distribución muestral de las medias muestrales cuando se eligen aleatoriamente 30 muestras de tamaño 5. Comprobar la veracidad de los tres hechos específicos sobre la distribución muestral de medias muestrales: a) la media de la distribución muestral es igual a la media de la población, b) el error estándar de la media para la distribución muestral es igual a la desviación estándar de la población dividida entre la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, c) la distribución de la media muestral será aproximadamente distribuida normalmente. (Johnson y Kuby, 2004, pp. 278).

---

En este ejemplo, se ilustra como surge la idea del teorema central del límite cuando la población tiene una distribución uniforme. La distribución de probabilidad teórica de la cual se extraen las muestras es  $P(X=x)=0,2$ , para  $x=1,2,3,4,5$  y la forma de la distribución es rectangular.

- *CP2.2: Variables discretas acotadas*

Este campo es mas general que el campo CP1 dado anteriormente, y la distribución binomial sería un caso particular. A continuación se ilustra un ejercicio típico de variables discretas acotadas con distribución dada y que no es clásica:

---

La variable aleatoria  $X$ , que representa el número de cerezas en una empanada, tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$x$	4	5	6	7
$P(X=x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

Encuentre la probabilidad de que el número promedio de cerezas en 36 empanadas sea menor que 5,5. (Walpole, Myers y Myers, 1999, pp. 223).

---

- *CP2.3: Variables discretas no acotadas*

Un caso particular de este campo es la obtención de distribuciones en el muestreo de la media de poblaciones con distribución discretas no acotadas. El siguiente ejemplo se refiere a la distribución de Poisson, que, aunque en la práctica está acotada, no lo está teóricamente:

---

Semillas frutales. Unos biólogos especialistas en botánica aseguran que el número de semillas por limón, en cierta variedad de limones agrios de Veracruz, sigue una distribución de Poisson con parámetros  $\mu=5$ . Determinar la probabilidad de que el número promedio de semillas por limón sea menor a 5,5 en una muestra aleatoria de  $n = 125$  limones de dicha variedad. (Wisniewski y Velasco, 2001, pp. 231).

---

*CP3: Establecer la distribución de la suma de variables aleatorias independientes no idénticamente distribuidas*

El teorema central del límite clásico se refiere al caso en que las v.a. son i.i.d.

Este campo provee una extensión a la suma de v.a. independientes que no necesariamente son idénticamente distribuida (ver Sección 2.3.4). En términos informales, podemos enunciarlo como sigue:

Sea  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , donde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias *independientes* (cuyas distribuciones de probabilidad pueden ser arbitrarias o incluso desconocidas). Suponga que los respectivos valores esperados y varianzas de tales variables aleatorias  $X_i$  son  $E(X_i) = \mu_i$ ,  $Var(X_i) = \sigma_i^2$ . Entonces, con ciertas condiciones generales (los  $X_i$  individualmente contribuyen con una cantidad despreciable a la varianza de la suma de todos los términos), la variable aleatoria  $Z_n$  tiene una distribución de probabilidad que se aproxima asintóticamente a la distribución normal estándar conforme  $n$  tiende a infinito.

$$Z_n = \frac{X_1 - \mu_1 + X_2 - \mu_2 + \dots + X_n - \mu_n}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}} = \frac{S_n - \sum \mu_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}}.$$

El campo anterior CP2, otorga una formulación más restringida del teorema central del límite (ver sección 2.3.3) y establece que si las variables aleatorias están *igualmente distribuidas*, y tienen, por consiguiente, una misma media y una misma varianza, entonces la variable aleatoria definida por  $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$  tiene una distribución de probabilidad que se aproxima asintóticamente a la distribución normal estándar. Se presenta un ejemplo de comportamiento asintótico de la suma  $S_n$ , para una sucesión de variables aleatorias no idénticamente distribuidas:

---

Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes,  $X_n \sim U[-n, n]$ . Mostrar de dos formas que  $\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma_n}$  converge a la distribución normal estándar, verificando las condiciones de Linderberg y Liapounov. (James, 1981, pp. 267).

---

*CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas*

En este caso se considera la obtención de distribuciones en el muestreo de la media de poblaciones no normales, con distribuciones continuas conocidas.

Como caso particular de los campos anteriores, el teorema central del límite es conocido, más que por la distribución de la suma de variables aleatorias (ver Sección

2.3.4), por la aplicación en la distribución de muestras de la media aritmética muestral.

En el campo CP3 anterior, si hacemos  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$  entonces

$$Z_n = \frac{n\bar{X} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} .$$

Por lo tanto, esta forma restringida y más utilizada del teorema

central del límite en las aplicaciones diversas de los textos de libros, establece que:

*Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son  $n$  variables aleatorias independientes igualmente distribuidas (muestra aleatoria), cada una de ellas con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces la v. a.*

*$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  se aproxima a la distribución normal, conforme  $n$  crece.*

A continuación, se presentan dos ejemplos de este campo por su frecuencia de uso en las aplicaciones en los textos y por introducir el concepto de variable continua; el primero es matemático y típico en los libros, y el segundo muestra una extensión del campo CP2.1 al caso de variables con distribución uniforme continua y corresponde a un ejemplo de física (electricidad y magnetismo) para distribuciones originales conocidas de variables independientes e idénticamente distribuidas:

---

**1.** Suponga que cierta variable aleatoria continua  $X$  tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Suponga que se extraen muestras de tamaño  $n = 15$  valores, al azar, de dicha variable aleatoria. Para una de tales muestras, denotamos por  $\bar{X}$  a la *media aritmética muestral*. Naturalmente, diferentes muestras elegidas darán distintos valores de este promedio aritmético  $\bar{X}$ , por lo que a su vez,  $\bar{X}$  se considera una variable aleatoria. Estimar el valor de  $P(0,03 \leq \bar{X} \leq 0,15)$ . (Wisniewski y Velasco, 2001, pp. 230).

**2.** Se tienen  $n$  voltajes  $V_1, V_2, \dots, V_n$  que se reciben en una especie de concentrador (sumador), de tal suerte que  $V = \sum V_i$  es la suma de los voltajes recibidos en ese punto. Cada voltaje  $V_i$  es una variable aleatoria distribuida uniforme en el intervalo  $[0,10]$ . Luego,  $E(V_i) = 5$  volts y  $\text{Var}(V_i) = 100/12$ . Si  $n = 20$ , podemos calcular la probabilidad de que el voltaje total de entrada sobrepase los 105 volts. (Meyer, 1992, pp. 337)

---

En general, la enseñanza de la probabilidad y estadística en los textos universitarios, y más aún en la matemática, presenta los conceptos, primero la definición, propiedades y su aplicación en problemas matemáticos como el ejemplo 1 anterior. En este trabajo se cuestionará esta forma de enseñanza confrontándola con el aprendizaje situado, es decir, partiremos mediante una situación problemática

mostrando la necesidad de utilizar herramientas estadísticas para su análisis y correcta toma de decisiones.

*CP5: Estimar el error de aproximación en el teorema central del límite*

En los procesos de inferencia se utiliza la media de una muestra (que es un estimador insesgado), para calcular la media de una población, y nuestra confianza en la estimación se expresa mediante la adición de un enunciado de probabilidad que nos revela el tamaño del error. El estudio del error de estimación en la aplicación del teorema central del límite tuvo como precedentes dos ideas muy importantes:

- a. La primera es el teorema de Chebyshev, que ayuda a comprender como la varianza mide la variabilidad respecto al valor esperado de una variable aleatoria. Si se conoce la distribución de probabilidades de una v.a.  $X$  se puede calcular la  $E(X)$  y  $Var(X)$ , si existen. Sin embargo el recíproco *no* es verdadero, pero si se puede dar una cota superior (o inferior) para calcular probabilidades. (Ver definición formal en Meyer, 1992, pp. 186). En los textos, por ejemplo Freund y Smith (1989), se refieren al teorema de Chebyshev como: la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor contenido en  $k$  desviaciones estándar de la media es cuando menos  $1 - 1/k^2$ .
- b. Una segunda idea es la Ley de los Grandes Números, considerado como el primer teorema fundamental de la teoría de probabilidad. El comportamiento de la media muestral es similar al de la probabilidad. Después de muchas repeticiones, la proporción de resultados que toman un valor determinado se acerca a la probabilidad de este valor, y el promedio de los resultados se acerca a la media poblacional (Moore, 1995). Con la ayuda de la desigualdad de Chebyshev se puede obtener otra forma de la ley de los grandes números; al considerar una muestra aleatoria y sea  $\varepsilon = k\sigma/\sqrt{n}$ , podemos escribir  $P\left[|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$ . Cuando  $n \rightarrow \infty$  el lado derecho de la desigualdad se aproxima a uno; en el sentido en el cual el promedio aritmético “converge” a  $E(X)$ . En otras palabras, si se utiliza la media de una muestra elegida al azar para determinar la media de la población de la cual provino, se puede afirmar con una probabilidad de cuando menos  $1 - 1/k^2$  que nuestro error será menor que  $k$  desviaciones estándar de la media muestral.

Por lo tanto la ley de los grandes números establece que la media observada  $\bar{X}$  de un número grande de observaciones tiene que estar cerca de la media  $\mu$  de la población. El teorema central del límite señala que, con una  $n$  grande, la distribución de  $\bar{X}$  es aproximadamente normal, de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma/\sqrt{n}$ . Se presenta el siguiente ejemplo:

---

El decano de una universidad desea estimar cuántos puntos se puede esperar que obtengan los aspirantes que se someten a un examen de ingreso. Si utiliza una muestra aleatoria de 100 aspirantes y supone que la desviación estándar es 20 puntos, ¿qué puede aseverar acerca de la probabilidad de que su error sea menor que tres puntos si emplea a) el teorema de Chebyshev; b) el teorema central del límite? (Freund y Smith, 1989, pp. 312).

---

*CP6: Encontrar condiciones necesarias y suficientes para el teorema central del límite*

Este campo de problema es fundamentalmente de estadística matemática y está relacionado con el tercer capítulo en la historia del teorema, Sección 2.3.6. Conceptos formales, como convergencia en probabilidad de una sucesión de variables aleatorias, ley de los grandes números, teoremas y corolarios de Linderberg, Feller y Levy, desempeñan un papel importante en la identificación de este campo. Es claro que para una muestra aleatoria de tamaño grande, se cumple que la suma converge a la distribución normal, es decir,  $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ . James (1981) recuerda que la Ley de los Grandes Números nos dice que la media muestral converge en probabilidad a  $\mu$ , o que la diferencia  $\bar{X} - \mu$  tiende a cero, mientras que el teorema central del límite dice que esta diferencia multiplicada por la raíz cuadrada de  $n$  y dividida por la desviación estándar, converge en distribución a una normal.

En términos formales, la ley débil de los grandes números dice que la variable “media”  $\bar{X}_n$  converge en probabilidad hacia la variable degenerada (constante)  $\mu$ . En notación matemática, se dice que una sucesión de variables  $(X_n)$  definidas en el mismo espacio  $\Omega$ , *converge en probabilidad* hacia una variable  $X$  si para todo  $\varepsilon > 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$  (Lebart, 1985, pp. 61). (Ver otras definiciones formales de los conceptos en James, 1981; Lebart y cols., 1985 y Parzen, 1987).

James (1981) hace referencia a las condiciones generales para validar el teorema; señala que el teorema central del límite de Linderberg considera variables aleatorias independientes, y se cumple la convergencia normal si se satisface la condición de Linderberg; es decir, da condiciones generales para validar la convergencia. El teorema central del límite de Liapounov es útil cuando las variables

poseen momentos finitos de orden mayor que 2. Afirma este teorema que la convergencia se cumple si la suma de dos momentos centrados absolutos de orden  $2 + \delta$  es asintóticamente pequeña en relación a la desviación estándar  $\sigma_n^{2+\delta}$ . Linderberg da una condición necesaria para justificar el teorema central del límite. El recíproco, o condición suficiente, de este teorema se debe a Feller, quien demostró que si se tienen variables aleatorias independientes con varianzas finitas, con al menos una varianza mayor que cero y si el máximo del cociente de varianzas poblacionales y muestrales tiende a cero cuando  $n$  es grande, entonces la condición de Linderberg es consecuencia de la convergencia normal. A continuación se presenta un ejemplo de este relacionado con este campo:

---

Se  $\{U_n\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una distribuida uniformemente en el intervalo de 0 a  $\pi$ . Sea  $\{A_n\}$  un sucesión de constantes positivas. Establezca condiciones bajo las cuales la sucesión  $X_n = A_n \cos U_n$  obedezca el teorema central del límite. (Parzen, 1987, pp. 477).

---

*CP7: Obtener la distribución de la suma de variables aleatorias dependientes*

Los campos anteriores no son los más generales; el teorema central del límite se cumple para la suma de variables sin que tengan la misma distribución, y más aún veremos en este campo el caso del teorema para variables no independientes. El supuesto de independencia facilita el encontrar distribuciones multivariantes, ya que las distribuciones conjunta de v.a. son obtenidas a partir del producto de las distribuciones marginales de un modelo dado. El supuesto de dependencia frecuentemente no es apropiado, se considera un hecho más casual y presenta una dificultad de especificar modelos en más de dos variables.

La literatura apropiada que trabaja con este supuesto de dependencia se puede obtener en los procesos estocásticos y series de tiempo, y requiere de conocimientos avanzados en matemáticas. Lehmann (1999, pp. 108-112) ilustra algunos ejemplos puramente matemáticos, referidos con el número de sucesiones estacionarias, en particular para  $m$ -variables dependientes, para procesos autorregresivos de primer orden y cadenas de Markov en dos estados. Uno de estos ejemplos, se ilustran a continuación de proceso autorregresivo de primer orden estacionario, en la cual para establecer la normalidad requiere la demostración de dos hechos: normalidad asintótica y que la varianza de la distribución límite corresponde al límite de la varianza de la variable normal.

---

Proceso autorregresivo de primer orden estacionario. Se definen sucesivamente las variables  $X_{i+1} = \theta + \beta(X_i - \theta) + U_{i+1}$ ,  $|\beta| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots$  donde las variables independientes  $U_i \approx N(0, \sigma_0^2)$ . Vemos que  $X_{i+k} - \theta = \beta^k(X_i - \theta) + \beta^{k-1}U_{i+1} + \dots + \beta U_{i+k-1} + U_{i+k}$ . Además, la varianza de las variables satisface lo siguiente  $Var(X_{i+1}) = \beta^2 Var(X_i) + \sigma_0^2$ . Si la sucesión de las variables es estacionaria, debemos tener  $Var(X_{i+1}) = Var(X_i) \forall i = 1, 2, \dots$  y por tanto  $\sigma^2 = \sigma_0^2 / (1 - \beta^2)$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza común de las  $X_i$ . Suponga que la sucesión comienza con un  $X_1$  el cual es normal  $N(\theta, \sigma^2)$ . Entonces, ésta es la distribución para todos los  $X_i$ , y por tanto la sucesión es estacionaria. (Lehmann, 1999, pp. 109).

---

### Nuevos campos de problemas

Además de los campos de problemas identificados en el estudio histórico, se ha encontrado nuevos tipos de problemas más aplicados que se describe a continuación. Su solución no lleva directamente al teorema, sino a uno de los problemas anteriores, es decir, a la búsqueda de una distribución que aproxime la suma de variables aleatorias y en este sentido, los consideramos como *campos de problemas indirectos*.

#### CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas

Un usuario prudente de los métodos estadísticos nunca planifica la obtención de los datos sin planear, al mismo tiempo, la inferencia. Si obtiene suficientes observaciones puede conseguir a la vez un nivel de confianza elevado y un error de estimación pequeño, pero en la práctica la obtención de observaciones cuesta tiempo y dinero. Puede ocurrir que el tamaño de la muestra ideal sea inviable por razones económicas (Moore, 1995). Este campo de problemas es uno de los más importantes en la aplicación del teorema central del límite en campos de la ingeniería. A continuación se presenta un ejemplo, sin un contexto de la variable en estudio.

---

Se desconoce la distribución de probabilidad de cierta variable aleatoria  $X$  y el valor de su media ( $\mu$ ); no obstante, existen motivos para asegurar que la desviación típica de  $X$  es aproximadamente  $\sigma = 3$ . ¿De qué tamaño debe ser una muestra aleatoria de valores de  $X$  para tener una confianza mínima de 95% de que la discrepancia entre la media muestral y la media verdadera de la población será menor a 0,3? (Wisniewski y Velasco, 2001, pp. 231).

---

CP9: Obtener la distribución de la suma de los logaritmos de variables aleatoria independientes

Una consecuencia del teorema central del límite es que si un efecto es el *producto* de muchas causas, cada una de poca importancia respecto a las demás e independientes, de manera que  $P_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ , entonces el logaritmo de  $P_n$  seguirá una distribución normal. Se denomina *distribución lognormal* a la de una variable cuyo logaritmo se distribuye normalmente. Así,  $X = \ln P_n$  tendrá distribución normal de media  $\exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$  y varianza  $\left\{e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu}\right\}$ . Observe que la variable  $X$  puede escribirse

$X = \ln(X_1 \cdots X_n) = \sum_{i=1}^n \ln X_i$ . Como la transformación logarítmica es monótona, los percentiles de  $X$  serán los logaritmos de los percentiles de  $P_n$ . Peña (1995) señala que la distribución lognormal es esencialmente útil para comparar distribuciones asimétricas con variabilidad muy distinta, y esta distribución aparece con frecuencia al estudiar rentas de familias, consumo de electricidad por empresas, ventas en euros, etc. Kennedy y Neville (1982) mencionan su aplicación en pruebas de fatiga; la variación en el número de ciclos en que ciertas piezas metálicas resisten antes de fallar es tal, que los logaritmos de las duraciones se distribuyen de manera normal.

La necesidad de transformación puede surgir del método de medición que se siga. Sabemos que  $P_n$  no puede ser negativo, dado que no se define el logaritmo de un número negativo; sin embargo el uso de la distribución lognormal se explica porque el comportamiento de algunas variables es descrito satisfactoriamente por esta distribución, por ejemplo en eventos hidrológicos, como son el flujo de agua diario, la lluvia o la descarga fluvial, a la distribución de pequeños tamaños de partículas, a la resistencia de algunos materiales, o a la duración o vida. Este campo se ilustra en el siguiente ejemplo aplicado a la resistencia al suelo:

---

Suponga que la media “verdadera” de la resistencia al esfuerzo cortante de un suelo en particular es  $\mu_X$ . Valiéndose de un número de muestras de suelo  $n$ , se mide la resistencia al esfuerzo cortante  $X$ . El valor medio  $\bar{X}$  se desviará del valor verdadero  $\mu_X$ . La subestructura se diseña sobre la base de una resistencia reducida dada por  $\mu_d = \bar{X}/L$  donde  $L$  es un factor de seguridad. Si se da por hecho que se dispone de un método correcto para el análisis de la estabilidad del suelo, la probabilidad de que se registre una falla se expresa mediante  $P\left[\left(\mu_X - \frac{\bar{X}}{L}\right) < 0\right] = \alpha$ . Dado que la variable  $X$  no puede tener valores negativos, calcular la probabilidad anterior mediante la distribución lognormal. (Kennedy y Neville, 1982, pp. 151).

---

Muy pocos textos tratan este campo de aplicación del teorema central del límite. Devore (2001) lo presenta como proposición:

*“Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una distribución para la que sólo valores positivos son posibles [ $P(X_i > 0) = 1$ ]. Entonces, si  $n$  es suficientemente grande, el producto  $P_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$  tiene aproximadamente una distribución lognormal”.*

Además, menciona un ejemplo de aplicación: el proceso de daño en el flujo plástico y propagación de grietas es un proceso multiplicativo, así que variables tales como el porcentaje de alargamiento y resistencia a la ruptura tienen distribuciones aproximadamente lognormales.

*CP10: Obtener la distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones*

Las principales características de la distribución de la diferencia  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  entre las medias muestrales de dos muestras aleatorias simples independientes son:

- La media de  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  es  $\mu_1 - \mu_2$ . Es decir, la diferencia de las medias muestrales es un estimador insesgado de la diferencia de las medias poblacionales;
- La varianza de la diferencia es la suma de las varianzas de  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$ , que es  $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ ;
- Si las dos distribuciones poblacionales son normales, entonces la distribución de  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  también es normal.

Estas características se pueden deducir de forma matemática utilizando los teoremas de probabilidad, o se pueden poner de manifiesto mediante simulaciones. Las pruebas de significación y los intervalos de confianza, para la diferencia entre las medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de dos poblaciones, parten de la diferencia  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  entre las dos medias muestrales. Con distribuciones no normales, el teorema central del límite garantiza que los procedimientos de cálculo son aproximadamente correctos cuando las muestras son grandes (Moore, 1995). Una aplicación de este campo indirecto es el siguiente:

---

Un grupo de médicos veterinarios han elaborado una dieta con un costo más barato que la que actualmente se usa para las vacas productoras de leche, asegurando que el promedio de litros de leche será el mismo. Los administradores de una planta productora de leche desean verificar la afirmación establecida por el grupo de médicos, para lo cual, seleccionan dos muestras aleatorias independientes de  $n = 30$  vacas cada una y aplican a cada una de ellas la nueva fórmula y a la otra muestra, la fórmula que actualmente se utiliza. Calculan el promedio de litros de leche producidos en cada muestra y si la diferencia de las medias  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  (donde  $\bar{X}_1$  es para la nueva fórmula y  $\bar{X}_2$  es para la fórmula actual) es mayor que  $-1,23$ , aceptarán la nueva fórmula, ¿cuál es la probabilidad de que rechacen la nueva fórmula siendo que el grupo de médicos tiene razón? Considere que las desviaciones estándar de ambas poblaciones son iguales a 5. (Castillo, 1990, pp. 205).

---

En los textos analizados hay muy pocos ejemplos de este campo. Un ejemplo guiado a la obtención de la distribución y cálculo de probabilidades de la diferencia de medias muestrales de la resistencia esperada a la tensión del acero, se puede ver en Devore (2001, pp. 240).

*CP11: Determinar la distribución de funciones de variables aleatorias*

Se ha visto que  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$  tiene aproximadamente una distribución normal estándar cuando  $n$  es elevada, bajo determinadas condiciones generales. Esta noción de normalidad asintótica podemos ampliarla a una clase grande de funciones de  $\bar{X}$ ; de funciones de *cualquier* variable aleatoria asintóticamente normal. El resultado es válido debido a las propiedades de los desarrollos de las series de Taylor, que se explican brevemente en Scheaffer y Mc Clave (1993, pp. 248).

Suponga que  $\bar{X}$  es una medida estadística basada en una muestra aleatoria de tamaño  $n$  que procede de una población con promedio  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2$ . Además, suponga que se desea conocer el comportamiento de una función de  $\bar{X}$ , por ejemplo  $g(\bar{X})$ , donde  $g(x)$  es una función de valor real tal que su derivada  $g'(x)$  existe en las cercanías de  $\mu$  y es distinta de cero. Se puede escribir  $g(\bar{X}) = g(\mu) + g'(\mu)(\bar{X} - \mu) + R$  donde  $R$  es el residuo de la serie de Taylor. Multiplicando por  $\sqrt{n}$  en muchos casos  $\sqrt{n}R$  tiende a cero cuando aumenta  $n$ , y se llega a la expresión  $\frac{\sqrt{n}[g(\bar{X}) - g(\mu)]}{|g'(\mu)|\sigma}$  que converge a la distribución normal al aumentar  $n$ .

Meyer (1992) señala que este resultado es de mucha importancia en muchas aplicaciones para sostener a lo menos un argumento heurístico, intuitivo. Así, para un  $n$  suficientemente grande y bajo condiciones muy generales de la función  $g$ , concluimos

## Capítulo 4

que la distribución de  $g(\bar{X})$  es aproximadamente normal de media  $g(\mu)$  y varianza  $\frac{[g'(\mu)]^2 \sigma^2}{n}$ . A continuación, se presenta un ejemplo en el área de física:

---

La corriente  $I$  en un circuito eléctrico se relaciona con la tensión  $E$  y la resistencia  $R$  mediante la ley de Ohm,  $I = E/R$ . Suponga que para circuitos de determinado tipo,  $E$  es constante, pero que la resistencia  $R$  varía ligeramente de circuito a circuito. Se mide la resistencia en forma independiente en  $n$  circuitos, y se obtienen los resultados  $X_1, \dots, X_n$ . Si  $E(X_i) = \mu$  y  $V(X_i) = \sigma^2$ , donde  $i=1, 2, \dots, n$ , hallar la distribución aproximada de  $E/\bar{X}$ , que es el cálculo aproximado de la corriente promedio. Scheaffer y McClave (1993, pp. 248).

---

### *CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes*

La estimación por intervalos calcula estimadores puntuales insesgados para parámetros tales como  $\mu$ ,  $p$ ,  $\mu_1 - \mu_2$ ,  $p_1 - p_2$  con base en una muestra aleatoria, bajo algunos supuestos. La condición para estimar la media  $\mu$  usando una desviación estándar conocida o estimada es que la distribución muestral de  $\bar{X}$  sea normal.

La información necesaria para asegurar este supuesto es que: 1) La distribución muestral de medias muestrales,  $\bar{X}$ , está distribuida alrededor de una media igual a  $\mu$  con un error estándar de  $\sigma/\sqrt{n}$ ; y 2) Si la distribución muestreada aleatoriamente no se distribuye de manera normal, entonces  $\bar{X}$  está distribuida normalmente para tamaños de muestra suficientemente grandes.

No existe ninguna regla que defina “suficientemente grande”; el tamaño de muestra suficientemente grande varía bastante según la distribución de la población. La regla sencilla que se mencionan en muchos textos es considerar una muestra suficientemente grande cuando  $n \geq 30$ . Para Devore (2001)  $n > 40$  será suficiente para justificar el uso de este intervalo. Es algo más conservador que la regla sencilla para el teorema, por la variabilidad agregada que se introduce al usar  $s$  por  $\sigma$ .

Según Johnson y Kubly (2004) señalan que el teorema central del límite puede aplicarse a muestras pequeñas (por ejemplo,  $n=15$  o mayor), cuando los datos proporcionan una fuerte indicación de una distribución unimodal que sea aproximadamente simétrica. Si hay evidencia de algún sesgamiento presente en los datos, entonces el tamaño de la muestra debe ser mucho mayor (quizás  $n \geq 50$ ). Si los datos proporcionan evidencia de una distribución extremadamente sesgada o en forma de J, es posible que el teorema no sea válido. La inspección de varias representaciones

gráficas de los datos muestrales debe conducir a una indicación del tipo de distribución que tiene la población.

La proposición que requiere el uso del teorema central del límite dice: si  $n$  es suficientemente grande, la variable estandarizada  $Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$  tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Esto nos lleva a determinar  $\left( \bar{X} - Z(1-\alpha/2) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z(1-\alpha/2) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$  el *intervalo de confianza aproximado para  $\mu$* , considerando un tamaño de muestra adecuado y nivel de confianza de  $100(1-\alpha)\%$ . Esta fórmula es válida, independiente de la forma de la distribución en la población.

En términos generales, se puede decir que un intervalo de confianza  $1-\alpha$  para la estimación de un parámetro  $\theta$  se encuentra usando la fórmula  $\hat{\theta} \pm Z(1-\alpha/2) \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$ , donde  $\sigma_{\hat{\theta}}$  es el error estándar del parámetro  $\theta$ , e indica cuál es la magnitud esperada del error debida a la variabilidad en la obtención aleatoria de los datos. A continuación, se presenta un ejemplo de intervalo de confianza aproximado para la diferencia de proporciones poblacionales:

---

Dos marcas de refrigeradores, A y B, tienen (ambas) una garantía de un año. En una muestra aleatoria de 50 refrigeradores de la marca A, 12 se descompusieron antes de terminar el período de garantía. Una muestra aleatoria de 60 refrigeradores de la marca B reveló también 12 descomposturas durante el período de garantía. Estimar la diferencia real entre las proporciones de fallas ( $p_1 - p_2$ ), durante el período de garantía, con un coeficiente de confianza de 0,98. (Mendenhall, Wackerly y Scheaffer, 1994, pp. 336)

---

### *CP13: Establecer pruebas de hipótesis de la media y otros parámetros para muestras grandes*

En muchas situaciones de la vida diaria tomamos decisiones, que siguen el mismo patrón básico: se ponderan las alternativas; luego, con base en las convicciones y preferencias personales, y cual sea la evidencia disponible, se llega a una decisión y se emprende la acción idónea. La prueba de hipótesis sigue casi el mismo proceso, excepto que implica información estadística.

Por ejemplo, en la evaluación de las técnicas de enseñanza la hipótesis es que un profesor mejora el desempeño de un alumno (calificación obtenida en el examen) a través de influir sobre la probabilidad percibida esfuerzo-recompensa del estudiante. Un instructor logra lo anterior al asignar tareas (técnicas de enseñanza) que forman parte de

la calificación del estudiante y son percibidas por éste como un medio para mejorar su calificación en el curso. El estudiante está motivado para incrementar su esfuerzo a fin de completar estas tareas, que también deben mejorar su entendimiento sobre el material presentado en el curso. El resultado final esperado es obtener mejores calificaciones en el examen. La hipótesis a analizar es ¿las técnicas de enseñanza tienen un efecto significativo sobre los puntajes de examen de los estudiantes?

La prueba de hipótesis (llamada también contraste de hipótesis, dócima de hipótesis) es un procedimiento bien organizado, que se aplica para tomar decisiones. Como en la estimación de intervalos, en las pruebas de hipótesis se puede trabajar con distintos estadísticos y con diversos tipos de distribuciones, pero en nuestro estudio analizaremos el caso para muestras grandes donde la distribución en el muestreo de muchos estadísticos son aproximadamente normales. El procedimiento para una prueba de hipótesis de un parámetro es el siguiente:

1. El planteamiento: describir el parámetro poblacional de interés y establecer las hipótesis nula y alternativa;
2. Especificar los criterios de prueba: comprobar los *supuestos* (la distribución muestral del estadístico se comporta de manera normal, el tamaño de muestra es suficientemente grande). Identificar la distribución de probabilidad y el estadístico de prueba adecuado y determinar el nivel de significación  $\alpha$ ;
3. Recolectar la información muestral y calcular el valor del estadístico;
4. Calcular el valor- $p$  para el estadístico de prueba y determinar si es menor o no que  $\alpha$ ;
5. Determinar los resultados: plantear la decisión sobre la hipótesis nula y escribir una conclusión sobre la hipótesis nula.

El supuesto para pruebas de hipótesis sobre la media poblacional  $\mu$  usando una desviación estándar conocida o aproximada, es que la distribución muestral de  $\bar{X}$  tenga una distribución normal. Al igual que el caso de intervalos de confianza, la información necesaria para asegurar que se cumpla este supuesto está contenida en la distribución muestral de las medias muestrales con media y error estándar dada anteriormente y se distribuye normalmente cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande.

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación muy importante del teorema central

del límite en la determinación de valores razonables de la media de la población  $\mu$ . Para responder si el experimento proporciona evidencia que apoye la conjetura que  $\mu=5$ , se calcula la probabilidad de que datos similares a los que se obtuvieron en la muestra puedan ocurrir con facilidad cuando de hecho  $\mu=5$ . El teorema surge en cuestiones como ¿Qué tan probable es que se pueda obtener  $\bar{X} \geq 5,027$  con  $n = 100$  si la media de la población es  $\mu=5$ ?, en otras palabras, si la media  $\mu$  es 5, ¿cuál es la probabilidad de que  $\bar{X}$  se desvíe a lo más en 0,027 milímetros?

---

Un importante proceso de fabricación produce partes de componentes cilíndricos para la industria automotriz. Es importante que el proceso produzca partes que tengan una media de 5 milímetros. El ingeniero involucrado hace la conjetura de que la media de la población es de 5,0 milímetros. Se lleva a cabo un experimento en el que 100 partes elaboradas por el proceso se seleccionan al azar y se mide el diámetro de cada una de ellas. Se sabe que la desviación estándar de la población es  $\sigma = 0,1$ . El experimento indica un diámetro promedio de la muestra  $\bar{X} = 5,027$  milímetros. ¿Esta información de la muestra parece apoyar o refutar la conjetura del ingeniero? (Walpole, Myers y Myers, 1999, pp. 218)

---

### **Conclusiones sobre los campos de problemas presentados**

En la Tabla 4.3.1 se muestra un resumen de los campos de problemas relacionados con el teorema central del límite presentes en los libros de textos analizados. Se puede ver en la tabla, los campos de problemas comunes en todos los libros son el de aproximación de ciertas distribuciones (CP1) y la distribución de la suma de v.a. continuas (CP4). Por otro lado, hay algunos campos de problemas que son inexistentes en la mayoría de los libros, por su carácter teórico; por ejemplo, sólo el texto Parzen (1987) presenta un ejercicio para la suma de v.a. dependientes (CP7), en dos libros se presenta el campo CP3 para la distribución de v.a.i. no idénticamente distribuida y en tres textos el campo de problema de condiciones necesarias y suficientes del teorema central del límite (CP6).

Desde el punto de vista histórico del teorema central del límite, los campos de problemas (CP1 a CP7) han dado origen al desarrollo teórico del teorema aportando al análisis de la inferencia estadística clásica. Se observa en los libros de estadística matemática ([7],[8],[10] y [15]) que están presentes en promedio seis de los nueve campos y que la tendencia en el tiempo es a presentar menos problemas de este tipo. A diferencia de los libros de los años 80 y 90, que muestran ejercicios de error de estimación y determinación de tamaños muestrales, los libros de textos modernos y aplicados enfatizan problemas a variables discretas acotadas (CP2.1 y CP2.2). En general los textos de estadística aplicada a la ingeniería carecen de la mayoría de estos

campos de problemas. De los ocho textos de ingeniería, sólo uno muestra problemas con la distribución de Poisson; modelo que es de importancia para los ingenieros y que es comprensible por los alumnos debido a que han tenido un curso previo de probabilidades.

En el caso de los campos de problemas indirectos (CP8 a CP13) se observa que los campos de problemas referidos a los intervalos de confianza (CP12) y pruebas de hipótesis (CP13) son los más presentes en los textos, con 13 y 11 respectivamente. Son pocos los libros con ejemplos que traten el campo de problemas CP11 para la distribución de funciones de v.a., Scheaffer y McClave (1993) lo plantean como una sección en el capítulo de distribuciones muestrales, y Meyer (1992) lo mencionan resumidamente. Además, sólo dos libros presentan un problema para la suma de los logaritmos (CP9), siendo el menos frecuente en los textos analizados. La evolución de estos nuevos campos de problemas en los textos ha ido creciendo, ya que están presentes hoy en día en la mayoría de los textos de estadística para ingenieros, aunque no expresados de forma clara en los ejercicios.

**Tabla 4.3.1.** Campos de problemas que presentan los libros seleccionados

Textos	[4]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]	[15]	[17]	[19]	[21]	[23]	[26]	[27]	[28]	[29]
CP1: Aproximación de la distribución binomial	△	☆	☆	☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△	○	◎
CP2.1: Distribución suma v.a. discretas uniforme			☆	☆		△						△			○	◎
CP2.2: Distribución suma v.a. discretas acotadas			☆	☆								△		△		◎
CP2.3: Distribución suma v.a. discretas no acotadas			☆	☆	☆			☆	✦					△	○	
CP3: Distribución suma v.a no idénticamente distribuidas			☆	☆												
CP4: Distribución de la suma de variables aleatorias continuas			☆	☆	☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△	○ ◎
CP5: Estimación del error de aproximación	△	☆	☆		✦	△	△	☆		△		△				
CP6: Condiciones necesarias y suficientes			☆		☆			☆								
CP7: Distribución de la suma de v. a. aleatorias dependientes			☆													
CP8: Tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas	△	☆	☆	☆			△	☆						△	○	
CP9: Distribución de la suma de logaritmos	△														△	
CP10: Distribución de diferencias de medias muestrales							△	☆		△	△	△		△		
CP11: Distribuciones de funciones de variables aleatorias			☆	☆			△	☆			△					
CP12: Estimación por intervalos de confianza	△			☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△		◎
CP13: Pruebas de hipótesis para muestras grandes	△				✦	△	△	☆		△	△	△	△	△		◎

En relación a los textos de estadística para ingenieros, los libros que presentan

más campos de problemas son el de Devore (2001) número [27] con 9 campos y los libros [23] y [13] con 8 campos de los 15 definidos. Los libros que consideramos clásicos [11] y [17] prácticamente son muy débiles en mostrar ejercicios que involucren la idea del teorema central del límite. El texto de estadística matemática [15] de Mendenhall, Wackerly y Scheaffer (1994) es el que tiene mayor número de campos de problemas, con 10. Los libros de textos con un enfoque moderno y aplicado [28] y [29], no presentan los campos de problemas indirectos y en los campos históricos dan más importancia a las variables discretas. Además, los libros modernos carecen de fundamento matemático y trabajan más la parte de simulación a partir de una distribución binomial y uniforme discreta, y generando números aleatorios a partir de variables aleatorias con distribución uniforme continua mediante el uso del ordenador.

Aunque es propio para los ingenieros la aplicación en el uso adecuado de herramientas estadísticas para la toma de decisiones, los textos de probabilidad y estadística analizados en esta área priorizan los campos de problemas indirectos. Sin embargo, sería adecuado presentar una variedad de ejemplos de aplicación que consideren también los campos de problemas históricos, con mayor rigor matemático que ayudará a la comprensión del teorema central del límite. Si se quiere que los alumnos aprecien la utilidad y alcance de este teorema, sería necesario mostrar diferentes campos de problemas situados a la profesión. Prácticamente en los libros de textos analizados no hay ejemplos y ejercicios en el contexto de la ingeniería en acuicultura y pesca, ingeniería marítimo portuario e ingeniería informática.

En general, los libros de textos muestran muchos ejercicios de aplicación del teorema central del límite para variables con distribución continua, en particular a la distribución exponencial y uniforme, y por otro lado carecen de problemas de urnas, de lanzamientos de dados o monedas, que permitan un primer acercamiento tangible del teorema. Además, falta rigurosidad en los ejemplos resueltos de los libros, pues son poco claros en mencionar que se está utilizando el teorema en el desarrollo del ejercicio, es más, no usan el término “aproximado”.

Finalmente, se observa en la mayoría de los libros que a lo más presentan un ejercicio en cada campo de problemas, a excepción de los campos CP1 y CP4, lo que implica que el estudiante no va a valorar estos campos de problemas que pueden ser de mucha relevancia en su profesión por ejemplo, el determinar tamaños de muestras adecuados en el área industrial, usando el teorema central del límite como herramienta estadística. El interés de esta investigación es trabajar en el aula con estudiantes de

ingeniería presentándoles, en vez de ejercicios puntuales y descontextualizado, problemáticas reales en las distintas áreas de la ingeniería con variadas situaciones de los campos de problemas definidos del teorema, enfrentados a la resolución de problemas de razonamiento estadístico, que involucre el uso del ordenador en la simulación y un proceso metodológico en el análisis de la información con un nivel ligeramente más matemático en las distribuciones de probabilidades.

#### 4.4. LENGUAJE

El segundo elemento de significado analizado son las palabras, notaciones y todas las representaciones materiales del objeto abstracto y sirven para describir los enunciados y propiedades, así como para las situaciones-problemas, sus datos y procedimientos.

Desde el marco teórico cualquiera de los tipos de elementos considerados puede representar a otro en el trabajo matemático, es decir, cualquiera de los tipos de elementos puede jugar el papel de representaciones en función de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen, existiendo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado. En todo caso interesa analizar específicamente el lenguaje y representaciones materiales utilizadas en relación al teorema central del límite. Se puede diferenciar tres tipos, siguiendo a Ortiz (1999).

##### *Términos y expresiones verbales*

Un primer tipo son las palabras y frases que usamos para describir los conceptos, sus operaciones y transformaciones. Se encuentran algunas expresiones tales como *teorema del límite*, *leyes de los grandes números* y términos verbales relacionados con el teorema central del límite como variable aleatoria, distribución normal, muestra aleatoria, estadístico, distribución muestral, error de estimación.

Considerando que el profesor debe tener en cuenta el vocabulario y asegurar su comprensión por parte de los alumnos, siguiendo a Ortiz (1999), se diferencian tres categorías de palabras usadas en la enseñanza de las matemáticas:

1. Palabras *específicas* de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano;
2. Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque *no siempre con el mismo significado* en los dos contextos;

3. Palabras que tienen *significados iguales* o muy próximos en ambos contextos.

En estas categorías se podría incluir un gran número de expresiones asociadas al tema, debido a los diversos elementos relacionados con el teorema central del límite. En particular, Tauber (2001, pp. 148) muestra los múltiples elementos de significado específico relacionados con la distribución normal, y Méndez (1991, pp. 82) presenta un mapa conceptual de los elementos que están involucrados con el teorema. Además, la categoría con mayor número de palabras y frases es la de palabras específicas ya que el teorema es un objeto puramente matemático, que ha sido analizado a lo largo de la historia con un nivel avanzado de conocimiento matemático y últimamente por simulación.

**Tabla 4.4.1.** Categorías de términos asociados al teorema y a los conceptos en los cuales se apoya

	Palabras específicas matemáticas	Palabras con distinto significado	Palabras con igual significado
Teorema central del límite	Distribución límite, teorema, teorema central del límite, aproximación, distribución asintótica en el muestreo, convergencia en ley, convergencia de sucesiones de v.a., error de estimación, suma de v.a.i., idénticamente distribuida, no i.d., variable transformada, simulación con uso del ordenador, demostración por f.g.m., función característica.	Suficientemente grande, simulación manipulable, contraejemplo, muestra grande, generalización, bajo ciertas condiciones	Central, muestra, caso particular,
Conceptos relacionados	Distribución normal, binomial, estándar, tipificada, estimación de la media, demostración matemática, propiedades estadísticas, transformación algebraica en la distribución normal, distribución de probabilidad, muestra aleatoria, variables aleatorias discretas y continuas, acotadas y no acotadas, variables dependientes, parámetro, estadístico, cálculo de probabilidades de variables y estadísticos, desigualdad de Chebyshev, ley de los grandes números, varianza, error estándar de la media, desviación típica muestral y poblacional, ajuste al histograma, curva de distribución, tablas de distribución normal estándar, campana de Gauss, Distribución Gaussiana, distribuciones clásicas, distribución de diferencias de medias muestrales, función de una variable aleatoria, estimación por intervalos, contraste de hipótesis, estimador máximo verosímil, estimador por los momentos, errores aleatorios.	Modelo, confiabilidad, valor medio, valor esperado, promedio, datos, dispersión, simetría, tamaño de, observaciones independientes, población, muestreo, con y sin reemplazo, infinito, representación gráfica de datos, análisis, demostración informal.	Fórmula, variación, observaciones, proporción, finito.

El interés es considerar en la enseñanza los elementos del lenguaje que conducirán a la comprensión del teorema central del límite, tener presente aquellos que afectan el aprendizaje del teorema y los que no son entendidos por los estudiantes. En la Tabla 4.4.1 se presentan los términos y expresiones de las tres categorías asociadas a los

elementos específicos del teorema y a los que se refieren a los conceptos relacionados.

### Notaciones y símbolos

Las notaciones simbólicas son un elemento característico del lenguaje matemático y no sólo se emplean para representar los conceptos sino para realizar operaciones con los mismos y constituyen una forma abreviada y precisa para denotar conceptos o proposiciones. El simbolismo juega un papel fundamental, porque permite trabajar a un alto nivel de complejidad. La potencialidad de algunos símbolos para trabajar dualmente, evocando bien un proceso de cálculo de un resultado, o un objeto que puede manejarse en un ámbito superior es particularmente adecuado para reducir el esfuerzo cognitivo. Por todo ello, se deduce la importancia del símbolo en el aprendizaje, encontrando las siguientes expresiones simbólicas del teorema central del límite en los dos puntos siguientes:

- a. Expresiones usadas en la formulación del teorema, que son las siguientes: Para la muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , suma de  $n$  variables aleatorias  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , distribución muestral de la media de la muestra  $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$  para  $n$  suficientemente grande, fórmula de estandarización de la media muestral  $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ , representación para muestras grandes de un intervalo de confianza para la media  $\mu = \bar{x} \pm Z(1 - \alpha/2)S/\sqrt{n}$ , el momento de orden  $k$  de la v. a.  $X_i$  está acotado  $E(X_i^k) < \infty$ . Otras notaciones directas del teorema son dadas en las Secciones 4.6 y 4.8.
- b. Expresiones usadas al describir conceptos relacionados: estadístico de la media de la muestra  $\bar{X}(x) = \frac{\sum x_i}{n}$ , función de probabilidad conjunta de las observaciones muestrales  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i)$ , esperanza de la suma de v.a.  $E(S_n) = E(\sum X_i)$ , varianza de la suma de v.a.  $Var(S_n) = Var(\sum X_i)$ , distribución normal de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$  es  $N(\mu, \sigma)$ , función característica de  $X$  es dada por  $\varphi(t) = E(e^{itX})$ . Otras notaciones relacionadas con el teorema son dadas en la Sección 4.7.

### ***Representaciones gráficas***

Además del lenguaje y los símbolos, encontramos con frecuencia representaciones de tipo diverso. Uno de los elementos característicos de la estadística son los gráficos. En la mayoría de los textos es común ver el histograma como primer acercamiento al teorema. En particular, el texto Johnson y Kuby (2004) muestra varias representaciones de distribuciones. Se ha encontrado los siguientes tipos:

- a. Al enunciar el teorema encontramos *histogramas* para representar la distribución empírica de las medias muestrales y *gráficos de control de medias* para representar que la distribución de las medias muestrales estará más próxima a una distribución normal que las mediciones individuales. Moore (1995) señala que los gráficos de control son importantes en la industria y sirven para ilustrar el uso de las distribuciones muestrales en inferencia estadística.
- b. Al describir conceptos relacionados hemos hallado *gráficos de barras* para ilustrar la distribución de probabilidad teórica de la población, *distribución de frecuencias relativas* asimétricas, *distribuciones poblacionales* Uniforme, en forma de J, en forma de U y normal, *distribución muestral* de la media aritmética para distintos tamaños de muestras.

### ***Simulaciones***

Heitele (1975) señala que uno de los principios base de la simulación de fenómenos aleatorios es la posibilidad de estudiar las propiedades de un fenómeno aleatorio sustituyéndolo por otro isomorfo. El interés de la simulación en la enseñanza de la estadística y de la probabilidad es destacada entre otros por Fischbein (1975), Biehler (1991, 1997), Estepa (1993) y Batanero (2001) señalando que la simulación permite poner en manos del alumno un nuevo instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, contribuyendo a la mejora de la intuición probabilística.

Por otro lado hay que tener ciertas precauciones. Countinho (2001) plantea que no es sencillo la actividad de simulación, observando diferentes dificultades de los alumnos al proponerles situaciones con modelos de urnas; tales como, dificultad de manejo de software, resistencia al usar la simulación y la aproximación experimental, dificultad en aceptar datos de simulaciones que no han recogido personalmente y dificultad en diferenciar la estimación de la probabilidad que proporciona la simulación

del verdadero valor teórico de la probabilidad.

Godino (1998) justifica el uso de materiales en la medida que haga posible el planteamiento de problemas significativos, dentro de situaciones didácticas con oportunidad de indagar posibles soluciones, expresar dichas soluciones y razonar su validez. En particular, el empleo de la simulación es especialmente útil en la enseñanza de las distribuciones en el muestreo. Godino (1995) manifiesta que al realizar muestreos repetidos con el ordenador, los puntos esenciales en estas distribuciones son reconocer que el estimador es una variable aleatoria, que se puede conocer el tipo de distribución que sigue el parámetro, y que el valor esperado de un estimador insesgado se acercará al del parámetro en la población.

Lipson (1994) nos dice que la idea de distribución en el muestreo es compleja y su comprensión no puede dissociarse de la comprensión del proceso de muestreo que es dinámico, depende de la población, el tipo de muestras extraídas, el estadístico que se calcule a partir de estas muestras y su distribución. Se destaca el trabajo que están realizando delMas, Garfield y Chance (1999, 2004) y Chance delMas, Garfield (2004) en desarrollar actividades de simulación en las distribuciones muestrales, para mejorar el razonamiento estadístico de los estudiantes.

En los textos Rossman (1996), Mendenhall y Sincich (1997), Johnson y Kuby (2004) se proponen ejercicios para generar muestras aleatorias de observaciones de diversas distribuciones de probabilidad, usando los paquetes de software estadístico MINITAB, SAS y planilla electrónica EXCEL. En este proceso de estudio se quiere confrontar a los alumnos con problemas cuya solución requiera el uso de los elementos relacionados con nuestro teorema central del límite. Se puede mencionar las siguientes representaciones simuladas de interés: a) Simulación con material manipulable: para muestras pequeñas se utiliza el aparato de Galton, así como los dispositivos de los dados y bolas extraídas de urnas mediante las anotaciones del experimento con lápiz y papel; b) Simulación con el ordenador para muestras grandes.

Los programas estadísticos actuales ofrecen simulaciones variadas de representaciones gráficas como numéricas para muestras grandes, además de superponer distribuciones de probabilidades. Sin embargo, la simulación en las distribuciones muestrales mediante distintos materiales (material manipulable, software estadístico, ordenador, libros, representaciones gráficas) de apoyo a descubrir y comprender conceptos básicos del teorema central del límite es todo un desafío para los docentes e investigadores en la enseñanza y aprendizaje del tema.

**Conclusiones sobre el lenguaje y representaciones presentes en los textos analizados**

En la Tabla 4.4.2 se presenta un resumen de las expresiones y representaciones del teorema. Debido a la diversidad de expresiones del teorema central del límite y los conceptos relacionados con el teorema, hemos considerados solamente los términos específicos del teorema, encontrando que son los textos de estadística matemática los que la presentan, además de un texto para ingenieros, Scheaffer y McClave (1993). Observamos además que estas expresiones tienden a no ser considerados en los nuevos textos y ediciones. El lenguaje más común para referirse al teorema es a través de los símbolos, presente en todos los textos a excepción de Johnson y Kuby (2004).

**Tabla 4.4.2.** Lenguaje y representaciones del teorema presente en los textos

Textos	[4]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]	[15]	[17]	[19]	[21]	[23]	[26]	[27]	[28]	[29]
Términos		☆	☆	☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△	○	
Símbolos	△	☆	☆	☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△	○	
Gráficos	△					△	△		✦	△	△					◎
Simulación				☆			△		✦		△			△		◎

En relación a las representaciones gráficas es escasa su presencia en los textos analizados, ya que la mayoría se limita a los histogramas de la distribución binomial. Se destaca el texto de Johnson y Kuby (2004) que muestra gráficos para distintos tamaños de muestras en varias distribuciones no clásicas. De igual forma, llama la atención que el lenguaje menos utilizado en los libros sea la simulación, parece que aún no considerado de relevancia por los autores modernos como apoyo didáctico a la comprensión del teorema. De los ocho textos de estadística para ingenieros sólo tres la presentan. Además, se encuentra que sólo los textos Johnson y Kuby (2004) y Devore (2001) intentan conducir al alumno de la simulación manual a la simulación con uso del ordenador, transferencia de secuencia didáctica del teorema que consideramos importante.

**4.5. PROCEDIMIENTOS**

Los procedimientos y algoritmos son las técnicas específicas o estrategias realizadas para la resolución de problemas. Las situaciones-problemas relacionadas con el teorema se puede resolver utilizando las siguientes técnicas:

*API: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias*

El procedimiento general de resolución de problemas presente en la mayor parte de los libros es el siguiente: entender el problema, reconocer la distribución inicial de la población, obtener la distribución en el muestreo de la variable aleatoria, estandarización normal de la variable aleatoria, calcular la probabilidad pedida mediante la normal estándar, interpretación. A continuación se describe dos casos típicos en los libros:

El primero es el cálculo algebraico de la *suma de variables aleatorias*. Dos son las distribuciones discretas más utilizadas por los autores, la distribución binomial y la de Poisson. Se reproduce un ejemplo cuya solución comienza definiendo la variable  $S_n$  “número de árboles que mueren en la muestra de tamaño 250”, como suma de variables Bernoulli de parámetro  $p = 0,2$ ; que es la proporción de árboles que mueren por el producto químico. Se estima la probabilidad pedida  $P(S_n > 60)$  mediante el teorema central del límite ( $n$  es suficientemente grande), determinando la esperanza y varianza de la variable suma, que son respectivamente 50 y 40. Al estandarizar la variable suma, usando la corrección de continuidad, se recurre a la tabla de la distribución normal estándar para obtener el valor crítico; en este caso de forma indirecta. Así, la probabilidad de que mueran al menos 60 árboles es de un 5,7%. Este campo de problemas permite al alumno en forma concreta comparar esta aproximación con el cálculo de probabilidad de la variable suma en forma exacta, mediante el modelo de la distribución binomial de parámetros  $n = 250$  y  $p = 0,2$ .

---

Las compañías eléctricas podan los árboles que crecen cerca de sus líneas para evitar cortes eléctricos debidos a la caída de árboles durante las tormentas. La aplicación de un producto químico para retrasar el crecimiento de los árboles es más barato que podar los árboles, pero estos productos matan algunos de los árboles. Suponga que un producto químico de este tipo matará el 20% de los arces. La compañía eléctrica prueba este producto con una muestra aleatoria de 250 arces.

- a) ¿Cuál es la media y la desviación estándar del número de árboles de la muestra que mueren?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran al menos 60 árboles (el 24% de la muestra)? Moore (1995, pp. 327)
- 

El segundo caso es el cálculo algebraico de la *media muestral de variables aleatorias*. Este caso es el más típico y presente en todos los libros de textos analizados. Las situaciones planteadas no son explícitas en la aplicación del teorema central del límite, en cuanto a separar el procedimiento de cálculo primero para la suma de variables aleatorias y luego para la media aritmética. Esto puede ser una dificultad de

aprendizaje del tema en los alumnos. El siguiente ejemplo de aplicación en esta práctica típica consiste en calcular la probabilidad  $P(\bar{X} \leq 58)$ .

---

Los resultados de las pruebas finales de todos los alumnos del último año de las preparatorias de cierto estado tienen una media de 60 y una varianza de 64. Una generación específica de cierta preparatoria de  $n = 100$  alumnos tuvo una media de 58. ¿Puede afirmarse que esta preparatoria sea inferior? (Calcular la probabilidad de que la media muestral sea a lo más 58 cuando  $n = 100$ ).  
Mendenhall, Wackerly y Scheaffer (1994, pp. 299).

---

*AP2: Tipificación / destipificación del cálculo de probabilidades para obtener una muestra aleatoria de tamaño adecuado*

La resolución de problemas de tipificación o su inversa es importante en el trabajo con la distribución normal. En el siguiente ejemplo, que se observa en varios textos, se desea determinar que tan grande debe tomarse una muestra, dada un error de estimación entre los parámetros poblacionales y muestrales y con cierta probabilidad. La hipótesis de trabajo en términos probabilísticos es  $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,3) = 0,95$ . El desarrollo de esta expresión conduce a encontrar un tamaño de muestra adecuado. Para ello, se estandariza el error de estimación del parámetro  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$  a la normal tipificada, por el teorema central del límite. Mediante la tabla normal y despejando la incógnita  $n$ , se concluye que se necesitan 43 observaciones para que la media de la muestra tenga probabilidad del 95% de estar dentro de 0,3 onzas de la media de la población. Moore (1995, pp. 70) plantea un ejemplo en esta situación utilizando la tabla de la distribución normal.

---

Se ha observado durante mucho tiempo que una máquina determinada para llenar botellas, tiene una varianza en las cantidades de llenado aproximadamente de  $\sigma^2 = 1$  onza. Sin embargo el promedio de las onzas de llenado  $\mu$  depende de un ajuste que puede cambiar de día a día, o de operador a operador. ¿Cuántas observaciones se deben efectuar en la muestra para que  $\bar{X}$  quede a menos de 0,3 onzas de  $\mu$  con una probabilidad de 0,95? Scheaffer y Mc Clave (1993, pp. 236).

---

*AP3: Cálculo de probabilidades referidas al teorema con calculadora, tablas de distribución o programa de ordenador*

Para muestras de tamaño grande es útil el cálculo de probabilidades mediante simulación con el ordenador, en la cual obtener una muestra de tamaño  $n$  en una población es equivalente a sacar una bola (la muestra de tamaño  $n$ ) de una población (todas las muestras de tamaño  $n$  de la población de referencia), y obtener de tal muestra el estadístico que queremos calcular. Creemos que uno de los enfoques actuales de la

estadística debe ser la interpretación de los resultados de salidas de paquetes estadísticos con el ordenador, utilizando datos reales y situaciones de interés del educando. La mayor parte de los paquetes de software de estadística para ordenadores cuenta con algoritmos integrados para generar muestras aleatorias de observaciones de diversas distribuciones de probabilidad.

De los textos analizados sólo dos libros plantean problemas con ordenador, con ejercicios e instrucciones anotadas. Mendenhall y Sincich (1997) presentan ejercicios del tema con uso de paquetes estadísticos SAS y MINITAB (pp. 333). Johnson y Kuby (2004) además proponen ejercicios utilizando MINITAB, EXCEL y la calculadora TI-83 (ver comandos en las páginas 252 para generar  $n$  datos aleatorios de una distribución normal dado su media y desviación estándar y en la página 50 para elaborar un histograma). A continuación, se muestra un ejemplo en que se requieren los siguientes comandos de Minitab para su resolución: Normal Random data, Mean Row Statistics y Histogram. Esta práctica permite al estudiante ver si el teorema central del límite puede comprobarse empíricamente, es decir, si se cumple cuando la distribución muestral se forma con las medias muestrales que resultan de un muestreo aleatorio.

---

MINITAB. a) Use una computadora para elegir aleatoriamente 200 muestras de tamaño 24 de una población normal con media 20 y desviación estándar 4,5; b) Encuentre la media muestral para cada una de las 200 muestras; c) Use las 200 muestras para elaborar un histograma, encuentre la media de las medias muestrales y encuentre su desviación estándar; d) Compare los resultados de c) con las descripciones del teorema central del límite ( $\mu_{\bar{X}} = \mu$ ,  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ , para  $n$  suficientemente grande la distribución de las medias muestrales se vuelve aproximadamente normal); e) ¿Qué efecto tiene el incremento del tamaño de la muestra de 6 a 24?, ¿Qué efecto tiene el incremento de 100 muestras a 200 muestras? Johnson y Kuby (2004, pp. 289).

---

*AP4: Cálculo de probabilidades referidas al teorema a partir de simulación con materiales manipulables*

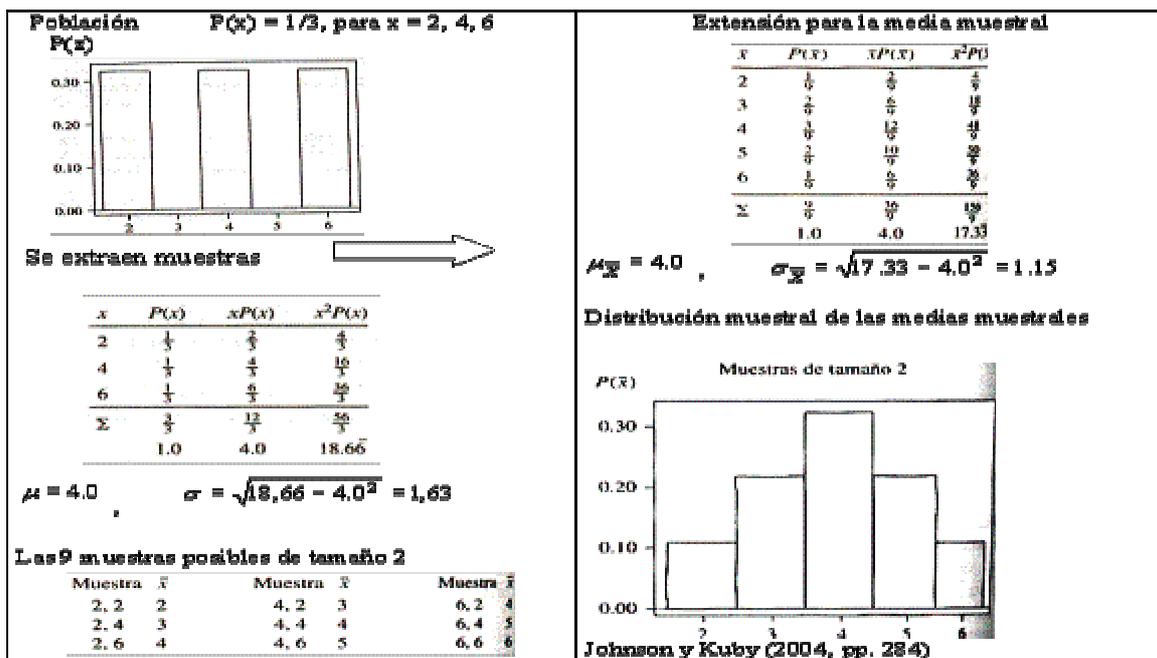
Se considera que un primer acercamiento del estudiante al teorema central del límite, debiera ser a través de la simulación manual con tamaños de muestras pequeños, con lápiz y papel, de manera que adquiera el procedimiento de trabajo de la aplicación del teorema central del límite. Luego, se pueden diseñar ejercicios para ser resueltos con ayuda de un ordenador. Por ejemplo, para generar muestras de tamaño 3, podemos tomar tres tarjetas idénticas numeradas 5, 7 y 9; las colocamos dentro de una bolsa y extraemos la muestra aplicando el criterio de reemplazo entre cada extracción. O bien, podemos usar un dado, de modo que 5 esté representado por 1 y 2; 7 por 3 y 4; y 9 por 5

y 6. Otra opción es la de extraer las muestras usando la tabla de números aleatorios.

Se presenta un ejemplo de cálculo de la distribución muestral teórica, Figura 4.5.1, tomado de Johnson y Kubly (2004, pp. 284). El procedimiento de resolución es: a) Considerar todas las muestras posibles de tamaño 2 que pueden extraerse de una población que contiene los números 2, 4 y 6; b) Representar la distribución de la población; c) Calcular la media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ ; d) Enumerar todas las muestras posibles de tamaño 2 y calcular la medias de estas muestras; e) Obtener la distribución de probabilidad de estas medias y calcular la media y el error estándar; f) Dibujar el histograma de la distribución muestral. Así, se demuestran las siguientes propiedades:

1. la media  $\mu_{\bar{x}}$  de la distribución muestral es igual a la media  $\mu$  de la población, con valor 4,0;
2. El error estándar de la media para la distribución muestral es igual a la desviación estándar de la población dividida por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 1,63/\sqrt{2} = 1,15$ ;
3. La distribución se comporta, aproximadamente, de manera normal.

Figura 4.5.1. Ejemplo de simulación con pequeñas muestras



### Conclusiones sobre los procedimientos presentados

Se observa en la Tabla 4.5.1, que la estrategia más común para resolver los problemas es el cálculo algebraico de la suma o media de v.a., presente en todos los textos analizados. Por el contrario, la técnica menos empleada en los libros es la tipificación o su inversa. Se considera que debería estar presente este procedimiento en muchos textos, ya que le exige al alumno habilidad en la operatoria algebraica y dominio del teorema como etapa inicial en el aprendizaje del teorema central del límite y sus elementos relacionados como por ejemplo el error de estimación.

**Tabla 4.5.1.** Procedimientos que presentan los libros seleccionados

Textos	[4]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]	[15]	[17]	[19]	[21]	[23]	[26]	[27]	[28]	[29]
AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias	△	☆	☆	☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△	○	◎
AP2: Tipificación/ destipificación	△	☆					△									
AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora, tablas estadísticas u ordenador							△		✦		△				△	◎
AP4: Cálculo de probabilidades a partir de simulación			☆	☆							△			△	△	◎

Con los libros y textos nuevos, la simulación se hace presente cada vez más como técnica específica de presentar el teorema, pero no con la misma fuerza innovadora que tiene la tecnología. De los textos considerados, sólo Mendenhall y Sincich (1997) y Johnson y Kuby (2004) enfatizan la importancia de las aplicaciones del teorema central del límite para muestras grandes, a través del planteamiento de problemas con el ordenador. Se encuentra esta técnica en cinco de ocho libros de ingeniería, pero llama la atención que sólo en tres de ellos con apoyo del ordenador.

De los 16 libros hay cuatro que presentan tan solo un algoritmo de resolución de problemas al estudiante, lo que consideramos que puede ser preocupante en la comprensión del teorema. En general, los textos de matemáticas carecen de simulación. Destacamos los textos para ingenieros, Scheaffer y Mc Clave (1993) y Devore (2001) que presentan tres de los cuatro algoritmos de aplicación del teorema, así también el texto moderno de Johnson y Kuby (2004).

En la enseñanza del teorema, se planteará una secuencia didáctica en el aprendizaje del teorema, partiendo con situaciones problema tangibles para el alumno con muestras pequeñas, desarrollo de la operatoria algebraica con el nivel matemático acorde a los requerimientos de un ingeniero, distinguiendo el cálculo de probabilidades

para variables transformadas de la suma y la media aritmética. Se considerará el enfoque actual del razonamiento estadístico con el uso de las nuevas tecnologías en la interpretación gráfica de variables con el ordenador.

#### 4.6. ENUNCIADOS DIFERENCIADOS DEL TEOREMA

Se encuentran diversos tipos de presentaciones para el teorema, ya sea general o formal que enfatizan diferentes aspectos del significado de los conceptos o se remiten a diferentes formas de aplicación. En primer lugar se clasifica los enunciados según se haga referencia a la convergencia en probabilidad o simplemente a la convergencia funcional ordinaria, encontrando dos casos diferenciados.

*El: Enunciado del teorema mediante la convergencia de sucesiones de variables aleatorias*

Se presenta el teorema de manera formal y rigurosa con un nivel de matemática avanzada. Damos el siguiente ejemplo dado por Cuadras (1999, pp. 189) para variables aleatorias independientes no idénticamente distribuidas:

---

Si en una sucesión de v.a. independientes de medias  $E(X_i) = \mu_i$  y varianzas  $Var(X_i) = \sigma_i^2$ , entonces, en ciertas condiciones generales, la variable suma, reducida:  $\frac{S_n - \sum \mu_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} \xrightarrow{\text{CONVERGE EN LEY}} N(0,1)$

---

La comprensión de este enunciado, que indica que la suma de v.a. tiende a distribuirse según una normal reducida, cuando  $n \rightarrow \infty$ , requiere que el estudiante esté familiarizado con los conceptos de convergencia en probabilidad, sucesiones de variables, límite y error de estimación. Además se puede encontrar diversos matices. Por ejemplo, Lebart, Morineau y Fénelon (1985) introducen la siguiente definición:

*Se dice que una sucesión de variables  $(X_n)$ , definidas en el mismo espacio  $\Omega$ , converge en probabilidad hacia una variable  $X$ , si para todo  $\varepsilon > 0$ :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Otro tipo de convergencia es la de convergencia en ley, que implica la convergencia funcional de la función de distribución:

Se dice que la sucesión  $(X_n)$  converge en ley hacia la variable  $X$ , si la función de distribución  $F_{X_n}(x)$  converge hacia la función de distribución  $F_X(x)$ .

Cabe señalar, que se puede demostrar que la convergencia en probabilidad implica la convergencia en ley.

*E2: Enunciado del teorema como límite ordinario de una sucesión de funciones*

Otra manera formal de enunciar el teorema central del límite es por medio de límites funcionales. Se reproduce la formulación del teorema por Kalbfleisch (1984, pp. 189) en términos de límite de funciones de la suma de  $n$  variables aleatorias independientes, discretas o continuas con igual media y varianza. En este caso la convergencia tiene un matiz determinista, mientras que en el anterior es aleatoria (en probabilidad).

---

Denotemos por  $f_n$  la función densidad de probabilidad de la suma  $S_n$ , o la altura del histograma de  $S_n$  en el caso discreto. El teorema central del límite afirma que, para todo número real  $z$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-z^2/2\right\}.$$


---

Debemos observar que en lugar de expresar el teorema a través de la función densidad de probabilidad, se puede definir con la función de distribución acumulada de la normal, como lo expresa Lebart y cols. (1985, pp. 56):

*Se verifica que la distribución de  $S_n$ , de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tiende a hacia la ley de Laplace-Gauss:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{F_{S_n}(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-z^2/2\right\} dz.$$

Otra clasificación es según la generalidad con que se presente el teorema y así se obtienen los casos siguientes:

*E3: Enunciado del teorema para la suma de variables aleatorias independientes no idénticamente distribuidas*

Si una v.a. puede representarse como una suma de  $n$  variables aleatorias independientes cualesquiera, entonces esta suma para un  $n$  suficientemente grande está distribuida aproximadamente normal.

---

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes con  $E(X_i) = \mu_i$  y

$Var(X_i) = \sigma_i^2$ ,  $i=1,2,\dots$ . Sea  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Luego bajo ciertas condiciones generales

$Z_n = \frac{S_n - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$  tiene aproximadamente la distribución  $N(0, 1)$ . (Meyer, 1992, pp. 332).

---

*E4: Enunciado del teorema para la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas*

Esta presentación más restringida del teorema es la más común en los libros, pero en la mayoría se presenta para la media muestral más que la suma. A continuación se ilustra un ejemplo para el caso de la suma:

---

Si se extrae una muestra aleatoria de  $n$  observaciones de una población con una media finita  $\mu$  y una varianza finita  $\sigma^2$ , entonces, si  $n$  es lo bastante grande, la distribución de muestreo de la suma  $S_n = \sum X_i$  se puede aproximar con una función de densidad normal cuya media es  $n\mu$  y varianza  $n\sigma^2$ . (Mendenhall y Sincich, 1997, pp. 315)

---

*E5: Enunciado del teorema de forma general*

Son varios los textos aplicado a la ingeniería que introducen el tema sin formulación matemática. Hoy en día es más conocido el teorema de manera general para el estimador de medias muestrales. Moore (1995, pp. 304) presenta el siguiente enunciado:

---

Obtén una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$  de cualquier población de media  $\mu$  y desviación típica finita  $\sigma$ . Cuando  $n$  es grande, la distribución de la media muestral  $\bar{X}$  se aproxima mucho a la distribución normal  $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$  con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma/\sqrt{n}$ .

---

*E6: Enunciado intuitivo del teorema*

Una forma de presentar el teorema es a través de la manipulación con objetos didácticos concretos de un experimento. Montgomery y Runger (1996, pp. 302) introducen el teorema mostrando gráficamente que la aproximación normal para  $\bar{X}$

depende del tamaño  $n$  de la muestra, mediante el lanzamientos de varios dados: a) primero muestra la distribución al lanzar un dado, cuyas probabilidades son iguales  $1/6$  para todos los valores obtenidos, 1,2,3,4,5 o 6; b) Luego presenta los gráficos de la distribución del puntaje promedio obtenidos cuando se lanzan dos, tres, cinco y diez dados respectivamente. Se hace notar que, si la población (caras de un dado) está relativamente lejos de ser normal, la distribución de los promedios queda aproximada, de manera razonablemente buena, por la distribución normal, incluso para tamaños de muestra tan pequeños como cinco. En particular, para muestras pequeñas, el teorema central del límite funciona donde la población sea continua, unimodal y simétrica.

### Conclusiones sobre los enunciados presentadas

Observamos en la Tabla 4.6.1 que el enunciado presente en la mayoría de los textos es la correspondiente a la suma de v.a.i. idénticamente distribuidas (E4). Los enunciados menos encontrados en los libros son los de mayor rigor matemático (E1 y E2), seguido del enunciado del teorema central del límite para v.a.i. no idénticamente distribuida. La tendencia de los textos actuales es hacia la presentación intuitiva del teorema, contrario a los libros más antiguo que lo introducen de manera formal el teorema.

**Tabla 4.6.1.** Enunciados que presentan los libros seleccionados

Textos	[4]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]	[15]	[17]	[19]	[21]	[23]	[26]	[27]	[28]	[29]
E1: Mediante convergencia de sucesiones de v.a.		☆	☆													
E2: Como límite ordinario de una sucesión de funciones		☆	☆	☆				☆								○
E3: Para la suma de variables independientes no idénticamente distribuidas		☆	☆	☆					✦							○
E4: Para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas	△	☆	☆	☆	✦	△	△	☆		△	△	△	△	△		○
E5: Enunciado de forma general	△	☆	☆	☆	✦	✦						△				○ ⊙
E6: Enunciado intuitivo del teorema							△	☆		△	△			△		⊙

El texto Wisniewsky y Velasco (2001) presenta cuatro enunciados, y los clásicos como Canavos (1992) y Peña (1995) dan sólo algunos de los seis. El texto de Johnson y Kuby (2004) prioriza sólo la presentación del teorema de forma general y mediante la simulación. Por el contrario, son los textos de estadística matemáticas los que presentan

más formas de introducir el teorema central del límite, por ejemplo en el libro de De Groot (1988) encontramos cinco enunciados del teorema, con nivel avanzado en matemática y de forma general. Por último observamos en los textos que los enunciados E4 a E6 no son precisos y claros, lo hacen por medio de un ejercicio planteado.

#### **4.7. PROPIEDADES**

Tauber (2001) en su estudio de la distribución normal clasificó las propiedades en: *Propiedades geométricas*: aquellas que se derivan del análisis de la gráfica de la función de densidad; *propiedades estadísticas*: aquellas que relacionan la distribución normal con la predicción de valores y el cálculo de probabilidades; y *propiedades algebraicas*: aquellas donde la función densidad es considerada como función algebraica. A continuación se presentan las propiedades encontradas que son de tres tipos:

1. Propiedades de la distribución de la suma o media de variables aleatorias que interviene en el teorema central del límite;
2. Propiedades de ciertas distribuciones para valores grandes de sus parámetros (se trata de aplicaciones concretas del teorema central del límite);
3. Propiedades de la distribución normal, que se deduce al aplicarlo. Para este caso sólo presentamos un resumen, puesto que fueron analizadas por Tauber (2001).

#### **Propiedades de la distribución de la suma de variables que interviene en el teorema**

Las propiedades que a continuación se dan, de alguna manera ponen en correspondencia diferentes elementos del teorema central del límite. La mayoría están clasificadas en propiedades estadísticas debido a que el teorema está inserto en la unidad de las distribuciones muestrales que tiene como base la teoría y cálculo de probabilidades. Las propiedades que realizan transformaciones son consideradas algebraicas (P5 y P6).

*P1: La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias*

Considere las v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con valores medios  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , respectivamente, y varianzas  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  respectivamente, además de  $n$  constantes numéricas  $a_1, \dots, a_n$ . Si

las v.a.  $X_i$  son o no independientes, se cumple que la media de la combinación lineal de las  $X_i$  es la suma de la medias. Esto es,  $E\left(\sum a_i X_i\right) = a_1 E(X_1) + \dots + a_n E(X_n) = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n$ . En forma general, esto conduce a la ley débil de los grandes números que dice que para una sucesión de v.a., la variable media  $\bar{X}_n$  converge en probabilidad hacia la variable degenerada (constante)  $\mu$  (Lebart y cols., 1985).

*P2: La varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas*

Continuando el caso anterior, si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son *independientes* se cumple que:  $Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$ . En el caso para  $X_1, X_2, \dots, X_n$

cualesquiera se tiene:  $Var(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)$ . (Devore, 2001). En el

caso en que la muestra proceda de una población con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  y como combinación lineal consideramos la media muestral  $\bar{X}$ , se tiene que la varianza de la media muestral es  $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ , además de  $E(\bar{X}) = \mu$  (Ardanuy y Martín, 1998). La relación de este caso con la distribución normal es la siguiente: si la población de partida es normal  $N(\mu, \sigma^2)$  resultará que  $\bar{X}$  tendrá también una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2/n)$ . Para el caso en que la población madre no sea normal, enunciada en P3, la distribución muestral de  $\bar{X}$  se aproxima a una normal  $N(\mu, \sigma^2/n)$  para tamaños de muestra  $n \geq 30$  (criterio de tipo práctico).

*P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal*

Esta propiedad está presente en todos los textos analizados, para definir el teorema central del límite. Son pocos los libros que primero definen el teorema para la suma y luego para el promedio de la muestra. Canavos (1992, pp. 230) lo plantea en lenguaje simbólico y verbal:

*Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aleatorias independientes e igualmente*

distribuidas con una distribución de probabilidad no especificada, y que tienen media  $E(X_i) = \mu$  y  $Var(X_i) = \sigma^2$  finita. El promedio muestral  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  tiende a una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2/n$ .

Ardanuy y Martín (1998) observan que a veces se obtiene la muestra por medio de un *muestreo sin reposición* de una población con  $N$  unidades estadísticas (muestreo en una población finita). En este caso las  $n$  variables aleatorias serán *dependientes* y su media muestral tiene el siguiente valor esperado y varianza:  $E(\bar{X}) = \mu$  y  $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} Cov(X_i, X_j) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)}$ , donde  $N$  es el tamaño de la población y  $n$  el tamaño de la muestra. Para muestras grandes se tiene que  $\bar{X}$  es aproximadamente normal con esa media y varianza. Aquí nuevamente observamos que el valor esperado de  $\bar{X}$  es independiente de  $N$  y  $n$  y además que para  $N \rightarrow \infty$ , la expresión  $(N-n)/(N-1)$  tiende a 1 y, por lo tanto, la varianza de la media muestral  $\bar{X}$  será aproximadamente  $\sigma^2/n$ . En la práctica suele considerarse buena esta aproximación cuando la fracción de muestreo  $n/N$  es menor de un 10%.

#### *P4: La aproximación mejora con el número de sumandos*

Si bien la distribución límite de la suma  $S_n = \sum X_i$  de v.a. no depende de las distribuciones de las  $X_i$ , la *rapidez* con la que la suma se aproxima a la normal depende en gran medida de la forma de dichas distribuciones. Kalbfleisch (1984) dice que si son simétricas, la aproximación a la normal es bastante buena para valores muy pequeños de  $n$ . Sin embargo, si las distribuciones de las  $X_i$  son muy asimétricas,  $n$  tiene que ser a veces muy grande para obtener una aproximación satisfactoria. Algunos ejemplos gráficos son presentados en Johnson y Kubly (2004, pp. 265,267,286 y 287) de aproximación a la normal para distintos tamaños de muestra de la media muestral en las distribuciones binomial, uniforme, en forma de J, de U y normal. También, Devore (2001, pp. 226) ilustra un ejemplo de simulación para una distribución lognormal poblacional sesgada, observando la aproximación a la normal para distintos tamaños de muestra. Otros ejemplos para estudiar el comportamiento del tamaño de muestra son dados en Mendenhall y Sincich (1997, pp. 302 a 310).

*P5: Las transformaciones lineales de variables aleatorias también siguen una distribución asintótica normal*

*Caso 1:* La distribución aproximada de la media muestral es presentada en el teorema como variable transformada a la normal estándar, siendo la expresión más común en los libros. Por ejemplo Velasco y Wisniewski (2001, pp. 218) hacen la siguiente definición del teorema:

*Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  constituyen una muestra aleatoria de una población infinita que tiene la media  $\mu$ , la varianza  $\sigma^2$ , entonces la distribución límite de  $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , es la distribución normal tipificada.*

*Caso 2:* El caso anterior se puede ampliar a una clase grande de funciones de  $\bar{X}$  o de funciones de cualquier variable aleatoria asintóticamente normal. Scheaffer y McClave (1993) lo presenta en la forma:

*Mediante el uso de las propiedades de los desarrollos de las series de Taylor, podemos conocer el comportamiento de una función de  $\bar{X}$ ,  $f(\bar{X})$ , donde  $f(x)$  es una función de valor real tal que su derivada existe cerca de  $\mu$  y es distinta de cero. La variable transformada  $Z$  tiene una función de distribución que converge a la distribución normal estándar cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $Z = \frac{\sqrt{n}[g(\bar{X}) - g(\mu)]}{|g'(\mu)| \cdot \sigma}$*

*P6: Las medias muestrales en dos poblaciones sigue una distribución aproximadamente normal*

Si tomamos muestras aleatorias independientes de tamaño  $n_1$  y  $n_2$  extraídas a partir de poblaciones con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ , respectivamente, entonces la distribución muestral para la diferencia de medias  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  es aproximadamente normal, con media y varianza dada por:  $\mu_1 - \mu_2$  y  $\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$ . (Ardanuy y Martín 1998, pp. 129).

*P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua*

Sea  $S_n$  la variable aleatoria “número de aciertos” en  $n$  experiencias de Bernoulli; si  $X_i$  es una variable de Bernoulli, la variable  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  sigue una ley binomial, con  $E(S_n) = np$  y  $Var(S_n) = np(1-p)$ . Pongamos:  $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . Cuando  $n$  tiende a infinito, la función distribución de  $S_n$  tiende a la  $N(np, np(1-p))$ . (Lebart y cols., 1985). En Estadística se utiliza la transformación “arco seno”  $Y = \arcsen \sqrt{\frac{X + 3/8}{n + 3/4}}$  que transforma la variable  $X$  con distribución  $B(n, p)$  en una variable  $Y$  aproximadamente normal  $N(\arcsen \sqrt{p}, 1/4n)$ .

*P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal*

*Distribución Poisson:* Para  $\mu$  grande, la distribución Poisson  $P(\mu)$  se aproxima a la distribución normal  $N(\mu, \mu)$ . La suma de v.a. independientes con distribución de Poisson es también poisson de parámetro la suma de parámetros y esta aproximación es aceptable para  $\mu > 5$  y mejora a medida que aumenta  $\mu$ . En estadística se utiliza también la transformación “raíz cuadrada”  $Y = \sqrt{X + \frac{3}{8}}$  que convierte la variable  $X$  con distribución  $P(\mu)$  en una variable  $Y$  con distribución normal aproximada  $N(\sqrt{\mu}, 1/4)$ .

*Distribución Gamma:* Como la distribución gamma  $G(\alpha, \beta)$ , siendo  $\beta$  entero, es la distribución de la suma de  $\beta$  variables aleatorias independientes, con distribución exponencial de parámetro  $\alpha$ , la distribución gamma se puede considerar aproximadamente normal  $N(\beta/\alpha, \beta/\alpha^2)$ . La aproximación es suficiente para  $\beta \geq 15$ .

*Distribución Uniforme:* Sea  $X$  v.a. con distribución uniforme en el intervalo  $(-1, +1)$ . Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a. independientes con la misma distribución que  $X$ , entonces la v.a.  $S_n = \sum X_i$  tiene media 0 y varianza  $n/3$ . Luego la v.a.  $Z = \frac{S_n}{\sqrt{n/3}}$  tiene aproximadamente una distribución normal estándar  $N(0, 1)$ . Esta distribución se utiliza para generar números aleatorios con distribución  $N(0, 1)$ . Es suficiente tomar  $n = 12$  (Cuadras, 1999).

*Distribución Log-Normal:* La v.a.  $X$  sigue una distribución logarítmico-normal  $LN(a, b, \sigma^2)$  de parámetros una constante  $a$ ,  $b = e^\mu$  y  $\sigma^2$ , si la variable transformada

## Capítulo 4

$Y = \log(X - a)$  sigue la distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Cuadras (1999) señala que bajo ciertas condiciones de regularidad, si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a. independientes, la distribución de la v.a. producto  $P_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$  puede aproximarse a una log-normal si  $n$  es grande, independientemente de la distribución de cada  $X_i$ . Es decir,  $P_n$  se distribuye aproximada a una  $N\left(a + b e^{\sigma^2/2}, b^2 e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)\right)$ .

### *P9: Los errores aleatorios siguen una distribución asintótica normal*

Lo errores llamados aleatorios, que se presentan en observaciones astronómicas, pesadas de balanzas, etc., y en general en la mayoría de las medidas con algún aparato, son la suma de un número elevado de errores elementales independientes: corrientes de aire, vibraciones, error de apreciación, etc. (Meyer, 1992) (Ver el campo de problema (CP5) de estimación del error de aproximación en el teorema central del límite, en la cual se comentó de los estimadores insesgado, la desigualdad de Chebyshev y la ley de los grandes números en el estudio de los errores).

Una pregunta de interés es ¿En qué condiciones podremos identificar un valor observado de una v.a.  $X$  con su media  $E(X)$ ? Parzen (1987) señala que para que haya una probabilidad alta de que el porcentaje de error de  $X$  como estimador de  $E(X)$  sea pequeño, es suficiente que la razón de señal a ruido  $|E(X)|/\sigma_X$  sea grande. ¿Cuán grande debe ser la medida de la razón de señal a ruido de  $X$  para que su valor observado  $x$  sea buena estimación de su media? Una respuesta es considerar  $|E(X)|/\sigma_X \geq 20$  si se aplica la aproximación de la distribución normal.

### *P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal*

Si en una distribución conocida se desconocen los valores que toma el parámetro, el problema estadístico consiste en estimar dicho valor a través de la información entregada por una muestra. En el estudio de las propiedades de un buen estimador se percibe que mientras menor es la varianza de un estimador incrementa la probabilidad de obtener estimaciones más próximas al verdadero valor del parámetro que se estima. Luego, mientras más pequeña es su varianza, mayor es la eficiencia del estimador.

El método de máxima verosimilitud es un procedimiento para obtener estimadores de parámetros poblacionales. Esta técnica aplicable a una amplia gama de problemas dispone de buenas propiedades como la de ser asintóticamente insesgado,

consistente e invariante. En particular, una propiedad muy importante se refiere a la distribución de probabilidad del estimador por ser consistente: Al aumentar el tamaño muestral, su distribución de probabilidad converge a una normal, con media  $\mu$  y varianza igual a la cota de Cramer-Rao en un sentido límite, por lo que es asintóticamente eficiente.

Notemos que un estimador insesgado  $\hat{\theta}$  es el más eficiente de todos los estimadores insesgados si su varianza satisface la Cota Inferior de la Desigualdad de

Cramer – Rao 
$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left\{\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right\}^2} = CCR.$$
 Así, el estimador máximo

verosímil tiene distribución asintótica normal  $N(\theta_0, CCR)$  siendo  $\theta_0$  el verdadero valor del parámetro  $\theta$ . (Ver propiedades de estos estimadores en Peña, 1995, pp. 245).

*P11: Los estimadores de los momentos tienen distribución asintótica normal*

El método de los momentos es una técnica para la obtención de estimadores de los parámetros de una distribución. El procedimiento es sencillo y consiste en igualar momentos poblacionales respecto al origen a los correspondientes momentos muestrales, formando tantas ecuaciones como parámetros poblacionales se pretenden estimar. Una propiedad de los estimadores del método de los momentos, al aplicar el teorema central del límite al momento  $m_k = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^k}{n}$  de orden  $k$  respecto al origen, es que al ser una m.a. simple, como promedio de v.a. independientes e igualmente distribuidas:  $m_k$  tiene una distribución límite normal, con media igual al correspondiente momento poblacional  $\mu_k = E(X^k)$  y varianza  $(\mu_2 - \mu_1^2)/n$  (Novales, 1997).

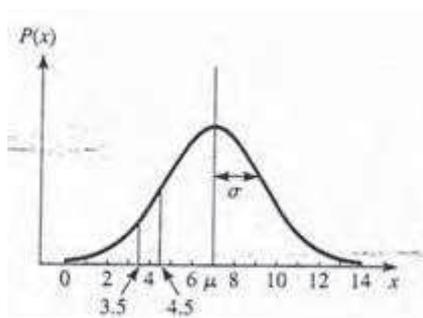
*P12: Corrección de continuidad*

En la mayoría de los textos de estadística para ingenieros la corrección de continuidad la introducen al usar la aproximación normal a la distribución binomial, que puede mejorarse si lo que se desea es aproximar probabilidades para una variable aleatoria discreta a partir del intervalo de probabilidades de una variable aleatoria continua. Es decir, si  $X$  es una v.a. binomial con parámetros  $n$  y  $p$ , y sea  $Z$  una v.a. normal estándar, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - 0,5 - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{b + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Se utiliza siempre que una variable aleatoria discreta se aproxima mediante una variable aleatoria continua. Johnson y Kubly (2004) describen esta propiedad para calcular la probabilidad que  $x=4$  de una v.a.  $X$  con distribución binomial de parámetros  $n=14$  y  $p=0,5$ , indicando que para tener una aproximación adecuada es necesario considerar la suma y resta de 0,5 al valor de  $x$ , denominado factor de corrección por continuidad. La probabilidad exacta de 0,061 y la probabilidad normal de 0,0594 están razonablemente próximas en valor. Una representación gráfica de esta situación es dada a continuación:

**Figura 4.7.1.** Aproximación normal a la distribución binomial



### Propiedades de la distribución normal que se deduce del teorema

Tauber (2001, pp. 139 a 144) encontró las siguientes propiedades:

#### *Propiedades geométricas:*

1. La distribución normal es *simétrica* respecto de su eje vertical donde tiene la media;
2. La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo, ocurre en  $x = \mu$  (media);
3. La media, mediana y moda en las distribuciones *simétricas* coinciden en un mismo punto, por tanto son iguales en las distribuciones normales;
4. Concavidad y convexidad;
5. El eje de las abscisas es una *asíntota* de la función de densidad.

*Propiedades estadísticas:*

6. Probabilidades dadas por área parciales bajo la curva normal;
7. Probabilidades dadas por el área total;
8. Distribución de casos en relación con la desviación típica.

*Propiedades algebraicas:*

9. Las transformaciones lineales de variables normales también siguen una distribución normal.

### **Conclusiones sobre las propiedades presentadas**

De los textos analizados, se observa en la Tabla 4.7.1, que las propiedades más frecuentes en los textos son la corrección de continuidad (P12), las transformaciones lineales de la media muestral que se aproximan a una normal (P5), la aproximación de una distribución discreta por una continua (P7) y la media aritmética se aproxima a una distribución normal (P3). La propiedad para estimadores de los momentos (P11) sólo es encontrada en el texto de Velasco y Wisniewski (2001). También es escasa la presencia en los textos de las propiedades referida a los errores (P9) y estimadores de máxima verosimilitud (P10). Además, la mitad de los textos consultados, inicia el teorema central del límite con el cálculo algebraico de las propiedades de la suma y varianza de v.a. (P1 y P2), lo que implica que en la otra mitad de los libros queda por cuenta del estudiante esta operatoria.

Los textos de estadística matemática son los que más propiedades tienen, siendo Meyer (1992) el mayor con nueve de las doce propiedades. Lo siguen los textos clásicos que también trabajan las propiedades algebraicas. Los libros para ingenieros presentan 5 a 6 propiedades no considerando las propiedades matemáticas P8 a P11. Los textos Miller y cols. (1992) y Montgomery y Runger (1996) son muy limitados en propiedades presentando tan sólo la propiedad de la transformación lineal. Al igual los textos con enfoque moderno son deficitarios en propiedades. En general, los libros carecen en presentar y profundizar el teorema central del límite mediante las propiedades, de las cuales las aproximaciones de distribuciones clásicas son importantes para estudiantes de ingeniería en la aplicación de las ciencias de la ingeniería. Por ejemplo, Devore (2001) señala esta propiedad de aproximar la distribución Poisson como un ejercicio planteado de la sección del capítulo y Mendenhall Wackerly y Scheaffer (1994) lo presenta mediante un ejemplo concreto sin definirlo.

**Tabla 4.7.1.** Propiedades que presentan los libros seleccionados

Textos	[4]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]	[15]	[17]	[19]	[21]	[23]	[26]	[27]	[28]	[29]
P1: Media de la distribución de la suma de variables aleatorias		☆		☆	✦		△	☆	✦		△			△		
P2: Varianza de la distribución de la suma de variables aleatorias		☆		☆	✦		△	☆	✦		△			△		
P3: Media aritmética sigue una distribución aproximadamente normal		☆	☆	☆	✦		△	☆			△	△	△	△		
P4: La aproximación mejora con el número de sumandos							△		✦		△			△		⊙
P5: Transformaciones lineales de v.a.	△	☆	☆	☆	✦	△	△	☆		△		△	△			○
P6: Medias muestrales en dos poblaciones siguen aproximación normal	△					△		☆				△		△		○
P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua		☆	☆	☆	✦		△	☆	✦		△	△	△	△		⊙
P8: Aproximación de distribuciones clásicas a la distribución normal	△	☆	☆	☆				☆	✦					△		
P9: Errores aleatorios con aprox. normal	△	☆		☆												
P10: Estimadores de máxima verosimilitud con distribución asintótica normal			☆	☆					✦				△			
P11: Estimadores de momentos con distribución asintótica normal													△			
P12: Corrección de continuidad	△	☆	☆	☆	✦	△	△	☆	✦	△	△	△	△	△	○	⊙

Observamos en los textos que las propiedades P6 y P7 no son definidas en forma precisa y clara, por ejemplo en el libro Scheaffer y Mc Clave (1993) la propiedad P6 la presenta como un ejercicio planteado dentro de un listado de ejercicios. La corrección de continuidad (P12) está presente en todos los textos pero con diferente intensidad; el texto de De Groot (1998) desarrolla la aproximación de una distribución discreta por una distribución continua como método estándar para mejorar la calidad de la aproximación y luego grafica la aproximación de un histograma, otros libros sólo aplican la propiedad en un ejemplo de aproximación a la binomial y otros como Scheaffer y McClave (1993) lo indican en un ejemplo sin denominación de corrección de continuidad, así como Montgomery y Runger (1996) lo plantean como ejercicio de la sección de aproximación normal a las distribuciones binomial y poisson.

De los 16 textos analizados, la mitad presenta el tema específico del teorema central del límite y a continuación como caso especial la aproximación de la binomial por la normal. En textos como Canavos (1992) y Miller, Freund y Johnson (1992) presentan primero en un capítulo de distribuciones la binomial y su forma aproximada, y en otro capítulo posterior el teorema central del límite. Se cuestionará en la metodología de enseñanza del teorema si es conveniente presentar el tema al estudiante, partiendo con el caso particular del estudio de la distribución binomial para muestras

grandes, seguido del caso general para cualquier distribución, como lo enfoca Meyer (1992).

#### 4.8. ARGUMENTOS

Todos los enunciados, propiedades, problemas y algoritmos se ligán entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o demostrar las propiedades y relaciones. A continuación, se muestra los tipos de argumentos relacionados con el teorema.

##### *A1: Demostraciones formales algebraicas y/o deductivas*

Un primer argumento para validar el teorema central del límite y sus propiedades es por medio de las demostraciones matemáticas, que considera fórmulas y propiedades de los elementos previos relacionados con el teorema (propio de la matemática) de forma lógico deductivo.

##### *Caso 1: Demostración por la función generadora de momentos*

La demostración clásica del teorema central del límite se presenta para el caso de la suma de v.a.i.i.d. en el cual existe la función generadora de momentos (fgm) para las variables aleatorias en la muestra, y requiere revisar los conceptos básicos de la fgm y de convergencia en series. La podemos ver en Mendenhall, Wackerly y Scheaffer (1994, pp. 302), Meyer (1992, pp. 333), Durand e Ipiña (1994, pp. 191), Canavos (1992 pp. 248) El bosquejo de la demostración es la siguiente:

Sea  $M$  la fgm de las v.a.  $X_i$ . Como son independientes la fgm de la suma  $S_n$  de v.a. está dada por  $M_{S_n}(t) = [M(t)]^n$ , y puesto que  $Z_n = (S_n - n\mu) / \sigma\sqrt{n}$  es una función lineal de  $S_n$ , tenemos que la fgm de  $S_n$  está dada por  $M_{Z_n}(t) = e^{-(\sqrt{n}\mu / \sigma)t} \left[ M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right]^n$ . Aplicando

$$\text{logaritmo natural se tiene } \ln M_{Z_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma}t + n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \dots\dots\dots(1).$$

La idea de la demostración consiste en investigar  $M_{Z_n}(t)$  para grandes valores de  $n$ . Desarrollemos  $M(t)$  en una serie de Maclaurin:

$$M(t) = 1 + M'(0)t + \frac{M''(0)t^2}{2} + R = 1 + \mu t + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2} + R, \text{ en donde } R \text{ es el término del}$$

## Capítulo 4

resto. Luego (1) queda  $\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma} + n \ln \left[ 1 + \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R \right]$ . Obtenemos así,

usando el desarrollo de Maclaurin para  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$  y para  $n$  suficientemente grande, que:

$$\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma} + n \left[ \left( \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R \right)^2 + \dots \right].$$

Sin dar todos los detalles de pasos algebraicos, queremos investigar la expresión  $\ln M_{Z_n}(t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Cualquier término que tiene una potencia positiva de  $n$  en el denominador tenderá a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Después, se encuentra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln M_{Z_n}(t) = t^2/2$ . Luego, tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$ . Esta es la fgm de la variable aleatoria con distribución  $N(0,1)$ . Debido a la propiedad de unicidad de la fgm podemos concluir que la v.a.  $Z_n$  converge en distribución (cuando  $n \rightarrow \infty$ ) a la distribución  $N(0,1)$ .

Aunque esta demostración no es completamente rigurosa, da la idea de la deducción de este importante teorema y su complejidad.

### Caso 2: Demostración por la función característica

Parzen (1987, pp. 475) y Lebart, Morineau y Fénelon (1985, pp. 60) presentan la validación de este teorema fundamental mediante el uso de la noción de función característica. A continuación se describe los elementos y las principales etapas de la demostración a través de las cinco propiedades de la función característica:

Se puede expresar la función característica  $\varphi(t)$  de una variable  $Z$  como  $\varphi(t) = E(e^{itX}) = 1 + itE(Z) - \frac{t^2}{2}E(Z^2) + \dots$ . Consideremos la sucesión  $(X_i)$  de v.a. y sea la variable aleatoria  $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma\sqrt{n}$  tiene media nula, varianza igual a  $1/n$ , y los momentos de orden superior tienden a 0 más rápidamente que  $1/n$ . Su función característica se escribe  $\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2n}O\left(\frac{1}{n}\right)$ , donde  $O(1/n)$  designa la suma de términos que tienden a 0 más rápidamente que  $1/n$ . La variable  $Z_n$ , es la suma de  $n$  variables independientes  $Z_i$ :  $Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ . Luego la función característica de  $Z_n$  será:

$\varphi_n(t) = [\varphi(t)]^n \approx \left[ 1 - \frac{t^2}{2n} \binom{n}{1} \right]^n$ . Por consiguiente:  $\text{Log } \varphi_n(t) \approx n \log \left( 1 - \frac{t^2}{2n} \right) \approx -\frac{t^2}{2}$ . Esto es, la

función característica de  $Z_n$  tiende hacia  $\exp(-t^2/2)$ , función característica de la ley de Laplace-Gauss centrada y reducida  $N(0,1)$ .

Observe que el seguimiento de esta argumentación del teorema requiere de conocimientos de matemáticas avanzadas. La función característica de  $X$  es la esperanza matemática de la variable compleja  $\exp(itX) = \cos tX + i \text{sen} tX$ . Esta función  $\varphi(t)$  (aplicación de los reales en los complejos) es conocida como “transformada de Fourier” de la medida de probabilidad. Se expresa como una serie cuyos coeficientes no conocidos son los momentos de la variable aleatoria. Así, una v.a. viene caracterizada por el conjunto de sus momentos si estos existen, y si la serie precedente converge.

#### A2: *Presentación del teorema como caso especial de un resultado general*

En varios textos, el tema parte con la aproximación normal a la distribución binomial, cuya variable se puede representar como la suma de variables aleatorias independientes Bernoulli.

Meyer (1992, pp. 327) lo presenta mediante un ejemplo, de un proceso de fabricación de lavadoras con un 5% de defectuosas. Se pregunta, al inspeccionar 100 lavadoras, la probabilidad de que menos de 4 sean defectuosas. El valor exacto es difícil de calcular directamente. El autor considera la aproximación para  $n$  grande, usando la fórmula de Stirling que establece la siguiente aproximación para un  $n$  grande:  $n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}$ . Al usar esta fórmula para los diversos factoriales que aparecen en la distribución binomial se demuestra la aproximación normal a la distribución binomial, de gran importancia teórica y práctica. Una demostración matemática que no pretende ser rigurosa lo presenta Lebart y cols. (1985, pp. 54), utilizando la aproximación de Stirling. Parzen (1987, pp. 470) da una argumentación vía la función característica de la normalidad asintótica de variables aleatorias binomiales.

#### A3: *Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo*

Aunque una demostración matemática establece la validez del teorema, puede que no contribuya mucho a la idea intuitiva del resultado. Otra forma de validar el teorema es que mediante la simulación manipulable de distribuciones en el muestreo de estadísticos se generaliza las conclusiones de la experiencia, es decir, a partir de una

población sencilla se realiza una simulación con lápiz y papel de la elección de la muestra aleatoria de distintos tamaños de esta población. Meyer (1992, pp. 335) presenta el siguiente ejemplo orientado más numéricamente:

---

Considere una urna que contiene tres clases de objetos identificados como 0, 1 y 2. Suponiendo que hay 20 ceros, 30 unos y 50 dos. Se saca un artículo al azar y se anota su valor, digamos  $X_1$ . Suponiendo que

$X_1$  tiene la distribución siguiente  $P(X_1 = x) = \begin{cases} 0,2 & x = 0 \\ 0,3 & x = 1 \\ 0,5 & x = 2 \end{cases}$ . Suponga que el artículo escogido primero se

sustituye y luego se escoge un segundo artículo y se anota su valor,  $X_2$ . Considere la v.a.  $Z_2 = (X_1 + X_2)/2$  con distribución:  $P(Z_2 = z) = 0,04, 0,12, 0,29, 0,30, 0,25$  con valores de la v.a.  $z$  respectivamente  $0, 1/2, 1, 3/2, 2$ . Finalmente, supongamos que después de que el segundo artículo ha sido también reemplazado, se escoge un tercer artículo y se anota su valor  $X_3$ . Considerar la v.a.  $Z_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$  y su distribución:

$z_3$	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
$P(Z_3 = z_3)$	0,008	0,036	0,114	0,207	0,285	0,225	0,125

La distribución de forma de campana para tres variables ya muestran signos de normalidad.

---

En este ejemplo, el estudiante debe continuar agregando una observación más y luego encontrar la distribución de probabilidades del promedio de las cuatro observaciones obtenidas. Se advierte que el ejemplo no demuestra nada, sin embargo representa una ilustración numérica de los resultados expuestos en los argumentos matemáticos anteriores.

#### A4: Simulación gráfica con ordenador del teorema central del límite

Una forma moderna de ilustrar y argumentar el teorema central del límite consiste en realizar simulaciones con el ordenador aumentando progresivamente el tamaño muestral. Se representan para los distintos tamaños de muestras los histogramas correspondientes y se observan, a medida que va creciendo el tamaño de la muestra, como la distribución muestral de los estadísticos se aproxima a una distribución normal, aún cuando no lo es la distribución de partida. Este tipo de representación es la forma más intuitiva de proporcionar una justificación del teorema.

Ejemplos son dados por Johnson y Kuby (2004, pp. 265 y 267) mediante representaciones gráficas de histogramas para diferentes valores de los parámetros  $n$  y  $p$  de la binomial. También Kalbfleisch (1984, pp. 190) considera  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias uniforme  $U(0,1)$  independientes. La variable tipificada de la variable suma

será entonces  $Z_n = \frac{(S_n - n/2)}{\sqrt{n/12}}$ . La función densidad de probabilidad de  $Z_n$  para valores

pequeños de  $n$  se puede obtener por métodos de cambio de variables. Por ejemplo, para  $n=2$ , la f.d.p. de  $Z_2$  es:

$$f_2(z) = \begin{cases} (\sqrt{6} + z)/6 & \text{para } -\sqrt{6} < z < 0 \\ (\sqrt{6} - z)/6 & \text{para } 0 < z < \sqrt{6} \end{cases}.$$

A continuación, compara, mediante tres figuras, la f.d.p. exacta de  $Z_n$  con la f.d.p. de la distribución normal tipificada de una suma de  $n$  variables aleatorias independientes, para  $n = 1, 2, 3$ . Este ejercicio sugiere un método para generar con un ordenador observaciones de una distribución normal. Es decir, se puede usar un generador de números aleatorios para obtener  $n$  valores  $x_1, \dots, x_n$  de una  $U(0, 1)$  y después calcular  $Z_n$ .

#### A5: Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar

Algunos textos utilizan distribuciones clásicas, por ejemplo binomial o Poisson, para verificar la exactitud de aproximación. Peña (1995, pp. 154) sugiere el siguiente ejemplo:

---

En un proceso de fabricación de películas fotográficas aparecen por término medio 1 defecto por cada 20 metros de película. Si la distribución de defectos es Poisson calcular la probabilidad de 6 defectos en un rollo de 200 metros de película (a) directamente; (b) utilizando la aproximación normal.

---

En este ejercicio el estudiante calcula primero dicha probabilidad en forma exacta usando el modelo de Poisson. Tenemos que el parámetro  $\mu = 1/20$  metro, luego en 200 metros  $\mu = 200/20 = 10$  defectos/200 m. Así  $P(X = 6) = \frac{e^{-10} \cdot 10^6}{6!} = 0,0630$ . Usando la normal y la corrección de continuidad obtenemos:

$$P(X = 6) = P\left(\frac{5,5 - 10}{\sqrt{10}} < Z < \frac{6,5 - 10}{\sqrt{10}}\right) = 0,0557.$$

Aquí el estudiante observa la buena aproximación de la Poisson por la normal, para  $n$  grande y  $\mu > 5$ . Otro ejemplo puede verse en Wisniewski y Velasco (2001, pp. 214), al lanzar una moneda 300 veces. Se pide la probabilidad de obtener entre 155 y

165 águilas, empleando la aproximación normal a la distribución binomial. Se observa el valor exacto, por ordenador, de 0,265047, y en forma aproximada con valor de 0,2648; lo que significa que la aproximación resultó excelente.

*A6: Obtener una conclusión o tomar una decisión en base al teorema central del límite*

La aplicación de las propiedades del teorema central del límite y sus enunciados en el procedimiento de resolución de un problema conduce a obtener una solución cuantitativa. Luego, de acuerdo al contexto de la ingeniería, es necesario interpretar la probabilidad aproximada para la toma de decisión. En general, en los textos hay bastantes ejemplos y ejercicios propuestos acerca de la aplicación del teorema comparando el valor aproximado de la probabilidad con distribución normal y el valor exacto de una determinada distribución de probabilidad. Sin embargo, a pesar que los ejemplos son con enunciado a una situación específica sólo llegan a obtener el cálculo de la probabilidad sin la interpretación correspondiente. Este tipo de argumentación lo usaremos en los problemas abiertos y de la prueba de ensayo (secciones 7.5 y 7.6), pidiendo una conclusión a partir de las probabilidades de que la media muestral se encuentre en un rango de valores o mediante la interpretación gráfica de la aproximación a distribuciones de probabilidades.

**Conclusiones sobre los argumentos presentados**

En la Tabla 4.8.1 se resumen los tipos de argumentos encontrados. La forma de demostrar más reiterativo en los textos es mediante la comprobación de ejemplos, comparando para ciertos valores la distribución de origen con la normal, pero casi todos los textos muestran como distribución inicial a la binomial. Parzen (1987) es el único que propone la distribución de Cauchy, como contraejemplo.

**Tabla 4.8.1.** Argumentos que presentan los libros seleccionados

Textos	[4]	[7]	[8]	[10]	[11]	[12]	[13]	[15]	[17]	[19]	[21]	[23]	[26]	[27]	[28]	[29]
A1: Demostraciones formales algebraicas y/o deductivas		☆	☆	☆	✦			☆								
A2: Caso especial de un resultado general		☆	☆	☆			△									
A3: Simulaciones manipulables				☆					✦	△				△		⊙
A4: Simulación gráfica con ordenador		☆	☆	☆	✦		△	☆	✦		△			△		⊙
A5: Comprobar ejemplos y contraejemplos	△					△	△			△	△	△	△			○

Pocos libros de textos no utilizan la simulación con el ordenador o a través de

dispositivos manipulables, son cinco los textos que muestran como argumento el teorema central del límite en muestras grandes con apoyo del ordenador. Se considerará importante trabajar como primera experiencia con el teorema, problemas con dispositivos de los dados y monedas.

Se observa que con el tiempo las demostraciones algebraicas del teorema tienden a desaparecer en los textos. Los textos de estadística matemática son los más completo en las demostraciones aunque no trabajan la simulación como elemento validativo. En particular Meyer (1992) presenta cuatro de los cinco argumentos encontrados, y Parzen (1987) es el único que demuestra el teorema con la función característica. El texto moderno de Johnson y Kuby (2004) y tres textos para ingenieros sólo presentan argumentos vía la simulación. El texto de problemario de Velasco y Wisniewski (2001) junto con cuatro textos para ingenieros son muy débiles en la rigurosidad del teorema, mostrando tan sólo la comprobación de ejemplos como único argumento.

En general, las demostraciones formales están ausentes en los textos, esto se ve reflejado en los libros para ingenieros, en que ninguno de los ocho presenta las demostraciones deductivas como argumento del teorema central del límite. Al parecer las demostraciones del teorema central del límite está más allá del propósito de estos textos, dejándolo para cursos más avanzados. Walpole, Myers y Myers (1999) plantea la demostración como un ejercicio propuesto.

Aún así, observamos en los textos que no enfatizan la comprobación empírica mostrando por ejemplo el comportamiento de la distribución mediante una tabla para distintos valores de  $n$ , sino que sólo lo hacen en forma directa para un valor determinado, como lo hace el texto Peña (1995).

#### **4.9. CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS DE LOS TEXTOS**

En este capítulo se ha cumplido con el objetivo específico 2, Sección 1.5, consistente en describir el significado del teorema central del límite en una muestra de libros de texto adecuados para la enseñanza a ingenieros. Para ello se ha identificado los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, argumentos y propiedades, presentados en los 16 libros de textos específicos analizados. Así también, se ha mostrado la complejidad del teorema y sus múltiples conceptos relacionados, por medio de variados ejemplos presentes en los textos.

En particular, se destaca a los símbolos como lenguaje más típico usados por los autores en sus textos, y señalamos nuestra preocupación que no consideren importante

las representaciones gráficas y simulaciones, medios didácticos relevantes en el aprendizaje del teorema central del límite.

En cuanto a los procedimientos de resolución de problemas, los textos son débiles en mostrar varios algoritmos, inclinándose por el cálculo algebraico o la simulación. Respecto a los enunciados se observa en los textos que han predominando, en un comienzo el rigor matemático y actualmente la forma general del teorema. Por otro lado, en las propiedades se nota la riqueza del teorema y sus aplicaciones, siendo las de mayor presencia en los textos la corrección de continuidad y la aproximación de la media aritmética a la distribución normal. Al igual que en las propiedades, el rigor matemático también está ausente en los argumentos en gran parte de los textos. Ello se explica por la dificultad de las demostraciones deductiva, basadas en la función generadora de momentos u otros conceptos avanzados. También explica que se obtuvo el contraejemplo como elemento validativo más recurrente por los autores, percibiendo una tendencia de la demostración algebraica a desaparecer en los textos.

Con respecto a los libros de textos para ingenieros se puede mencionar algunas debilidades en presentar el teorema, que también están presentes en otros textos. Los ejemplos y situaciones no son presentados en forma clara en cuanto a mencionar que se está aplicando el teorema central del límite, no se explicita la argumentación, como la que hemos presentado en la sección 4.3 del CP1. Además no se diferencia la aplicación del teorema para la suma de v.a. y la media aritmética, no se enfatiza problemas reales de la ingeniería con salida de software estadístico, acorde a la tendencia de la enseñanza de la estadística. Por último, los textos prácticamente no tratan las propiedades matemáticas del teorema central del límite en tópicos tan importante de la inferencia estadística como son los métodos de estimación, errores de estimación y aplicaciones a las distribuciones de probabilidades clásicas.

En el proceso de estudio dirigido a favorecer la comprensión del teorema por parte de los alumnos, sería necesario presentar una variedad de contextos de aplicación al contexto de la ingeniería, trabajar las situaciones que tienen fuerte presencia en el entorno ingenieril con la simulación, así también las propiedades que utilizarán en su trabajo profesional.

En consecuencia, de este significado de referencia del teorema obtenido, se seleccionará en la propuesta de enseñanza las categorías de los elementos que se adecuen a los requerimientos de perfiles y competencias de un ingeniero.

## **CAPÍTULO 5.**

# **DISEÑO DE UN PROCESO DE ESTUDIO DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE PARA INGENIEROS**

### **5.1. INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se analiza el diseño de un proceso de estudio sobre el teorema central del límite, dirigido a la formación de ingenieros. A partir del significado institucional de referencia (Capítulo 4), se han seleccionado los elementos de significados del teorema más adecuados a la construcción de la propuesta didáctica, organizándolos en un proceso de estudio pretendido, que contextualiza los diferentes elementos de significados en ejemplos relacionados con la ingeniería y los secuencia en orden de dificultad progresiva en base al tiempo disponible.

Se tuvo asimismo en cuenta, tres posibles tipos de configuraciones epistémicas: manipulativa, algebraica y computacional, que se alternan a lo largo del proceso y permiten introducir significados complementarios del teorema central del límite. Con todo ello se determina el *significado de referencia planificado* para la instrucción. En la línea actual de la docencia universitaria, se incorporan recursos computacionales a la acción didáctica; en este caso la hoja Excel y el programa estadístico @risk, que se usarán en algunas de las actividades. El @risk (<http://www.palisade.com>) es un programa auxiliar para el análisis y la simulación de riesgo en Microsoft Excel y será utilizado para simular distribuciones de probabilidades en el estudio de algunas situaciones de riesgo en la ingeniería.

En lo que sigue, se analiza la secuencia didáctica y configuraciones planificadas, lo que permitirá dar una primera evaluación de la *idoneidad epistémica* (adecuación entre significado institucional implementado y significado de referencia),

criterio propuesto por Godino, Contreras y Font (2006) para el análisis de procesos didácticos.

## 5.2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROCESO DE ESTUDIO

La experiencia de enseñanza del teorema central del límite se llevaría a cabo en el curso de estadística para ingenieros (alumnos de segundo y tercer año), que es obligatorio en el área de Ciencias Básicas y que tiene como prerrequisito el curso de Probabilidades que se cursa a comienzo del segundo año. Por tanto los alumnos potenciales tendrían conocimiento de estadística descriptiva, cálculo de probabilidades, variables aleatorias, distribuciones de probabilidades clásicas y distribuciones bivariadas, además de haber trabajado previamente con Excel.

La enseñanza se aplicaría en el segundo semestre académico en los meses de Octubre-Noviembre, momento que corresponde ver el capítulo de las distribuciones muestrales. Se prevé una recogida de datos periódica, durante el proceso de estudio y otra final en Diciembre.

Cabe señalar que en la planificación de la enseñanza del teorema central del límite se diseñó una lección donde se introdujeron conceptos previos necesarios. Esta lección introductoria es la correspondiente a *distribución de los estimadores de poblaciones con distribución normal en una y dos muestras*. En dicha lección se parte con conceptos básicos: muestreo estadístico, población, muestra, la estimación puntual de parámetros: muestra aleatoria, estimadores, propiedades de los estimadores, métodos de estimación. Se continúa con la distribución muestral de la media muestral en poblaciones normales y el estudio de la proximidad al parámetro que estima, cálculo del tamaño de muestra necesario para obtener una estimación con precisión dada y probabilidad fija. A continuación, se incluye la obtención de intervalos de confianza para el parámetro. Por último, se definen las distribuciones de probabilidades chi-cuadrado, t-Student y F de Fisher.

### Estructuración

El proceso de estudio se organiza en tres lecciones, cada una de las cuales se divide en varias sesiones y se contextualiza en torno a uno de los campos de problemas originales determinados en el estudio histórico y, más específicamente, en una aplicación en la ingeniería. El orden es creciente de complejidad y sigue el desarrollo

histórico del teorema central del límite, donde este teorema se va ampliando, según la naturaleza de las variables aleatorias consideradas. Estas lecciones son las siguientes:

1. *Aproximación de la distribución binomial.* Se propone a los estudiantes el estudio de la confiabilidad de un sistema compuesto por un número grande de componentes individuales, lo que plantea la aproximación de la distribución binomial  $b(n, p)$  para valores grandes de  $n$ . Un experimento con materiales manipulables sirve para deducir una aproximación intuitiva a la distribución normal, que posteriormente es justificada por el profesor en el aula. Aceptada la aproximación y la corrección de continuidad, se aplican los conocimientos adquiridos a otros problemas sobre control de producción, diseño de experimentos y pruebas de hipótesis.
2. *Distribución de la suma de variables aleatorias discretas.* Puesto que la distribución binomial es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, se trata de extender la aproximación binomial a la normal a la suma de otros tipos de variables aleatorias discretas e independientes, mediante una actividad de laboratorio con ayuda del software y applets de Internet. Las aplicaciones de los nuevos conocimientos incluirán aproximación de la distribución de Poisson por la normal en estudios de tráfico, consumo y control de calidad.
3. *Distribución de la suma de variables aleatorias continuas.* Se estudia a continuación la extensión del teorema central del límite a variables aleatorias continuas independientes e idénticamente distribuidas. La situación introductoria consiste en determinar el voltaje total en un condensador de diferentes líneas eléctricas. Las aplicaciones de la nueva versión del teorema involucran el estudio de la aproximación normal a las distribuciones de Weibull y exponencial en problemas de atención a clientes y costo de reparación. Finalmente, se presenta una formulación general del teorema y se discuten las condiciones de validez con los estudiantes.

Las lecciones y sesiones incluyen actividades y ejercicios. Las actividades se resuelven colectivamente en la clase; los ejercicios los resuelven los alumnos individualmente en casa, y los alumnos entregan posteriormente la solución al profesor.

### **Funciones docentes y discentes**

A lo largo del proceso de estudio *los estudiantes*, definirán un problema de su elección que se pueda resolver utilizando el teorema central del límite, llevarán a cabo un plan de diseño muestral, administrarán la información, recogerán y explorarán datos, plantearán hipótesis, y finalmente comunicarán al resto de la clase los resultados y conclusiones. También compararán de forma visual los datos empíricos con el modelo teórico de la distribución normal, y formalizarán progresivamente el teorema, llegando hasta su aplicación mediante diversos procedimientos. Los alumnos intentarán resolver, individualmente y en grupos de dos, las actividades planteadas, dirigidas a descubrir algunas propiedades del teorema central del límite y la necesidad de su uso en situaciones del campo de la ingeniería. Los alumnos completarán ejercicios de refuerzo al término de cada lección y al final del semestre académico. También deberán leer el material escrito dispuesto en la plataforma.

El *profesor* resumirá el material escrito previamente leído por los alumnos, destacará los conceptos importantes mostrando su necesidad. Presentará algunas actividades a partir de conjuntos de datos que se puedan analizar usando el ordenador. Conducirá al grupo a la solución correcta de las actividades de cálculo e interpretación de aplicaciones a la ingeniería.

Para el apoyo a la gestión administrativa del curso, se utilizará la plataforma de entorno virtual de aprendizaje EV@ de la Dirección de Docencia de la universidad, donde el profesor pondrá material escrito de las lecciones según avance de las mismas. Por este medio, ofrecerá a los alumnos apuntes de clases, applets de estadística, ejercicios, actividades, foro de discusión de contenidos y resultados de las evaluaciones. También podrá hacer algunas encuestas a los alumnos generando variables de interés para ellos y ofrecer el conjunto de datos para trabajo posterior del alumno. Pondrá también en la plataforma un demo del programa @risk describiendo los pasos para construcción de histogramas y generación de matrices de números aleatorios. Se destinará una tarde de asesoría para consultas de los estudiantes y una semana a consulta vía correo electrónico y EV@.

### **Temporalización**

El tiempo dedicado a la enseñanza del teorema central del límite comprendería 11 sesiones formales de desarrollo de contenidos de 80 minutos en el aula (cuatro semanas) y cuatro en el laboratorio de computación. Se llevarían a cabo cuatro sesiones

por semana, tres de ellas en el aula tradicional y una en el laboratorio de informática. Las sesiones de aula estarían apoyadas con cañón multimedia, note book y el pizarrón. En el laboratorio se utilizaría el paquete estadístico @risk del programa Excel, además de la planilla Excel y procesador de texto Word para los informes de algunas actividades o ejercicios. En la Tabla 5.2.1 se recoge la estructura de las sesiones con *actividades* que se desarrollarán en el aula y los *ejercicios* fuera de clase.

**Tabla 5.2.1.** Temporalización

Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
<b>LECCIÓN 1: Aproximación de la distribución Binomial</b>			
Sesión 1: Actividades 1.1, 1.2 y 1.3. Plantear Ejercicio 1.1	Sesión 2: Teorema Laplace-De Moivre. Actividades 1.4, 1.5. Plantear Ejercicios 1.2, 1.3 y 1.4.	Sesión 3: Enunciado 1 del teorema. Actividad 1.6. Corrección continuidad. Actividades 1.7 y 1.8.	Sesión 4: Actividades 1.9, 1.10 y 1.11.
Sesión 5: Actividad 1.12. Plantear Ejercicios 1.5 y 1.6. Consultas de Excel en el laboratorio por la tarde	Planteamiento y resolución de Simulación del Ejercicio 1.7 (Laboratorio de computación con Excel)		Planteamiento y resolución algebraica del Ejercicio 1.8
<b>LECCIÓN 2: Distribución de la suma de variables aleatorias Discretas</b>			
	Sesión 6: Actividades 2.1 y 2.2 Enunciado 2 del teorema Plantear Ejercicios 2.1 y 2.2.	Sesión 7: Solución Ejercicio 2.1 Plantear Ejercicio 2.3 Actividades 2.3, 2.4 y 2.5	Sesión 8: Plantear Ejercicio 2.4 Actividad 2.6 Plantear Ejercicios 2.5 y 2.6.
	Planteamiento y resolución algebraica del Ejercicio 2.7.		
<b>LECCIÓN 3: Distribución de la suma de variables aleatorias Continuas</b>			
Sesión 9: Enunciado 3 del teorema Actividades 3.1 y 3.2 Plantear Ejercicios 3.1 Gráficas T, F y Gamma	Sesión 10: Actividad 3.3 Plantear ejercicios 3.2 y 3.3 Actividad 3.4 Plantear ejercicios 3.4 y 3.5	Sesión 11: Actividad 3.5 Plantear Ejercicio 3.6 Enunciado 4 del teorema Plantear Ejercicios 3.7 y 3.8	
Planteamiento y resolución algebraica del Ejercicio 3.9		Examen parcial: Cuestionario escrito de las tres lecciones	
	Examen práctico: Informe de aplicación a la ingeniería		Examen final: Prueba Global de desarrollo y Cuestionario

### 5.3. CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

Godino, Contreras y Font (2006) han introducido los *criterios de idoneidad*, con el propósito de describir, analizar y explicar fenómenos específicos ligados a los procesos de instrucción matemática. En nuestro estudio sería interesante utilizar la noción de *idoneidad epistémica* (adecuación entre significado institucional implementado y significado de referencia), *cognitiva* (adecuación entre significado implementado y significado personal logrado por los estudiantes) e *instruccional* (adecuación del proceso de estudio para detectar conflictos semióticos, así como al tiempo y contexto del estudio).

Los autores definen la *configuración epistémica*, como al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema. En este trabajo interesa ampliar esta noción, introduciendo también la relatividad al conjunto de recursos que el estudiante tiene para la resolución del problema. De este modo diferenciaremos tres tipos de configuraciones epistémicas: manipulativa, algebraica y computacional (Figuras 5.3.1 a 5.3.3), que suponen un significado muy diferenciado, incluso para un mismo problema.

- En la *configuración manipulativa* el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen objetos matemáticos específicos como experimento aleatorio y estadístico, variable estadística, su distribución y momentos, y el tipo de demostración preferente es el estudio de ejemplos y contraejemplos. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.
- La *configuración algebraica* se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra y análisis. Los procedimientos serían analíticos y algebraicos, además de incorporar el uso de las tablas de distribuciones para calcular probabilidades. Como conceptos, además, las variables aleatorias, sus distribuciones y momentos, aparecen la idea de convergencia, momentos, tipificación, etc. Las demostraciones son preferiblemente deductivas.
- La *configuración computacional* amplía notablemente el lenguaje, sobre todo el número y variedad de representaciones gráficas dinámicas además del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las

variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. No posibilita el lenguaje algebraico ni la demostración deductiva. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos, contraejemplos y la generalización. Aparecen algunos conceptos como aproximación y bondad de ajuste.

Figura 5.3.1. Configuración epistémica manipulativa

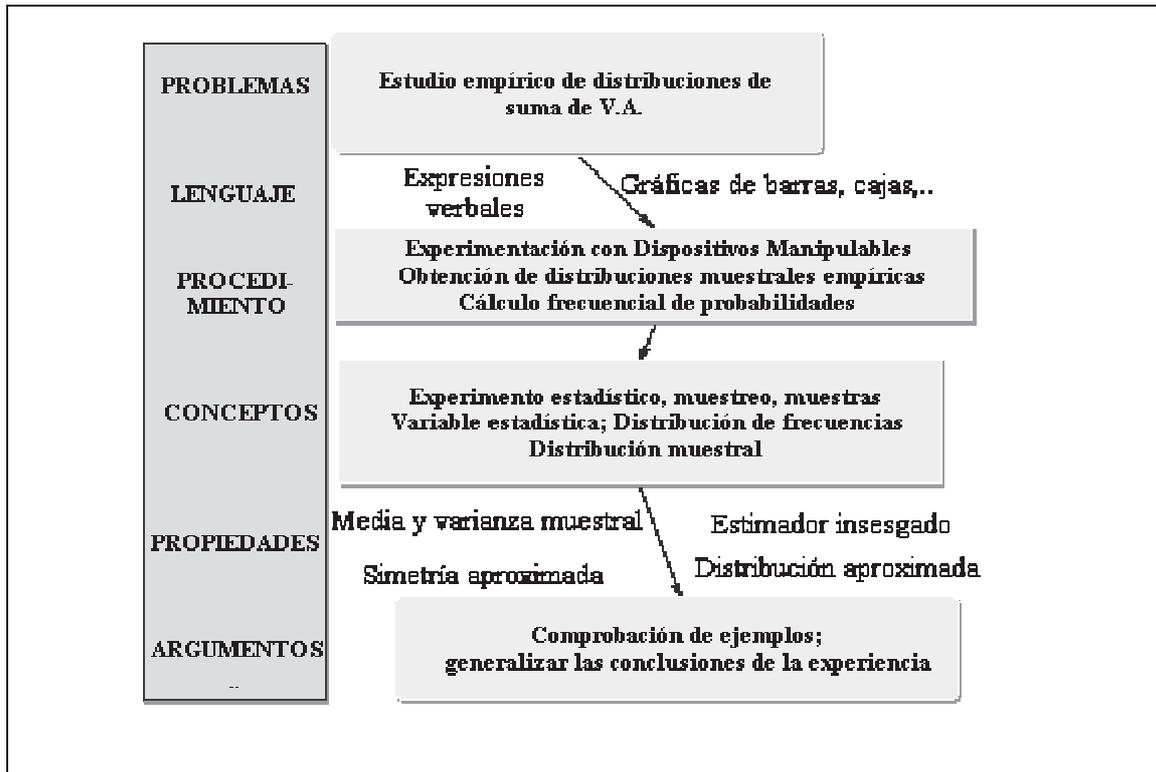


Figura 5.3.2. Configuración epistémica algebraica

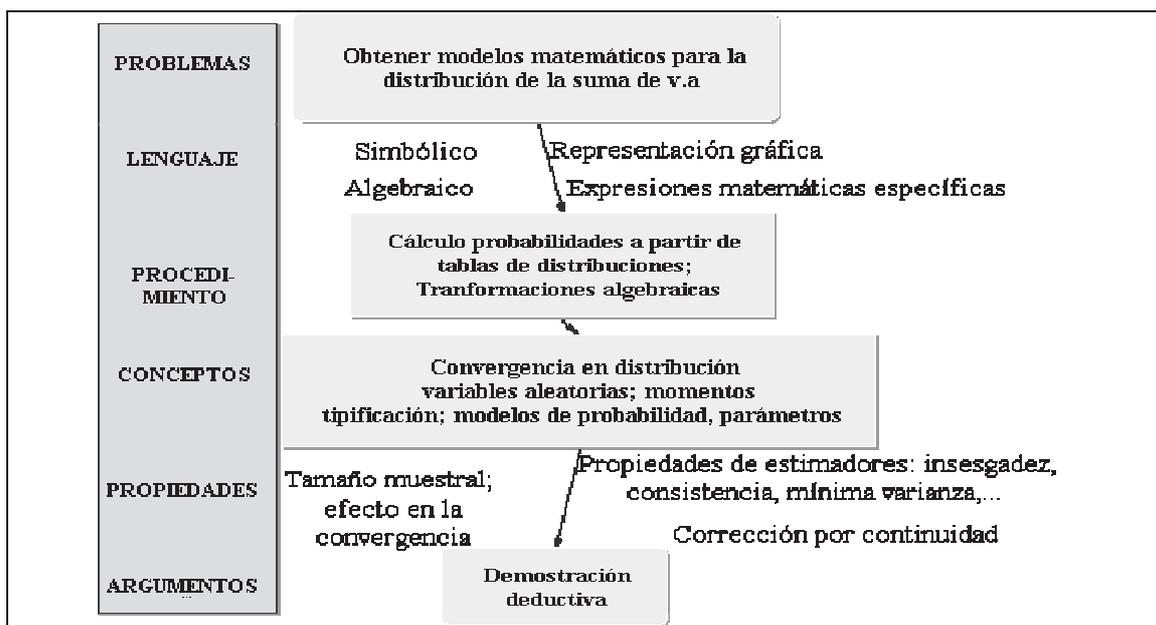
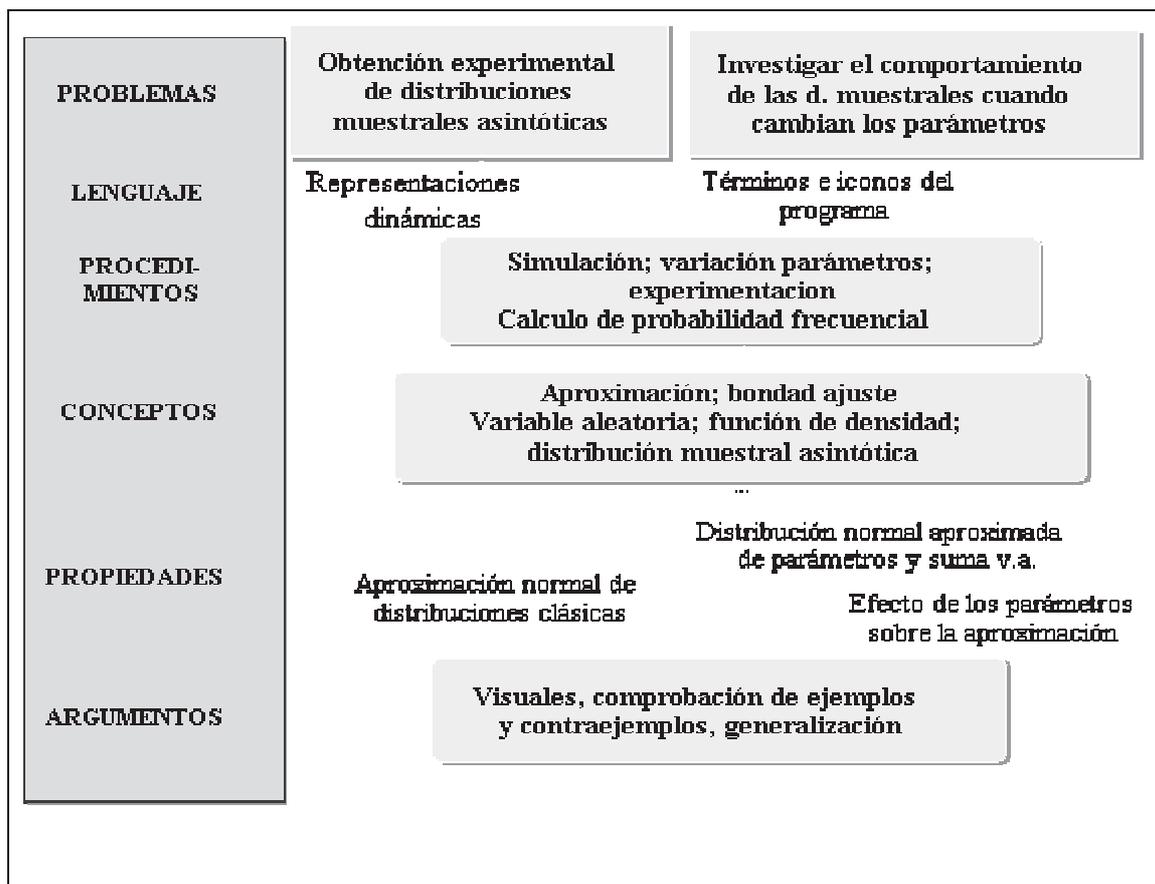


Figura 5.3.3. Configuración epistémica computacional



Una vez diseñada la estructura global del proceso de estudio, se seleccionarán los elementos de significados del teorema central del límite que se incluirán en cada lección, siguiendo las investigaciones de Tauber (2001), Alvarado (2004a, b y c), Alvarado y Batanero (2004a y b; 2005a y b; 2006a y b) y Batanero (2003), así como en las descritas en el Capítulo 3. Estos elementos se han identificado en el estudio histórico y el análisis de libros de texto, y que están resumidas en las Tablas 5.4.1.1, 5.5.1.1 y 5.6.1.1. A continuación se analizan las actividades de cada una de las tres lecciones.

## 5.4 ANÁLISIS DE LA PRIMERA LECCIÓN

### 5.4.1. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO Y CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

Esta primera lección titulada “Distribución asintótica en la distribución binomial” se trabajan principalmente tres campos de problemas, CP1: Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$ ; CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria en poblaciones de distribución desconocida y

CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes, así como los diferentes algoritmos recogidos en la Tabla 5.4.1.1. Se trataría de llegar a un enunciado de forma general del teorema (E5), así como un enunciado intuitivo por medio de dispositivos didácticos (E6). Se pretende que el alumno llegue a las siguientes propiedades: P1: La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias; P2: La varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas; P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal; P4: La aproximación mejora con el número de sumandos; y P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua.

**Tabla 5.4.1.1.** Planificación de la Lección 1

Sesión	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Elementos de significado	Configuración epistémica
1	Actividad 1.1	Motivar la aproximación de la Binomial	CP1	Algebraica
	Sección 1.2	Introducción histórica y primera formulación de Laplace-De Moivre	E5, P7	Algebraica
	Actividad 1.2 y 1.3	Justificación y aplicación para pruebas de aleatoriedad	AP4, P1, P2, E6, A3	Manipulativa
	Ejercicio 1.1	Estudiar condiciones para la aproximación	AP4, P1, P2, P4, E6, A3	Manipulativa
2	Actividad 1.4 y 1.5	Estudiar condiciones para la aproximación algebraicamente	E6, AP1, AP2, AP3, P1, P2, P4, A5	Manipulativa Algebraica
	Ejercicio 1.2	Estudio gráfico de la aproximación binomial	E6, P4, AP3 A2, P7	Computacional
	Ejercicio 1.3	Aplicación y simulación (con Applet)	E6, P4, AP3 A2, P7	Computacional
	Ejercicio 1.4	Estudio gráfico de convergencia en función de $n$ y $p$ (en Excel)	E6, P4	Computacional
3	Actividad 1.6 y 1.7	Aplicación a ingeniería de forma algebraica	AP1, AP2, AP3, E4, P1, P2, P12	Algebraico
	Sec.1.3	Corrección de continuidad	P12, P7	Algebraico
	Actividad 1.8	Solución aproximada de la Actividad 1.1	CP1, AP1, AP2, AP3, P1, P2, P4, P7, P12, A2	Algebraico
4	Actividad 1.9, 1.10 y 1.11	Aplicación teorema, estimar intervalos de confianza para $p$	CP12, P3, P10	Algebraico
	Sec 1.4	Transformar la suma de v.a estándar en proporción estándar	AP1	Algebraico
5	Actividad 1.12 Ejercicio 1.5,1.6	Aplicación teorema, determinar tamaños de muestras	CP8, AP1, AP2	Algebraico
Fuera de clase	Ejercicio 1.7	Aplicación en ingeniería mediante simulación con Excel para verificar el teorema de Laplace-De Moivre.	CP1, E6, A2, A4, A5, A6, P1, P4, P7, P12.	Computacional
	Ejercicio 1.8	Aplicación en ingeniería del teorema y de la corrección de continuidad.	CP1, CP8, AP1, AP2, AP3, E5, A1, A2, A5, P1, P2, P12, P7	Algebraico

No se detalla los elementos de lenguaje pues en todas las lecciones se usan todos ellos. Respecto a las argumentaciones usaremos principalmente las A2 (caso especial de un resultado general) y A5 (comprobación de ejemplos y contraejemplos). Se describe en la Tabla 5.4.1.1 las configuraciones epistémicas realizadas en las actividades didácticas según los elementos de significados pretendidos.

#### 5.4.2. TRAYECTORIA DIDÁCTICA

Se planifican e implementan cinco sesiones de aula de esta lección que analizamos a continuación.

##### *Desarrollo de la Sesión 1.*

Se comenzaría planteando la actividad 1.1 que motivaría la introducción del tema.

**Actividad 1.1.** Un sistema está formado por 100 componentes cada una de las cuales tiene una confiabilidad igual a 0,95. (Es decir, la probabilidad de que la componente funcione correctamente durante un tiempo específico es igual a 0,95). Si esas componentes funcionan independientemente una de otra, y si el sistema completo funciona correctamente cuando al menos funcionan 80 componentes, ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?

El profesor comenzaría preguntado a los alumnos qué elementos destacarían en esta actividad y cómo la desarrollarían. Se espera que la mayoría de los estudiantes definan la variable aleatoria “número de componentes que funcionan correctamente en el sistema” con distribución binomial de parámetros  $n=100$  ensayos y probabilidad de que funcione una componente cualquiera  $p=0,95$ . Luego se espera que escriban en lenguaje simbólico  $P(80 \leq S_n \leq 100)$  y traten de calcular la probabilidad.

Una vez que los alumnos comprueben que el valor es demasiado grande para las tablas que ellos poseen, el profesor introducirá la idea de aproximación mediante las cuestiones: ¿Son muchos términos en la suma?, ¿Los términos son difíciles de calcular?, ¿Podríamos usar otra distribución de probabilidades para aproximar el cálculo de la probabilidad pedida? La solución completa se dejará como actividad 1.8.

A continuación, el profesor describiría la solución histórica al problema (ocurrida hacia 1713). Al aumentar el valor de  $n$  en la distribución binomial  $B(n, p)$

cuya expresión matemática es  $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$  para valores  $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ,

los términos crecen muy rápidamente, por lo que el cálculo de las probabilidades de los valores de la variable en las distribuciones exactas es demasiado laborioso. Este problema llevó a distintos matemáticos a tratar de encontrar valores aproximados de estas probabilidades para valores de  $n$  grandes y a estudiar las condiciones en que estas aproximaciones podrían utilizarse. Abraham de Moivre (1667-1754) sugirió el uso de la función  $\exp(-x^2)$  como límite de la distribución, pero no la relacionó con la distribución normal  $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2}$ .

Se indicaría al alumno que esta problemática es un caso particular de un resultado general; el teorema central del límite, y que nuestro interés en los temas siguientes es conducirlos a su generalización y formalización. La interrogante general que lleva a analizar los teoremas de límite es la siguiente: *¿En qué condiciones y mediante qué funciones o distribuciones de probabilidad pueden aproximarse la suma de otras distribuciones por la distribución normal, cuando aumentamos progresivamente el número de sumandos?* El profesor destacaría la importancia práctica en ingeniería, en estudios de la masa forestal, producción, cargas en estructuras, etc., y que permite usar la distribución normal tabulada para calcular probabilidades que provienen de la suma de diferentes distribuciones.

Finalizada esta introducción se propondrían dos actividades orientadas a un primer acercamiento al estudio del comportamiento de la suma de variables aleatorias discretas, a través de la simulación manual.

**Actividad 1.2. Simulación con fichas.** Una caja contiene 4 fichas de las cuales 2 fichas son verdes. Simule la extracción de  $m$  muestras de tamaño  $n$ ; formando las matrices  $n \times m$  (tamaño muestral  $\times$  número de réplicas),  $(n, m) = (4,5), (10,1), (10,10)$  y  $(30,10)$ . Para cada caso:

- Construya una tabla de frecuencias del número de fichas verdes por muestra obtenidas.
- Represente los datos en un gráfico de barras y comente sus características.
- Compare la media y varianza del experimento con la media y varianza teórica.
- Obtenga las tres medidas de tendencia central y comente.

Por ejemplo para el caso  $(n, m) = (4,5)$ , el alumno escribiría en una plantilla cuadrículada de 4 filas y 5 columnas los resultados del experimento y anotaría 1 en caso de obtener el color verde y 0 en caso contrario. Esta práctica, conduciría a formular variables aleatorias Bernoulli “obtener una ficha verde”, con probabilidad de éxito  $p=0,5$ . A partir de la matriz de unos y ceros, se construiría la distribución de frecuencias del número de fichas verdes observadas en cada muestra, que corresponde a una

## Capítulo 5

distribución binomial de parámetros  $B(4,0,5)$ . Después, se le pediría al alumno comparar los promedios de las distribuciones empírica y teórica.

La actividad 1.3 es similar a la anterior, con la diferencia que el dispositivo usado son las monedas, pero se mantiene la probabilidad de éxito  $p=0,5$ . La otra novedad es que se pide ahora que se tabule y muestre la distribución de frecuencias y su gráfica en la planilla Excel, además de pedir el cálculo de probabilidades de la suma de un determinado número de caras.

**Actividad 1.3.** (Adaptada de Batanero, 2001). 61 alumnos de estadística realizaron el experimento de anotar una secuencia inventada de posibles resultados al lanzar 20 veces una moneda. Se obtuvo el siguiente número de caras en los alumnos:

Números de caras por persona:

12	10	10	9	10	10	11	11	11	9	10	11	11	8	11	10	10	11	12	10
10	10	10	11	10	10	11	9	11	11	10	12	9	10	9	10	10	12	10	9
9	10	11	10	10	10	9	11	10	9	9	10	10	10	10	11	8	11	9	10
9																			

- Represente gráficamente, con la planilla Excel, la distribución de frecuencias de caras y comente. Primero construya la tabla de distribución de frecuencias.
- Los alumnos obtuvieron un total de 617 caras en los 1220 lanzamientos. Determine la frecuencia estimada de obtener a lo más 617 caras en el total de lanzamientos de una moneda correcta.
- Obtenga y compare la media del experimento realizado con la media teórica de la distribución de probabilidad.
- ¿Tienen buena intuición sobre el lanzamiento de monedas?

Se propondría para la siguiente sesión (5 días más tarde) un ejercicio para realizar en grupo de tres personas y enviar vía la plataforma EV@. El fin del ejercicio es acostumbrarle a trabajar en equipo, utilizar la planilla Excel y la plataforma virtual. En este caso la probabilidad de éxito  $p$  cambia a  $1/6$ .

**Ejercicio 1.1.** *Simulación con dados.* Suponga que gana si obtiene un “6” al lanzar un dado legal. Simule las posibilidades de ganar en los siguientes casos de varios lanzamientos del dado  $(n, m) = (4,5)$ ,  $(10,10)$  y  $(30,10)$ .

- Compare sus resultados con el experimento realizado en la actividad 1.2.
- Calcule el valor exacto de la probabilidad pedida en la actividad 1.1.
- Calcule, en la actividad 1.2, la probabilidad exacta de obtener a lo más 2 fichas verdes al extraer 10 veces una ficha con reemplazo de la caja.
- Calcule la probabilidad  $P(9 \leq X \leq 11)$  en la actividad 1.3. Interprete lo que se quiere medir y represéntelo por un gráfico.

### Desarrollo de la Sesión 2.

La sesión comenzaría haciendo notar a los alumnos que en las actividades anteriores la gráfica de la distribución binomial toma una forma de campana cuando  $n$  crece. También que la media de la distribución normal es  $np$  y la varianza  $npq$ . Otra gráfica en forma de campana es la de la función de densidad de la distribución normal.

Se les preguntaría si creen posible aproximar una distribución binomial  $B(n,p)$  por una normal  $N(np, npq)$ , aunque la distribución *binomial* sea *discreta* y la *normal continua*. Se dejaría para más adelante la justificación del uso de la corrección de continuidad. Se continuaría con el primer enunciado del teorema central del límite, introducido por Laplace:

**Teorema de Laplace-De Moivre:** Consideremos una variable aleatoria  $X$  con distribución binomial  $B(n,p)$ . Para valores grandes de  $n$ ,  $X$  sigue una distribución aproximadamente normal  $N(\mu, \sigma)$  de media  $\mu=np$  y desviación estándar  $\sigma = \sqrt{npq}$ ; es decir, la misma media y desviación estándar que la Binomial. Luego, la variable  $Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$  sigue una distribución normal  $N(0,1)$ .

El enunciado formaliza un caso de aproximación particular (distribución binomial). Se comentaría la regla empírica consistente en que la aproximación de la binomial a la normal será buena cuando  $np$  y  $nq$  son ambos mayores que 5 y  $p$  y  $q$  no son demasiado pequeños ( $p,q > 0,05$ ). La sensibilidad de los parámetros de la distribución binomial para su aproximación a la Normal se analizaría en los ejercicios 1.2 y 1.3 mediante el ordenador. Se plantearía la actividad 1.4 que muestra una aplicación a la producción de artículos defectuosos de una máquina.

**Actividad 1.4.** El departamento de finanzas de una empresa ha detectado un porcentaje importante de artículos con algún tipo de fallas producidas por sus máquinas; encontrando que de cada dos artículos seleccionado uno resultó con fallas. Se muestrearon cinco máquinas obteniendo los siguientes artículos defectuosos, denotados por D:

M1	D B B B D D B D B B
M2	B D B B D D B D B D
M3	B D D B B B D B B D
M4	B B D B B D B B D B
M5	B B D B D D B D B B

- ¿Qué porcentaje de artículos defectuosos piensas que debiera obtenerse del total antes de realizar el muestreo?
- Determine la frecuencia relativa de artículos defectuosos obtenidos en el muestreo y comente.
- Calcule la probabilidad aproximada, dada por el teorema de Laplace-De Moivre, de obtener un total de más de 30 artículos defectuosos de los 50 artículos muestreados. Comente.

A partir de la información muestreada, los alumnos realizarían el cálculo algebraico de la probabilidad de la suma de v.a. (total de artículos defectuosos) de forma exacta y aproximada, aplicando el teorema anterior. Se trabajaría con la configuración manipulativa a unas primeras situaciones de aplicación del teorema con lápiz, papel y calculadora en poblaciones y muestras pequeñas, donde la aproximación es muy mala, para hacerle consciente de la importancia del tamaño de la muestra. La idea es conducir

al alumno del estudio descriptivo de un conjunto de datos, al cálculo de probabilidades para los estimadores de parámetros de posición y de variación.

La actividad 1.5 analiza otra aplicación a un proceso de fabricación, considerando la probabilidad de defecto  $p=0,5$  fija. En los apartados a y b se muestra mediante la configuración algebraica, que la aproximación es débil para muestras pequeñas ( $n=5$ ), comparando los valores teóricos y aproximados de las probabilidades pedidas. En los apartados c y d, se pretende hacer ver a los alumnos la mejora de la aproximación para muestras más grande como 60 y 1800. El apartado c guía al educando a descubrir que la aproximación mejora en intervalos de valores cerca de la media  $np$ .

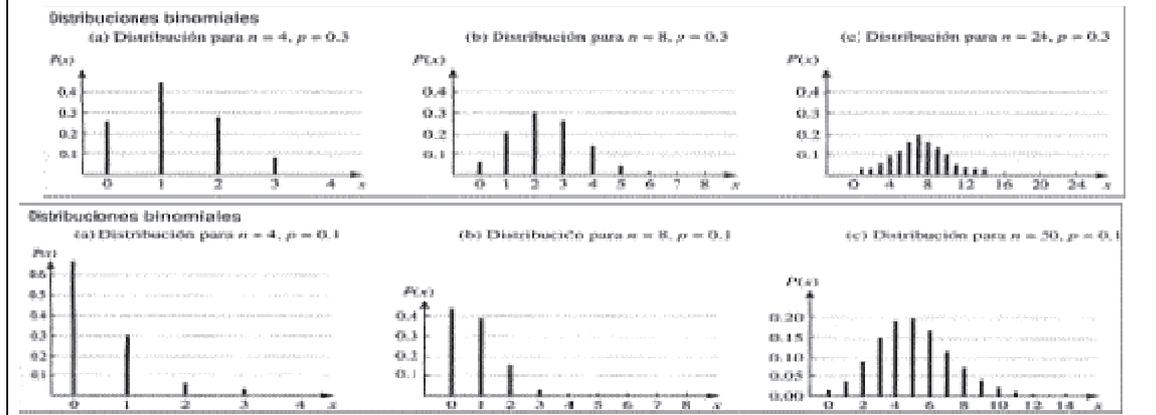
**Actividad 1.5.** Un fabricante de dispositivos semiconductores toma muestras aleatorias de chips y los prueba; cada chip es clasificado como defectuoso o no defectuoso. Sea  $X_i = 0$  si el chip no es defectuoso y  $X_i = 1$  si el chip es defectuoso. Suponga que ambos sucesos tienen igual probabilidad.

- Si el fabricante prueba 5 chips, determine la probabilidad aproximada, mediante el teorema de Laplace-De Moivre, de obtener a lo más un chip defectuoso, a lo más dos chips defectuosos.
- Compare los dos resultados anteriores con las probabilidades exactas de la distribución Binomial. Utiliza la calculadora o la tabla de la distribución Binomial. ¿Es buena la aproximación?
- Si el fabricante toma una muestra aleatoria de 60 chips, estime la probabilidad de obtener entre 5 y 15 chips defectuosos; entre 25 y 35; entre 50 y 60; de obtener a lo más un chip defectuoso; a lo más dos chips defectuosos. ¿Qué observas?
- Calcule la probabilidad, mediante el teorema de Laplace-De Moivre, de obtener un total superior a 950 chips defectuosos; si se analizan 30 cajas de 60 chips cada uno.

La segunda sesión finaliza explicando algunos ejercicios que tendrán que desarrollar los alumnos fuera de clase, que pone a prueba los conocimientos adquiridos sobre la aproximación de la distribución binomial y la forma de aplicarla con recursos de applet disponible en Internet, con apoyo de Excel y la plataforma ev@ para entregar la solución ya sea individual o en grupo. Se darían varios días para el desarrollo de los tres ejercicios que se presentan a continuación.

Se deja como un segundo ejercicio, la generalización del enunciado de la actividad 1.2 al experimento consistente en extraer  $n$  veces una ficha con reemplazo y determinar la probabilidad aproximada, de obtener a lo más  $x$  fichas verdes. Se dará algunos días a los estudiantes para enviar individualmente por la plataforma sus comentarios.

**Ejercicio 1.2.** En el caso de la aproximación de Laplace-DeMoivre podemos utilizar un software estadístico para representar gráficamente la distribución  $B(n,p)$  para distintos valores de sus parámetros  $n$  y  $p$ . La figura siguiente muestra valores para  $p = 0,3$  con  $n = 4, 8, 24$  y para  $p = 0,1$  con  $n = 4, 8$  y  $50$ . ¿Qué observa de las gráficas para los distintos valores de los parámetros?



El ejercicio 1.2 presenta una tercera solución aproximada al estudio de la aproximación binomial por medio de una configuración computacional: Cálculo aproximado de probabilidades para la suma de v.a. con uso del ordenador, representando gráficamente la distribución binomial para distintos valores de sus parámetros y distintas formas de simetría. El ejercicio sería reforzado con el siguiente ejercicio individual, utilizando recursos en Internet, en que los alumnos podrán interactuar la distribución binomial cualquiera sean los parámetros  $n$  y  $p$ .

**Ejercicio 1.3.** Revise el applet disponible sobre el Teorema de Laplace-DeMoivre en la página de la Universidad de Cali, Colombia <http://www.unalmed.edu.co/~estadist/binomial/binomial.htm> y simule para distintos valores de los parámetros la distribución binomial. Envíe sus comentarios al foro.

El siguiente ejercicio plantearía la aplicación del teorema e Laplace-De Moivre con apoyo de Excel. Se darían 6 días para entregar la solución que sería enviada también por EV@ en grupos de dos estudiantes.

**Ejercicio 1.4.** Muestre el resultado del teorema de Laplace-De Moivre numéricamente con apoyo de Excel y considerando una variable de contexto profesional, por ejemplo: a) Analice el porcentaje de artículos defectuosos en el proceso de control de calidad, b) Analice de satisfacción de un producto en el mercado. Estime la proporción de personas a favor de una ley del suelo, etc. Para ello, el análisis consiste en:

- Considere una distribución original Uniforme  $U(0,1)$  y genere los siguientes casos para  $n$  tamaños muestrales con sus  $m$  réplicas respectivas:  $(n,m) = (10,10), (20,20), (30,30)$ .
- Analice para los distintos tamaños muestrales seleccionado la distribución de la suma de variables aleatorias Bernoulli.
- Construya y analice el histograma de frecuencias relativas, box plot o diagrama steam and leaf.
- Sugiera algunas preguntas y resuelva.

Junto con este ejercicio 1.4 se levanta en la plataforma un Demo básico de programación con Excel, generando números aleatorios y mostrando los comandos de simulación de la distribución de la suma de variables aleatorias de valores Bernoulli.

**Desarrollo de la Sesión 3.**

Se trata de introducir el cálculo aproximado de probabilidades para la suma de variables aleatorias de forma algebraica, es decir, presentar un segundo enunciado del teorema central del límite más elaborado. Se plantearían actividades en un contexto de la ingeniería y se introduciría la corrección de continuidad (P12).

Se comenzaría recordando que la distribución binomial  $b(n,p)$  se puede representar como la suma de variables aleatorias independientes Bernoulli  $b(1,p)$ , y se preguntaría si el teorema de Laplace-De Moivre se cumple de forma más general, para la *suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas*. Una vez explorada las ideas de los estudiantes, se pasaría a enunciar el teorema central del límite que corresponde al campo de problemas CP1 y al enunciado del teorema E4:

**Enunciado 1 del Teorema Central del Límite:** Sea  $S_n$  la variable aleatoria “número de aciertos” en  $n$  experiencias de Bernoulli; si  $X_i$  es una variable de Bernoulli, la variable  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  sigue una ley binomial, con  $E(S_n)=np$  y  $Var (S_n)=np (1-p)$ . Pongamos:  $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . Cuando  $n$  tiende a infinito, la función distribución de  $S_n$  tiende a la  $N(np, np(1-p))$ .

A continuación se presentaría una actividad en el área de ingeniería (supervivencia), que se ha de resolver mediante el cálculo algebraico de la suma de v.a.

**Actividad 1.6.** En terreno arenoso se plantaron 50 arbolitos de cierto tipo y otros 50 en otra área con terreno arcilloso. Sea  $X$  = número de árboles plantados en terreno arenoso que sobreviven 1 año e  $Y$  = número de árboles plantados en terreno arcilloso que sobreviven 1 año. Si la probabilidad de que un árbol plantado en terreno arenoso sobreviva 1 año es 0,7 y la probabilidad de que sobreviva 1 año en terreno arcillos es 0,6, calcule una aproximación a  $P(-5 \leq X - Y \leq 5)$ .

El alumno debe aplicar el enunciado E4 del teorema central del límite, primero definiendo las v.a.  $S_1 = \sum_{i=1}^{50} X_i$  (número de árboles en terreno arenoso que sobreviven 1 año), y  $S_2 = \sum_{i=1}^{50} X_i$  (número de árboles que sobreviven 1 año en terreno arcilloso).  $S_1$  y  $S_2$  son definidas con distribución binomial de esperanzas 35 y 30 y varianzas 10,5 y 12

respectivamente, obtenidas mediante las propiedades P1 y P2 (media y varianza de la suma de v.a). Ambas v.a. son aproximadas por la distribución normal; por tanto su diferencia es también de distribución normal, de parámetros  $S_1 - S_2 \sim N(5, 22,5)$ .

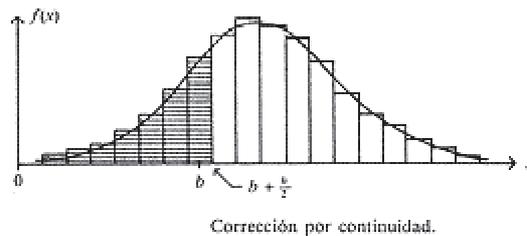
Estandarizando (AP2), llegamos a la distribución  $Z = \frac{(S_1 - S_2) - 5}{\sqrt{22,5}} \sim N(0,1)$ .

Se pediría a los estudiantes deducir que  $E(S_1 - S_2) = E(S_1) - E(S_2) = 35 - 30 = 5$  y  $Var(S_1 - S_2) = Var(S_1) + Var(S_2) = 10,5 + 12 = 22,5$ . Calculando la probabilidad con ayuda de tablas y efectuando cálculo algebraico (AP1, AP3) llegarían a

$$P(|S_1 - S_2| \leq 5) \approx P\left(\frac{-5 - 5}{\sqrt{22,5}} \leq Z \leq \frac{5 - 5}{\sqrt{22,5}}\right) = F_Z(0) - F_Z(-2,11) = 0,5 - 0,0174 = 0,4826.$$

Posteriormente se estaría en condiciones de incorporar el concepto de corrección de continuidad (P12), preguntándoles si les cuesta pensar que se aproxima el histograma de probabilidad de una v.a. discreta  $X$  mediante una función de densidad de probabilidad continua  $f$ . Se haría notar que la probabilidad de un suceso relativo a  $X$  se puede interpretar como un área bajo el histograma, y se la puede aproximar entonces por el área correspondiente subtendida por  $f$ . La Figura 5.4.2.1 muestra el cálculo de  $P(X \leq b)$ , donde  $b$  es uno de los valores de  $X$ , que corresponde al centro de un rectángulo del histograma de base  $h$ .

Figura 5.4.2.1. Aproximación normal a una distribución discreta



Intuitivamente, se haría ver que el área del histograma es aproximadamente igual al área en la función densidad normal, pero la base del rectángulo está centrada en el valor entero, por lo que se debe admitir que los valores de los extremos del intervalo se extienden en media unidad para obtener así la aproximación binomial, llegando a la siguiente expresión

$$P(X \leq b) \approx \int_{-\infty}^{b+(h/2)} f(x)dx = F(b + h/2)$$

Se explicaría que el término  $h/2$  se denomina *corrección de continuidad* (P12), debiendo utilizarse siempre que una v.a. discreta se aproxima a una v.a. continua. Para ejercitar la aplicación de esta propiedad, seguiría la siguiente aplicación en ecología:

**Actividad 1.7.** Las compañías eléctricas podan los árboles que crecen cerca de sus líneas para evitar cortes eléctricos debidos a la caída de árboles durante las tormentas. La aplicación de un producto químico para retrasar el crecimiento de los árboles es más barato que podar los árboles, pero estos productos matan algunos de los árboles. Suponga que un producto químico de este tipo matará el 20% de los arces. La compañía eléctrica prueba este producto con una muestra aleatoria de 250 arces.

a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar del número de árboles que mueren en la muestra?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 60 árboles (el 24% de la muestra)?

Se espera que el estudiante defina la variable  $S_n$  “número de árboles que mueren en la muestra de tamaño 250”, como una suma de variables Bernoulli de parámetro  $p=0.2$  (aplicando el enunciado E4); que es la proporción de árboles que mueren por el producto químico. Han de estimar la probabilidad pedida  $P(S_n > 60)$  mediante el teorema central del límite ( $n$  es suficientemente grande), lo que requiere determinar la esperanza y varianza de la variable suma (P1 y P2), respectivamente 50 y 40. Al estandarizar (AP2) la variable suma y usando la *corrección de continuidad* (P12), se recurre a la tabla de la distribución normal estándar para obtener el valor crítico (AP3); en este caso de forma indirecta. Así, la probabilidad de que mueran al menos 60 árboles es de un 0,49. Se sugeriría a continuación, comparar esta aproximación con el cálculo de probabilidad en forma exacta, mediante la distribución Binomial de parámetros  $n = 250$  y  $p = 0,2$ .

Esta clase terminaría con la actividad 1.8, proponiendo también al estudiante resolver la actividad 1.1, planteada en la lección inicial, mediante una probabilidad aproximada.

**Actividad 1.8.** Un sistema está formado por 100 componentes cada una de las cuales tiene una confiabilidad igual a 0,95. (Es decir, la probabilidad de que la componente funcione correctamente durante un tiempo específico es igual a 0,95). Si esas componentes funcionan independientemente una de otra, y si el sistema completo funciona correctamente cuando al menos funcionan 80 componentes, ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?

El alumno debería aplicar las propiedades anteriores. Se pediría calcular  $P(80 \leq S_n \leq 100)$ . Para dar una solución aproximada, calcularía la esperanza y varianza de la variable de interés.

$$E(S_n) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = n \times p = 100 \times 0,95 = 95 ;$$

$$Var(S_n) = Var(\sum X_i) = \sum Var(X_i) = n \times p \times (1-p) = 100 \times 0,95 \times 0,05 = 4,75.$$

La desviación estándar de esta variable es  $\sigma_{S_n} = \sqrt{4,75} = 2,18$ . Como el tamaño de la muestra  $n=100$  es grande, aplicaría el teorema central del límite, obteniendo:  
 $S_n \sim N(np, \sqrt{npq})$  Luego procedería al cálculo, usando la corrección de continuidad (P12):  

$$P(80 \leq S_n \leq 100) \approx P(79,5 \leq S_n \leq 100,5) = P\left(\frac{79,5 - 95}{2,18} \leq \frac{S_n - 95}{2,18} \leq \frac{100,5 - 95}{2,18}\right) \approx \phi(2,52) - \phi(-7,1) = 0,994$$

Por tanto, el sistema funcionaría el 99,4% de las veces. Por último, se dejaría como práctica aplicar la corrección de continuidad en la actividad 1.6 y comparar los resultados.

#### Desarrollo de la Sesión 4.

La cuarta sesión de aula estaría orientada a mostrar aplicaciones del teorema central del límite, enlazando de forma natural con la obtención de la distribución muestral y la estimación de parámetros por intervalos de confianza. La primera aplicación sería la *estimación por intervalos de confianza de la proporción p de la distribución binomial*. Se partiría señalando que para los percentiles  $z_1$  y  $z_2$  fijos cuando  $n$  es grande, la aproximación  $S_n \sim N(np, npq)$  permite calcular la probabilidad aproximada que la suma de v.a. se encuentre en un cierto intervalo,

$$P(np + z_1\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + z_2\sqrt{npq}) = F_Z(z_2) - F_Z(z_1)$$

A continuación, se plantearía la siguiente actividad comentando que en  $10^4$  lanzamientos de una moneda, la probabilidad de que el número de caras se desvíe de la media 5.000 en más de 100 caras es menor de 0,0455:

**Actividad 1.9.** Compruebe que la probabilidad de que  $S_n$  esté dentro de los límites  $np \pm 2\sqrt{npq}$  es alrededor de  $F_Z(2) - F_Z(-2) = 0,9545$ ; para  $np \pm 3\sqrt{npq}$  la probabilidad es aproximadamente 0,9973.

Se continuaría relacionando la suma con la proporción en la estandarización normal, obteniendo el mismo intervalo anterior ahora como promedio.

**Observación:** Sea  $p$  la proporción de elementos de una población que poseen un atributo determinado. Si  $\hat{p}$  es el estimador puntual máximo verosímil y consistente del parámetro en una muestra *grande* de tamaño  $n$ , por el teorema central del límite, establecemos que, si  $\hat{p} = S_n/n$  entonces  $\hat{p} \sim N(p, \frac{pq}{n})$ .

Luego  $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$ . De igual forma podemos calcular la probabilidad que

la proporción de elementos con cierto atributo se encuentre entre dos valores límites, es decir,

$$P(p + z_1\sqrt{pq/n} < \hat{p} < p + z_2\sqrt{pq/n}) = F_Z(z_2) - F_Z(z_1)$$

Se propondría la actividad 1.10 para aplicar esta propiedad en un estudio sobre planes de pensiones.

**Actividad 1.10.** Una organización muy grande desea estimar a través de un intervalo de confianza que porción de sus empleados prefieren planificar sus propios beneficios de retiro en lugar de seguir un plan patrocinado por la compañía, para ello tomó una muestra aleatoria de 75 empleados, encontrando que 30 de ellos están interesados en seguir sus propios planes de retiro.

- Encuentre un intervalo aproximado de 99% de confianza para la proporción verdadera de empleados que desean seguir sus propios planes de retiro.
- Si el verdadero valor en parte a) de  $p = 0,3$ , ¿Consideraría usted que la porción de empleados que prefieren planificar sus propios beneficios de retiro es mayor?

Se espera el siguiente procedimiento de resolución para el apartado a) Definir  $p$ : proporción de empleados que prefieren planificar sus propios beneficios de retiro. Según la muestra  $\hat{p} = 0,40$ ,  $Z(0,995) = 2,58$ . Aplicar el intervalo siguiente para un tamaño de muestra grande:

$$\hat{p} - Z(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Un intervalo aproximado del 99% de confianza usando la información anterior, debe dar el siguiente resultado (0,250 ; 0,546). En el apartado b) la respuesta es no, pues el intervalo contiene a 0,3.

Otra actividad de mayor complejidad que implica la construcción de intervalo de confianza de la diferencia de proporciones en dos muestras, se presentaría a continuación.

**Actividad 1.11.** Construya un intervalo de confianza para la diferencia entre dos proporciones  $p_1-p_2$ .

En conjunto con los alumnos se desarrollaría una solución de forma simbólica: Para  $n_1$  y  $n_2$  relativamente grandes, se tiene por el teorema central del límite que:

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1 q_1}{n_1}\right), \quad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2 q_2}{n_2}\right) \text{ Entonces, } Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

En este último estadístico las proporciones muestrales en el denominador  $p_1$  y  $p_2$  han sido estimados por sus respectivos estimadores de máxima verosimilitud (P10). Dado que los valores de  $n_1$  y  $n_2$  son grandes las aproximaciones siguen siendo válidas.

Por lo tanto, un intervalo de confianza aproximado del  $100(1-\alpha)\%$  para  $p_1 - p_2$  es:

$$\left( \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - Z(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}, \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + Z(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} \right)$$

donde  $\hat{p}_1$  y  $\hat{p}_2$  son los estimadores máximo verosímiles de  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente (P10).

### Desarrollo de la Sesión 5.

Se trabajarían los campos de problemas CP8 y CP12. Se prevé una segunda aplicación del teorema central del límite consistente en *determinar el tamaño adecuado de muestra aleatoria para estimar el parámetro de una población binomial con una precisión dada*, en el contexto de estimar la proporción de fumadores. Se lleva al alumno a descubrir que el número de unidades en la muestra depende de la precisión con la cual se quiere estimar el parámetro de interés  $p$ , de la varianza de la población y del valor del coeficiente de confianza utilizado para efectuar la estimación mediante un intervalo. La variable a considerar es cualitativa y se estima la proporción de elementos que tienen la característica indicada por dicha variable mediante el estimador  $\hat{p}$ . El error absoluto de estimación es  $e = |\hat{p} - p|$ .

Como el intervalo de confianza  $1-\alpha$  es  $|\hat{p} - p| \leq Z(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  se obtiene una fórmula de cálculo de tamaño adecuado mínimo,  $n = \left(\frac{Z(1-\alpha/2)}{e}\right)^2 \cdot p(1-p)$ . Para guiar a los estudiantes en la comprensión y aplicación se entregaría la actividad siguiente:

**Actividad 1.12. Muestreo.** Una fracción desconocida  $p$  de una población está compuesta por fumadores, y vamos a utilizar el muestreo aleatorio con reemplazo para determinar  $p$ . Se quiere encontrar  $p$  con un error no mayor de 0,005.

- ¿Cuán grande debe ser el tamaño  $n$  de la muestra?
- ¿Cuán grande debe ser el tamaño  $n$  de la muestra si se quiere un error a lo más 0,01?

Este ejercicio guiaría al alumno a descubrir que la determinación del tamaño muestral está condicionada al error muestral. Se conduciría al alumno a discutir la siguiente secuencia de algoritmo de solución:

Sea  $\hat{p}$  la fracción de fumadores de la muestra. Es claro que ningún tamaño de muestra puede garantizar de manera absoluta que  $|\hat{p} - p| < 0,005$ . A lo más podemos considerar muy improbable un error que exceda de la cota asignada de 0,005. Con este propósito, se establecería un nivel de confianza arbitraria  $1-\alpha$  digamos 0,95, y elegiría una  $n$  tan grande que el evento  $|\hat{p} - p| < 0,005$  tenga probabilidad  $> 1-\alpha$ .

Dado que  $S_n = n\hat{p}$  puede interpretarse como el número de éxitos en  $n$  ensayos, tenemos que  $P(|\hat{p} - p| < 0,005) = P(|S_n - np| < 0,005n) \geq 1 - \alpha$ . Con apoyo de la aproximación normal y observando sus valores en la tabla, sería necesario elegir una  $n$  tan grande que  $\frac{0,005\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \geq Z(1 - \alpha/2)$  ó  $n \geq 40000 \cdot p \cdot q \cdot Z^2(1 - \alpha/2)$ .

En esto interviene la probabilidad desconocida  $p$  pero, en cualquier circunstancia, tenemos que  $pq \leq 1/4$  y, en consecuencia, será suficiente un tamaño de muestra  $n \geq 10000 \cdot Z^2(1 - \alpha/2)$ . En el nivel de confianza  $1-\alpha = 0,95$ , encontramos que  $Z(1 - \alpha/2) = 1,96$ , por lo que un tamaño muestral de  $n = 40000$  es, desde luego, suficiente. En la parte b) Si solamente se requiere una precisión 0,01 sería suficiente un tamaño muestral de 10000 (con el mismo nivel de confianza).

Finalmente, se dejarían dos ejercicios de aplicación acerca de control de calidad y de satisfacción de un producto.

**Ejercicio 1.5.** Para estimar la proporción de artículos defectuosos en una fábrica, el departamento de control de calidad quiere una estimación que difiera de la verdadera proporción en menos de 0,05 con probabilidad al menos 0,95. Determine el tamaño de muestra necesario para el nivel de precisión requerido.

Solución: Si  $p = 0,5$  se tiene  $n = 385$ ; si  $p = 0,2$  el tamaño de muestra es sólo 246.

**Ejercicio 1.6.** En una encuesta sobre la satisfacción del producto del salmón en latas, 320 de un total de 400 personas entrevistadas se pronunciaron a favor por este producto.

- Establezca un intervalo aproximado de confianza del 95% para estimar la proporción de personas que están a favor de la venta de las latas de salmón.
- Se desea estimar la proporción  $p$ , de error máximo de 3% con un nivel de confianza de 99%. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para asegurar esta precisión?
- ¿Con qué nivel de confianza puede afirmarse que la proporción de personas que están a favor del producto está entre 77% y 83%?

Una vez terminado los contenidos de la lección 1 en el aula, a modo de regular el aprendizaje parcial de esta lección, se plantearían dos ejercicios a resolver por los estudiantes, uno a desarrollar en el laboratorio de computación y otro en la sala de clases, en un tiempo de 50 minutos cada uno.

**Ejercicio 1.7. Riesgo individual**

Introducción: Cuatro hombres adultos en Concepción toman una póliza de seguro automotriz por un año, en una Sucursal de una gran Empresa Aseguradora en Chile. Los valores posibles de reclamo del seguro de los clientes es  $\{0,1,2,3,4\}$ , con probabilidad de que reclame un cliente de  $p = \text{Pr}(\text{reclamación}) = 0,5$ .

La función de probabilidad del número de reclamos de los cuatro clientes es:

$x$	0	1	2	3	4
$p(x)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Si calculamos la media y la varianza obtenemos 2 y 1 respectivamente.

La Empresa Aseguradora lo ha contratado a usted para que analice el riesgo individual de reclamos de sus clientes, considerando una muestra de 20 Sucursales seleccionadas al azar en el país.

- Con apoyo de Excel, simular el número de reclamos, con un número grande de 50 clientes que solicitan un seguro automotriz en cada Sucursal seleccionada. Obtener la distribución de frecuencias de los reclamos en las 20 Sucursales.
- Represente por un histograma la distribución muestral del total de reclamos en las Sucursales, para verificar el Teorema de Laplace-DeMoivre. Comente las características del histograma dadas por el teorema.
- Compare el valor teórico esperado con su correspondiente valor empírico.
- ¿Es rentable para la Empresa los seguros automotriz que ofrece a sus clientes?

El siguiente ejercicio 1.8 de accidentes industriales, tiene por objeto determinar la valoración que los estudiantes hacen de las propiedades del teorema central del límite en un ejercicio algebraico. La solución prevista y resultados serán analizados en la sección 6.2.2.

**Ejercicio 1.8. Accidentes Industriales.** Un ingeniero ha comprobado que 45 de los 150 accidentes industriales en su planta, en los últimos cinco años, se deben a que los empleados no siguen las instrucciones.

- Determine la probabilidad aproximada de que de 84 nuevos posibles accidentes, entre 20 y 30 se deban a negligencia de los empleados.
- Compare con el valor exacto de la probabilidad anterior, determinada mediante la probabilidad binomial, que es 0,81023.
- Calcule la probabilidad aproximada de obtener, en una muestra aleatoria de 120 accidentes industriales, más de un 35% que se deban a negligencia de los empleados.
- Calcule el tamaño de muestra necesario para que la estimación difiera de la verdadera probabilidad en menos de 4,5% con probabilidad al menos 0,96.

## 5.5. ANÁLISIS DE LA SEGUNDA LECCIÓN

### 5.5.1. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO Y CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

En la segunda lección titulada “Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias discretas”, se presentaría una extensión del teorema central del límite para el

caso de variables discretas acotadas y no acotadas. Se recogerían los campos de problemas (Tabla 5.5.1.1) CP2: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas y CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes. Los procedimientos previstos son AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias; AP2: Tipificación/destipificación y AP3: Cálculo de probabilidades referidas al teorema con calculadora, tablas de distribución o programa de ordenador.

**Tabla 5.5.1.1.** Planificación de la segunda lección

Sesión	Acción didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Elementos de significado	Configuración epistémica
6	Actividad 2.1	Motivar la aproximación de la Poisson	CP2, AP1, AP2, AP3 P1, P3, P12	Algebraica
	Actividad 2.2	Aplicar el teorema a la distribución de la media muestral de la distribución Uniforme	E4, P1, P2, P3, P8, AP1, A2, A5	Algebraica
	Sección 2.2	Segunda formulación del teorema	P4, E4	Algebraica
	Ejercicio 2.1	Obtener la distribución de la media muestral de variables discretas acotadas	AP1, AP3, E4, P1, P2, P8, A2	Algebraica
	Ejercicio 2.2	Estudiar la distribución de los puntajes medios de lanzamientos de varios dados	P3, P4, P8, A3	Algebraica
7	Actividad 2.3	Aproximar la distribución Hipergeométrica a la Normal	AP1, AP2, AP3, E4, P1, P2, P8, P12, A2	Algebraica
	Ejercicio 2.3	Estudiar la forma de la distribución de media muestral de v.a. discreta acotada	AP1, E4, P4, A5	Algebraica
	Actividad 2.4	Aplicar algebraicamente el teorema a la distribución Poisson Corrección de continuidad	E4, AP1, AP2, AP3, P1, P2, P8, P12, A5	Algebraico
	Actividad 2.5	Error de aproximación mediante cálculo de probabilidades por intervalos	AP1, AP3, E4, P8	Algebraico
8	Ejercicio 2.4	Estudiar gráficamente la distribución Poisson en función de los parámetros	E6, P8, A4	Computacional
	Actividad 2.6	Aplicar el teorema, estimar intervalos de confianza para el parámetro de la Poisson	CP12, AP1, AP2, AP3, E4, P10, A1	Algebraico
	Ejercicio 2.5	Aplicar algebraicamente a la ingeniería la aproximación de la dist. Hipergeométrica	AP3, P3, P8, P12, A2	Algebraico
	Ejercicios 2.6	Aplicar algebraicamente la aproximación de la dist. Poisson a la ingeniería	AP3, P8, P12, A2	Algebraico
Fuera de clase	Ejercicio 2.7	Aplicar a la ingeniería el teorema	CP2, AP1, AP2, AP3, E4, P1, P2, A1, A6	Algebraico

Trataríamos de avanzar en el enunciado del teorema, de forma intuitiva (E6) y general (E5) a enunciarlo para la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (E4). Pretendemos que el alumno aplique las siguientes propiedades: P1: La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias; P2: La varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas; P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue aproximadamente una

distribución normal; P4: La aproximación mejora con el número de sumandos; P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal; P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal; y P12: Corrección de continuidad.

Los elementos de lenguaje a establecer son las expresiones verbales, notaciones simbólicas y representaciones gráficas de barra y función de probabilidad. Por último intentaríamos que los alumnos desarrollen tres formas de argumentaciones, partiendo del caso particular de una distribución discreta uniforme de un resultado general (A2); comprobación de ejemplos y contraejemplos (A5); y generalizaremos las conclusiones de experimentos manipulables (A3) situadas en la lección 1.

### 5.5.2. TRAYECTORIA DIDÁCTICA

Se planificarían e implementarían tres sesiones de aula de esta lección que analizamos a continuación.

#### *Desarrollo de la Sesión 6.*

La clase comenzaría explicando a los alumnos que en este tema aproximaremos el modelo de la distribución normal a distribuciones de probabilidades clásicas *discretas* (CP2), como la distribución uniforme discreta y la Poisson, para ciertos valores de sus parámetros. Distinguiremos tres casos de análisis: variables provenientes de poblaciones con distribución uniforme discreta, variables discretas acotadas y variables discretas no acotadas. La primera actividad 2.1 que motiva la introducción de la lección 2, se refiere al tiempo de llegadas de llamadas de teléfonos, modelado por una distribución de Poisson.

**Actividad 2.1.** A una central de teléfonos llegan llamadas al ritmo medio de 3 por minuto. Determinar la probabilidad de que lleguen al menos 200 llamadas en un periodo de una hora. ¿Cómo desarrollarías esta actividad?

Se espera que la mayoría de estudiantes aplique los conocimientos adquiridos del curso previo de probabilidades para determinar el valor. Para ello debieran definir la variable aleatoria  $X$ : “número de llamadas recibidas por una central en 60 minutos” con distribución Poisson de media 180, cuya expresión simbólica es  $X \sim P(\mu = \lambda t = 3 \times 60 = 180)$  calculando el promedio  $\mu$ , de llamadas que recibe la central durante 60 minutos (P1). Se pide utilizar el modelo Poisson para calcular la

probabilidad  $P(X \geq 200) = \sum_{x=200}^{\infty} \frac{180^x \cdot e^{-180}}{x!}$ . Como el cálculo con calculadora o tablas

estadísticas es laborioso, los estudiantes podrían intentar ampliar el enunciado del teorema central del límite conocido para la distribución binomial para este caso de la Poisson. Esta segunda solución aproximada considera una aproximación al cálculo de la probabilidad mediante la distribución normal.

La esperanza y la varianza de la distribución Poisson es 180. Utilizando la corrección de continuidad (P12) y estandarizando (AP2) se obtiene:

$$P(X \geq 200) = P\left(Z \geq \frac{199,5 - 180}{\sqrt{180}}\right) = 1 - F_Z(1,45) = 1 - 0,9264 = 0,0736.$$

A continuación, el profesor enunciaría una nueva versión del teorema central del límite, según Linderberg y Lévy:

**Enunciado 2 del teorema central del límite (Linderberg-Lévy):** Sea una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$  de cualquier población de media  $\mu$  y desviación típica finita  $\sigma$ . Cuando  $n$  es grande, la distribución de la media muestral  $\bar{x}$  se aproxima la distribución normal  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma/\sqrt{n}$ .

Se indicaría al alumno que este enunciado es general, y podría aplicarse a variables aleatorias discretas, incluyendo la aproximación binomial y Poisson. Se recordaría al alumnado que las observaciones de una muestra aleatoria son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se continuaría con el estudio de la distribución de la suma de variables uniforme discreta.

**Definición:** Una variable aleatoria sigue la distribución uniforme discreta entre los valores  $a$  y  $b$  con  $a < b$ , notándose  $UD(a,b)$ , si tiene la siguiente distribución de probabilidades

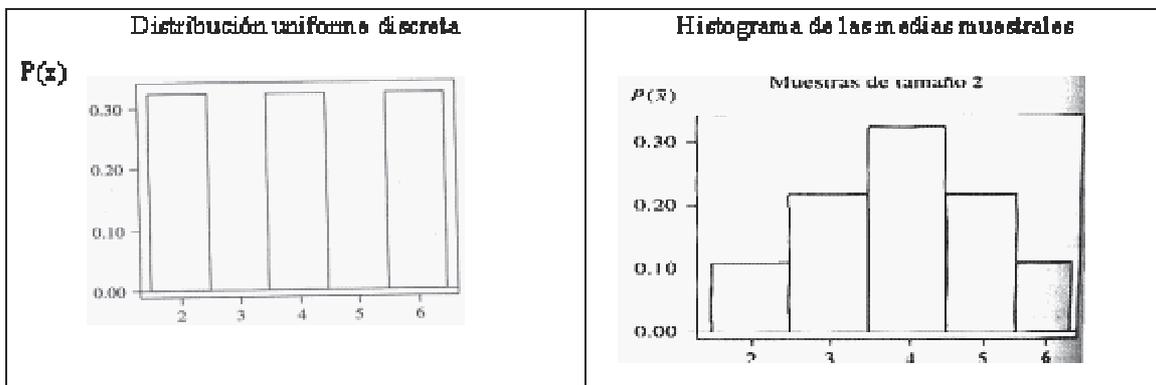
$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & x = a, a+1, \dots, b-1, b \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Su media es  $E(X) = \frac{a+b}{2}$  y su varianza  $V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$

Formulada la distribución uniforme, se propondría la actividad 2.2, enfrentando al estudiante a la aplicación algebraica del teorema central del límite y la representación gráfica de la distribución muestral de la media de una variable aleatoria de distribución conocida. Si bien el tamaño de la muestra es pequeño, el objetivo es trabajar los cálculos con lápiz y papel en un tiempo de 30 minutos y observar la convergencia rápida para esta distribución particular.

- Actividad 2.2.** Un producto se vende en el mercado con la misma frecuencia, en tres tamaños 2, 4 y 6.
- Determine la distribución de probabilidad de la variable tamaño del producto.
  - Elabore un diagrama de barras para representar su distribución.
  - Calcule la media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$
  - Enumere todas las muestras aleatorias de tamaño 2 con reemplazo que pueden comprarse de este producto, y calcular las medias de las muestras obtenidas.
  - Obtenga la distribución de probabilidad de estas medias.
  - Calcule la media y desviación estándar de las medias muestrales. Comparar con las teóricas.
  - Dibuje un *histograma* de la distribución muestral de medias muestrales. Comentar.
  - Indique tres hechos importantes obtenidos en la resolución del problema.

Esta actividad analiza una distribución discreta,  $P(x) = 1/3$ , de valores  $x = 2, 4, 6$ . En b) y g) los alumnos compararían gráficamente la distribución original con la distribución muestral de la media muestral ( $P_3$ ). En apartado c) se calcularían los valores poblacionales de media y desviación estándar, que son respectivamente  $\mu=4$ ,  $\sigma = \sqrt{18,66 - 4,0^2} = 1,63$ . La obtención en d) de las nueve muestras posibles de tamaño 2, permite hallar la distribución para la media muestral en e) y los estimadores de los dos parámetros,  $\mu_{\bar{X}} = 4,0$  , y  $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{17,33 - 4,0^2} = 1,15$ . Las representaciones gráficas son las siguientes:



A continuación, se propondría a los estudiantes resolver el ejercicio 2.1 y entregarlos para la próxima sesión.

- Ejercicio 2.1.** Un jabón para lavavajillas de cierta marca se vende en tres tamaños: de 25, 40 y 65 onzas. Veinte por ciento de los compradores seleccionan la caja de 25 onzas, 50% la de 40 onzas y 30% la caja de 65 onzas. Sean  $X_1$  y  $X_2$  los tamaños de caja seleccionados por dos compradores independientes.
- Escriba la distribución de los tamaños de jabones. Comenta sobre la naturaleza de la variable.
  - Determine la distribución de muestreo de  $\bar{X}$  , calcule  $E(\bar{X})$  y compárela con  $\mu$ .

También se propone pensar el ejercicio 2.2

**Ejercicio 2.2.**

- a. Escriba la distribución de probabilidad de los puntos obtenidos al lanzar un dado.  
 b. Verifique (y comente) que la distribución del promedio de puntos cuando se lanzan dos, es la siguiente:  
 $x_i$  1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5 6  
 $n_i$  1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1  
 c. Determine la distribución del promedio de puntos cuando se lanzan tres y cinco dados respectivamente. Presente y comente los gráficos de las distribuciones encontradas.

**Desarrollo de la Sesión 7.**

La sesión comenzaría resolviendo el ejercicio 2.1, donde se requiere la distribución de la variable  $X$ : tamaño en onzas del jabón, discreta acotada, y es la siguiente:

Tamaño del jabón	25	40	65
Probabilidad	0,20	0,50	0,30

Para determinar la distribución de muestreo de  $\bar{X}$ , se obtendrían las muestras posibles obtenidas por dos compradores que son: (25,25), (25,40), (40,25), (40,40), (25,65), (65,25), (40,65), (65,40), (65,65). Se calcularían los promedios respectivos: 25, 32,5, 32,5, 40, 45, 45, 52,5, 52,5, 65, y las probabilidades de cada valor del promedio:  $P(\bar{X} = 25) = p(25,25) = 0,2^2 = 0,04$  ;  $P(\bar{X} = 45) = p(25,65) + p(65,25) = 2 \times 0,2 \times 0,3 = 0,12$  ; etc.

Así, el alumno obtendría la distribución de la media muestral (P3).

$\bar{X}_i$	25	32.5	40	45	52.5	65
$p_i$	0,04	0,2	0,25	0,12	0,3	0,09

Calcularían el promedio de la media muestral  $E(\bar{X})$  que coincide con la media de la distribución inicial  $\mu$  y cuyo valor es 44,5. Se dejaría como ejercicio la representación gráfica de la distribución obtenida en apartado b) y determinar la distribución de muestreo de la varianza muestral  $S^2$ , calculando  $E(S^2)$  y comparando con  $\sigma^2$ . Además, se pediría enunciar verbalmente la aplicación del teorema central del límite a este ejercicio.

A modo de refuerzo, se dejaría el ejercicio 2.3, que será retomado en la sesión 8; y corresponde a un problema de producción. Su objetivo es estudiar algebraicamente y gráficamente la forma de la distribución de media muestral o suma de variables aleatorias discretas acotadas.

**Ejercicio 2.3.** Una máquina produce artículos con cierto tipo de defecto, identificados como 0, 1 y 2. Suponiendo que en una partida hay 20 artículos sin defecto, 30 con un defecto y 50 con dos defectos, se

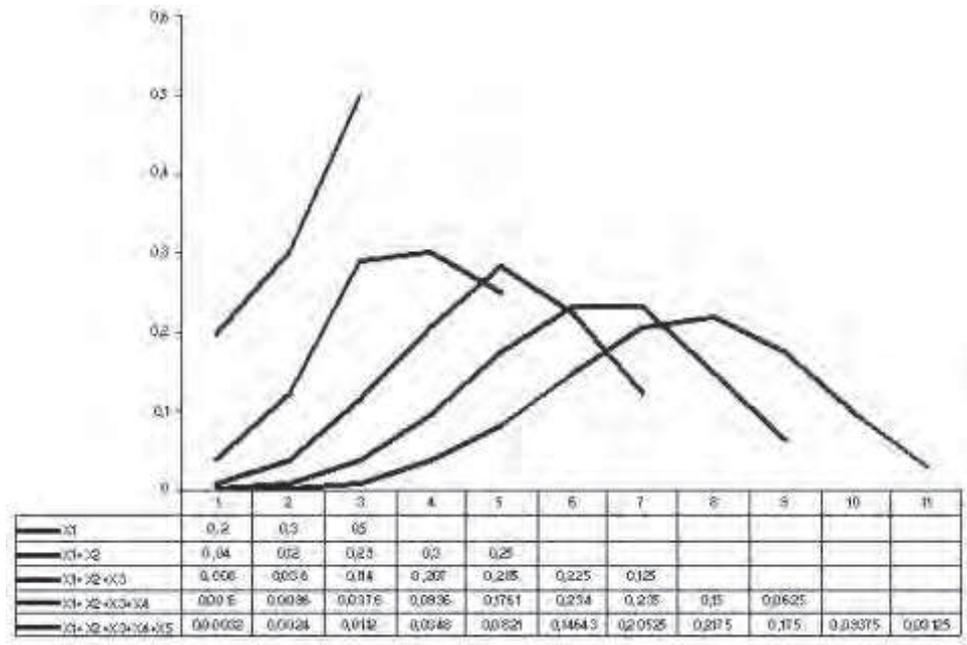
saca un artículo al azar y se anota su valor,  $X_1$ . La distribución de  $X_1$  será  $P(X_1 = x) = \begin{cases} 0,2 & x = 0 \\ 0,3 & x = 1 \\ 0,5 & x = 2 \end{cases}$

Suponga que el artículo escogido primero se devuelve a la partida y luego se escoge un segundo artículo y se anota su valor,  $X_2$ . Considere la v.a.  $\bar{X}_2 = (X_1 + X_2)/2$  como el promedio de una muestra aleatoria de tamaño 2, con distribución:  $P(\bar{X}_2 = \bar{x}_2) = 0,04, 0,12, 0,29, 0,30, 0,25$  y valores de la v.a.  $\bar{X}_2$  respectivamente  $0, 1/2, 1, 3/2, 2$ .

Suponga que después de que el segundo artículo ha sido también devuelto a la partida, se escoge un tercer artículo y se anota su valor,  $X_3$ . Determine la distribución de probabilidad de la v.a.  $\bar{X}_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$

- Realice el experimento de obtener un cuarto artículo siendo devuelto el tercero a la partida. Obtenga la distribución de probabilidades del promedio de los cuatro artículos extraídos.
- En un gráfico dibuje las distribuciones de  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$  y  $\bar{X}_4$  (Utilice Excel y/o lápiz y papel). ¿Qué puede comentar sobre la forma de la distribución de los resultados de esta ilustración numérica? En el mismo gráfico, trace en línea discontinua como sería la distribución de  $\bar{X}_5$ .
- Si en vez de la media muestral, se analiza la suma de variables aleatorias discretas,  $S_1; S_2=X_1+X_2; S_3=X_1+X_2+X_3$ , etc. Fundamente si la distribución de la suma y el promedio serán similares.
- Enuncie al menos una pregunta de acuerdo al problema, sobre el cálculo de probabilidad, donde tenga que aplicar el teorema central del límite y resuelva.

Se esperaría que los estudiantes continúen el experimento de obtener la distribución de probabilidades del promedio o de la suma de variables aleatorias discretas, como se representa a continuación:



A continuación se plantearía otra aplicación del teorema central del límite para el caso de la distribución hipergeométrica (P8), recordando primero este modelo:

Supongamos que se extraen  $n$  bolas, al azar y sin reemplazamiento, de una urna que contiene  $a$  bolas blancas y  $b$  bolas negras; sea  $X$  el número de bolas blancas contenidas en la muestra resultante. Se dice que  $X$  tiene una distribución hipergeométrica, con función de probabilidad

$$f(x) = \frac{\binom{a}{x} \binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}, \quad R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, \min(a, n)\}$$

En el caso de que  $n$  es grande y que  $a + b \gg n$ , esta distribución puede ser aproximada por una distribución normal, con media y varianza:  $\mu = np$ ;  $\sigma^2 = npq \cdot \left(\frac{a+b-n}{a+b-1}\right)$ . Para valores dados de  $n$  y  $a+b$ , la aproximación es más precisa se cuando  $p = (a/(a+b))$  es próximo a 0,5 ( $a/b \cong 1$ ).

Luego, se presentaría la siguiente actividad de aplicación en el caso de votaciones:

**Actividad 2.3.** La candidata presidencial de Chile Michel Bachelett obtiene un 48% de los  $N$  encuestados, de forma permanente por varios meses, previo a las elecciones. Pensando en los resultados definitivos de diciembre 2005 respecto a los votos de los tres candidatos, ¿Cuál es la probabilidad de que sea ganadora en un sondeo de 200 votos en un determinado distrito?, ¿Tendremos una primera presidenta mujer de Chile, en la primera vuelta electoral?

Nota: La proporción  $p$  de votos a favor de M. Bachelett varía de un mes a otro pero con tendencia al 48% y además los tamaños de muestras pueden ser distintos.

El procedimiento de solución requiere definir la variable  $X$ : “número de votos que obtiene de los 200” y reconocer que  $X$  tiene una distribución hipergeométrica de parámetros  $n = 200$ ,  $a = pN$  y  $b = (1-p)N$ , donde  $p = 0,48$  y calcular la media y varianza respectiva,  $\mu = np = 96$ ;  $\sigma^2 = npq \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1} = 49,92 \cdot \frac{N-200}{N-1}$  (P1, P2).

Si  $N \gg 200$ , la varianza está próxima a 49,92 y la distribución de  $X$  es aproximadamente  $N(96, 49,92)$ . En términos simbólicos, la probabilidad de que la candidata obtenga más de la mitad de los votos es:

$$P(X > 100) \approx 1 - F_Z\left(\frac{100,5 - 96}{\sqrt{49,92}}\right) = 1 - F(0,6369) = 1 - 0,7389 = 0,2611.$$

Se dejaría como ejercicio calcular y comentar el valor de la probabilidad sin usar la corrección de continuidad (P12) y comparar el resultado inicial con la aproximación binomial a la distribución hipergeométrica de la probabilidad calculada (P8).

Se continuaría con la distribución de la suma de variables discretas no acotadas, se presenta a los alumnos la aplicación del teorema central del límite a la distribución de Poisson (P8), es muy recurrida en ingeniería y planteando algunos ejercicios de tipo algebraico. En la siguiente sesión se presentaría algunas gráficas de la distribución Poisson para varios valores de sus parámetros.

**Actividad 2.4.** En un proceso de fabricación de películas fotográficas aparecen por término medio 1 defecto por cada 20 metros de película. Si la distribución de defectos es Poisson, calcule la probabilidad de 6 defectos en un rollo de 200 metros de película (a) directamente; (b) utilizando la aproximación normal.

Primero se debe calcular la probabilidad en forma exacta usando el modelo de Poisson; tenemos que el parámetro  $\mu=1/20$  metros, lo que conduce a que en 200 metros

$\mu=200/20 =10$  defectos en 200 metros. Así  $P(X = 6) = \frac{e^{-10} \cdot 10^6}{6!} = 0,0630$ . Una solución

aproximada usando la distribución normal y la corrección de continuidad (P12), se

obtiene con  $P(X = 6) = P\left(\frac{5,5-10}{\sqrt{10}} < Z < \frac{6,5-10}{\sqrt{10}}\right) = 0,0557$ . Se observa la buena

aproximación de la distribución de Poisson por la normal, para  $n$  grande y  $\mu > 5$ .

Desarrollado el ejercicio, se establecería la aproximación de la distribución de Poisson:

*“Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias de Poisson independientes, de media común  $\mu$ . Por el teorema central del límite (E4) la distribución de  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  es aproximadamente normal  $N(n\mu, n\mu)$  para  $n$  suficientemente grande”.*

La siguiente actividad relacionaría las distribuciones Poisson, binomial y normal; para  $n$  grande y  $p$  pequeño, la distribución binomial  $b(n,p)$  se aproxima a la distribución de Poisson  $P(\mu=np)$ , siendo el error pequeño si  $npq$  es grande. Para  $\mu$  pequeña, solamente puede usarse la aproximación de Poisson, pero si  $\mu$  es grande, podemos utilizar cualquiera de las aproximaciones normal o de Poisson.

**Actividad 2.5.** La distribución de Poisson con  $\mu=100$  asigna al conjunto de enteros  $a, a+1, a+2, \dots, b$  la probabilidad  $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(X = a+1) + \dots + P(X = b)$ . Esta distribución puede considerarse como aproximación a la binomial con  $n = 100.000.000$  y  $p = 10^{-6}$ . Luego,  $npq \approx 100$  y nos aproximamos a la binomial mediante la normal, al menos para valores próximos al término central 100, podemos usar la aproximación normal para la Poisson. Compruebe que  $P(a \leq X \leq b) \approx F((b - 99,5)/10) - F((a - 100,5)/10)$

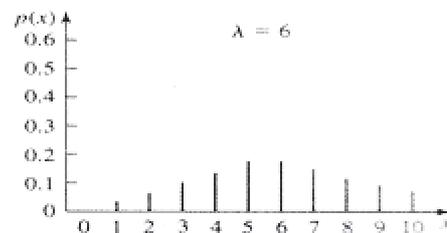
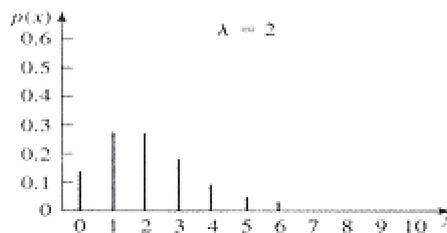
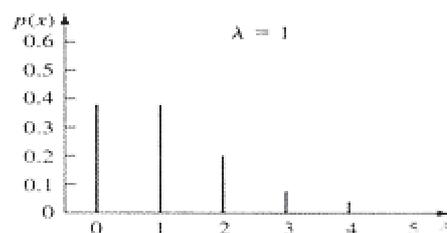
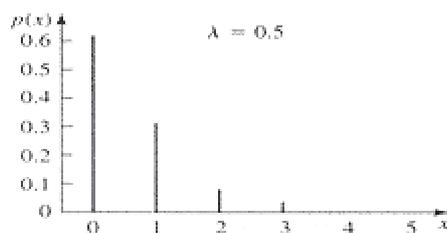
Seguidamente, se pediría a los alumnos que calculen varias probabilidades en las dos distribuciones que muestre el grado de aproximación, como la tabla siguiente

Probabilidades	Valores exactos	Aproximación Normal
$85 \leq X \leq 90$	0,11384	0,11049
$90 \leq X \leq 95$	0,18485	0,17950
$95 \leq X \leq 105$	0,41763	0,41768
$90 \leq X \leq 110$	0,70652	0,70628
$110 \leq X \leq 115$	0,10738	0,11049
$115 \leq X \leq 120$	0,05323	0,05335

**Desarrollo de la Sesión 8.**

La tercera sesión comenzaría planteando a los alumnos el ejercicio 2.4. Se les pediría que envíen sus comentarios por el foro de la plataforma, acerca del estudio gráfico de la distribución Poisson en función de su parámetro.

**Ejercicio 2.4.** Comente, por el foro, la forma de la distribución Poisson para distintos valores de sus parámetros.



La siguiente actividad está orientada a mostrar una aplicación del teorema central del límite a la estimación de parámetros por medio de intervalos de confianza (CP12). Se procedería a la construcción intervalos de confianza de la media de la distribución Poisson (CP12) a partir de su estimador de máxima verosimilitud (P10).

**Actividad 2.6.** Supongamos que la v.a.  $X$  tiene una distribución Poisson de parámetro  $\mu$ . Considere una muestra aleatoria de tamaño  $n$ .

- Pruebe que el estimador de máxima verosimilitud del parámetro  $\mu$  es  $\bar{X}$ .
- Determine un intervalo de confianza aproximado del 95% para  $\mu$ .

Esperamos que los alumnos verifiquen que la distribución muestral de la media es de la forma  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\mu}{n}\right)$  (una consecuencia de CP2) y posteriormente escriban su forma estándar  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\mu/n}} \sim N(0,1)$  (AP2). De esta forma, pueden determinar los percentiles tales que  $P\left(-Z(1-\alpha/2) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\mu/n}} \leq Z(1-\alpha/2)\right) = 1-\alpha$  (AP3). Despejando el parámetro (AP1) deben llegar a obtener la siguiente expresión:

$$\mu \in \left( \bar{X} - \frac{Z(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\bar{X}}, \quad \bar{X} + \frac{Z(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\bar{X}} \right)$$

En el tiempo que quedaría de la clase, se atenderían consultas del ejercicio 2.3 y enseguida el profesor pasaría a plantear y dar indicaciones de resolución de dos nuevos ejercicios propuestos sobre acuicultura y transporte.

**Ejercicio 2.5.** Una caja de una empresa contiene 600 merluzas y otra de 500 salmones. El departamento de control de calidad desea seleccionar una muestra aleatoria de 36 pescados. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que se puedan extraer al menos 15 salmones?

**Ejercicio 2.6.** El número de infracciones por estacionamiento en cierta ciudad sugiere una distribución de Poisson con parámetro  $\mu= 50$ . ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que:

- ¿Entre 35 y 70 infracciones se despachen en un día en particular?
- ¿El número total de infracciones expedidas durante una semana de 5 días esté entre 225 y 275?

Al igual que la lección 1, una vez terminado los contenidos de la lección 2 se les plantearían a los alumnos resolver, en un tiempo de 50 minutos, un ejercicio algebraico de caso de muestras provenientes de una variable aleatoria discreta acotada. La solución prevista y resultados serán analizados en la sección 6.3.2.

**Ejercicio 2.7.** Sea  $X$  el número de paquetes que envía por correo un cliente seleccionado al azar, en cierta oficina de envíos. Suponga que la distribución de  $X$  es como sigue:

$x$	1	2	3	4
$P(X_I = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

- Considere una muestra aleatoria de tamaño  $n = 2$  (dos clientes) y sea  $\bar{X}$  el número medio muestral de paquetes enviados. Obtenga la distribución de probabilidad de  $\bar{X}$ .
- Calcule, para  $n = 2$ , la probabilidad  $P(\bar{X} \leq 2,5)$ .
- Si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño  $n=3$ , ¿Cuál es la probabilidad de que el total de paquetes enviado por los tres clientes sea exactamente de 4 paquetes?
- Encuentre la probabilidad aproximada de que el número promedio de paquetes en 36 clientes sea menos de 2,5 paquetes.

## 5.6. ANÁLISIS DE LA TERCERA LECCIÓN

### 5.6.1. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO Y CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

La tercera lección titulada “Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias continuas”, presenta el teorema central del límite para el caso de variables continuas (CP4). Se trabajarían principalmente dos campos de problemas, CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas y CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas. Otros dos son planteados como ejercicios, CP10: Obtener la distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones y CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes.

Se usarían procedimientos algebraicos (AP1) con apoyo de calculadora y ordenador en el cálculo de probabilidades (AP3). Esta última lección reúne las diversas expresiones verbales y simbólicas y representaciones gráficas simuladas del teorema; así como intentamos finalizar con el enunciado formal del teorema como límite de funciones (E2), partiendo del caso particular de suma de v.a. independientes e idénticamente distribuidas (E4). Las propiedades que nos proponemos que los alumnos apliquen son las siguientes: P1: La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias; P2: La varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas; P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal; P4: La aproximación mejora con el número de sumandos; P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal y P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal.

**Tabla 5.6.1.1.** Planificación de la tercera lección

Sesión	Acción Didáctica	Objetivo de la acción didáctica	Elementos de significado	Configuración epistémica
9	Actividad 3.1	Motivar la aproximación de la distribución Uniforme continua	CP4, AP1, AP2, AP3, E4, P1, P2, P8, A2	Algebraica
	Sección 3.1	Tercera formulación del teorema	CP4, E4	Algebraica
	Actividad 3.2	Distribución de la suma de v.a.i.i.d. con distribución U(0,1)	AP1, AP2, P1, P2, P4, P8, A2, A3, A4	Algebraica Computacional
	Ejercicio 3.1	Aplicación del teorema a la distribución U(-1,1)	AP1, AP2, P1, P2, P4, P8, A3, A4	Algebraica Computacional
	Sección 3.2	Simulación gráfica para distintos valores de los parámetros de las distribuciones de Fisher y Chi-cuadrado	AP1, P4, P8, A2	Computacional
10	Sección 3.3	Distribuciones clásicas de probabilidades: propiedades de la distribución Gamma	E4, P8	Computacional
	Actividad 3.3	Aproximación de la distribución Exponencial a la normal	AP1, AP3, P1, P2, P3, P8, A2, E4	Algebraica
	Ejercicio 3.2	Aplicación algebraica del teorema a la suma de v.a. exponencial	AP2, P1, P2, P8, A2	Algebraica
	Ejercicio 3.3	Aplicación algebraica del teorema a la distribución Gamma	AP1, AP3, P1, P2, P4, P8, A1	Algebraica
	Actividad 3.4	Aplicación algebraica del teorema a la suma de v.a. con distribución desconocida	AP1, AP3, P1, P2, P3, A1	Algebraica
	Ejercicios 3.4 y 3.5	Aplicación del teorema a las distribuciones T, F y Gamma mediante simulación gráfica con el ordenador	P4, P8, A2, A4	Computacional
11	Actividad 3.5	Aplicación algebraica del teorema a la determinación de tamaños de muestra	CP8, AP1, AP2, AP3	Algebraico
	Ejercicio 3.6	Aplicación algebraica del teorema a la diferencia de medias muestrales	CP10, AP1, AP3, P1, P2	Algebraico
	Sección 3.4	Cuarta formulación del teorema y demostración algebraica	CP4, E2, A1	Algebraico
	Ejercicios 3.7	Aplicación del teorema a la media muestral de v.a. desconocidas	CP4, AP1, AP3, P1, P2, P3, A1	Algebraico
	Ejercicios 3.8	Aplicación del teorema a determinar el tamaño muestral en intervalos de confianza	CP8, AP2, AP3	Algebraico
Fuera de calse	Sección 3.5	Demo del programa @risk usando la binomial	P4, P7, A4, E4	Computacional
	Ejercicio 3.9	Aplicación en ingeniería del teorema a la distribución uniforme.	CP4, CP8, AP1, AP2, AP3, E5, P1, P2, P8, A1, A6	Algebraico

Respecto a las argumentaciones usaríamos las A2: Caso especial de un resultado general y A1: Demostración formal algebraica. Se describe en la Tabla 5.6.1.1 las configuraciones epistémicas que se usarían en las actividades y elementos de

significados pretendidos. No mencionaremos los elementos de lenguaje ya que están siempre presentes.

### 5.6.2. TRAYECTORIA DIDÁCTICA

#### *Desarrollo de la Sesión 9.*

Se explicaría a los estudiantes que esta última parte trata de la aproximación asintótica de la suma de variables aleatorias *continuas*, de gran interés en la ingeniería, debido a que en muchas aplicaciones intervienen variables de esta naturaleza, por ejemplo la distribución de Weibull y exponencial. Comenzaríamos con la distribución uniforme continua, seguida de la aproximación de distribuciones clásicas en inferencia y concluyendo con el enunciado formal del teorema con su demostración algebraica.

En primer lugar, el profesor enunciaría una tercera versión del teorema central del límite, para la *suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas* (E4). Esta formulación más restringida del teorema es común en los libros, pero en la mayoría se presenta para la media muestral, mientras nosotros presentaríamos el caso de la suma:

**Enunciado 3 del teorema central del límite:** Si se extrae una muestra aleatoria de  $n$  observaciones de una población con una media finita  $\mu$  y una varianza finita  $\sigma^2$ , entonces, si  $n$  es lo bastante grande, la distribución de muestreo de la suma  $S_n = \sum X_i$  se puede aproximar con una función de densidad normal cuya media es  $n\mu$  y varianza  $n\sigma^2$ .

Se explicaría a los estudiantes que ahora nos aproximaremos a la distribución de la suma de variables continuas. Partiríamos recordando la distribución uniforme continua.

**Definición:** Sea  $X$  una v.a continua que toma todos los valores en el intervalo  $(a, b)$  con  $-\infty < a < b < \infty$ , diremos que  $X$  está uniformemente distribuida si la función de densidad de  $X$  es constante  $\forall x \in (a, b)$ .

La f.d.p. de una v.a  $X \sim U(a,b)$  está dada por: 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Además,  $IE(X) = \frac{a+b}{2}$  ;  $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

A continuación, se plantearía la actividad 3.1, referido a un problema de electricidad y magnetismo, modelado por una distribución uniforme continua.

**Actividad 3.1.** Se tienen  $n$  voltajes  $V_1, V_2, \dots, V_n$  que se reciben en un concentrador, de tal suerte que  $V = \sum_{i=1}^n V_i$  es la suma de los voltajes en ese punto. Cada voltaje  $V_i$  es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo  $[0,10]$ . Considerando  $n = 20$ , calcule la probabilidad de que el voltaje total de entrada sobrepase los 105 volts.

El profesor ofrecería 25 minutos para intentar resolver la situación, calculando el valor exacto y aproximado de la probabilidad pedida. Los alumnos debieran dejar expresado en forma simbólica la probabilidad que corresponde haciendo notar la dificultad de los cálculos, y generalizando los resultados de la lección 2 dar una solución aproximada. El profesor daría la solución en la siguiente sesión.

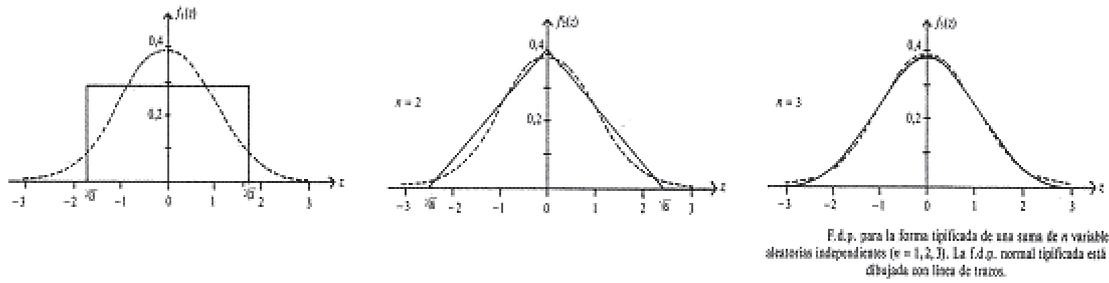
Luego, una segunda actividad es presentada, que es un caso particular de la distribución uniforme para ciertos valores de sus parámetros.

**Actividad 3.2.** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias  $U(0,1)$  independientes. La  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  tiene una media de  $n/2$  y varianza de  $n/12$ . Compruebe que la variable aleatoria estandarizada  $S_n^* = \frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/12}}$  tiene, por el teorema central del límite, una distribución aproximadamente normal estándar para  $n$  grande.

Esta actividad, en relación a este modelo de probabilidad uniforme de parámetros  $U(a=0, b=1)$  propone al estudiante dar una solución algebraica para el caso de la suma de dos v.a.  $X_1+X_2$ . El profesor comentaría que la función densidad de probabilidad exacta de  $S_n^*$  para valores pequeños de  $n$  se podría obtener por métodos de cambio de variables. Por ejemplo, la f.d.p. de  $S_2^*$  es:

$$f_z(z) = \begin{cases} (\sqrt{6} + z)/6 & \text{para } -\sqrt{6} < z < 0 \\ (\sqrt{6} - z)/6 & \text{para } 0 < z < \sqrt{6} \end{cases}$$

Luego se mostraría a los alumnos que en la siguiente figura podemos comparar la f.d.p. exacta de  $S_n^*$  con la f.d.p. de la distribución normal, para  $n = 1,2,3$ . Se haría notar la concordancia que es buena incluso para valores de  $n$  tan pequeños como 3. Se dejaría por parte del alumno indagar fuera de clase y con apoyo del computador, obtener la distribución de  $S_n^*$  para  $n > 3$ . Se usarían los argumentos A3: Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo y A4: Simulación gráfica con ordenador del teorema central del límite.



Se pondría el ejercicio 3.1, que motivaría el uso del ordenador para visualizar la convergencia de esta suma de v.a. que proviene de poblaciones uniforme con los mismos parámetros.

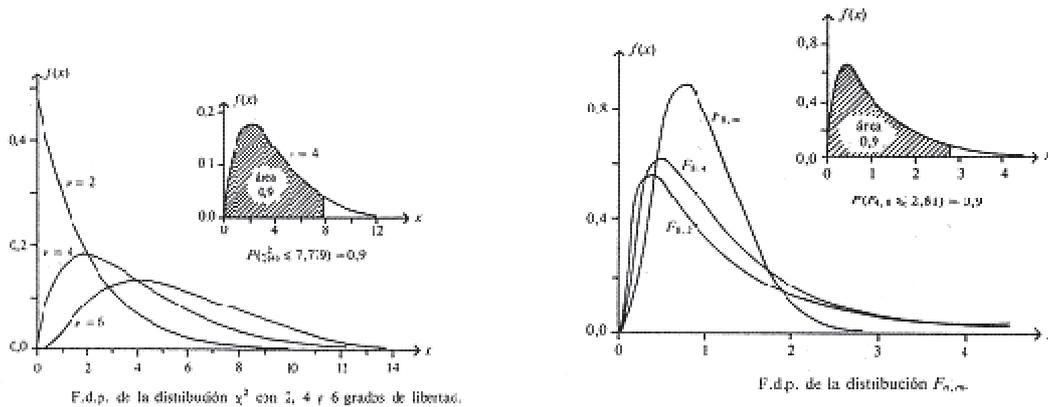
**Ejercicio 3.1.** Sea  $X$  v.a. continua con distribución uniforme en el intervalo  $(-1,+1)$ . Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son v.a. independientes con la misma distribución que  $X$ , entonces la v.a.  $S_n = \sum X_i$  tiene media 0 y varianza  $n/3$ . Analice con el computador que la v.a.  $Z = \frac{S_n}{\sqrt{n/3}}$  tiene aproximadamente una distribución normal estándar  $N(0,1)$ . ¿Para que  $n$  es suficiente una buena aproximación? Observe que esta distribución se utiliza para generar números aleatorios con distribución  $N(0,1)$ .

Tanto en la actividad 3.2 como en el ejercicio 3.1 se enfatizaría la pregunta ¿Cómo lo desarrollarías, si trabajas con la suma y no el promedio; o al revés? El profesor recurriría a responder de forma simbólica la aproximación normal de la suma y media con sus respectivos parámetros de acuerdo a la distribución de origen, por ejemplo:

- Para la actividad 3.2:  $\text{Si } X \sim U(0,1) \Rightarrow S_n = \sum X_i \stackrel{TCL}{\underset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow}} N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{12}\right)$
- Para el ejercicio 3.1:  $\text{Si } X \sim U(-1,1) \Rightarrow S_n = \sum X_i \rightsquigarrow N\left(0, \frac{n}{3}\right)$

Seguidamente se haría una extensión del teorema central del límite a otras distribuciones de probabilidades clásicas: t-Student, chi-cuadrado y F de Fisher. Estas distribuciones (Ver Figura 5.6.2.1) están tabuladas y se utilizan bastante en estadística.

Figura 5.6.2.1. Distribuciones Chi cuadrado y de Fisher

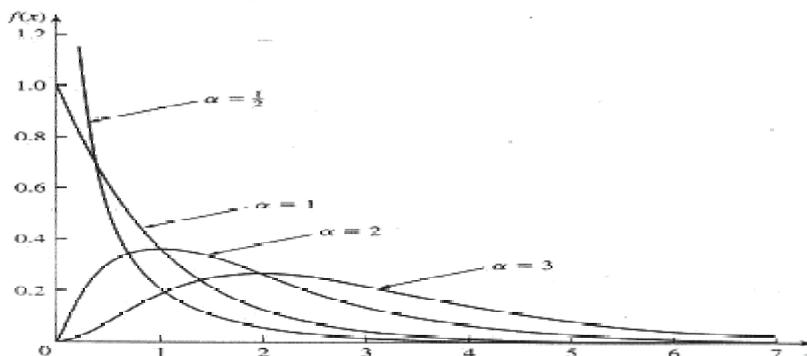


La sesión terminaría introduciendo que la distribución gamma también puede aproximarse por la distribución normal. Para ello, se recordaría la función gamma de parámetro  $\alpha$  como  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy$ , donde se verifica que  $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$ , y se pasaría a su definición.

**Definición:** Una v. a. continua  $X$  con f. d. p.  $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot X^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$ ;  $x > 0$  se dice que tiene una distribución gamma con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Además, una v. a.  $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$  tiene por: media  $\alpha \beta$  y varianza  $\alpha \beta^2$

Luego, se presentaría una gráfica de la función densidad gamma para varios valores de sus parámetros, haciendo notar tanto en su representación gráfica (Figura 5.6.2.2) como en las propiedades la derivación de otras distribuciones de probabilidades ya descritas y la variación del comportamiento de la distribución.

Figura 5.6.2.2. Distribución Gamma



Además, se recordarán las siguientes propiedades:

Capítulo 5

- a. Si  $\alpha=1$ ,  $\beta=1/\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , se obtiene la distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ .
- b. Si  $\alpha=r$  (entero),  $\beta=1/\lambda$  se obtiene la distribución *Erlang* ( $r, \lambda$ ) que nos da la distribución del tiempo necesario para observar  $r$  – éxitos. Su f.d.p. es de la forma:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}$$

y de media y varianza respectivas  $E(X) = r/\lambda$ ,  $V(X) = r/\lambda^2$

- c. Si  $\alpha = n/2$ ,  $n$  natural y  $\beta=2$  se obtiene la distribución chi cuadrado con  $n$  grados de libertad (que es su parámetro). Su f.d.p. es la siguiente:

$$X \sim \chi^2(n) \Rightarrow f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{n/2}} \quad ; \quad x > 0$$

Además,  $E(X) = n$  y  $V(X) = 2n$ .

**Desarrollo de la Sesión 10.**

La sesión comenzaría resolviendo la actividad 3.1. En el caso del cálculo del valor exacto, el voltaje total equivale a la suma de los 20 voltajes de entrada, y por tanto se pide la probabilidad  $P\left(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105\right)$ . Como las variables de voltaje son uniforme en  $[0,10]$ , es complicado encontrar la función densidad de probabilidad conjunta exacta para la suma de los 20 voltajes, y más aún la probabilidad

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105\right) = \int_{105} \dots \int f(x_1, \dots, x_{20}) dx_1, \dots, dx_{20}.$$

Ello conduce a intentar una solución aproximada con justificación en el teorema central del límite (E4):

Si  $n = 20$  la esperanza y varianza de cada voltaje son 5 y 25/3 respectivamente. Para el voltaje total de entrada anotamos  $S_{20} = \sum_{i=1}^{20} V_i$  y tenemos  $E\left(\sum_{i=1}^{20} V_i\right) = 100$  y

$Var\left(\sum_{i=1}^{20} V_i\right) = 500/3$  (P1, P2). La variable aleatoria estandarizada (AP2)  $S_{20}^* = \frac{S_{20} - 100}{\sqrt{500/3}}$

tiene, por el teorema central del límite (CP4), una distribución aproximadamente normal estándar para  $n$  grande. Calcularíamos la probabilidad

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105\right) = P\left(\frac{S_{20} - E(S_{20})}{\sqrt{S_{20}}} > \frac{105 - 100}{\sqrt{500/3}}\right) = P(Z > 0,387) = 1 - 0,6517 = 0,342.$$

Dejaríamos al estudiante decidir si  $n = 20$  voltajes son suficientes para tener una buena aproximación del teorema. A continuación, se destacaría la distribución exponencial. Se recordaría que en el proceso de Poisson los eventos ocurren al azar independientemente y a una tasa uniforme por unidad de tiempo, definiendo la v.a.  $Y$  como número de eventos en el intervalo  $(0, t]$ . Si estamos interesados en  $X$  que es el tiempo que transcurre hasta que el primer evento ocurre, entonces  $X$  es la llamada v. a. exponencial con parámetro  $\lambda$  y entonces se tiene:

$$X \sim \varepsilon(\lambda) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Además, se tiene que } E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \text{ Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Seguidamente, se propondría a los alumnos resolver la siguiente actividad, otorgando 20 minutos.

**Actividad 3.3.** Los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias independientes con distribución exponencial y una media de 1,5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad *aproximada* de que se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas?

Luego el profesor daría la solución: Tenemos  $E(X) = 1,5 = 1/\lambda$ , donde  $\lambda = 2/3$ . Entonces la v.a.  $X \sim \exp(\lambda = 2/3)$ , y además la varianza es  $V(X) = 1/\lambda^2 = 9/4$ . Considerando una muestra aleatoria de 100 personas  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  anotamos  $P(\sum X_i < 120) = P(\bar{X} < 1,2)$ . Utilizando el teorema central del límite para  $n=100$ ,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu = 1,5, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9/4}{100}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - 1,5}{3/20} \sim N(0,1).$$

$$\text{Así, la probabilidad pedida sería } P\left(Z < \frac{1,2 - 1,5}{3/20}\right) = P(Z < -2) = 0,02275.$$

Se dejaría la siguiente interrogante: Suponga que los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias independientes de población desconocida, con una media de 1,5 minutos y una desviación estándar de 1 minuto. ¿Cuál es la probabilidad *aproximada* de que se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas?

Continuaríamos reforzando el teorema central del límite planteando dos ejercicios; una a la distribución exponencial utilizando el procedimiento de operación

## Capítulo 5

inversa a la tipificación (AP2), en una muestra pequeña de tamaño 50, y otra aplicación de aproximación a la distribución gamma.

**Ejercicio 3.2.** Un supervisor de una fábrica está interesado en presupuestar los costos semanales de reparación para cierto tipo de máquina. Los registros de años previos indican que este costo de reparación tiene una distribución exponencial con una media de 20 para cada máquina observada. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{50}$  los costos de reparación para cincuenta de estas máquinas durante la próxima semana.

Determine un número  $c$  tal que  $P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i > c\right) = 0,05$ , suponiendo que las máquinas operan independientemente.

**Ejercicio 3.3.** Suponga que la distribución del tiempo  $X$  (en horas) utilizados por estudiantes de cierta universidad en sus proyectos de graduación es gamma con parámetros  $\alpha = 50$  y  $\beta = 2$ . Debido a que  $\alpha$  es grande, se puede demostrar que  $X$  tiene aproximadamente una distribución normal. Utilice este hecho para calcular la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar pase a lo sumo 125 horas en el proyecto de graduación. ¿Cómo sería la gráfica de la distribución gamma ( $\alpha = 50, \beta = 2$ ) ?

La actividad siguiente que desarrollaría el profesor en conjunto con los alumnos sería una aplicación del teorema central del límite para el caso de *distribución desconocida*, donde se destacaría que no importa cuál sea distribución de probabilidad de la variable el teorema asegura que los pesos de las cajas que contienen ligas se deben distribuir de manera aproximadamente normal.

**Actividad 3.4.** La compañía Valmar fabrica ligas de hule del número 18 y las empaqueta en paquetes de 200 ligas cada uno. El peso de una liga individual es una variable aleatoria con distribución desconocida, pero se ha calculado que la media es de aproximadamente  $\frac{1}{2}$  gramo, con una desviación estándar de  $\frac{1}{100}$  de gramo. Cada 50 paquetes de ligas se empaquetan luego en una caja de cartón. Las cajas son transportadas hacia almacenes de todo el país para su comercialización. Use el teorema central del límite para determinar el porcentaje de cajas cuyo contenido neto es de más de 5010 gramos (tome en cuenta sólo el peso de las ligas que contiene).

La resolución del problema requiere que se defina la variable aleatoria  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{10000}$  donde las variables aleatorias independientes representan el peso exacto de las ligas que contiene la caja. Tenemos  $\mu_y = 10000 \cdot 0,5 = 5000$  gramos;  $\sigma^2 = \sum \sigma_i^2 = 10000 \cdot 0,01 = 100$ . Entonces, de acuerdo con el teorema central del límite se tiene,  $P(Y > 5010) = P\left(Z > \frac{5010 - 5000}{10}\right) = P(Z > 1,00) = 1 - \Phi(1) = 0,158655$  y el 15,87% aproximadamente de las cajas pesan más de 5010 gramos.

A objeto de reforzar los conceptos anteriores se dejarían dos ejercicios para que estudien el comportamiento distribucional de algunas funciones densidades de

probabilidades, de gran utilidad en inferencia estadística, mediante el programa estadístico @risk de Excel.

**Ejercicio 3.4.** Por medio del programa @risk, grafique distintos valores de los parámetros las distribuciones de probabilidades chi-cuadrado, de Fisher y t-Student.

**Ejercicio 3.5.** Como la distribución gamma  $G(\alpha, \beta)$ , siendo  $\beta$  entero, es la distribución de la suma de  $\beta$  variables aleatorias independientes, con distribución exponencial de parámetro  $\alpha$ , la distribución gamma se puede considerar aproximadamente normal  $N(\beta/\alpha, \beta/\alpha^2)$ . Verifique en el laboratorio que la aproximación es suficiente para  $\beta \geq 15$

### Desarrollo de la Sesión 11.

La tercera y última sesión de aula estaría enfocada a mostrar aplicaciones del teorema en la determinación de tamaños de muestra adecuados (CP8) y reforzaría con ejercicios la estimación de la distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones (CP10).

Se plantearía la actividad 3.5, haciendo notar que el número de unidades que se deben seleccionar de una población, en un muestreo aleatorio simple depende de la precisión o error absoluto de estimación con la cual se quiere estimar el parámetro de interés, de la varianza de la población y del valor del coeficiente de confianza utilizado para efectuar la estimación mediante un intervalo.

Aquí, la variable es cuantitativa y se estima el valor medio poblacional  $\mu$  de una muestra de tamaño  $n$ . Se recordaría que el error absoluto de estimación o precisión de la estimación tiene por expresión  $e = |\bar{X} - \mu|$ . Si la población de donde se saca la muestra es normal y la varianza es conocida de la expresión del intervalo de confianza se obtiene

$|\bar{X} - \mu| \leq Z(1 - \alpha/2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Sustituyendo el primer miembro y considerando el mayor error:

$$e = Z(1 - \alpha/2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left[ \frac{Z(1 - \alpha/2) \cdot \sigma}{e} \right]^2.$$

Luego, si  $\sigma$  es conocida se fijan  $e$  y  $1 - \alpha$  y se determina el valor del tamaño de muestra  $n$ . Si  $\sigma$  es desconocida se debe efectuar un estudio exploratorio y obtener su estimador  $S$  con un tamaño de muestra razonable  $n'$ .

Así, 
$$n = \left[ \frac{t_{n'-1}(1 - \alpha/2) \cdot S}{e} \right]^2$$

**Actividad 3.5.** Represente por  $\mu$  el verdadero pH de un compuesto químico. Se hará una secuencia de  $n$  cálculos independientes de pH muestrales. Suponga que cada muestra de pH es una variable aleatoria con valor esperado  $\mu$  y desviación estándar 0,1. ¿Cuántos cálculos se necesitan si deseamos saber la

probabilidad de que el promedio de la muestra esté dentro de 0,02 del verdadero pH y sea por lo menos de 0,95? ¿Qué teorema justifica este cálculo de probabilidades?

En esta actividad, la variable pH es continua y se quiere estimar el tamaño adecuado de muestra para estimar la media poblacional de pH de un compuesto químico. Considerando un error de precisión de la estimación de  $0,02 = e = |\bar{X} - \mu|$ , la desviación estándar poblacional  $\sigma = 0,1$  y una confianza de  $1 - \alpha = 0,95$ , que equivale al percentil  $Z(0,975) = 1,96$ , podemos calcular el tamaño mínimo dado por la expresión

$$n = \left[ \frac{Z(1 - \alpha/2) \cdot \sigma}{e} \right]^2 = \left[ \frac{1,96 \times 0,1}{0,02} \right]^2 = 96,04 \approx 97$$

Seguiríamos con un ejercicio de aplicación del teorema central del límite en el estudio de las diferencias de medias muestrales en dos poblaciones (CP10).

**Ejercicio 3.6.** Un grupo de veterinarios han elaborado una dieta más barata para las vacas productoras de leche, asegurando que el promedio de litros de leche será el mismo. Los administradores de una planta productora de leche desean verificar la afirmación establecida por el grupo de médicos, para lo cual, seleccionan dos muestras aleatorias independientes de  $n = 30$  vacas cada una y aplican a una de ellas la nueva fórmula y a la otra la anterior. Calculan el promedio de litros de leche producidos en cada muestra y si la diferencia de las medias  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  (donde  $\bar{X}_1$  es para la nueva fórmula y  $\bar{X}_2$  es para la fórmula actual) es mayor que  $-1,23$ , aceptarán la nueva fórmula, ¿Cuál es la probabilidad de que rechacen la nueva fórmula si el grupo de médicos tiene razón? Considere que las desviaciones estándar de ambas poblaciones son iguales a 5.

En este momento se estaría en condiciones de mostrar una formulación más avanzada del teorema central del límite como límite de una sucesión de funciones (E2). Se presentaría la demostración clásica para el caso de la suma de v.a. i.i.d. mediante la función generadora de momentos (fgm). Esto requeriría revisar los conceptos de fgm y convergencia en series estudiados anteriormente. Este enunciado y su demostración estaría disponible para los estudiantes en la plataforma.

**Enunciado 4 del teorema central del límite:**

Denotemos por  $f_n$  la función densidad de probabilidad de la suma  $S_n$ , o la altura del histograma de  $S_n$  en el caso discreto. El teorema central del límite afirma que, para todo número real  $z$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$$

*Demostración mediante la función generadora de momentos*

Sea  $M$  la fgm de las v.a.  $X_i$ . Al ser las variables independientes la fgm de la suma  $S_n$  será  $M_{S_n}(t) = [M(t)]^n$ , y puesto que  $Z_n = (S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$  es una función lineal de  $S_n$

la fgm de  $S_n$  está dada por  $M_{Z_n}(t) = e^{-(\sqrt{n}\mu/\sigma)t} \left[ M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right]^n$ .

Aplicando logaritmos  $\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma}t + n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$ . La idea de la

demostración consiste en investigar  $M_{Z_n}(t)$  para grandes valores de  $n$ . Desarrollemos

$M(t)$  en una serie de Maclaurin:  $M(t) = 1 + M'(0)t + \frac{M''(0)t^2}{2} + R = 1 + \mu t + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2} + R$ ,

Luego,  $\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma}t + n \ln \left[ 1 + \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R \right]$ .

Sin dar todos los detalles de pasos algebraicos, queremos investigar la expresión  $\ln M_{Z_n}(t)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Después de unos cálculos algebraicos muy directo encontramos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln M_{Z_n}(t) = t^2/2$ . Luego tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$ . Esta es la fgm de la variable distribución  $N(0,1)$  y debido a la unicidad de la fgm podemos concluir que la v.a.  $Z_n$  converge en distribución (cuando  $n \rightarrow \infty$ ) a la distribución  $N(0,1)$ .

Finalmente, dejaríamos algunos ejercicios de aplicación a medicina (CP4) y a calcular el tamaño de la muestra (CP8) para reforzar los conceptos tratados.

**Ejercicio 3.7.** Los científicos que han estudiado el aparato circulatorio humano saben que la cantidad de oxígeno que entra a los pulmones es una variable aleatoria  $X$  cuya distribución de probabilidad no está bien establecida, pero que tiene una media de  $\mu=54,03$  ml. por minuto y por kilogramo de peso corporal, con una desviación típica de  $\sigma=5,8$  (en las mismas unidades). Si se toma una muestra aleatoria de  $n = 47$  individuos y  $\bar{X}$  es la media muestral de la cantidad de oxígeno procesada en la sangre (en las unidades referidas), calcular  $P(52,761 \leq \bar{X} \leq 54,453)$ .

**Ejercicio 3.8.** Se desconoce la distribución de probabilidad de cierta variable aleatoria  $X$  y el valor de su media  $\mu$ ; no obstante, existen motivos para asegurar que la desviación típica de  $X$  es aproximadamente  $\sigma=3$  ¿De qué tamaño debe ser una muestra aleatoria de valores de  $X$  para tener una confianza mínima de 95% de que la discrepancia entre la media muestral y la media verdadera de la población será menor a 0,3?

Finalizados los contenidos de la Lección 3 en el aula, en los siguientes días se les plantearían a los alumnos resolver, en un tiempo de 40 minutos, un ejercicio algebraico de caso continuo de la distribución uniforme. La solución prevista y resultados será analizada en la sección 6.4.2.

**Ejercicio 3.9.** Al sumar números, un computador aproxima cada número al entero más próximo. Supongamos todos los errores de aproximación son independientes y distribuidos uniformemente entre  $(-0,5, 0,5)$ .

- a. Si se suman 1500 números, ¿Cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda de 15?
- b. ¿Cuántos números pueden sumarse juntos a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad 0,90?

## 5.7. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Se presenta un resumen en la Tabla 5.7.1 de los elementos de significado previstos en el proceso de estudio previsto sobre teorema central del límite. En este diseño hubo que conjugar varios factores que contribuyen y afectan el proceso de estudio de dicho teorema, como la incorporación de las tres configuraciones epistémicas (manipulativa, algebraica y computacional), el tiempo estimado de ejecución de las lecciones, las exigencias del programa de la asignatura de estadística para ingenieros y de los conceptos previos requerido que deben tenerse.

A lo largo de este capítulo se ha analizado el proceso con sus ejercicios y actividades, resaltando los elementos del significado institucional pretendido, que posteriormente se comparará con los significados implementados y adquiridos por los estudiantes estableciendo el grado de correspondencia de apropiación de los elementos importantes del teorema central del límite de acuerdo a los objetivos propuestos. De los tipos de elementos de significados del teorema central del límite, resumidos en la Tabla 5.7.1, se destaca lo siguiente:

- De los trece *Campos de Problemas* identificados en el estudio de significado institucional de referencia (Capítulos 2 y 4), se ha restringido el curso a los campos CP1, CP2, CP4, CP8, CP10 y CP12, que se consideran asequibles y suficientes para los estudiantes.
- La riqueza del *Lenguaje* y variadas representaciones asociadas al teorema (expresiones verbales, simbólicas y gráficas) están presentes en cada una de las lecciones, siendo las representaciones más utilizadas la gráfica de barras y el histograma y la función densidad de probabilidad normal, tanto con lápiz y papel, como dinámicas con apoyo del ordenador para la simulación, estudio de la

aproximación de distribuciones de probabilidades y estudio de efecto de los parámetros en la forma de las distribuciones.

**Tabla 5.7.1.** Elementos de significado del teorema previstos en el proceso de estudio

Tipo de elementos	Elementos de significado	Lec. 1	Lec. 2	Lec. 3
Campos de problemas	CP1: Aproximación de la distribución binomial	X		
	CP2: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas		X	
	CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas			X
	CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas	X		X
	CP10: Obtener la distribución de diferencias de medias muestrales			X
	CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes	X	X	
Lenguaje	Términos y expresiones verbales	X	X	X
	Notaciones y símbolos	X	X	X
	Representaciones gráficas	X	X	X
	Simulaciones	X		
Procedimiento	AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias	X	X	X
	AP2: Tipificación / Destipificación	X	X	X
	AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora u ordenador	X	X	X
	AP4: Cálculo de probabilidades a partir de materiales manuales	X		
Enunciados	E2: El teorema como límite ordinario de una sucesión de funciones			X
	E4: El teorema para la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas	X	X	X
	E5: Enunciado del teorema de forma general	X	X	X
	E6: Enunciado intuitivo del teorema	X	X	
Propiedades	P1: La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias	X	X	X
	P2: la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas	X	X	X
	P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximada normal	X	X	X
	P4: La aproximación mejora con el número de sumandos	X	X	X
	P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua	X	X	X
	P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal		X	X
	P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal	X	X	
	P12: Corrección de continuidad	X	X	
Argumentos	A1: Demostraciones formales algebraicas y/ o deductivas	X	X	X
	A2: Presentación del teorema como caso especial de un resultado general	X	X	X
	A3: Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo	X	X	X
	A4: Simulación gráfica con ordenador del teorema	X	X	X
	A5: Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar	X	X	
	A6: Obtener conclusión o tomar decisión en base al teorema	X	X	X

## Capítulo 5

- Todos los *Procedimientos* identificados en el estudio del significado de referencia se presentan en el proceso de estudio: transformación algebraica de variables aleatorias, cálculo de probabilidades con calculadora, tablas estadísticas u ordenador, tipificación y destipificación, experimentación con dispositivos manipulables. La propuesta de enseñanza pone diferencias con el significado institucional de referencias ya que estamos introduciendo en forma gradual diferentes algoritmos de resolución de problemas de donde surge utilizar el teorema central del límite, del cálculo frecuencial de probabilidades con calculadora situamos el aprendizaje por parte del alumno en la exploración gráfica de la distribución muestral de estimadores mediante la comparación visual de los parámetros de una distribución de probabilidades. Esto implica el manejo de software, en nuestro caso el programa @risk, así como el manejo del procesador de texto Word y la planilla electrónica Excel que deben utilizar en la experimentación e informe de las tareas acordadas.
- En cuanto a los *Enunciados* del teorema descrito en el Capítulo 4, de los seis se han considerado de forma gradual cuatro conforme al tipo de alumnos de la asignatura; comenzando a través de dispositivos didácticos, enunciado intuitivo del teorema, avanzando para la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, hasta su enunciado analítico como límite de una sucesión de funciones.
- Se han considerado asimismo siete de las *Propiedades* determinadas, que son P1, P2, P3, P4, P7, P8 y P10, incorporando también la propiedad P12: corrección de continuidad para las dos primeras lecciones.
- Los elementos de significados anteriores se relacionan de alguna manera por medio de diversos tipos de *Argumentos*: de la simple comprobación de ejemplos a la generalización de las conclusiones de experimentos tanto manipulables como de simulación con el ordenador. La propuesta pone énfasis en la argumentación de la aplicación del teorema central del límite más que el cálculo de probabilidad exacta y aproximada de distribuciones de probabilidad.

En resumen, esta enumeración muestra una razonable *idoneidad epistémica*, en cuanto que, aunque el significado institucional pretendido es más limitado que el de referencia, contempla los elementos de significado más importantes del teorema y es adaptado al tiempo disponible y conocimientos previos de los estudiantes (*idoneidad*

*cognitiva*). Se hace un uso de diversos recursos didácticos (a través de las configuraciones epistémicas), que junto a los momentos previstos de evaluación a lo largo del proceso de estudio contribuye a su *idoneidad didáctica*. Finalmente, puesto que los campos de problemas se contextualizan en aplicaciones en el área de ingeniería como agentes motivadores de su rol profesional la propuesta tiene una *idoneidad afectiva*. Por supuesto estos tipos de idoneidad son previstos a priori y habrá que contrastarlo con la implementación efectiva y aprendizaje de los estudiantes para analizar la idoneidad final del proceso de estudio.



## **CAPÍTULO 6.**

# **SIGNIFICADOS IMPLEMENTADOS DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**

### **6.1. INTRODUCCIÓN**

Finalizado el diseño del proceso de estudio, se llevó a cabo la observación de su desarrollo, formando parte de un curso de estadística en la Universidad Católica de la Santísima Concepción de Chile. La población objetivo de la investigación consistió en los estudiantes de ingeniería, en general, y, en particular, en Chile. La muestra participante estuvo formada por 134 alumnos de la Universidad citada, perteneciente a cinco especialidades (Acuicultura, Marítimo Portuario, Informática, Industrial y Civil), todos ellos habiendo aprobado previamente un curso de Cálculo de Probabilidades. Los 134 alumnos se asignaron en forma aleatoria en dos secciones de 60 y 74 alumnos que fueron enseñados con el mismo material y actividades descritas en el Capítulo 5.

Durante la enseñanza se realizó una observación participante del curso. El investigador participó en una de las secciones y la otra clase fue impartida por uno de sus colegas y registrándose por otro colega, en un diario de observación, las principales intervenciones de los estudiantes. Se recogieron también las respuestas escritas a algunas de las actividades y ejercicios propuestos en clase y a través de la plataforma. Asimismo, al finalizar cada una de las tres lecciones se realizó una evaluación parcial, para hacer un seguimiento del aprendizaje de los estudiantes.

En este capítulo se analiza algunos episodios del proceso de observación, utilizando el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). En cada una de las tres lecciones se analiza únicamente una muestra de las actividades desarrolladas colectivamente en la clase y de los ejercicios realizadas individualmente por los alumnos, pues la cantidad de

información recogida ha sido muy abundante y el análisis es suficiente para nuestros objetivos.

El análisis se llevará a cabo mediante diferente metodología, todas ellas basadas en un estudio cualitativo previo de las respuestas de los estudiantes y su categorización, utilizando un proceso inductivo y cíclico, conforme a la metodología cualitativa (Gil, 1994). Se presentará un informe exhaustivo de las categorías de respuestas obtenidas, con sus correspondientes tablas de frecuencia en algunas actividades o ejercicios. Para el resto, se presenta las categorías de análisis, con ejemplo de las respuestas.

Asimismo, se analiza una breve prueba de evaluación llevada a cabo al finalizar cada una de las lecciones, la cual se examinará exhaustivamente para obtener los elementos de significado aplicados por los estudiantes en cada paso de la evaluación. Como resumen de toda esta información se presentan tablas de los elementos de significado personal que hemos podido constatar, que se han puesto en juego en el transcurso del tema, a través de los diferentes instrumentos de recogida de datos. La finalidad es describir el *significado institucional implementado* para comparar con el significado institucional previsto y comprobar si se cumplen las expectativas sobre los diversos tipos de idoneidad didáctica expuestos en el Capítulo 5.

## 6.2. OBSERVACIÓN DE LA PRIMERA LECCIÓN

### 6.2.1. ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN EL AULA

#### Actividad 1.1

Un sistema está formado por 100 componentes cada una de las cuales tiene una confiabilidad igual a 0,95. (Es decir, la probabilidad de que la componente funcione correctamente durante un tiempo específico es igual a 0,95). Si esas componentes funcionan independientemente una de otra, y si el sistema completo funciona correctamente cuando al menos funcionan 80 componentes, ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?, ¿Qué aspectos destacarías en este problema?

La primera sesión comienza preguntando el profesor a los estudiantes cómo desarrollarían la actividad 1.1, con los conocimientos previos del curso de probabilidades. Se dio a los alumnos un tiempo de 25 minutos para responder en una hoja con el enunciado. En primer lugar, se pidió a los alumnos destacar elementos del problema, obteniéndose las respuestas de la Tabla 6.2.1.1.

**Tabla 6.2.1.1.** Elementos destacados por los estudiantes ( $n=103$ ) en la Actividad 1.1

Elementos	Frecuencia
Las variables son independientes	34
La probabilidad es alta	15
No se da la media y la varianza	5
Las componentes del sistema se distribuye normalmente	12
Las componentes son variables aleatorias Bernoulli	2
No se dice cómo se distribuye el tiempo	2
Confiabilidad de las componentes $1-\alpha = 0,95$	3
No contestaron o no responden incorrectamente	30

La más común de las respuestas fue la independencia de las componentes, con frecuencia relativa de 33%, seguido de asociar la característica de estudio con la distribución normal, 11,7%. Pocos reconocieron que el sistema se puede modelar por la distribución binomial, es decir, pocos llegaron por sí mismos al campo de problemas CP1, pues les resultó difícil pensar en los elementos del sistema como variables aleatorias con probabilidad de éxito y fracaso (distribución Bernoulli). En algunos casos suponen que faltan datos (no se dice cómo están distribuidas el tiempo que dura la componente). En la Tabla 6.2.1.2 se muestran las soluciones. No llegaron a la solución correcta (tampoco se pretendía) mediante la calculadora, aunque algunos alumnos calcularon la probabilidad puntual en el valor 80 del recorrido.

**Tabla 6.2.1.2.** Respuestas de los estudiantes ( $n=103$ ) a la Actividad 1.1

Desarrollo de la actividad	Frecuencia
Define correctamente la variable aleatoria	10
Identifica la distribución binomial	38
Calcula correctamente $n$	100
Calcula correctamente $p$	22
Escribe en lenguaje simbólico $P(X \geq 80)$	9
Calcula la probabilidad en un punto $P(X = 80) = 8,44 \times 10^{-8}$	11
No responden	43

Errores frecuentes fueron: a) Relacionar el valor 80 con la media muestral o la proporción  $p=80/100=0,8$ ; b) Plantear una solución mediante la distribución Poisson, exponencial u otra; c) Aplicar la regla de tres simple para encontrar la fiabilidad, obteniendo como solución un 76% de confiabilidad, mediante aplicación incorrecta de la regla de tres. Una última pregunta fue por qué no era fácil llegar a la solución, esperando se indicase el gran número de sumandos. Un 21,3% argumentan que faltan datos de la media y la varianza (no llegan a aplicar las propiedades P1 y P2 media y varianza de una suma); falta de tiempo o de la información sobre la distribución de la suma. Algunos alumnos calcularon la probabilidad mediante la distribución normal,

posiblemente recordaban el resultado de cursos previos, con lo que usan un enunciado intuitivo del teorema (E6) dejando expresado una posible solución al desconocer la media y varianza, aunque expresan la tipificación (AP2)  $P(X \geq 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{80 - \mu}{\sigma}\right)$ . En general la mayoría de los alumnos usa transformación de variables algebraicas (AP1).

### Actividad 1.2

*Simulación con fichas.* Una caja contiene 4 fichas de las cuales 2 fichas son verdes. Simule la extracción de  $m$  muestras de tamaño  $n$ ; formando las matrices  $n \times m$  (*tamaño muestral x número de réplicas*),  $(n, m) = (4,5), (10,1), (10,10)$  y  $(30,10)$ . Para cada caso:

- Construya una tabla de frecuencias del número de fichas verdes por muestra obtenidas;
- Represente los datos en un gráfico de barras y comente sus características;
- Compare la media y varianza del experimento con la media y varianza teórica;
- Obtenga las tres medidas de tendencia central y comente.

La actividad 1.2 es una actividad experimental de simulación con fichas, en el mismo campo de problemas CP1, orientada a llegar a un enunciado intuitivo del teorema a partir de dispositivos didácticos (E6), y se realizó colectivamente en el aula. Se seleccionaron al azar 10 alumnos, sacando cada uno una ficha de la bolsa que contiene 2 de color verde de un total de 4. Cada alumno repitió el experimento 10 veces; se anota en el pizarrón la matriz de orden  $10 \times 10$ , de valores 0 y 1 en las celdas.

A continuación los estudiantes sumaron por columna el total de “1”, pensada como una distribución binomial de parámetros  $n=10$  y  $p= \frac{1}{2}$ . Se construyó así una distribución de frecuencias en clases individuales del número de fichas verdes obtenidas en las 10 extracciones. Luego, los estudiantes dibujaron un gráfico de barras, con eje  $X$  los valores del recorrido 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, y el eje  $Y$  las frecuencias absolutas de “1” en cada muestra. Se comparó la media teórica con su valor experimental correspondiente.

La actividad resultó muy sencilla, y sirvió de introducción a otras y los ejercicios para realizar individualmente fuera de clase. Además de los elementos citados se ejercitaron el cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias (AP1), cálculo de probabilidades a partir de materiales manuales (AP4); la media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias (P1); la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas (P2).

6.2.2. ANÁLISIS DE EJERCICIOS REALIZADOS POR LOS ALUMNOS FUERA DE CLASE

A continuación se analizan algunos de los ejercicios realizados por los estudiantes fuera de la clase y se comentan brevemente los tipos de respuestas obtenidas en las actividades.

**Ejercicio 1.1**

*Simulación con dados.* Suponga que gana si obtiene un “6” al lanzar un dado legal. Simule las posibilidades de ganar en los siguientes casos de varios lanzamientos del dado  $(n, m) = (4,5), (10,10)$  y  $(30,10)$ .  
 a. Compare sus resultados con el experimento realizado en la actividad 1.2.

Se recogieron a través de la plataforma 47 respuestas al ejercicio 1.1 elaboradas cada una en grupos de dos o tres alumnos. A continuación, se describe el procedimiento común de análisis que utilizaron la mayoría de los grupos en los objetos matemáticos utilizados.

Comenzaron introduciendo una notación algebraica para designar la variable y modelaron el experimento por medio de una sucesión de variables aleatorias. Luego, reconocieron el modelo Bernoulli para la variable identificando el parámetro  $p$ :

“Sea  $X_i$ : Un alumno que extrae la cara número 6 del lanzamiento de un dado.

$X_i = 1$ , si se obtiene el número “6” y 0, en otro caso

El parámetro  $p = P(E) = P(\text{obt. el “6”}) = 1/6$ ; entonces  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p=1/6)$ ”

**Tabla 6.2.2.1.** Distribución de frecuencia al Ejercicio 1.1

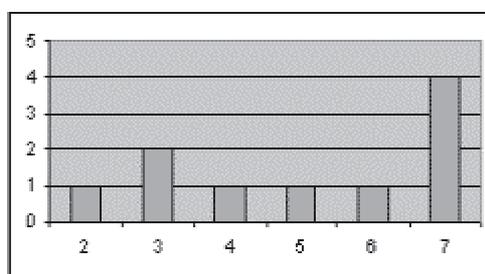
Tabla de experimento con dados para (30,10)	Tabla de distribución de frecuencias																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
<table border="1" style="font-size: small; border-collapse: collapse;"> <tr><td>X1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X16</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X17</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>X3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X18</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X19</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>X5</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X20</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X21</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X7</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X22</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>X23</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X9</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>X24</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>X25</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X11</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>X26</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X12</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X27</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>X13</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X28</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>X14</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X29</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>X15</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>X30</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Σ</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>7</td><td>7</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table>	X1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X16	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	X2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	X17	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	X3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	X18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X19	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	X5	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	X20	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X21	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	X7	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	X8	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	X23	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	X9	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	X24	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	X10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	X25	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	X11	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	X26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X27	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	X13	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	X28	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	X14	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	X29	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	X15	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	X30	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0												Σ	7	5	3	7	7	7	6	3	4	2	<table border="1" style="font-size: small; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>obt. el “6”</th> <th><math>n_i</math></th> <th><math>N_i</math></th> <th><math>f_i</math></th> <th><math>F_i</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>0,2</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>0,1</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>0,1</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>6</td><td>0,1</td><td>0,6</td></tr> <tr><td>7</td><td>4</td><td>10</td><td>0,4</td><td>1,0</td></tr> </tbody> </table>	obt. el “6”	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	2	1	1	0,1	0,1	3	2	3	0,2	0,3	4	1	4	0,1	0,4	5	1	5	0,1	0,5	6	1	6	0,1	0,6	7	4	10	0,4	1,0
X1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X16	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	X17	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	X18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X19	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X5	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	X20	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X21	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X7	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X22	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X8	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	X23	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X9	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	X24	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	X25	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X11	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	X26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X27	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X13	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	X28	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X14	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	X29	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
X15	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	X30	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
											Σ	7	5	3	7	7	7	6	3	4	2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
obt. el “6”	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
2	1	1	0,1	0,1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
3	2	3	0,2	0,3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
4	1	4	0,1	0,4																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
5	1	5	0,1	0,5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
6	1	6	0,1	0,6																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																
7	4	10	0,4	1,0																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																

La mayoría de los estudiantes simularon los experimentos para los tamaños de

muestra pedidos mediante una representación matricial, y llegaron a definir la variable aleatoria suma de los resultados para el cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias (AP1). En la Tabla 6.2.2.1 se muestra el experimento de uno de los grupos con la distribución de frecuencias.

Observamos que se comprueban ejemplos y contraejemplos sin pretensión de generalizar (A5), se modelizan los experimentos por medio de variables aleatorias Bernoulli, que posteriormente se suman (AP1). La siguiente figura corresponde a la representación gráfica de la distribución de frecuencias de la Tabla 6.2.2.1 mediante el gráfico de barras.

**Figura 6.2.2.1.** Gráfico de barras con número de dados obtenidos en (30,10) al Ejercicio 1.1

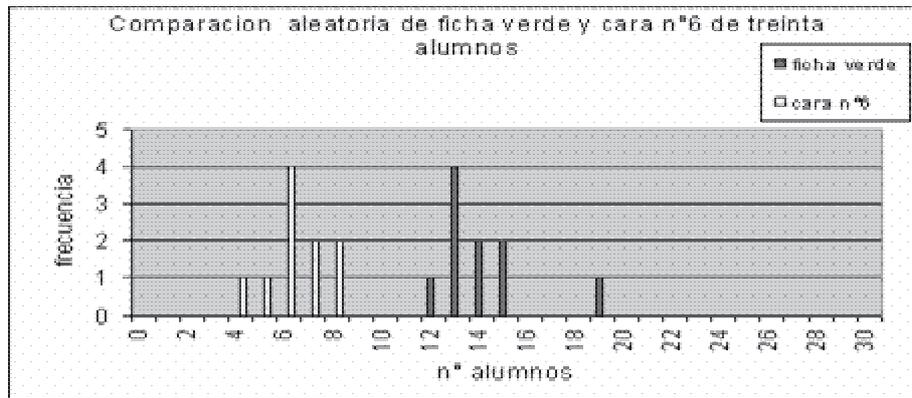


Además, los estudiantes compararon los resultados del experimento de los dados con la simulación de las fichas de la actividad 1.2. Para el experimento de las fichas, ahora con apoyo de Excel, los alumnos siguieron el algoritmo anterior con lenguaje simbólico donde modelizaron la extracción de una ficha verde de la caja mediante el modelo Bernoulli  $X_i \sim B(p=1/2)$ , y simularon para distintos tamaños de muestra pedidos; obteniendo una representación matricial, generando el cálculo algebraico de variables aleatorias (AP1) y comprobaron los distintos experimentos sin pretensión de generalizar (A5).

En cuanto a comentar las gráficas con los distintos dispositivos didácticos, en el segundo apartado, las respuestas fueron muy similares, incluyendo gráficas semejantes a la Figura 6.2.2.2, en que los alumnos comparan en una misma escala las distribuciones binomiales obtenidas en el ejercicio 1.1 y la actividad 1.2. Las diferencias encontradas por los estudiantes en las dos situaciones fueron diferencia en el valor de los parámetros:

*“Con mucha más frecuencia encontré valores positivos en las fichas que en los dados, esto es lógico, ya que la probabilidad de acierto en las fichas era de  $1/2$ , en cambio en los dados era tan solo de  $1/6$ ”.*

Figura 6.2.2.2. Gráfica presentada en el Ejercicio 1.1



La principal semejanza fue el comportamiento de la distribución observada al aumentar el tamaño de las muestras, en unos casos se reduce a la convergencia de la media:

*“En ambos experimentos, pude observar que a medida que uno tomaba más muestras, existía una menor diferencia entre la esperanza de la distribución y la media de la muestra, lo que lleva a pensar de que realmente entre mayor sea la muestra, quizás más cerca de la verdadera media nos podremos encontrar. Esto quizás se debe a que, entre mayor sea la muestra, existirá un menor grado de error. Por ejemplo, si lanzo dos veces la moneda y en ambas ocasiones obtengo sello, la probabilidad de que salga cara sería 0, lo cual sería realmente falso, no así si lanzo 100 veces una moneda, ya que en este caso es más probable que obtenga un número similar entre caras y sellos, lo mismo se cumple con el dado”.*

El ejemplo en particular también sugiere la comprensión que la aproximación mejora con el número de sumandos (P4). Otros estudiantes muestran una comprensión gradual del enunciado intuitivo del teorema central del límite (E6):

*“En este experimento al tener una muestra muy grande, los datos de las dos actividades concuerdan en parte con la gráfica, ya que la mayor cantidad de información está contenida cerca de la media que también se aleja de las medias anteriores. También, la varianza de la distribución de frecuencias para la ficha verde muestra un gran desplazamiento, esto debido a que existen datos atípicos”.*

En el tercer apartado los estudiantes deben comparar los respectivos parámetros de las simulaciones con las fichas y los dados de las distribuciones teóricas y observadas. En general, los distintos grupos de alumnos reconocieron implícitamente la

distribución binomial identificando los parámetros  $n$  y  $p$  y utilizaron los conceptos de parámetro, estimador, media y varianza (teórica y experimental) como se muestra en la siguiente tabla:

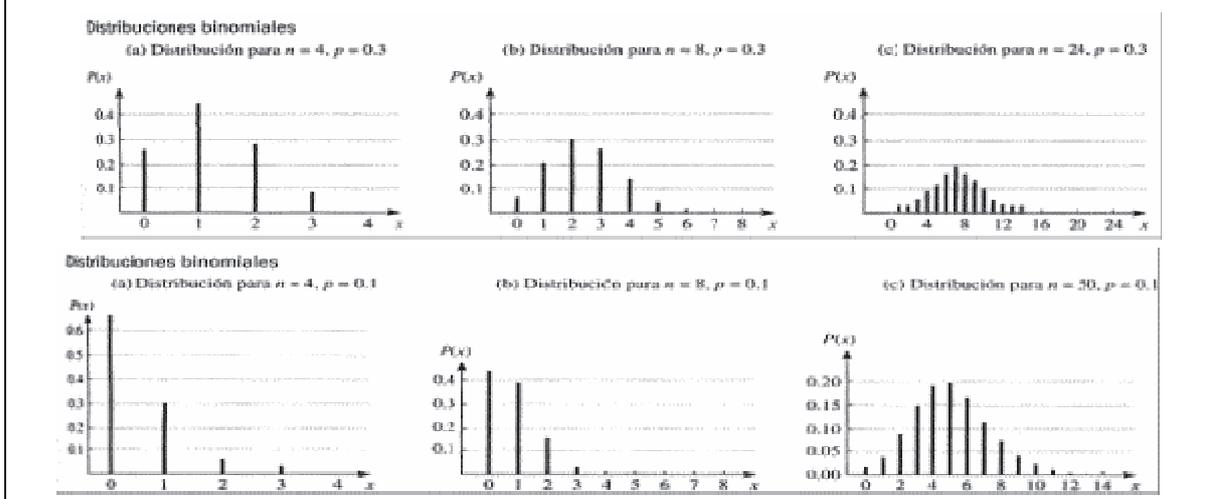
**Tabla 6.2.2.2.** Análisis semiótico de una respuesta al Ejercicio 1.1

(n,m) m muestras de tamaño n	Parámetros y estimadores	Simulación con fichas	Simulación con dados
(4,5)	Media teórica	$E(\sum X_i) = n \cdot p = 4 \times 1/2 = 2$	0,667
	Media experimental	$E(\text{exp}) = \sum X_i \cdot n_i / N = (2+4+3)/5 = 1,8$	1
(4,5)	Varianza teórica	$V(\sum X_i) = n \cdot p \cdot q = 1$	0,55
	Varianza experimental	$V(\text{exp}) = \sum (X_i - E(\sum X_i))^2 \cdot n_i / (N-1) = 0,7$	1
(10,10)	Media teórica	5	1,667
	M. experimental	4,8	1,8
(10,10)	Varianza teórica	2,5	1,389
	V. experimental	2,178	1,734
(30,10)	Media teórica	15	5
	Media experimental	14,9	5,1
(30,10)	Varianza teórica	7,5	4,167
	V. experimental	4,767	3,878

Los estudiantes identificaron el modelo binomial (CP1), calcularon la media de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias mediante la suma de las medias (P1), la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas (P2) y calcularon algebraicamente la suma de variables aleatorias (AP1).

### Ejercicio 1.2

En el caso de la aproximación de Laplace-DeMoivre podemos utilizar un software estadístico para representar gráficamente la distribución  $B(n,p)$  para distintos valores de sus parámetros  $n$  y  $p$ . La figura siguiente muestra valores para  $p = 0,3$  con  $n = 4, 8, 24$  y para  $p = 0,1$  con  $n = 4, 8$  y  $50$ . ¿Qué observas de las gráficas para los distintos valores de los parámetros?



Una vez definido el teorema de Laplace-De Moivre, en la sesión 2, se pidió a los alumnos comentar la aproximación de la distribución binomial (CP1) a partir de unas salidas gráficas de ordenador para diferentes valores de sus parámetros. Se recogieron

91 respuestas individuales, que corresponden a las categorías que se recogen a continuación, junto con sus ejemplos.

Algunos estudiantes llegaron a un enunciado intuitivo del teorema central del límite (E6) para este caso particular. Es la respuesta más frecuente, mediante argumentación gráfica (A4) sugiriendo que la gráfica de la distribución binomial toma forma de la distribución normal cuando  $n$  crece y se cumple el teorema de L-D (A5: Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar):

*“A medida que aumenta  $n$ , para distintos valores de  $p$  mejora la similitud de las gráficas de las distribuciones binomiales a las gráficas de la distribución normal estándar; y si observamos más detenidamente, se produce un desplazamiento hacia la derecha de la distribución binomial a medida que aumenta  $n$ . Para lograr corregir este desplazamiento y lograr una mejor aproximación de la distribución binomial a la normal, se aplica el teorema de Laplace-DeMoivre”, “Cuando mayor sea el valor  $n$  mejor será la aproximación” y “Cuando  $n$  aumenta, la longitud de las barras disminuye, lógicamente, porque la suma de las longitudes de todas las barras debe ser uno, mientras que el área bajo la función de densidad, definida sobre una variable aleatoria continua, de la distribución normal estándar, también debe ser uno”.*

Tres estudiantes han usado sus conocimientos previos de estadística descriptiva sobre la simetría y sus propiedades:

*“Mientras más cercanas sean las medidas de tendencias central (media, mediana, moda), la gráfica de la distribución tomará forma simétrica, lo que implica que a medida de que crece  $n$  la aproximación de la distribución binomial a la normal va a ser mejor”,*

*“En la gráfica de la distribución  $p = 0,3$  y  $n = 4$  los datos se encuentran dispersos, tiene un sesgo positivo, por lo tanto no se observa una distribución simétrica. Distribución  $p = 0,3$  y  $n = 8$ : Podemos observar que los datos están a una menor distancia, la gráfica va adquiriendo forma de campana o simétrica, por lo tanto la mediana, la moda y el promedio son similares. Distribución  $p = 0,1$  y  $n = 50$ : Los valores están considerablemente a una menor distancia en comparación con los otros gráficos, sus sesgo es 0 tiene un distribución simétrica; un gráfica en forma de campana, con una media, moda y mediana iguales. Su coeficiente de curtosis es igual a 3 por lo tanto su distribución es mesocúrtica”.*

En otros casos se añade la aplicación de la regla empírica dada en la sesión 2 sobre condiciones para la bondad de ajuste:

*“Esto se puede analizar con la regla empírica que dice: “la aproximación de la distribución*

## Capítulo 6

binomial a la normal será buena cuando “ $np$ ” y “ $nq$ ” son ambos mayores de 5 y que “ $p$ ” y “ $q$ ” no son demasiado pequeños o sea “ $pq > 0,05$ ”. Entonces para el:

Gráfico ( $p = 0,3, n = 4$ ) :  $np = 1,2, nq = 2,8, pq = 0,21$   
Gráfico ( $p = 0,3, n = 8$ ) :  $np = 2,4, nq = 5,6, pq = 0,21$   
Gráfico ( $p = 0,3, n = 24$ ) :  $np = 7,2, nq = 16,8, pq = 0,21$  (mejor aproximación)  
Gráfico ( $p = 0,1, n = 4$ ) :  $np = 0,4, nq = 3,6, pq = 0,09$   
Gráfico ( $p = 0,1, n = 8$ ) :  $np = 0,8, nq = 7,2, pq = 0,09$   
Gráfico ( $p = 0,1, n = 50$ ) :  $np = 0,5, nq = 45, pq = 0,09$ ”.

Algunos estudiantes realizan los cálculos de probabilidades teórica y aproximada (AP3), lo que implica también la tipificación (AP2):

“En estas gráficas podemos apreciar claramente que la distribución  $b(3;0,3)$ ,  $b(4;0,1)$ ,  $b(8;0,1)$ , no están bien aproximadas por Laplace-De Moivre, ya que “ $m$ ” ( $n^\circ$  de ensayos de la distribución) es pequeño y no se alcanza a formar la curva normal representativa”. Consideremos un ejemplo: Si  $X \sim b(4;0,3)$  entonces  $P(X \geq 2) = 0,3483 \Rightarrow 34,83\%$ . Ahora, si aproximamos la distribución binomial por Laplace-De Moivre obtenemos:  $P(X \geq 2) = 0,1867 \Rightarrow 18,67\%$ . En este ejemplo, la probabilidad obtenida a través de Laplace es bastante más distante que su verdadero valor, y todo esto lo podemos deducir directamente de la gráfica de la distribución. Para  $b(8;0,3)$  la aproximación a través de Laplace llega a ser un poco mas cercana ya que tiene un mayor  $n^\circ$  de ensayos, y podemos apreciar en la gráfica una cierta aproximación a la curva normal.  $P(X \geq 2) = 0,74$  y si  $X \sim N(2,4;1,68)$ ,  $P(X \geq 2) = 0,62$ ”.

El estudiante comenta y calcula correctamente el resto de los ejemplos. Otro estudiante llega a proponer una hipótesis con respecto al parámetro  $p$ , que cuando es más cercana a 0,5 la distribución de probabilidad será menos sesgada, es decir llega a hacer una generalización de experimentos o casos particulares (A3):

“Estamos tratando con una distribución binomial de parámetros  $(n,p)$ . Se observa claramente, que en los primeros 3 gráficos, al aumentar el tamaño de la muestra y mantener  $p=0,3$  el gráfico presenta una aproximación a la distribución normal, más rápida de lo que se presenta en los 3 gráficos siguientes, ya que la probabilidad es muy pequeña  $p=0,1$ . Además, se sabe que el error de la aproximación normal será pequeño si  $npq$  es grande. Hipótesis: La aproximación será buena cuando  $n$  sea grande y el  $p$  sea cercano a 0,5”.

Encontramos también reflexiones sobre la relación entre dispersión y desplazamiento de la gráfica:

“Cuando menor es el valor de  $n$ , mayor es la dispersión de la distribución muestral alrededor

*del valor medio”, “Cuando  $p$  es pequeña, la distribución binomial está sesgada hacia la derecha” y “En reducidas cuentas a menor probabilidad se necesitará un tamaño de  $n$  mucho más grande para que la curva tome un comportamiento simétrico”.*

Un alumno menciona la idea de convergencia en distribución es decir, llega a una formalización del teorema mayor que la prevista en la enseñanza (E4):

*“Al usar el teorema de Laplace-De Moivre para aproximar la distribución binomial con  $p = 0,3$  se puede ver que al aumentar el  $n$ , rápidamente la distribución se aproxima a una distribución normal. Cada vez que aumenta el  $n$ , las clases aumentan y las frecuencias disminuyen. Al contrario, al revisar la aproximación con un  $p = 0,1$  y un  $n$  pequeño ( $p = 4$ ), la distribución es sesgada a la derecha, y necesitamos un valor de  $n$  bastante grande para que la gráfica tome forma de una distribución normal”.*

En esta actividad se esperaba que los estudiantes observasen de los gráficos, que a medida que  $n$  va siendo más grande, el gráfico se asemeja cada vez más a una distribución normal. Ahora cuando  $p$  es muy pequeño ( $p = 0,1$ ) se necesita un  $n$  más grande aún para conseguir una buena convergencia. En general los estudiantes llegaron a estas propiedades, aunque se manifestaron dos concepciones erradas. La primera consiste en tener sólo en cuenta el tamaño de muestra adecuada, sugiriendo una buena aproximación si  $n$  es mayor que 30:

*“La pregunta es cuando podemos aproximar la distribución binomial a una distribución normal, la respuesta es con  $n$  grande o mayor a 30, porque de no ser así se nos hace difícil encontrar los valores en las tablas”. “Cuando el  $n$  es pequeño ( $n < 30$ ) la gráfica es sesgada”.*

Esta concepción podría deberse a una interpretación errónea de la regla incluida en algunos libros de texto de estadística para ingenieros, como por ejemplo Devore (2001, pp. 232), quien menciona la regla empírica: “Si  $n > 30$ , se puede usar el teorema del límite central”. Un segundo error es pensar que la aproximación mejora aumentando el parámetro  $p$ . Esto no es así, ya que en la distribución binomial, el óptimo es considerar  $p = 0,5$ , y en valores cercanos a 1 la convergencia es lenta:

*“Para un mismo tamaño de muestra, si la probabilidad es mayor, la distribución binomial se aproxima mejor a la distribución normal” y “A medida que aumentamos el número de observaciones, los gráficos se acercan más a una distribución normal. Mientras más grande sea el valor de  $p$ , más rápido se verá en la gráfica su parecido a una distribución normal”.*

### Ejercicio 1.3

Revise el applet disponible sobre el Teorema de Laplace-DeMoivre en la página de la Universidad de Cali, Colombia <http://www.unalmed.edu.co/~estadist/binomial/binomial.htm> y simule para distintos valores de los parámetros la distribución binomial. Envíe sus comentarios al foro.

En este ejercicio, los alumnos pueden interactuar con la distribución binomial, cualquiera sean los parámetros  $n$  y  $p$ , por medio de un applet. Esperábamos que los estudiantes verificaran la regla empírica de la aproximación binomial por la normal para distintos valores de sus parámetros. Los  $n$  ensayos mínimos para cumplir la regla que  $np > 5$ ,  $nq > 5$  y  $p, q$  no pequeños se alcanza según el parámetro  $p$  vienen dado en la Tabla 6.2.2.3.

**Tabla 6.2.2.3.** Tamaño mínimo de  $n$ , para asegurar la convergencia, en función de  $p$

$p$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$n$	500	100	50	25	17	13	10

Podemos categorizar las respuestas en varios casos, el más frecuente de los cuáles fue apuntar al desplazamiento de la distribución, indicando que, cuando  $p$  toma valores extremos, los datos tienen un mayor sesgo y también se refirieron al apuntamiento de la gráfica. Un caso es el siguiente (el alumno del ejemplo comenta y realiza cálculos similares para el resto de las gráficas):

*“Para  $n=10$ ,  $p=0,3$  vemos un gráfico que no es simétrico y es sesgado a la derecha. Para sus últimos valores sus probabilidades son muy pequeñas, y la mayor probabilidad será la de 3 ( $P(x=3) = 0,2668$ ). Para  $p=0,2$  no es simétrico, y también posee un sesgo hacia la derecha. Esto significa que tiene un sesgo positivo y sus probabilidades desde 6,7,8,9,10 son muy pequeñas, pero la máxima probabilidad que se puede alcanzar es cuando  $P(x=2) = 0,2013$ ”.*

Muchos de los alumnos constataron simultáneamente el efecto gráfico de desplazamiento y simetría de la distribución binomial al ir fijando la probabilidad de éxito  $p$  y variando el tamaño de la muestra  $n$  y viceversa, fijando  $n$  y dando distintos valores a  $p$ . Estas afirmaciones fueron acompañadas con gráficas similares a la Figura 6.2.2.3 en varios casos. Por ejemplo:

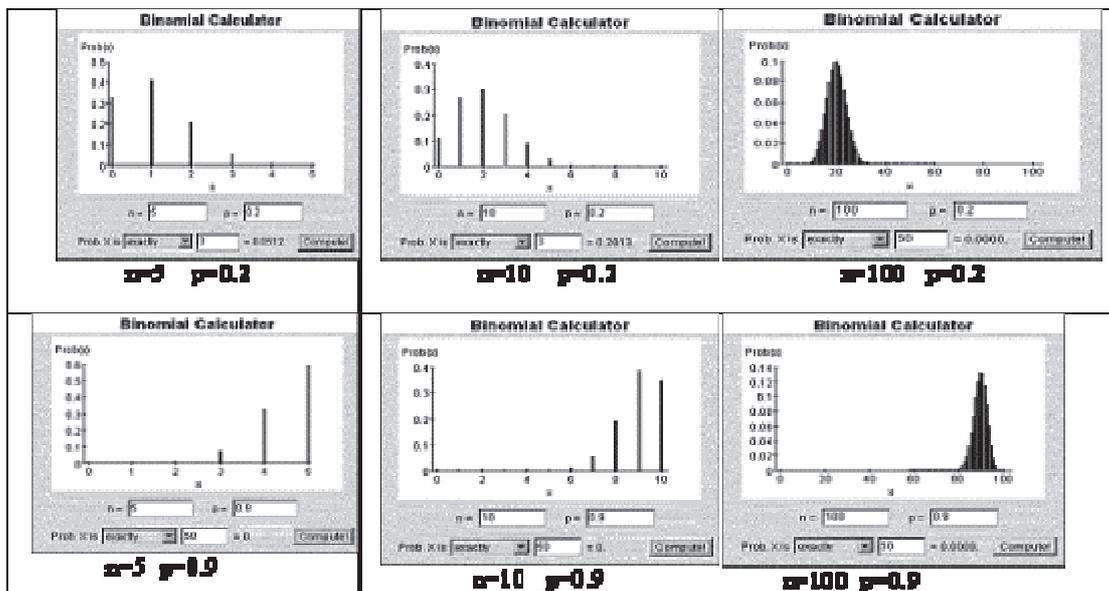
*“Luego de evaluar algunos valores en el applet, concluimos que para los valores  $p$  menores que 0,5 la distribución es sesgada a la derecha (sesgo positivo) y para  $p$  cercano a 0,5 el valor de la*

distribución se muestra con sesgo igual a 0. Esto es, porque cuando la distribución es simétrica, mejor será la aproximación a la distribución normal. Para  $p > 0,5$  la gráfica presenta un sesgo negativo. También observamos que variando el valor del éxito, la distribución se mueve hacia los extremos del eje; si la probabilidad de éxito es baja la distribución tiende hacia la izquierda, en cambio si aumentamos la probabilidad de éxito la distribución tiende hacia la derecha”.

A veces encontramos la comprobación de la convergencia rápida cuando el parámetro  $p$  es igual a  $\frac{1}{2}$  y cualquier valor de  $n$  (entre más grande mejor):

“Siempre que  $p = 0,5$  en una distribución binomial, la curva será simétrica, sin importar qué tan grande o pequeño sea el valor de  $n$ . Mientras más cercana esté  $p$  de 0,5 y mayor sea el número de observaciones,  $n$ , menos sesgada será la distribución. Se puede apreciar en la actividad de los gráficos que a medida que aumenta  $n$  mejora el parecido de las gráficas de barras de las distribuciones binomiales (discretas) a la gráfica de la distribución normal estándar (continua), pero con el inconveniente de que se produce un desplazamiento hacia la derecha de la distribución binomial a medida que aumenta  $n$ , pero sigue siendo una buena aproximación”.

Figura 6.2.2.3. Gráficas producidas en el Ejercicio 1.3

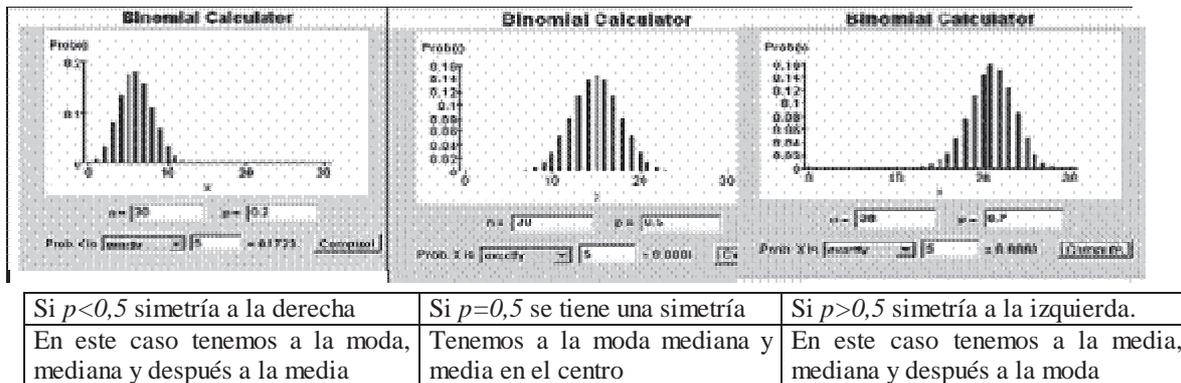


Al igual que el ejercicio 1.2, varias respuestas indicaron que la aproximación es buena utilizando la regla empírica. También usaron el conocimiento previo que tienen de estadística descriptiva, ver la simetría en relación a las medidas de tendencia central:

“Se consideró una muestra de tamaño  $n = 30$  y la probabilidad de  $p = 0,4$  veces ganadas, luego se calculó la probabilidad:  $P(X \geq 15) = 0,1754$ . Luego la probabilidad de tener 15 o más veces

ganadas es del 17,54%. El gráfico muestra claramente que la distribución binomial se aproximó a una normal, pues se tomó un  $n$  grande. Por otra parte, se puede ver que la regla empírica se cumple perfectamente pues  $n \times p = 30 \times 0,4 = 12$  ;  $n \times q = 30 \times 0,6 = 18$ , ambos casos son mayores de 5 y  $(p \times q) = 0,24$  es mayor que 0,05 por ende  $p$  y  $q$  no son demasiados pequeños por lo que cumpliéndose la regla empírica nos indica que la aproximación a la normal es buena”.

Figura 6.2.4. Ejemplo de uso de ideas sobre simetría en el Ejercicio 1.3



Entre los errores detectados al realizar este ejercicio encontramos en varias respuestas confusión entre tipos de sesgo, que también fue encontrado en la investigación de Tauber (2001):

“Después de evaluar distintos  $n$  para diferentes valores de  $p$  podemos concluir que cuando aumentamos el  $n$  nuestra distribución se aproximará cada vez más a la normal con los datos más agrupados en torno a la media (con colas menos pesadas y si el parámetro  $p$  es cercano a 0 la distribución de probabilidades será sesgada hacia la izquierda, si es cercano a 1 será sesgada hacia la derecha y entre más próximo a 0,5 será menos sesgada”.

La escala del eje de la abscisa (recorrido de la v.a. binomial) asociada al applet distorsiona la variación de la distribución binomial, y no muestra el aumento de la varianza, a medida que aumentamos el número de ensayos, lo cual ocasiona errores. En el ejemplo a continuación se confunde también el parámetro  $n$  de número de ensayos con el tamaño de la muestra y la varianza teórica con la varianza muestral:

“Para una distribución binomial, el programa muestra las distribuciones esperadas, así con una probabilidad  $p=0,4$ , constante y variando el  $p=5, 20, 50, 100$ , a medida que el  $n$  es mayor, la gráfica de la función se vuelve cada vez más simétrica, con una menor desviación estándar, la cual hace que la gráfica sea cada vez mas simétrica y puntiaguda” y ” Al observar estos gráficos se puede tomar en cuenta que al aumentar el tamaño de la muestra se produce un aumento en la concentración de los datos alrededor de la media muestral, produciendo que la

varianza muestral disminuya (por esto la gráfica se ve cada vez más angosta en el centro)”.

A continuación, como último ejercicio para evaluar el aprendizaje parcial de la primera lección, se analiza las respuestas de los alumnos en la situación-problema de *Accidentes industriales* mediante resolución algebraica en un tiempo de 50 minutos aproximadamente.

### Ejercicio 1.8

*Accidentes industriales.* Un ingeniero ha comprobado que 45 de los 150 accidentes industriales en su planta, en los últimos cinco años, se deben a que los empleados no siguen las instrucciones.

- a) Determine la probabilidad aproximada de que de 84 nuevos posibles accidentes, entre 20 y 30 se deban a negligencia de los empleados.
- b) Compare con el valor exacto de la probabilidad anterior, determinada mediante la probabilidad Binomial, que es 0,81023.
- c) Calcule la probabilidad aproximada de obtener, en una muestra aleatoria de 120 accidentes industriales, más de un 35% que se deban a negligencia de los empleados.
- d) Calcule el tamaño de muestra necesario para que la estimación difiera de la verdadera probabilidad en menos de 4,5% con probabilidad al menos 0,96.

En el apartado a) el algoritmo de análisis pretendido por los estudiantes es el que sigue:

1. Definir la variable aleatoria en estudio  $S_n = \sum X_i$ : *número de empleados que no siguen las instrucciones en la muestra de 84 accidentes* e identificar la distribución de probabilidad (binomial), determinando los parámetros  $n$  y  $p$ : *proporción de empleados que no siguen las instrucciones*. Tenemos  $S_n = \sum X_i \sim \text{bin}(n = 84, p = 0.30)$ . Estos serían requisitos previos (RP) no directamente relacionados con el teorema central del límite. También supone el uso del cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias (AP1).
2. Asociarle a la v.a.  $S_n = \sum X_i$  la distribución aproximada de la normal, debido a que la muestra de tamaño  $n$  es grande, determinando la esperanza y varianza de la variable. Supone el reconocimiento del campo de problemas de la aproximación de la distribución binomial (CP1), así como la aplicación de las propiedades que la media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias (P1) y la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas (P2). El cálculo de la probabilidad aproximada considera  $\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) = N(np, npq) = N(25.2, 17.64)$ .

3. Transformar la v.a.  $S_n = \sum X_i$  en una distribución aproximada normal estándar (implica AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias y AP2: Tipificación y operación inversa a la tipificación); aplicar la corrección de continuidad (P12) en el cálculo de la probabilidad (AP3) y calcular la probabilidad estimada:

$$P(20 \leq \sum X_i \leq 30) \approx P\left(\frac{19,5 - 25,2}{\sqrt{17,64}} \leq Z \leq \frac{30,5 - 25,2}{\sqrt{17,64}}\right) = P(Z \leq 1,26) - P(Z \leq -1,36) = 0,809$$

En el apartado b) se pretende que el alumno compare los valores del cálculo aproximado y exacto de las probabilidades de la suma de variables aleatorias  $S_n = \sum X_i$  (A5); justificando el teorema para valores grandes de los tamaños muestrales (E5) y la convergencia rápida de la aproximación para valores de  $p$  cercano a  $1/2$  (P7). En el apartado c) los objetivos son los siguientes:

1. Reconocer el estimador de la proporción  $p$  como el promedio muestral (RP); obtener la distribución aproximada del estimador de la proporción  $p$  (P10); justificar el teorema mediante demostración algebraica (A1) que la distribución aproximada es la normal; determinar la esperanza (P1) y varianza (P2) del estimador  $\hat{p}$ . Es decir, considerar la muestra de  $n_2 = 120$  accidentes industriales en la planta; y aplicando el teorema central del límite, sustituir  $\sum_{i=1}^{120} X_i = S_2 \sim N(36, 25.2)$ .
2. Estandarizar el estimador  $\hat{p}$  (AP2) y calcular la probabilidad pedida (AP3). El procedimiento de análisis pretendido por los estudiantes en la resolución es el siguiente (A1):

$$P(\hat{p}_2 \geq 0,35) \approx P\left(\frac{\hat{p}_2 - p}{\sqrt{pq/n}} > \frac{0,35 - 0,3}{\sqrt{0,00175}}\right) = 1 - P(Z \leq 1,19) = 1 - 0,8829 = 0,1171$$

Por último la parte d) pide expresar el error  $e = 0,045$  y el nivel de confianza de  $1 - \alpha = 0,96$ . Se pide estimar el tamaño muestral adecuado (CP8), mediante la expresión:

$$n = \left(\frac{Z(1 - \alpha/2)}{e}\right)^2 \cdot p \cdot q = \left(\frac{2,055}{0,045}\right)^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 438.$$

Si se utiliza  $p = 1/2$  el tamaño necesario aumenta a 522.

Tabla 6.2.2.4. Frecuencias de elementos de significados del Ejercicio 1.8 ( $n = 123$ )

Apartado	Pasos correctos en la resolución del problema	n	%
a	RP: Identificar la distribución de probabilidad binomial	116	94,3
	RP: Determinar los parámetros $n$ y $p$ de la distribución binomial	108	87,8
	AP1: Calcular algebraicamente y transformar $S_n = \sum X_i$	103	83,7
	AP2: Tipificar la v.a. $S_n = \sum X_i$ en una normal estándar	103	83,7
	CP1: Aproximar $S_n = \sum X_i$ a la distribución normal	55	44,7
	P1: La media de $S_n$ es la suma de las medias	55	44,7
	P2: La varianza de $S_n$ es la suma de las varianzas	55	44,7
	P12: Corrección de continuidad	21	17,1
b	A5: Comprobar ejemplos y contraejemplos	94	76,4
	E5: Enunciar el teorema de forma general	31	25,2
	P7: Aproximar una distribución discreta por una continua	1	0,8
c	P1: La media de la dist. aprox. de $\hat{p}$ es la suma de las medias	81	65,9
	P2: La varianza de la dist. aprox. de $\hat{p}$ es la suma de las varianzas	81	65,9
	AP2: Tipificar el estimador $\hat{p}$	78	63,4
	AP3: Calcular probabilidades con calculadora	74	60,2
	RP: Reconocer el estimador $p$ como el promedio muestral	34	27,6
	P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución distribución asintótica normal	31	25,2
	A1: Demostración formal algebraica y/o deductivas	17	13,8
d	RP: Reconocer y expresar el error en valores de 0 a 1	92	74,8
	CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria	82	66,7
	RP: Identificar el valor de $p$	78	63,4

En la Tabla 6.2.2.4 se presenta los resultados, donde vemos que, aunque los alumnos definen la variable suma y 116 estudiantes llegan a identificar la distribución binomial y calcular la probabilidad pedida, expresando la probabilidad a calcular en el apartado a), se producen algunos errores en la identificación de  $n$  y  $p$ . La mayor parte de los estudiantes es capaz de tipificar la variable para pasar a la distribución normal, pero muchos confunden la fórmula de la media o varianza, por lo que sólo 55 llegan a la aproximación normal correcta y de ellos muy pocos (21) aplican la corrección de continuidad correctamente. Los principales errores al aplicar la corrección de continuidad fueron sumar el valor 0,5 (en vez de restar) o viceversa, sumar un valor 1 (en lugar de 0,5) o bien no usar la corrección.

En el apartado b) 94 estudiantes comparan los valores aproximado 0,8092 y exacto 0,8102 de la probabilidad, indicando correctamente su buena aproximación, aunque sólo 31 de ellos comentan que la excelente aproximación se debe al valor grande

de la muestra (84) y sólo uno comenta la influencia del parámetro  $p=0,3$  no alejado de  $\frac{1}{2}$ . En el apartado c) 81 estudiantes determinan correctamente la media y varianza de la distribución muestral de la proporción y 78 llegan a estandarizar correctamente, de los cuáles 74 calculan la probabilidad pedida. De ellos, pero sólo 31 hacen referencia explícita a la distribución normal aproximada de la proporción y 17 de ellos justifican explícitamente el uso del teorema central del límite; en otros casos los alumnos calculan correctamente los parámetros y tipifican, aunque no hacen referencia al teorema. Un grupo de alumnos explícitamente hace referencia a la proporción como promedio, mientras el resto deduce directamente la distribución a partir de una transformación de la binomial.

Por último en d) 82 estudiantes encuentran el tamaño de muestra adecuado, mediante la fórmula correspondiente aunque unos pocos no identifican el valor  $p$ , sino usan el valor  $\frac{1}{2}$  (caso más desfavorable).

### **6.2.3. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL IMPLEMENTADO EN LA PRIMERA LECCIÓN**

En la Tabla 6.2.3.1 se detalla los diversos elementos de significados que se ha podido identificar en las respuestas de los alumnos, a las actividades, ejercicios y evaluación analizadas.

La comprensión fue bastante alta, en general, en las actividades de experimentación de las distribuciones muestrales de muestras pequeñas y grandes. Ello los acerca a ir construyendo el significado del teorema central del límite en este caso particular de la distribución binomial; sobre todo debido a las nuevas experiencias de trabajo con materiales manipulativos, seguido del uso de Excel y la interacción dinámica con applet. Se destaca en el estudio de la distribución empírica dos conceptos que resultaron sencillos: simulación y efecto de los parámetros sobre la aproximación. Así también, consideramos que se ha reforzado el modelo de la distribución binomial entendida como suma de variables aleatorias Bernoulli y se le ha dado sentido mediante una aplicación a la ingeniería.

**Tabla 6.2.3.1.** Elementos de significados personales observados en las respuestas de los alumnos a las actividades y ejercicios

Tipo de elementos	Elementos de significado	A1.1	A1.2	E1.1	E1.2	E1.3	E1.8
Campos de problemas	CP1: Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de $n$	X	X	X	X	X	X
	CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas						X
Lenguaje	Términos y expresiones verbales	X	X	X	X	X	X
	Notaciones y símbolos	X		X	X	X	X
	Representaciones gráficas	X	X	X	X	X	X
	Simulaciones		X			X	
procedimiento	AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias	X	X	X	X	X	X
	AP2: Tipificación / Destipificación				X	X	X
	AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora u ordenador				X	X	X
	AP4: Cálculo de probabilidades a partir de materiales manuales	X	X				
Enunciados	E5: Enunciado del teorema de forma general					X	X
	E6: Enunciado intuitivo del teorema	X	X	X	X	X	X
Propiedades	P1: La media de la distribución aprox. de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias		X	X		X	X
	P2: La varianza de la distribución aprox. de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas		X	X		X	X
	P3: La media aritmética de una m.a. de tamaño grande sigue una dist. Aprox. normal			X		X	X
	P4: La aproximación mejora con el número de sumandos			X	X	X	X
	P7: Aproximación de la distribución discreta por una continua						X
	P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal						X
Argumentos	P12: Corrección de continuidad.						X
	A1: Demostraciones algebraicas y/o deductivas					X	X
	A2: Presentación del teorema como caso especial de un resultado general					X	X
	A3: Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo	X		X	X	X	
	A4: Simulación gráfica con ordenador del teorema	X			X	X	
A5: Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar	X		X	X	X	X	

### 6.3. OBSERVACIÓN DE LA SEGUNDA LECCIÓN

La lección 2 estuvo dedicada a la extensión del teorema al caso de variables discretas, donde la distribución binomial, estudiada en la lección 1 es un caso particular. La primera clase de esta lección comenzó con una pregunta del profesor, ¿El recorrido de una variable aleatoria con distribución binomial, es finito?, a la que una respuesta inmediata de un alumno fue: “No, porque es una muestra aleatoria de cero a  $n$  y  $n$  puede tomar cualquier valor”. Hubo que aclarar, pues al parecer más de un alumno aún no diferenciaba los valores de la distribución binomial (acotada), una vez fijado  $n$ , con

los infinitos posibles valores de  $n$ . El objetivo de esta pregunta fue introducir la distribución Poisson de valores discretos, pero no acotada.

### 6.3.1. ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN EL AULA

#### Actividad 2.1

A una central de teléfonos llegan llamadas al ritmo medio de 3 por minuto. Determinar la probabilidad de que lleguen al menos 200 llamadas en un periodo de una hora. ¿Cómo desarrollarías esta actividad?

La actividad 2.1 presenta una situación inicial introductoria a la aproximación de la distribución de Poisson (CP2). El profesor pide a los alumnos que calculen el valor exacto y valor aproximado, teniendo presente los conocimientos previos del curso de probabilidades y el proceso de estudio de la lección 1. En primer lugar, en un tiempo de 15 minutos, se pidió a un grupo de alumnos que escriban en una hoja la solución exacta con procedimiento o indiquen por qué no han llegado a la solución. Se obtuvo las siguientes frecuencias de respuestas en la Tabla 6.3.1.1.

**Tabla 6.3.1.1.** Respuestas de los estudiantes en la Actividad 1 ( $n=33$ )

	Aciertos	Errores
Definir la variable como número de llamadas en 1 hora	27 (81,8)	
Identificar la variable con la distribución Poisson	27 (81,8)	6 (18,2)
Reconocer el parámetro de media como 180	29 (87,9)	4 (12,1)
Aplicar procedimiento algebraico usando calculadora (AP1)	29 (87,9)	
Justificar con procedimiento algebraico (A1)	8 (24,2)	17 (51,5)
Justificar en palabras	10 (30,3)	

La mayoría de los alumnos definieron la variable aleatoria  $X$ : “número de llamadas recibidas por una central en 60 minutos”, seguido de asociar la característica de estudio con la distribución Poisson, cuya expresión simbólica es  $X \sim P(\mu = \lambda t = 3 \times 60 = 180)$ . También, un 87,9% de estudiantes calculó el promedio  $\mu=180$ , de llamadas que recibe la central durante 60 minutos (P1). De los alumnos, hubo un 87,9% que utilizó el procedimiento algebraico del modelo Poisson para intentar

calcular la probabilidad  $P(X \geq 200) = \sum_{x=200}^{\infty} \frac{180^x \cdot e^{-180}}{x!}$ , de los cuales un 24,2% llegó a la

siguiente solución con uso de calculadora, de  $P(X \geq 200) = 1 - 0,925 = 0,075$ .

Otros alumnos (30,3%), argumentaron en palabras la dificultad de calcular demasiadas probabilidades. Un caso es el siguiente: “*Es difícil calcular la probabilidad*

exacta porque la suma es muy grande”, o “no se puede sacar porque  $n$  es grande y su desarrollo largo”.

Los errores presentados en esta parte fueron los siguientes: Un 18,6% de los alumnos no relacionaron la variable con la distribución Poisson, si no más bien la identificaron con la distribución exponencial; 12,1% calcularon mal el parámetro de media, con resultado  $E(X) = 3$ , que es la media de una variable aleatoria Poisson en un tiempo  $t = 3$ ; de los alumnos que realizaron procedimiento algebraico, un 51,5% no llegaron a una solución algebraica correcta, en que consideraron la variable como continua y calcularon la probabilidad como un área (usaron integral) o calcularon la probabilidad en el punto  $x = 200$ .

A continuación, en otros 15 minutos, el profesor les propuso a los estudiantes una ampliación del enunciado del teorema central del límite, en que determinarían la probabilidad anterior en forma aproximada, mediante la distribución normal. Se recogieron las siguientes frecuencias de uso elementos de significado del teorema de esta situación en la Tabla 6.3.1.2.

**Tabla 6.3.1.2.** Respuestas en forma aproximada de la Actividad 1 ( $n = 33$ )

	Aciertos	Errores
Determinar la media de la suma de variables aleatorias Poisson (P1)	31 (93,9)	2 (6,1)
Determinar la varianza de la suma de variables aleatorias Poisson (P2)	31 (93,9)	2 (6,1)
Aplicar la corrección de continuidad (P12)		2 (6,1)
Aproximar distribuciones clásicas a la distribución normal (P8)	5 (15,2)	
Calcular algebraicamente las variables aleatorias (AP1)	33 (100,0)	
Tipificar algebraicamente (AP2)	27 (81,8)	6 (18,2)
Calcular probabilidad del teorema con calculadora y tablas (AP3)	33 (100,0)	
Demostración algebraica (A1)	25 (75,8)	8 (24,2)

Respondieron de forma correcta un 94% al cálculo de la esperanza y la varianza de la suma de variables aleatorias con distribución Poisson, cuyo valor es 180. A excepción de dos alumnos, ninguno utilizó la corrección de continuidad (P12), que junto con estandarizar (AP2) debiera obtenerse el siguiente resultado:  $P(X \geq 200) = P(Z \geq (199,5 - 180) / \sqrt{180}) = 1 - F_Z(1,45) = 1 - 0,9264 = 0,0736$ . Sin embargo, todos realizaron el cálculo algebraico y con uso correcto de la calculadora y la tabla estadística de la distribución normal, de los cuales un 81,8% tipificó bien. Un 15,2% describió la condición de tener un  $n$  grande y mayor que 30 para obtener una aproximación de la distribución Poisson por la distribución normal (en lo que sigue de esta lección se estudiaría la influencia del parámetro de media en la calidad de la aproximación) y un

## Capítulo 6

75,8% validó la aproximación con el desarrollo algebraico correcto de la probabilidad. La mayoría obtuvo un valor de 0,0681 en el cálculo aproximado al no aplicar la propiedad de corrección de continuidad.

Un ejemplo de alumno con dificultad se muestra a continuación, en que se confunde el valor de la variable con la tasa de tiempo  $x/t$  en lugar de  $\lambda t$ , y que conlleva a error de cálculo de la media y varianza de la suma de variables y a obtener un valor incorrecto de 0,3156:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 3 && \text{Cobros } X = \text{Número de } t: \\
 \mu &= \frac{11 \text{ min}}{3 \text{ min}} = \frac{11}{3} && \text{Kc} = \frac{1}{3} \\
 P(X \geq 19) & && \\
 &= 1 - P(X \leq 19 + 0,5) && = 2 \\
 &= 1 - P(Z \leq \frac{(19,5) - \frac{11}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}) && \\
 &= 1 - P(Z \leq 0,40) && \\
 &= 1 - \Phi(0,40) && \\
 &= 1 - 0,6544 && \\
 &= 0,3156 = 31,56\% &&
 \end{aligned}$$

Un 18,2% de estudiantes obtuvo errores en la tipificación de la variable suma, por ejemplo al colocar la varianza en lugar de la desviación estándar en el denominador de la estandarización, obteniendo una probabilidad de 0,4512. Por último, un 24,2% no llegó a la solución correcta de la probabilidad por una de las dificultades mencionadas anteriormente.

Una vez terminada la actividad el profesor les pidió a los estudiantes que la comentaran y compararan con las actividades de la lección 1. Algunos comentarios se relacionaron con las nuevas formas de solucionar probabilidades:

*“La diferencia es que cambia el procedimiento al cambiar las palabras exacta y aproximada, y que se desarrolla por el teorema central del límite, aproximación normal”, “Se diferencian por la distribución de la población de origen” y “la diferencia está en la dificultad matemática que presenta la distribución Poisson en comparación con la distribución normal”.*

Las principales dificultades observadas en algunos alumnos en el cálculo de la probabilidad aproximada, se refiere a la corrección de continuidad (P12). No entendieron, por ejemplo: *¿Por qué se resta 0,5 en vez de sumar 0,5 a  $P(X \geq 200)$ ?* Otras preguntas puntuales se refirieron a la distribución de la variable: *¿Es discreto?*, *¿Comienza de cero el recorrido de la variable aleatoria Poisson?*, y a la posibilidad de

aproximación de una distribución discreta: ¿*Toda distribución discreta se puede aproximar a una normal?*, ¿*Hasta cuando una aproximación es buena?* (P4 y P8).

### Actividad 2.2

- Un producto se vende en el mercado con la misma frecuencia, en tres tamaños 2, 4 y 6.
- Determine la distribución de probabilidad de la variable tamaño del producto.
  - Elabore un diagrama de barras para representar su distribución.
  - Calcule la media  $\mu$  y la desviación estándar  $\sigma$ .
  - Enumere todas las muestras aleatorias de tamaño 2 con reemplazo que pueden comprarse de este producto, y calcular las medias de las muestras obtenidas.
  - Obtenga la distribución de probabilidad de estas medias.
  - Calcule la media y desviación estándar de las medias muestrales. Comparar con las teóricas.
  - Dibuje un *histograma* de la distribución muestral de medias muestrales. Comentar.
  - Indique tres hechos importantes obtenidos en la resolución del problema.

La actividad 2.2 plantea un nuevo problema de aproximación de suma de variables discretas (CP2) que se refiere a la aproximación gráfica de una distribución discreta acotada por la distribución normal (P8). A la pregunta del profesor sobre cómo definir la variable aleatoria en el apartado a) se registraron tres tipos de respuestas: “*frecuencia de ventas*”, “*frecuencia de tamaños*” y “*tamaño de producto*”, es decir, algunos alumnos confundieron los valores de la variable en estudio “tamaño de un producto que se puede comprar en el mercado”, con la frecuencia absoluta en las otras dos respuestas.

A continuación, el profesor pregunta sobre el recorrido de la variable, con la finalidad de diferenciar el ejemplo con la distribución uniforme discreta de parámetros 2 y 6. Un problema es que el recorrido de los tamaños del producto son 2, 4 y 6, en lugar de valores consecutivos  $x = a, a+1, a+2, \dots, b$ , por lo que la función de probabilidad y la esperanza matemática no puede ser calculada por la distribución uniforme discreta. El uso incorrecto de la fórmula condujo a algunos estudiantes a obtener  $UD(2,6)$  con función de probabilidad  $P(X=x) = 1/(6-2+1) = 1/5$ , que no corresponde a  $P(X=x) = 1/3$ . Hubo dos respuestas que asociaron la variable con la distribución binomial de parámetros  $B(n=3, p=1/3)$ , lo que condujo a seguir el procedimiento de forma equivocada.

En el cálculo de la esperanza matemática en el apartado c) algunos consideraron la expresión de la media aritmética para datos no agrupados, es decir,  $\sum x_i / n = (2+4+6)/3 = 4$ . Uno de los errores fue calcular la media por medio de la distribución binomial  $np=3(1/3)=1$ . Si bien al calcular la esperanza matemática utilizando la distribución uniforme se obtiene  $4=(2+6)/2$  que coincide con la respuesta correcta  $E(X) = \sum xp(x)$ , el

procedimiento correcto de cálculo es mediante la distribución de probabilidades dada en la Tabla 6.3.1.3.

**Tabla 6.3.1.3.** Distribución de la v.a. tamaños del producto

x	2	4	6	$\Sigma$
p(x)	1/3	1/3	1/3	1,0
xp(x)	2/3	4/3	6/3	4,0

La varianza poblacional fue obtenida por la mayoría mediante la definición de varianza de una variable aleatoria discreta,  $\sigma^2 = \Sigma x^2 p(x) - E^2(X) = 56/3 - 16 = 8/3$ , y cuya desviación estándar es 1,63. Los errores de cálculo presentado fue considerar sólo la primera parte de la fórmula de la varianza. Un resumen de resultados de esta actividad por un grupo de alumnos se muestra en la siguiente tabla.

**Tabla 6.3.1.4.** Frecuencias (porcentajes) de respuestas de la Actividad 2.2 ( $n=28$ )

	Aciertos	Errores
Definir la variable tamaño del producto	11 (39,3)	6 (24,4)
Obtener la distribución de probabilidad poblacional	26 (92,9)	2 (7,1)
Dibujar gráficos de barra e histograma	27 (96,4)	1 (3,6)
Obtener la media y varianza poblacionales	24 (85,7)	4 (14,3)
Determinar la distribución de la media muestral de tamaño 2	26 (92,9)	2 (7,1)
Determinar la media del promedio de la muestra (P1)	24 (85,7)	3 (10,7)
Determinar la varianza de la media muestral (P2)	21 (75,0)	5 (17,9)
Indicar hechos importantes en la solución de la actividad	14 (50,0)	

La mayoría de los alumnos obtuvo las nueve muestras posibles de tamaño 2, con algunas excepciones; al escribir 16 casos pensando en el recorrido de la distribución binomial  $\{0,1,2,3\}$  o también mostrar 21 casos formando muestras de tamaño 3 con valores de los tamaños de la población  $\{2,4,6\}$ . Luego, para responder el apartado e), el profesor pregunta por la probabilidad de obtener  $\bar{X} = 2$ . Algunos alumnos encuentran el valor correcto 1/9 indicando que el número de muestras es 9. Esto se observa en la distribución de la media muestral, Tabla 6.3.1.5, como fue sugerida por una alumna “*la frecuencia  $n_i$  se puede obtener o utilizar y así calcular la probabilidad*”.

Una respuesta errónea fue “*1/3, al mirar la distribución inicial de la uniforme*”; que muestra una confusión entre la distribución poblacional y la distribución muestral del promedio, error señalado por Schuyten (1991). También, se anotó la respuesta incorrecta “*1/5, porque 5 es el recorrido*”; aquí se aplicó equiprobabilidad, mirando que hay cinco valores del recorrido de la media muestral, no teniendo en cuenta las

diferentes probabilidades de los valores.

**Tabla 6.3.1.5.** Distribución de la media muestral de tamaños del producto

$\bar{X}$	$p(\bar{x})$	$\bar{x}p(\bar{x})$
2	1/9	2/9
3	2/9	6/9
4	3/9	12/9
5	2/9	10/9
6	1/9	6/9
$\Sigma$	1.0	4.0

Alrededor de un 80% respondió correctamente el apartado f) acerca de la media y varianzas muestrales, utilizando el operador de la variable aleatoria para la media muestral. El valor esperado de la media muestral de tamaño 2 lo obtuvieron de la Tabla 6.3.1.5. Otra forma de calcularlo fue a través de la distribución de frecuencias de variables en clases individuales, como se muestra en el ejemplo a continuación:

$$\mu(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^m m_i \cdot k_i}{N} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

Los únicos errores fueron de cálculo en el resultado para la media y la varianzas muestrales, al utilizar incorrectamente parte de la fórmula, igual que en la varianzas poblacional (Propiedades P1 y P2). También, varios alumnos verificaron una propiedad previa a las lecciones del teorema; en una muestra aleatoria con cierta distribución, “la varianzas muestral es igual a la varianzas poblacional dividida por el tamaño de la muestra” (Ver proposición en Devore, 2001, pp. 229). Un caso presentado por un alumno es el siguiente:

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= \sum x_i p(x_i) = 4 \\ V(\bar{x}) &= E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{3/3}{2} = \frac{4}{3} \\ &= \frac{52}{3} - 16 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

En b) y g) los alumnos comparan gráficamente la distribución original con la distribución muestral de la media muestral. Algunas respuestas en el apartado b) relacionado con la gráfica de barras fueron las siguientes:

## Capítulo 6

*“La característica que presenta este determinado producto en el mercado, permite visualizar que es constante la venta en sus tres tamaños” y “Los tamaños del producto tienen la misma probabilidad”.*

Un error fue presentar un histograma para la variable discreta. En la gráfica de la distribución muestral registramos respuestas comunes, indicando que la distribución tiene una forma simétrica, por lo que se parece a una distribución normal:

*“Se puede ver que se distribuye en forma simétrica igual que la normal”, “La distribución es simétrica, tiene forma de campana” y “El histograma nos indica que se distribuye simétrica y homogénea”.*

Por último, lo que más destacaron acerca de esta actividad, en el apartado h), está relacionada con tres hechos: la simetría del dibujo de la distribución de la media muestral, la igualdad de las medias poblacionales y muestrales y la disminución de la desviación muestral (segunda propiedad básica para comprender el teorema, según Méndez, 1991):

*“La forma del gráfico se asemeja a una campana”, “La distribución encontrada puede aproximarse a una distribución normal”, “La media que tiene mayor probabilidad de ser comprado es la de 4 con una probabilidad de 1/3 y las de menor chance son las de tamaños 2 y 6”, “Las medias son iguales, sin embargo la variación de la media muestral disminuye, posee menor desviación estándar” y “No me había percatado en la gran variación que presenta la desviación, siendo menor la de la media muestral”.*

También hicieron referencia a la proposición de las varianzas, comentando que aunque las medias de la población coincide con la media del promedio no ocurre lo mismo con las varianzas: *“la variación poblacional es el doble de la variación muestral”, “la varianza muestral es la mitad de la varianza poblacional”.* Un caso es el siguiente:

$E[\bar{x}] = \mu = 4$   
la media muestral es igual a la poblacional

$V(x) = 8/3$  ;  $V(\bar{x}) = 4/3$   
la varianza muestral es la mitad de la varianza poblacional.

El histograma nos muestra que la media muestral se distribuye simétricamente.

Otros comentarios no relacionados con las propiedades anteriores fueron: no diferenciar las varianzas obtenidas, error en una propiedad de buen estimador, donde se confunde la definición de insesgamiento de un estimador con la variable aleatoria original, en lugar del parámetro, y mezclar los conceptos de esperanza y probabilidad:

*“La media con la media muestral son exactamente iguales y la desviación estándar con la de la media muestral son muy parecidas”, “La esperanza de la media muestral es igual a la esperanza poblacional, por lo tanto el estimador es insesgado” y “Hay una igualdad entre la probabilidad muestral y la poblacional”.*

### Actividad 2.3

La candidata presidencial de Chile Michel Bachelett obtiene un 48% de los  $N$  encuestados, de forma permanente por varios meses, previo a las elecciones. Pensando en los resultados definitivos de diciembre 2005 respecto a los votos de los tres candidatos, ¿Cuál es la probabilidad de que sea ganadora en un sondeo de 200 votos en un determinado distrito?, ¿Tendremos una primera presidenta mujer de Chile, en la primera vuelta electora?

Nota: La proporción  $p$  de votos a favor de M. Bachelett varía de un mes a otro pero con tendencia al 48% y además los tamaños de muestras pueden ser distintos.

La actividad 2.3 corresponde a la aproximación de la distribución Hipergeométrica a la normal (P8) en encuestas de preferencias presidenciales. El procedimiento de solución requiere definir la variable  $X$ : “número de votos que obtiene de los 200” y reconocer que  $X$  tiene una distribución hipergeométrica de parámetros  $n = 200$ ,  $a = pN$  y  $b = (1-p)N$ , donde  $p=0,48$  y calcular la media y varianza respectiva,  $\mu=np=96$ ;  $\sigma^2 = npq \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1} = 49,92 \cdot \frac{N-200}{N-1}$  (P1, P2). Se utiliza también la corrección de continuidad (P12) y se compara el resultado inicial con la aproximación binomial a la hipergeométrica de la probabilidad calculada (P8).

Destacamos dos errores durante el proceso de solución en el aula. El primero de ellos hace referencia a la varianza del estimador en la estandarización (AP2). La consulta en relación a que la distribución de la variable  $X$  es aproximadamente

$N(96, 49,92)$ , con  $P(X>100) \approx 1 - F_Z\left(\frac{100,5 - 96}{\sqrt{49,92}}\right)$  fue: ¿No se divide  $\sigma^2$  por  $n$ ?

Esta pregunta muestra que el alumno aún no establece la discrepancia de estandarización normal de la variable  $X$  con la estandarización de la media muestral  $\bar{X}$ , es decir, en términos simbólicos no diferencia:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{ó} \quad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z^* = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Otra dificultad tuvo que ver con el recorrido de la variable discreta: ¿Por qué se comenzó calculando la probabilidad en 101? Esto se explica por ser la desigualdad mayor estricto  $P(X > 100) = P(X \geq 101)$ , y hay que aclarar que puede conducir a error la corrección de continuidad, sumando o restando 0,5 al valor 101.

### 6.3.2. ANÁLISIS DE EJERCICIOS REALIZADOS POR LOS ALUMNOS FUERA DE CLASE

#### Ejercicio 2.1

Un jabón para lavavajillas de cierta marca se vende en tres tamaños: de 25, 40 y 65 onzas. Veinte por ciento de los compradores seleccionan la caja de 25 onzas, 50% la de 40 onzas y 30% la caja de 65 onzas. Sean  $X_1$  y  $X_2$  los tamaños de caja seleccionados por dos compradores independientes.

- a. Escriba la distribución de los tamaños de jabones. Comenta sobre la naturaleza de la variable.
- b. Determine la distribución de muestreo de  $\bar{X}$ , calcule  $E(\bar{X})$  y compárela con  $\mu$ .

El ejercicio fue realizado por dos grupos: uno de 33 alumnos resolvieron los apartados a) y b). Los resultados han indicado que este problema no fue fácil de resolver, quizás por el poco tiempo asignado y aún tener presente la lección 1. En la parte a) de los 28 alumnos que intentaron describir la distribución, 20 la asociaron con la distribución binomial, definiendo tres variables con probabilidades de éxito  $p$  respectiva de 0,2, 0,5 y 0,3 y número de ensayos  $n$  según los tamaños de jabones; cuatro alumnos relacionaron la información con la distribución hipergeométrica, cuatro con la distribución geométrica y cinco anotaron que no sabían como resolverlo. Un caso de plantear las variables como binomial es el siguiente:

“Sean  $X_i$ : Jabón de lavavajillas de tamaño  $i$ , donde  $i = 25, 40, 65$ . Además,  $X_i \sim B(p)$  con probabilidades respectivas de 0,2, 0,5 y 0,3. Para el número de jabones de tamaño  $i$  se tiene que  $X_i = S_i = \sum X_i \sim \text{Bin}(n_i, p_i)$  y entonces podemos aproximarlos por  $S_i \approx N(n_i p_i, n_i p_i q_i)$ ”.

El apartado b) sólo cuatro respondieron, y de forma equivocada, que la media muestral es aproximada por la distribución normal. Fueron 22 alumnos que calcularon la esperanza de la media muestral, donde no se presentaron respuestas correctas debido a que partieron considerando erradamente la población de origen. Por ejemplo, los que utilizaron la distribución geométrica obtuvieron una media de  $1/p = 1 / 0,2 = 5$ ; una media de 2 para los que utilizaron la distribución binomial:  $E(\bar{X}) = E(\bar{X}_1) + E(\bar{X}_2) +$

$E(\bar{X}_3) = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 2(0,2) + 2(0,5) + 2(0,3) = 2$ . Aquí se confunde la muestra de tamaño 2 con el número de ensayos.

También se registró una media de 0,66 al escribir  $n = 3$  en el denominador de la media aritmética de la suma de tres variables, donde cada  $X_i$  tiene distribución binomial ( $n=2, p_i$ ), es decir:  $E(\bar{X}) = 1/n [E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)] = 1/3(0,4 + 1 + 0,6)$ . Dos alumnos mostraron tener error algebraico en la esperanza de la media muestral (P1), al escribir  $E(\bar{X}) = E(\bar{X}_1) + E(\bar{X}_2)$ .

Otro grupo de 28 estudiantes desarrollaron la situación, dos días después, cuyos resultados se presentan en la Tabla 6.3.2.1.

**Tabla 6.3.2.1.** Frecuencias de elementos de significados aplicados en el Ejercicio 2.1 ( $n = 28$ )

Ap.	Procedimiento utilizado por los alumnos y elementos implicados	Frec.
a	Determinar la distribución de probabilidad de variable discreta	26
	Expresar que la variable es discreta acotada	23
	Expresar equivocadamente que la variable tiene distribución uniforme discreta	19
	Dibujar un gráfico de barras de la distribución de variable acotada	25
	Calcular la media teórica o poblacional	25
	Calcular la varianza poblacional	25
b	Enumerar las muestras posibles de tamaño 2	24
	Obtener las medias aritméticas de cada muestra	24
	Determinar la distribución de muestreo de la media muestral	9
	Calcular la media empírica de la media muestral	20
	Calcular la varianza empírica de la media muestral	20
	Dibujar un gráfico de barras de la distribución de la media muestral	12
	Comprobar que la varianza muestral es menor que la varianza poblacional	7
	Comprobar que la media teórica y experimental coinciden	3

El algoritmo que emplearon los alumnos fue primero caracterizar la distribución de probabilidad con una representación gráfica y obtener los parámetros de media y varianza poblacional de la distribución. Fue alta la frecuencia de respuestas correctas en esta primera parte del ejercicio. Casi la totalidad del grupo determinó la distribución de probabilidades de valores 25, 40 y 65 para el recorrido y probabilidades respectivas 0,2, 0,5 y 0,3.

x	25	40	65
P(x)	0.20	0.50	0.30
E(x)	5	20	19.5 = 44.5
E(x <sup>2</sup> )	125	800	1267.5 = 2192.5

$V(x) = (2192,5) - (44,5)^2$   
 $= 212,25$   
 $\sigma_x = 14,56$

Un caso incorrecto que se registró fue asignar igual probabilidad de 1/3 a cada valor del recorrido, considerando equivocadamente una distribución discreta constante.

## Capítulo 6

La mayoría definió la variable  $X$ : tamaño del jabón para lavavajillas (en onzas), clasificándola como variable discreta, pero sólo 8 escribieron que era acotada. Además, llamó la atención que si bien describieron correctamente la distribución, hubo 19 alumnos que la asociaron con la distribución uniforme discreta y uno con la distribución binomial. Un caso se muestra a continuación:

$X$  tamaño de la caja  
 la variable  $X$  es discreta con recorrido  $\{25, 40, 65\}$   
 $X \sim UD(25, 65)$   
 $P_i(x) = P(X=x) \begin{cases} 0,2 & x=25 \\ 0,5 & x=40 \\ 0,3 & x=65 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

Fueron 25 estudiantes los que mostraron una representación gráfica de barras correcta de la distribución. Hubo un error en una gráfica, al colocar de frecuencia relativa de 0,33 al determinar y plantear la variable con distribución uniforme discreta. Un 89% de los alumnos obtuvo la esperanza de la variable con valor de 44,5 mediante la definición de esperanza matemática en variables discretas, de igual forma la varianza de valor 212,25 ( $P_1, P_2$ ).

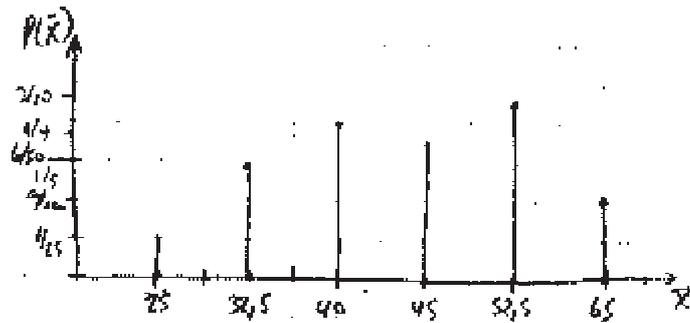
Fueron 24 alumnos (85,7%) los que describieron las nueve muestras posibles de tamaño dos  $(x_1, x_2)$ , así también determinaron los valores de media aritmética en cada una de las muestras. Sin embargo, sólo 9 alumnos encontraron la distribución muestral de la media muestral ( $A_3$ ). Un caso es el siguiente:

$\bar{x}_n$	25	32,5	40	45	52,5	65
$n$	1	2	1	2	2	1
$P(\bar{x}_n = \bar{x}_n)$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$
	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$
						$\frac{9}{100} \Rightarrow E = 1$

Hubo un alto porcentaje de alumnos, 60,7%, que no determinaron correctamente la distribución muestral, al creer que las probabilidades correspondientes a los valores de la media muestral son obtenidas de la frecuencia de casos favorables sobre el total de las nueve muestras de tamaño dos, fallando en conocimientos previos. Uno de los 17 casos se presenta a continuación:

$\bar{x}_n$	25	32,5	40	45	52,5	65
$P(\bar{x}_n = \bar{x}_n)$	1/9	2/9	1/9	2/9	2/9	1/9
$E(\bar{x})$	25/9	65/9	40/9	90/9	105/9	65/9
$m$	1	2	1	2	2	1
$E(\bar{x}^2)$	625/9	2125/9	1600/9	4050/9	55125/9	4225/9
						$= 2043,8$
						$= 9m$
						$V(\bar{x}) = (2043,8) - (43,3)^2 = 138,91$

La aplicación correcta de las propiedades de la esperanza y varianza de la media muestral (P1 y P2) por medio de su definición fue de 20 alumnos (71,4%), pero de ellos sólo nueve obtuvieron los valores correctos de 44,5 y 106,125 respectivamente. Los otros alumnos obtuvieron valores de media 43,33 y varianza 136,38 al emplear mal la calculadora o equivocarse en las probabilidades de la distribución. Las representaciones gráficas de la distribución de la media muestral fueron observadas en 8 alumnos:



Los que construyeron la gráfica con error en las probabilidades concluyeron por ejemplo que “*con este histograma podemos ver que la distribución no se parece a una distribución normal o simétrica*” o que “*el tamaño de la muestra es pequeña y no nos da una buena aproximación simétrica*”.

Por otro lado, 7 estudiantes indicaron la propiedad 2 de Méndez (1991) acerca de la comparación de las varianzas teórica y empírica de la media de la muestra:

“*La varianza de la media muestral  $V(\bar{X})$  es menor que la varianza poblacional  $V(X)=\sigma^2$ , y además en este caso la varianza poblacional es el doble que la varianza de la media muestral  $\sigma^2/2 = 212,25/2 = 106,125 = \sigma_{\bar{x}}^2$ ”.*

Respecto a la comparación de medias teórica y empírica (A5), sólo 6 alumnos escribieron la coincidencia en los valores. Por último, no se obtuvo respuesta de los alumnos en formular una pregunta de cálculo de probabilidad de la media aritmética aplicando el teorema.

### Ejercicio 2.3

Una máquina produce artículos con cierto tipo de defecto, identificados como 0, 1 y 2. Suponiendo que en una partida hay 20 artículos sin defecto, 30 con un defecto y 50 con dos defectos, se saca un artículo al

azar y se anota su valor,  $X_1$ . La distribución de  $X_1$  será  $P(X_1 = x) = \begin{cases} 0,2 & x = 0 \\ 0,3 & x = 1 \\ 0,5 & x = 2 \end{cases}$

Suponga que el artículo escogido primero se devuelve a la partida y luego se escoge un segundo artículo y se anota su valor,  $X_2$ . Considere la v.a.  $\bar{X}_2 = (X_1 + X_2)/2$  como el promedio de una muestra aleatoria de tamaño 2, con distribución:  $P(\bar{X}_2 = \bar{x}_2) = 0,04, 0,12, 0,29, 0,30, 0,25$  y valores de la v.a.  $\bar{X}_2$  respectivamente  $0, 1/2, 1, 3/2, 2$ .

Suponga que después de que el segundo artículo ha sido también devuelto a la partida, se escoge un tercer artículo y se anota su valor,  $X_3$ . Determine la distribución de probabilidad de la v.a.  $\bar{X}_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$

- Realice el experimento de obtener un cuarto artículo siendo devuelto el tercero a la partida. Obtenga la distribución de probabilidades del promedio de los cuatro artículos extraídos.
- En un gráfico dibuje las distribuciones de  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$  y  $\bar{X}_4$  (Utilice Excel y/o lápiz y papel). ¿Qué puede comentar sobre la forma de la distribución de los resultados de esta ilustración numérica? En el mismo gráfico, trace en línea discontinua como sería la distribución de  $\bar{X}_5$ .
- Si en vez de la media muestral, se analiza la suma de variables aleatorias discretas,  $S_1; S_2 = X_1 + X_2; S_3 = X_1 + X_2 + X_3, etc.$  Fundamente si la distribución de la suma y el promedio serán similares.
- Enuncie al menos una pregunta de acuerdo al problema, sobre el cálculo de probabilidad, donde tenga que aplicar el teorema central del límite y resuelva.

De los ejercicios dados en el apunte de la lección 2 para los alumnos, el ejercicio 2.3 es interesante de analizar, debido a que requiere estudiar algebraicamente y gráficamente el comportamiento de la distribución de la suma o media muestral (CP10) a medida que se van agregando variables (P3). Estamos todavía en el campo de problemas CP2: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas.

La actividad la podían desarrollar en parejas, donde en una de las secciones se les pidió comenzar por la distribución de la media de tamaño 3 (CP10) y en la otra sección debían comenzar por el estadístico de la suma de variables aleatorias (CP2). No hubo dificultades en formar las 27 muestras posibles y la distribución de la suma de v.a de tamaño 3, como se ilustra a continuación:

$S_3$	$P(S_3 = s_3)$
0	$(0, 0, 0) = (0, 2)^3 = 0,008$
1	$(0, 0, 1)(0, 1, 0)(1, 0, 0) = 3(0,012) = 0,036$
2	$(0, 0, 2)(0, 1, 1)(0, 2, 0)(1, 0, 1)(1, 1, 0)(2, 0, 0) = 3(0,02) + 3(0,012)$
3	$(0, 1, 2)(0, 2, 1)(1, 0, 2)(1, 1, 1)(1, 2, 0)(2, 0, 1)(2, 1, 0) = 0,207$
4	$(0, 2, 2)(1, 1, 2)(1, 2, 1)(2, 0, 2)(2, 1, 1)(2, 2, 0) = 0,285$
5	$(1, 2, 2)(2, 1, 2)(2, 2, 1) = 0,225$
6	$(2, 2, 2) = 0,125$

Tampoco hubo dificultad en estudiar la media, verificando la distribución de probabilidades del estadístico:

$\bar{x}$	$P(\bar{x})$	
0	$P(0,0,0)$	0.008
1/3	$3(P(0,0,1))$	0.036
2/3	$3(P(0,1,0) + P(1,0,0))$	0.114
1	$6P(0,1,1) + P(1,1,1)$	0.207
4/3	$3(P(0,2,0) + P(1,2,0))$	0.285
5/3	$3P(2,2,1)$	0.225
2	$P(2,2,2)$	0.125

$\sum P(\bar{x}) = 1$

Muy pocos estudiantes describieron las probabilidades de sucesos equivalentes y la independencia de las variables aleatorias. Un caso se muestra a continuación:

$(x_1, x_2, x_3)$	$\bar{x}_3$	$P(\bar{x}_3 = \bar{x}_3)$
(0, 0, 0)	0	$P(\bar{x} = 0) = P(x_1=0, x_2=0, x_3=0) = P(0,0,0) = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot P(x_3) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 =$
(0, 0, 1)	1/3	$P(\bar{x} = 1/3) = P((0,0,1) \vee (0,1,0) \vee (1,0,0)) = 0,012 + 0,012 + 0,012 = 0,036$
(0, 1, 0)	1/3	
(1, 0, 0)	1/3	

Los pequeños errores encontrados se debieron a escribir el recorrido de la distribución de la media, en vez del de la suma, y a considerar 26 muestras, donde la probabilidad que la media muestral sea 4/3 fue de 0,195 siendo el valor correcto de 0,285, como se transcribe abajo:

0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
0,008	0,036	0,114	0,207	0,195	0,225	0,125

$\bar{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$   
 $P(\bar{X}_3 = \bar{x}_3)$

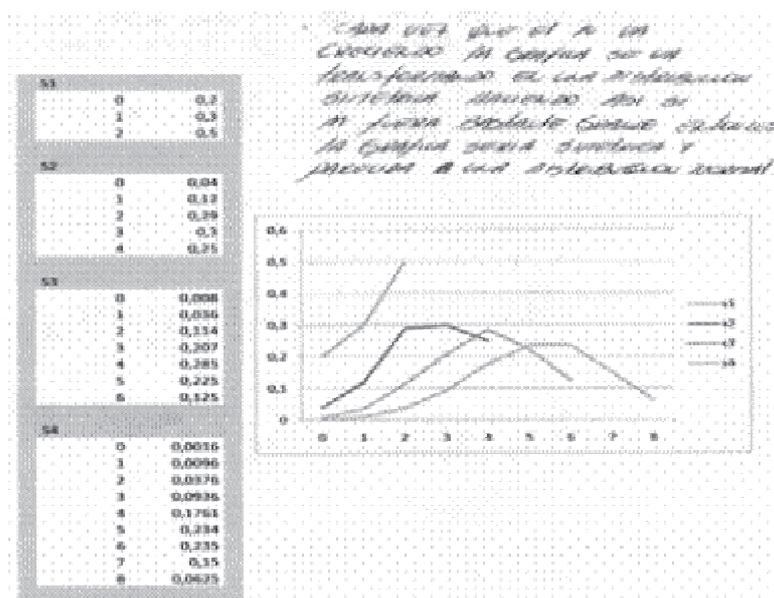
De forma análoga los estudiantes desarrollaron la distribución de la suma o media muestral de tamaño 4 en el apartado a), obteniendo ahora  $3^4 = 81$  muestras posibles. Se ilustra a continuación la función de cuantía de la variable aleatoria de la suma descrita por un alumno:

$$P(S_4 = s_4) = \begin{cases} 0,0016 & s_4 = 0 \\ 0,0096 & s_4 = 1 \\ 0,0376 & s_4 = 2 \\ 0,0936 & s_4 = 3 \\ 0,1761 & s_4 = 4 \\ 0,234 & s_4 = 5 \\ 0,235 & s_4 = 6 \\ 0,15 & s_4 = 7 \\ 0,0625 & s_4 = 8 \end{cases}$$

Las probabilidades fueron calculadas de igual forma que la anterior, por ejemplo, en el caso siguiente (AP3):

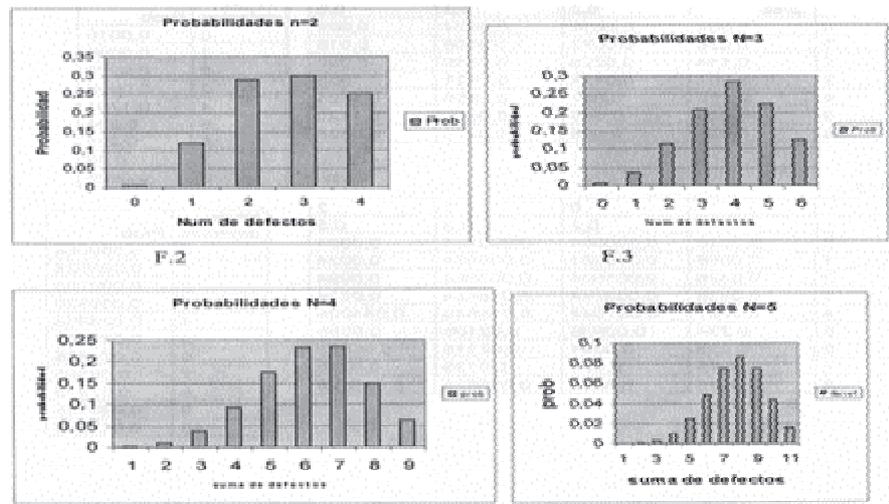
$$\begin{aligned}
 P(S_4 = 4) &= 12 \cdot P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 2) \cdot P(X_4 = 0) + \\
 &\quad 6 \cdot P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 = 2) \cdot P(X_3 = 0) \cdot P(X_4 = 0) + \\
 &\quad P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) \cdot P(X_4 = 1) \\
 &= 0,1761
 \end{aligned}$$

Hubo algunas equivocaciones en el cálculo de algunas de las probabilidades del recorrido del estadístico (AP3) y otros casos que no completaron la distribución muestral. En el apartado b) la mayoría dibujó con lápiz y papel milimetrado o en Excel el comportamiento de la distribución de la suma de variables aleatorias según aumenta el tamaño de la muestra de 1 a 4, y observando que a medida que va aumentando el tamaño extraído de la muestra, la curva que se obtiene va tomando la forma de la distribución normal infiriendo de la lectura gráfica que “en la medida en que el número de errores que produce la máquina crece la distribución de probabilidades tiende a una simetría de la distribución normal”. Un caso se presenta a continuación:



Algunos alumnos argumentan con convicción que para una muestra de tamaño 5, la distribución muestral de la media sería casi normal: “la distribución de  $\bar{X}_5$  sería prácticamente una distribución normal”, “ $X_1$  tiene una distribución aproximada exponencial y a partir de la media de tamaño 3 tiende a una normal”. Se ilustra una gráfica donde se va mostrando por separado su comportamiento simétrico e indican “Se espera que para muestras más grandes de artículos, la distribución sea

aproximadamente normal” (E4):



Los comentarios realizados fueron en relación a la simetría y similaridad con la distribución normal. Muy pocos expresaron que al ir aumentando la extracción del  $n$ -ésimo artículo, junto con incrementar los valores de la v.a. promedio las probabilidades van disminuyendo cada vez más, como se observa en la figura anterior para  $n=2$  y  $n=5$ . El siguiente comentario hace notar que al extraer tamaños de muestra más grande la dispersión de la distribución muestral (o la varianza muestral) es mayor, disminuyendo las probabilidades, y también enuncia intuitivamente el teorema (E6) al pronosticar la forma de la distribución de la suma para muestras de tamaño 5:

*“Podemos observar que tenemos  $S_1$  y luego para tener  $S_2$  el primer artículo se devuelve a la partida y luego escogemos un segundo artículo, y así podemos calcular  $S_3$  y  $S_4$ . Podemos ver que las curvas de las variables ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ ) tienen cierta similitud y a medida que  $n$  es más grande la continuidad de la probabilidad se acerca más a 0 y su  $x$  es más grande”,*

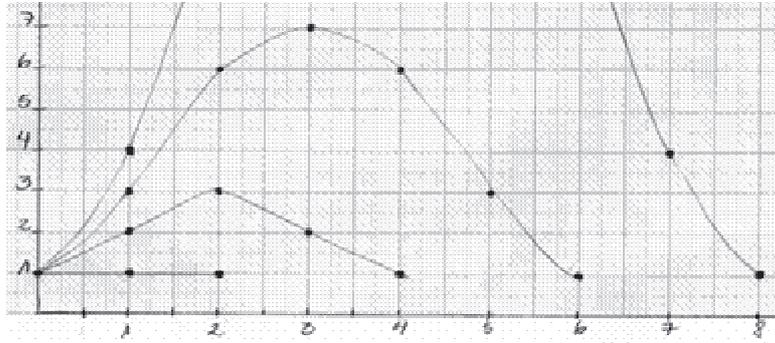
*“Al graficar podemos observar que  $S_2$  con  $S_3$  y a su vez  $S_3$  con  $S_4$  tienen un punto donde se intersectan”,*

*“Con lo dicho anteriormente podemos trazar la línea de  $S_5$  sin saber sus datos, dado que nos dimos cuenta que  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  tienen una gran relación” y “Cuando trabajamos con  $S_1$  tenemos que los valores de las probabilidades son más altos, a diferencia de cuando  $n$  es grande la probabilidad es considerablemente menor”.*

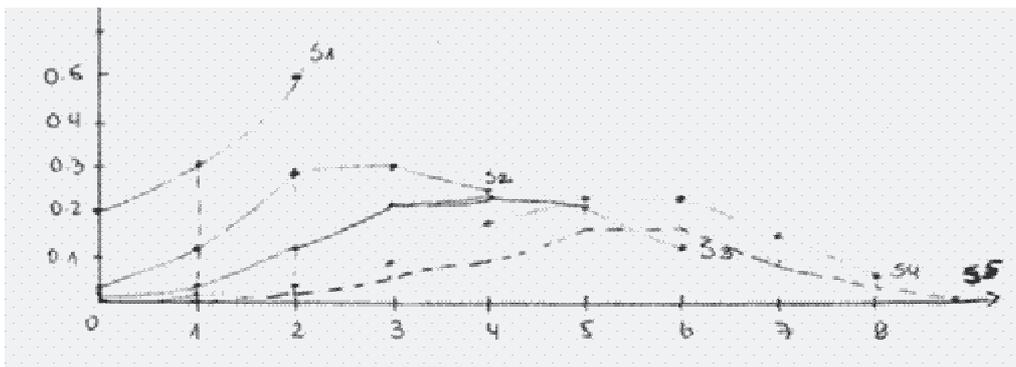
Un error de interpretación fue asociar la distribución muestral de la media con la población y no con la distribución normal *“cuánto más grande sea el proceso de muestreo más se parecerá la distribución de la muestra a la de la población”*. Otro

Capítulo 6

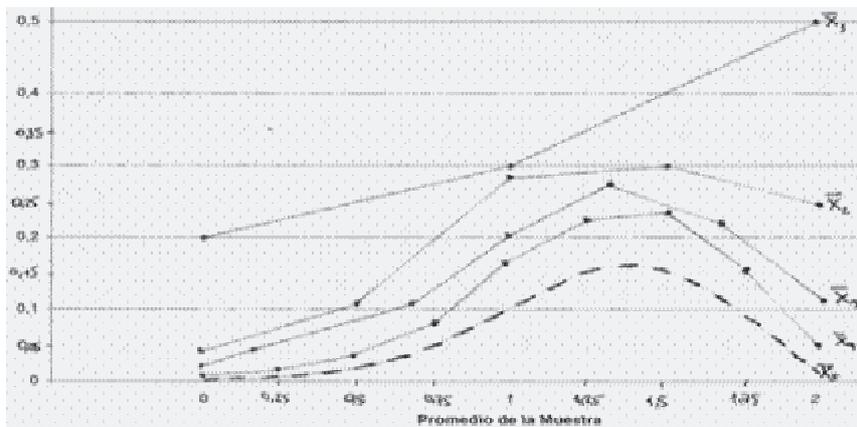
error presentado fue considerar en la ordenada de la gráfica las frecuencias absolutas de las muestras posibles en lugar de las frecuencias relativas o probabilidades de los eventos equivalentes, como se muestra a continuación:



La gráfica correcta se ilustra a continuación para la distribución de la media muestral:



Otra gráfica presentada para la suma de variables aleatorias con la predicción intuitiva del teorema (A4), (E6) es la siguiente:



De los alumnos que presentaron el ejercicio, hubo 34 que graficaron la distribución de la suma de variables aleatorias discretas de la cual 22 dibujaron la

posible distribución de la suma en muestras de tamaño 4, y de los 22 que dibujaron la distribución de la media muestral 14 trazaron la posible distribución de  $\bar{X}_5$ . Hubo algunos casos de gráficas incompletas o simplemente no la dibujaron. Un resumen de frecuencias de respuestas a los procedimientos del ejercicio se muestra en la siguiente tabla:

**Tabla 6.3.2.2.** Frecuencias (porcentajes) de respuestas del Ejercicio 2.3 ( $n=66$ )

	Aciertos	Errores
Determinar la distribución muestral de $\bar{X}_3$ o $S_3$ (RP)	60 (90,9)	6 (9,1)
a) Obtener la distribución muestral $\bar{X}_4$ o $S_4$ (RP)	56 (84,8)	6 (7,1)
b) Dibujar la distribución de las sumas de v.a. (A4)	34 (51,5)	2 (3,0)
b) Dibujar la distribución de los promedios de v.a. (A4)	22 (33,3)	2 (3,0)
c) Comparar las distribuciones de la suma y el promedio (RP)	50 (75,8)	4 (6,1)
d) Cálculo y transformación algebraica de v.a. (AP1)	38 (57,6)	6 (9,1)
d) Determinar la media de la suma o promedio (P1)	36 (54,5)	
d) Determinar la varianza de la suma o media muestral (P2)	32 (48,5)	2 (3,0)

A la petición de comparar las distribuciones de la suma y el promedio, en el apartado c), fue alta la frecuencia de alumnos que calculan las distribuciones de ambas, para observar que son iguales las probabilidades y que cambian sólo los valores de los respectivos recorridos, es decir, los valores de la media se obtiene de la sumatoria dividida por una constante proporcional en cada caso.

*“Las dos distribuciones son similares con la diferencia que uno se divide por el tamaño muestral”, “Cada una va tomando la distribución normal con un cierto desfase de forma proporcional” y “La distribución de la suma y el promedio son similares en la probabilidad, lo que varía de estos son los  $X_i$ ”.*

Uno de los alumnos que desarrolló la distribución de la suma, sin hacer cálculo ni gráfica aludió al teorema central del límite (E5), señalando:

*“La distribución de las medias muestrales también seguirán una forma similar a la de la suma porque cuando aumenta el tamaño muestral de una población, la media muestral se aproxima mucho a la distribución normal, esto por el teorema central del límite”.*

Un 76% de los alumnos realizó algún comentario sobre las distribuciones, de los cuales, un 48% lo hizo algebraicamente (A1) encontrando ambas distribuciones. Dos respuestas alejadas de la correcta fueron en relación a los errores de las propiedades de la esperanza (P1) y la varianza (P2):

## Capítulo 6

“Son similares ya que son iguales la media de la población y la media del promedio muestral”,  
“la distribución de la media y el promedio no son iguales por propiedad”.

El apartado d) pone a prueba a los alumnos respecto a si comprenden el contexto y aplican correctamente el teorema. De los 66 alumnos, un 66,7% lo intentó, siendo la mayoría de las respuestas correctas. De los que calcularon sin dar un contexto la probabilidad de la media muestral o de la suma, lo más recurrente fue calcular la probabilidad para un valor del recorrido, como se muestra a continuación:

$$P(S_3 \leq 2) = P\left(z \leq \frac{2 - 11,7}{\sqrt{51,12}}\right) = P(z \leq -1,35) \\ = P(z > 1,35) = 0,0885$$

Un 68,4 de los alumnos que completaron esta parte algebraica (AP1) procedieron a plantear una situación donde se pudiese aplicar el teorema, y un 50% lo hizo para la suma de variables aleatorias (CP2), un 25% para la media muestral (CP10) y un 25% redactaron una situación mediante la distribución binomial (CP1), aplicando sólo un 20% la corrección de continuidad en variables discretas. Un caso correspondiente a la suma de variables aleatorias (CP2) se reproduce a continuación:

*Situación: “El jefe de producción informa a sus superiores que la máquina produce demasiados artículos defectuosos, pero le piden un informe estadístico que justifique un número de porcentaje. Se quiere contratar un técnico para arreglar la máquina. Según la política interna se justificará tal contratación si la máquina produce al menos partidas de un 40% de artículos defectuosos. El jefe toma una muestra de 900 productos, ¿Cuál es la probabilidad de que se autorice la contratación de un técnico?”. Solución :*

Sea S la suma total de defectos. Como tenemos una cantidad grande de artículos, N=800, se puede aproximar esta distribución mediante el TCL.  
El valor esperado de obtener defectos es:  
Valor esperado =  $\frac{0,2 * 0 + 0,3 * 1 + 0,5 * 2}{3} = 0,43 = \text{errores} = \mu$   
S ~ N( $\mu = 0,43 * n$ ;  $\sigma^2 = 0,53 * n$ )  
40% de 900 = 360  
 $P(S > 360) = P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} > \frac{360 - 387}{21,84}\right) = P(z > -1,24) = 1 - P(z > 1,24) = 0,8925$   
La probabilidad de que sea contratado el técnico es de un 89,25 %.

A continuación, se muestra otra de las aplicaciones del teorema mediante la aproximación binomial (CP1):

Situación: “Una empresa produce artículos con defectos y también sin defectos. El gerente tiene como propósito vender con un valor inferior los artículos con defectos. La probabilidad que un artículo salga sin defecto es de un 20%. Tomando una muestra de 400 artículos queremos saber ¿Cuál es la probabilidad que más de 300 se vendan más económicos?”. Solución:

$$\begin{aligned} \sum x_i &\sim N(np, np(1-p)) \\ P(\sum x_i \geq 300) &\approx P(\sum x_i \geq 300,5) \\ &= P\left(Z \geq \frac{300,5 - 80}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) \\ &= P(Z \geq -2,44) \\ &= 1 - P(Z \geq 2,44) \\ &= 0,9927 \end{aligned}$$

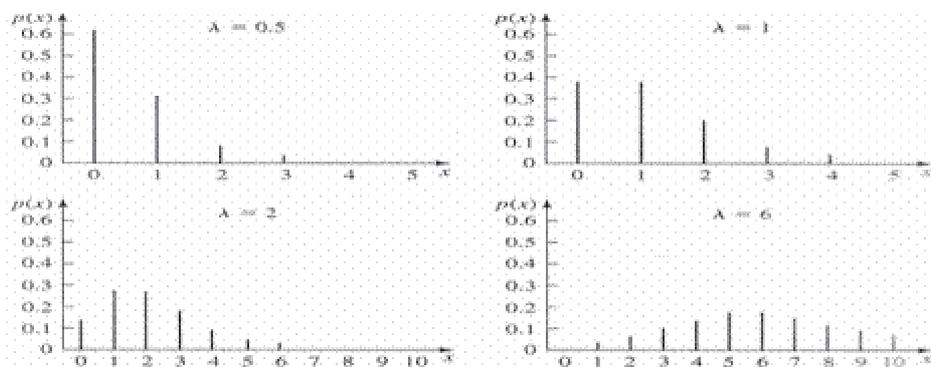
La probabilidad que más de 300 se vendan más económicos es de un 99,27%.

Errores menores presentados en las aplicaciones fueron de estandarización de la media muestral (AP2) y de cálculo de la varianza (P2). También, se registró la dificultad de confundir el tamaño muestral con las réplicas del diseño, por ejemplo en el siguiente caso se desea calcular la  $P(\text{media} < 5/3)$  del experimento de extraer el tercer artículo de la máquina de valores de media y varianza 1,3 y 0,2 respectivamente. En su desarrollo se considera una muestra de tamaño 100 en vez de 3:

$$\begin{aligned} P(\bar{x}_3 \leq \frac{5}{3}) &= P\left(\frac{\bar{x}_3 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{5/3 - 1,3}{0,2/\sqrt{100}}\right) \\ &= P(Z \leq 0,18) \\ &= 1 - P(Z \geq 0,18) \\ &= 0,5719 \end{aligned}$$

## Ejercicio 2.4

Comente, por el foro, la forma de la distribución Poisson para distintos valores de sus parámetros.



Un ejercicio previsto en el diseño, que se incluyó para aclarar algunas de las dificultades anteriores fue presentar a los alumnos algunas gráficas de la distribución Poisson para varios valores de sus parámetros, y pedirles comentarios en cuanto a su

## Capítulo 6

forma y los distintos valores de los parámetros. Se pretendía ejercitar los elementos A3: Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo y A4: Simulación gráfica con ordenador del teorema central del límite.

Las respuestas de muchos alumnos permiten entrever que llegan a partir de estas gráficas a una versión intuitiva del teorema central del límite (E5, E6) favorecida por un dispositivo didáctico, por ejemplo:

*“Se puede observar que, a medida que aumenta el parámetro  $\lambda$ , la gráfica de la distribución Poisson se asemeja a la gráfica de la distribución normal. Esto se explica por el teorema central del límite, el que establece que, si en una m.a simple de tamaño  $n$  de cualquier población de media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , cuando  $n$  es grande, la media muestral se aproxima mucho a la distribución normal  $N(\mu, \sigma^2/n)$  con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma/\sqrt{n}$ ”.*

Varios fueron los comentarios relacionando la mejora de la simetría con el aumento del recorrido de la variable, es decir, para un  $\lambda$  pequeño los resultados de las probabilidades individuales para valores de  $X$  son más pequeños conforme la variable aleatoria toma valores cada vez más grandes (P4):

*“Aunque para los cuatros casos analizados se produce un sesgo a la derecha o un sesgo positivo se puede diferenciar claramente que cuando mayor sea su recorrido la distribución de probabilidades se vuelve más uniforme y por ende las probabilidades de que ocurra un suceso en particular es menor. Esto se ve en reflejado en el cuarto gráfico donde se puede apreciar una campana casi perfecta en la distribución de las probabilidades. Esto nos permite calcular probabilidades usando el teorema central del límite aproximando las probabilidades de una distribución de Poisson a una Normal para un  $n$  grande”.*

Varios alumnos lo plantearon en términos de insesgamiento:

*“Para  $\lambda = 0,5$ : Los datos están dispersos, tiene sesgo positivo, su gráfica no es simétrica. La concentración de sus frecuencias se encuentra a la izquierda. Para  $\lambda = 1$ : Los datos están a menor distancia, con sesgo positivo. Para  $\lambda = 6$ : En este caso la gráfica tiene forma de campana, es simétrica con un sesgo igual cero, la concentración de las frecuencias se encuentra en el centro” y “Para  $\lambda$  pequeño se puede usar la aproximación de Poisson, pero si aumentamos el  $\lambda$ , observamos que cada vez que aumentan el  $\lambda$  la gráfica iba adquiriendo forma de campana, por lo tanto su sesgo se hace 0 y la distribución se sus frecuencias se concentran en el centro”.*

Otros dan una respuesta formalizada, relacionando la distribución Poisson con la

distribución binomial:

*“La distribución de Poisson puede ser una razonable aproximación a la binomial, pero sólo bajo ciertas condiciones. Tales condiciones se presentan cuando  $n$  es grande y  $p$  es pequeña, esto es, cuando el número de ensayos es grande y la probabilidad binomial de tener éxito es pequeña. La regla que utilizan con más frecuencia los estadísticos es que la distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución binomial cuando  $n$  es igual o mayor que 30 y  $p$  es igual o menor que 0,05. En los casos en que se cumplen estas condiciones, podemos sustituir la media de la distribución binomial ( $np$ ) en lugar de la media de la distribución de Poisson  $\lambda$ . Por lo tanto, cuando va aumentando el  $n$ , más se acerca a la aproximación de la normal. Además se observa que en el punto más alto del gráfico se concentra la mayor cantidad de valores, por lo tanto es la media de la distribución”.*

Por último, algunos alumnos aparte de visualizar las cuatro gráficas, buscaron en Internet un applet con la distribución Poisson, simulando para varios valores del parámetro:

*“Se puede observar que mientras mayor sea el parámetro de la Poisson y el  $n$  también, mejor será la aproximación normal. Ver: <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/PoiDensityApplet.html>”*

Posteriormente, persistieron las consultas respecto a la estandarización de la suma de variables Poisson y cómo debe estandarizarse si se utiliza el promedio en vez de la suma (AP2).

### Ejercicio 2.7

Sea  $X$  el número de paquetes que envía por correo un cliente seleccionado al azar, en cierta oficina de envíos. Suponga que la distribución de  $X$  es como sigue:

$x$	1	2	3	4
$P(X_1 = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

- Considere una muestra aleatoria de tamaño  $n = 2$  (dos clientes) y sea  $\bar{X}$  el número medio muestral de paquetes enviados. Obtenga la distribución de probabilidad de  $\bar{X}$ .
- Calcule, para  $n = 2$ , la probabilidad  $P(\bar{X} \leq 2,5)$ .
- Si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño  $n=3$ , ¿Cuál es la probabilidad de que el total de paquetes enviado por los tres clientes sea exactamente de 4 paquetes?
- Encuentre la probabilidad aproximada de que el número promedio de paquetes en 36 clientes sea menos de 2,5 paquetes.

La solución en el apartado a) implica los pasos siguientes: Primero, determinar el número de muestras de tamaño dos. Como hay cuatro posibles valores de la variable,

Capítulo 6

para  $n=2$  tenemos  $4^2 = P_2^4 + 4 = 16$  muestras posibles. Esto requiere conocimientos previos de los estudiantes sobre combinatoria. Para calcular los promedios muestrales hay que determinar las probabilidades del recorrido, lo que implica el uso del elemento AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias; y AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora u ordenador. Por ejemplo para los dos primeros valores:

$$P(\bar{X}_i=1)=p(1,1)=p(1)\times p(1)=0,4^2 = 0,16$$

$$P(\bar{X}_i=2)=p(1,3)+p(3,1)+p(2,2) = 2\times 0,4\times 0,2+0,3^2 = 0,25$$

Luego, la distribución de probabilidad de la media muestral, queda de la forma:

$\bar{X}_i$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$n_i$	1	2	3	4	3	2	1
$P(\bar{X}_i)$	0,16	0,24	0,25	0,20	0,10	0,04	0,01

De la Tabla 6.3.2.3 se observa que la mayoría cumple correctamente con los requisitos previos (RP) en establecer las muestras posibles de tamaño 2 y calcular los promedios. Un 54,7% determinó la distribución de probabilidades asociada de la media muestral, con algunos errores de cálculo en obtener los valores del recorrido. En el apartado b) se debe calcular, para  $n=2$ , la probabilidad  $P(\bar{X} \leq 2,5) = P(\bar{X} = 1) + P(\bar{X} = 1,5) + P(\bar{X} = 2) + P(\bar{X} = 2,5) = 0,16 + 0,25 + 0,25 + 0,20 = 0,85$ . De nuevo implicó los elementos AP1 y AP3 con porcentajes correctos de 29,7% y 28,1%.

En el apartado c), si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño  $n = 3$  se tiene  $4^3 = 64$  muestras posibles de tamaño 3, que con sus respectivas sumas de paquetes enviados por los tres clientes serían:

Muestras	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,4)	(1,1,3)	...
$X_1+X_2+X_3$	3	4	4	7	5	...

La probabilidad de que el total de paquetes enviado por los tres clientes sea exactamente de 4 paquetes, equivale a considerar sólo tres muestras de las 64 posibles y viene dada por  $P\left(\sum_{i=1}^3 X_i = 4\right) = p(1,1,2) + p(1,2,1) + p(2,1,1) = 3 \times (0,4 \times 0,4 \times 0,3) = 0,144$ . En este apartado se requiere nuevamente los elementos AP1, AP3 y conocimientos previos sobre la regla del producto y combinatoria.

Según se observa en la Tabla 6.3.2.3, resultó difícil el cálculo algebraico de probabilidades de la suma de v.a. al combinar tres clientes (AP1). Consideraron demasiadas muestras, para el cálculo para la suma, registrando un 13,3% de acierto. Este prerrequisito, de no describir necesariamente el total de las muestras, influyó en

que sólo un 14,1% calculó la probabilidad adecuada (AP3).

**Tabla 6.3.2.3.** Frecuencias de elementos de significados aplicados del ejercicio 2.7 ( $n = 128$ )

Ap.	Pasos correctos en el problema y elementos implicados	
a	RP: Determinar el número de muestras de tamaño dos	121
	RP: Calcular los promedios muestrales	120
	AP1: Calcular algebraicamente y transformar las variables aleatorias	70
	AP3: Calcular probabilidades con calculadora	61
b	AP1: Calcular algebraicamente y transformar las variables aleatorias	38
	AP3: Calcular probabilidades con calculadora	36
c	RP: Determinar el número de muestras posibles de tamaño tres	12
	RP: Calcular el estadístico de la suma $X_1 + X_2 + X_3$ de las tres muestras	17
	AP1: Calcular algebraicamente y transformar las variables aleatorias	18
	AP3: Calcular probabilidades con calculadora	12
	RP: Reconocer que la probabilidad conjunta es el producto de las probabilidades marginales	15
d	CP2: Determinar la distribución de la suma de v.a. discretas idénticamente distribuidas	98
	AP1: Calcular algebraicamente y transformar las variables aleatorias	98
	P5: Las transformaciones lineales de variables aleatorias también siguen una distribución asintótica normal	39
	P1: La media de la dist. aproximada de una suma de v.a. es la suma de las medias	32
	P2: La varianza de la dist. aproximada de la suma de v.a. es la suma de las varianzas	32
	E5: Enunciar el teorema de forma general	14
	AP2: Tipificar / Destipificar	13
AP3: Calcular probabilidades con calculadora, tablas estadística u ordenador	13	

Por último, para encontrar la probabilidad aproximada de que el número promedio de paquetes en 36 clientes sea menos de 2,5 paquetes,  $P(\bar{X}_{36} < 2,5)$  (apartado d)), se define la variable  $X$ : n° de paquetes enviados por un cliente, cuyo recorrido es  $R_X : \{1, 2, 3, 4\}$ . Consideremos una m.a.  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{36}$  de 36 clientes que envían paquetes por correo a una oficina. Como la muestra de tamaño  $n=36$  es grande utilizamos el teorema central del límite (E5), aproximando la distribución de la v.a.  $X$  discreta acotada por la distribución normal, es decir, el alumno ha de reconocer el campo de problemas CP2 y llegar a un enunciado del teorema para suma de v.a. i.i.d. (E4). Necesitamos la media y varianza de  $\bar{X}$  (P1, P2), obteniéndose de la siguiente forma:  $E(\bar{X}) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} E(X_i) = 2$ , y  $V(\bar{X}) = \frac{V(X_i)}{n} = \frac{1}{36}$ . Entonces  $\bar{X} \approx N(2, 1/36)$ , luego aplicando el cálculo algebraico de variables aleatorias (AP1) y tipificación (AP2) así como el cálculo de probabilidades con calculadora (AP3) llegamos a establecer que:

$$P(\bar{X}_{36} < 2,5) \approx P\left(\frac{\bar{X}_{36} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} < \frac{2,5 - 2}{1/6}\right) = P(Z < 3) = 0,9987.$$

Se observó que un 76,6% de los estudiantes calcularon la probabilidad de la

suma de v.a. Los errores principales fueron en determinar la distribución muestral del promedio de la muestra de variables aleatorias discretas (P5), un 30,5% lo hizo bien y que trajo consecuencia en la solución final y en el cálculo de la media y varianza del promedio con un 25% de acierto. Además, sólo un 10,9 por ciento justificó por escrito el uso del teorema para la media muestral en muestras grandes (E5).

**6.3.3. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL IMPLEMENTADO EN LA SEGUNDA LECCIÓN**

**Tabla 6.3.3.1.** Elementos de significados personales identificados en las respuestas de los alumnos a las actividades escritas

Tipo elementos	Elementos de significado	A2.1	A2.2	A2.3	E2.1	E2.3	E2.4	E2.7
Campos de problemas	CP2: Determinar la distribución de la suma de v.a. discretas idénticamente distribuidas	X	X			X		X
	CP10: Obtener la distribución de diferencias de medias muestrales							X
Lenguaje	Términos y expresiones verbales	X	X	X	X	X	X	X
	Notaciones y símbolos	X	X	X	X	X		X
	Representaciones gráficas		X		X	X	X	
Procedimiento	AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias	X		X	X	X		X
	AP2: Tipificación / Destipificación	X		X		X		X
	AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora u ordenador	X		X		X		X
Enunciados	E4: Enunciado para la suma de v.a.i.i.d.	X				X		X
	E5: Enunciado formal del teorema			X		X	X	X
	E6: Enunciado intuitivo del teorema		X		X	X	X	
Propiedades	P1: La media de la distribución de una suma de v.a. es la suma de las medias	X	X	X	X	X		X
	P2: La varianza de la distribución de la suma de v.a. es la suma de las varianzas	X	X	X	X	X		X
	P3: La media aritmética de una m.a. grande sigue una dist. aproximadamente normal		X			X		
	P4: La aproximación mejora con el número de sumandos	X		X		X	X	
	P5: Las transformaciones lineales de v.a. siguen una dist. asintótica normal							X
	P8: Aproximación de algunas dist. clásicas a la distribución normal	X	X	X	X		X	
Argumentos	P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen dist. asintótica normal	X		X				
	P12: Corrección de continuidad	X		X		X		X
	A1: Demostraciones formales algebraicas	X				X		X
	A3: Simulaciones manipulables de distribuciones en el muestreo		X		X	X	X	
	A4: Simulación gráfica con ordenador					X	X	
	A5: Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin generalizar	X	X		X	X		X

Los elementos de significados que hemos podido identificar en las preguntas y respuestas de los alumnos en relación al campo de problemas de la distribución de la

suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas, se resumen en la Tabla 6.3.3.1. La comprensión fue buena en general en las actividades y ejercicios sobre todo del estudio gráfico de las distribuciones tanto de la suma como del promedio al aumentar el número de variables. Se considera que los alumnos han avanzado en esta lección en la generalización del teorema central del límite a otras distribuciones de probabilidades de v.a. discretas importantes en ingeniería por medio de algunas situaciones de contexto.

#### 6.4. OBSERVACIÓN DE LA TERCERA LECCIÓN

La tercera lección titulada “Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias continuas”, presenta el teorema central del límite para el caso de variables continuas (CP4). Se trabajan principalmente dos campos de problemas, CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas y CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas.

Se basó principalmente en resolver en conjunto con los alumnos actividades de tipo algebraico, es decir, se usan procedimientos algebraicos (AP1) con apoyo de calculadora, tablas estadísticas y ordenador en el cálculo de probabilidades (AP3). Debido al tiempo que deben dedicar los alumnos a entregar ejercicios de las lecciones 1 y 2, y al tiempo de ejecución de los contenidos generales del curso, no se llegó a desarrollar por escrito todos los ejercicios.

##### 6.4.1 ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN EL AULA

###### Actividad 3.1

Se tienen  $n$  voltajes  $V_1, V_2, \dots, V_n$  que se reciben en un concentrador, de tal suerte que  $V = \sum_{i=1}^n V_i$  es la suma de los voltajes en ese punto. Cada voltaje  $V_i$  es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo  $[0,10]$ . Considerando  $n = 20$ , calcule la probabilidad de que el voltaje total de entrada sobrepase los 105 volts.

La actividad 3.1 relacionada con la electricidad y magnetismo, en una de las secciones del curso, fue desarrollada por los alumnos en conjunto con el profesor. El voltaje total equivale a la suma de los 20 voltajes de entrada, y por tanto se pide la probabilidad  $P\left(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105\right)$ . Ello conduce a intentar una solución aproximada con

justificación en el teorema central del límite (E4). La esperanza y varianza de cada voltaje son 5 y  $25/3$  respectivamente. Para  $n = 20$  el voltaje total de entrada anotamos  $S_{20} = \sum_{i=1}^{20} V_i$  y tenemos  $E(\sum_{i=1}^{20} V_i) = 100$  y  $Var(\sum_{i=1}^{20} V_i) = 500/3$  (P1, P2). La variable aleatoria estandarizada (AP2)  $S_{20}^* = \frac{S_{20} - 100}{\sqrt{500/3}}$  tiene, por el teorema central del límite (CP4), una distribución aproximadamente normal estándar para  $n$  grande.

Los alumnos comienzan a obtener la primera solución exacta, que debe hallarse utilizando la distribución uniforme. El profesor la inicia para el caso de  $n = 2$ , es decir, calcular  $P(V_1 + V_2 > 8)$ , recordando a los alumnos los conocimientos previos de la asignatura de probabilidades, sobre encontrar la función densidad de probabilidad conjunta y luego calcular la probabilidad en la región dada. Los alumnos comprueban que es complicado encontrar la función densidad de probabilidad conjunta exacta para la suma de los 20 voltajes, y más aún la probabilidad:

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105\right) = \int_{105} \dots \int f(x_1, \dots, x_{20}) dx_1, \dots, dx_{20}.$$

Por tanto, se recurre a la segunda solución aproximada, que es mucho más simple el camino de cálculo mediante la transformación algebraica de la variable en la distribución normal. Calculan, mediante transformación algebraica (AP1) y cálculo de probabilidades con calculadora (AP3) la  $P\left\{\sum_{i=1}^n V_i > 105\right\} = P\left\{\frac{S_{20} - E(S_{20})}{\sqrt{S_{20}}} > \frac{105 - 100}{\sqrt{500/3}}\right\} = P(Z > 0,387) = 1 - 0,6517 = 0,342$ . También, han de usar la tipificación (AP2). El profesor deja para que decidan por si mismos si será  $n=20$  suficiente para tener una buena aproximación con población inicial uniforme.

Algunos alumnos plantearon la pregunta *¿Por qué no se usa la corrección por continuidad?*, otros alumnos respondieron *“porque n es pequeña”*, o *“porque la variable es continua”*. El profesor aclaró que la corrección de continuidad sólo se usa para variables discretas.

En la otra sección, aproximadamente en 25 minutos, un grupo de 55 alumnos resolvieron por escrito la actividad, y luego el profesor con apoyo de la plataforma comentó la solución. En la Tabla 6.4.1.1 se registra la frecuencia de respuestas del algoritmo de resolución de la actividad.

Tabla 6.4.1.1. Frecuencias de respuestas a la Actividad 3.1 ( $n=55$ )

	Aciertos	Errores
Términos verbales: suma de v.a., Dist Uniforme, muestra $n$	35 (63,6)	5 (9,1)
Definir el estadístico de la suma (RP)	31 (56,4)	
Escribir la probabilidad exacta (AP3)	25 (45,5)	4 (7,3)
Calcular algebraicamente de la suma de v.a. (AP1)	51 (92,7)	
Tipificar algebraicamente (AP2)	45 (81,8)	5 (9,1)
Calcular probabilidades con calculadora y tabla estadística (AP3)	35 (63,6)	4 (7,3)
Media de la suma de v.a. (P1)	40 (72,7)	11 (20,0)
Varianza de la suma de v.a. (P2)	36 (65,5)	14 (25,5)
La aproximación mejora con el número de sumandos (P4)	9 (16,4)	21 (38,2)
No se debe aplicar corrección de continuidad (P12)	15 (27,3)	6 (10,9)

Se les pidió inicialmente enumerar conceptos importantes presentes en la actividad, es decir, los estudiantes deben utilizar el lenguaje de términos y expresiones verbales. Un 63,6% en orden de importancia señaló como palabras claves a: La suma de voltajes forma una nueva variable que puede ser aproximada (35) aludiendo al campo de problema CP4 de variables continuas, la cantidad de voltaje (34) asociado al tamaño de la muestra que está presente la distribución uniforme (31). Con menor frecuencia, lo siguieron la distribución de variables continuas (6), probabilidad aproximada (5) y teorema central del límite (4). Errores que declararon fueron que la variable es discreta (2), corrección de continuidad (1), la media y varianza poblacionales son desconocidos (1).

Un 56,4% de estudiantes escribió la variable suma como el voltaje que recibe un concentrador y un 45,5% expresó la probabilidad exacta (AP3), de los cuales la mitad justifica que no es posible calcularla. Algunos de los que dijeron que sí es posible calcularla, cometieron errores de considerar la distribución uniforme pero del caso discreto con probabilidad  $1/10$  o poder calcular una probabilidad puntual en  $V=105$ . También se confunde el recorrido de cada voltaje con el voltaje total:

*“No puedo calcular mediante la distribución uniforme ya que se da la probabilidad de que un  $V_i$  está en el rango  $[0,10]$  y lo que necesito es calcular la probabilidad de que el voltaje total sea mayor que 105”.*

Un caso de error se muestra a continuación, en que se calcula la probabilidad para la suma de variables aleatorias con distribución uniforme discreta:

Probabilidad exacta

$$P(V > 105) = P\left(\sum_{i=1}^{20} V_i > 105\right) = \left[ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10} \right]$$

## Capítulo 6

Fue alta la frecuencia de alumnos que determinaron la probabilidad aproximada mediante el teorema central del límite (E4), con base en el conocimiento de las lecciones anteriores y descubriendo la extensión al caso de variables continuas. Un 93% realizaron el cálculo algebraico de la suma de variables aleatorias (AP1), un 82% hizo bien la tipificación a la distribución normal (AP2) y un 64% llegó a la solución con uso de la calculadora y la tabla de distribución estadística (AP3). La aplicación de la media y varianza de la suma fue resuelta por un 73% y 66% respectivamente (P1, P2). Un caso se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} V = \sum_{i=1}^n V_i = V_n &\sim N(\mu, \sigma^2) & P(V > 105) &= P\left(Z > \frac{105 - 100}{\sqrt{12}}\right) \\ &= V_n \sim N(100, 166) & &= P(Z > 0,39) \end{aligned}$$

Los errores en el procedimiento se debieron a usar la varianza en vez de la desviación en la estandarización de la variable suma, errores de cálculo en la utilización de la calculadora o lectura de la distribución normal estándar, consideraron en la tipificación la esperanza y varianza de la población original y no del estadístico de la suma, también dividir por 2 en la varianza de la variable uniforme en lugar de 12, y por último aplicar corrección de continuidad (3 alumnos, 5,5%).

Además, comentan respecto a la solución “*por el teorema central del límite se puede aproximar una probabilidad engorrosa de una distribución continua a una normal*”, algunos continúan teniendo dificultad con la interpretación de la probabilidad “*la solución es de un 35% por lo que es bastante probable que ocurra este suceso*”, otros desean relacionar ambas probabilidades “*la probabilidad aproximada es de un 35% pero no tengo con quien compararla*”.

Respecto a que si en la distribución uniforme para  $n = 20$  será suficiente para tener una buena la aproximación por la distribución normal, un 16% respondió afirmativamente y un 38% expresó que no, las justificación más reiterativa fue asociada a que el tamaño de la muestra sea al menos de 30, como describen algunos libros de textos, “*para utilizar el teorema central del límite y el cálculo aproximado sea más preciso, se necesita que  $n$  sea grande  $n \geq 30$ , por lo que seguramente la aproximación no resulta muy efectiva*”, para otros alumnos será buena al considerar  $n$  grande.

Por último, un 27% de los alumnos escribió que no se aplica la propiedad de corrección de continuidad (P12) en la probabilidad aproximada, sólo cuando aproximamos una variable discreta por una continua “*no, porque estamos trabajando*

con dos distribuciones de probabilidad continuas”, y un 11% aún manifiesta que sí hay que utilizar esta propiedad en la actividad. Algunos la justificaron por la exactitud y no por el tipo de variable “*si se debe aplicar la corrección de continuidad porque se debe eliminar el margen de error*”, otros lo justifican por contar con una muestra pequeña “*sí, porque como  $n < 30$  debe aplicarse la propiedad de corrección de continuidad para que sea más exacto el resultado*”.

### Actividad 3.3

Los tiempos que tarda un cajero en procesar el pedido de cada persona son variables aleatorias independientes con distribución exponencial y una media de 1,5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad *aproximada* de que se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas?

En esta actividad, también relacionada con la aplicación del teorema central del límite a variables continuas (CP4) se relaciona con la distribución exponencial. Previo a los 20 minutos que dará el profesor para que intenten individualmente resolver este campo de problema del teorema, se les recuerda que en el proceso de Poisson los eventos ocurren al azar independientemente y a una tasa uniforme por unidad de tiempo, definiendo la v.a.  $Y$  como número de eventos en el intervalo  $(0, t]$ . Si estamos interesados en  $X$  que es el tiempo que transcurre hasta que el primer evento ocurre, entonces  $X$  es la llamada v. a. exponencial con parámetro  $\lambda$  y se recuerda la fórmula de su función de densidad, así como sus propiedades.

Según los datos del problema los alumnos debieran seguir el siguiente algoritmo de resolución, tenemos  $E(X) = 1,5 = 1/\lambda$ , donde  $\lambda = 2/3$ . Entonces la v.a.  $X \sim \exp(\lambda = 2/3)$ , y además la varianza es  $V(X) = 1/\lambda^2 = 9/4$ . Considerando una muestra de 100 personas  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  anotamos  $P(\sum X_i < 120) = P(\bar{X} < 1,2)$ . Utilizando el teorema central del límite para  $n=100$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu = 1,5, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9/4}{100}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - 1,5}{3/20} \sim N(0,1)$ . Así, la probabilidad pedida es  $P\left(Z < \frac{1,2 - 1,5}{3/20}\right) = P(Z < -2) = 0,02275$ . En la Tabla 6.4.1.2 se muestra la frecuencia de algunos elementos de significados del teorema en un grupo de 54 alumnos.

**Tabla 6.4.1.2.** Frecuencias de respuestas a la Actividad 3.3 ( $n=54$ )

	Aciertos	Errores
Expresión verbal de la variable que define el problema	51 (94,4)	3 (5,6)
Lenguaje simbólico de la probabilidad para la nueva variable	44 (81,5)	9 (16,7)
Calcular la media y varianza de la suma de v.a. continuas (P1, P2)	46 (85,2)	7 (13,0)
Calcular la media del promedio muestral (P1)	31 (57,4)	11 (20,4)
Calcular la varianza del promedio muestral (P2)	28 (51,9)	13 (24,1)
Calcular algebraicamente las variables aleatorias (AP1)	49 (90,7)	
Tipificar la suma o promedio de v.a. (AP2)	44 (81,5)	5 (9,3)
Calcular probabilidades con calculadora (AP3)	36 (66,7)	6 (11,1)

Se observa un avance importante en que la mayoría de los alumnos denotan la probabilidad en términos de la suma de variables aleatorias continuas, las dificultades fueron en expresar la desigualdad de la suma en horas y no en minutos y también escribir la probabilidad en términos de  $X$  y no de la suma. Casi la totalidad del grupo escribió bien la variable de la población como el tiempo que demora un cajero en atender a un cliente; un error fue confundir la variable con el parámetro de media “tiempo promedio que tarda un cajero en procesar un pedido” o definir una variable Poisson “número de pedidos en menos de dos horas”.

Para diferenciar los enunciados del teorema para la suma (E4) o promedios muestrales (E5), los alumnos calcularon primero la esperanza y varianza para el estadístico de la suma, con logro de un 85% del grupo; en general obtenida directamente con el teorema central del límite, como es el caso siguiente, también para la media muestral:

$$\begin{aligned}
 X_i &\sim \text{Exp}(\lambda = 1/1,5) \\
 \sum X_i &\sim N(n/\lambda, n/\lambda^2) \\
 \sum X_i &\sim N\left(\frac{120}{1/1,5}, \frac{120}{(1/1,5)^2}\right) \rightarrow \sum X_i \sim N(180, 270) \\
 \sum X_i &\sim N(\mu = 180, \sigma^2 = 270) \\
 \bar{X} &\sim N\left(1/\lambda, 1/\lambda^2\right) \\
 \bar{X} &\sim N\left(\frac{1}{1/1,5}, \frac{1/(1/1,5)^2}{100}\right) \rightarrow \bar{X} \sim N(\mu = 1,5, \sigma^2 = \frac{3}{400})
 \end{aligned}$$

Las dificultades se presentaron en calcular estas medidas de la suma para la población exponencial de valores 1,5 y 9/4, también equivocarse en tomar el tiempo 120 como el tamaño de la muestra y en no diferenciar el parámetro lambda de la distribución exponencial con la media, relacionando  $\lambda= 1/1,5$ ; que conlleva a errores en la aplicación del teorema para la suma, como muestra el siguiente caso:

$$\begin{aligned} \sum X_i &\sim N\left(\frac{100}{1,5}, \frac{100}{(1,5)^2}\right) \\ Y &\sim N\left(\frac{100}{1,5}, \frac{100}{(1,5)^2}\right) \quad P(Y < 120) \\ Y &\sim (66,6, 44,4) \end{aligned}$$

Hubo más dificultades en aplicar el teorema para la media muestral, que fue alcanzada por un 57% en el cálculo de la esperanza y un 51% para la varianza. El siguiente caso, atribuye el valor de la media 1,5 con lambda,

$$\begin{aligned} \bar{X} &\sim N\left(\frac{1}{1,5}, \frac{1 \cdot 1,5^2}{100}\right) \\ \bar{X} &\sim N\left(\frac{1}{1,5}, \frac{1}{1,5^2 \cdot 100}\right) \\ \bar{X} &\sim N\left(\frac{1}{1,5}, \frac{1}{225}\right) \end{aligned}$$

Otro de los errores fue definir mal la media aritmética obteniendo valores 0,05 y 0,000225 alejados de la media y varianza respectiva, se muestra un caso,

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= E\left[\frac{\sum X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} E[\sum X_i] = \frac{1}{n} \cdot 150 \\ V[\bar{X}] &= V\left[\frac{\sum X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot V[\sum X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot 225 \end{aligned}$$

También, se registraron otros dos errores, el primero es de operatoria algebraica estableciendo la igualdad  $E(\text{suma}) = E(\text{promedio}) / \text{tamaño muestral}$  (P1), obteniendo así los valores respectivos de 15000 y 204000. El segundo fue no aplicar la propiedad de la esperanza y varianza del promedio sino más bien obtenerla directamente de la distribución normal, al dividir los valores de la suma por el tamaño de la muestra:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} X_i &\sim N(n\mu, n\sigma^2) = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(150, 225) \\ \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{n} &\sim N\left(\frac{150}{n}, \frac{225}{n}\right) = \bar{X} \sim N(1,5; 2,25) \end{aligned}$$

La aplicación algebraica del teorema fue resuelta por un 91% del grupo de alumnos, de los cuales sólo un 14,3% lo hizo mediante la media muestral, como se muestra a continuación:

## Capítulo 6

$$\begin{aligned} \bar{x} &\sim N\left(\mu = 1,5, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0,4}{100}\right) \\ \rightarrow z &= \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 1,5}{0,02} \sim N(0,1) \\ \rightarrow P\left(z < \frac{1,2 - 1,5}{0,02}\right) &= P(z < -2) \cdot 1 - P(z > -2) = 1 - [1 - P(z > 2)] \\ &= P(z > 2) = 0,02275 \end{aligned}$$

Otra forma preferida por los alumnos fue a través de la suma de variables aleatorias continuas con distribución exponencial. Un caso es el siguiente con su interpretación:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &\sim N(150, 225) \\ P(\sum X_i < 120) &= P\left(z < \frac{120 - 150}{15}\right) = P(z < -2) \\ &= P(z > 2) = 0,0228 \rightarrow 2,28\% \end{aligned}$$

→ La solución aproximada a este problema es muy baja por lo tanto es muy difícil q' se puedan procesar los pedidos de 100 personas en menos de 2 horas ya q' la probabilidad de q' esto suceda es de un 2,28%.

No hubo mayores problemas en las operaciones de estandarización y de cálculo con la tabla estadística y la calculadora (AP1, AP2, AP3). Los errores fue producto de las dificultades descritas al comienzo. Finalmente, de los que llegaron a calcular un valor de la probabilidad del estadístico, la mitad comentó acerca de la baja probabilidad “como la probabilidad es baja indica que el cajero no está óptimo para atender a una persona en un promedio de 1,5 minutos” y también algunos sobre el teorema, siendo grande  $n$  la aproximación será buena: “ya que  $n$  es grande la probabilidad aproximada calculada a través del teorema central del límite debe ser similar a la calculada de forma tradicional”.

Una vez cumplido el tiempo de desarrollo de la actividad, el profesor utilizó la pizarra para desarrollarla de forma algebraica en conjunto con el grupo de alumnos. Durante la resolución, algunas preguntas planteadas fueron *¿cómo se obtiene la media y varianza de la suma de v.a a partir de la función de densidad?* El profesor, comienza calculando la esperanza del ejercicio 3.1 (ejercicio anterior): Como la v.a. se distribuye uniforme en el intervalo  $(-1,1)$  entonces de acuerdo a la definición dada en la sección 3.1 su esperanza será  $E(X_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$  y obtenemos así la esperanza de la

suma  $E(S_n) = \sum E(X_i) = n \cdot 0 = 0$ . Otros alumnos preguntaron cómo se resuelve la actividad si se trabaja con la suma y no el promedio. Se recurrió a recordar de forma simbólica la aproximación normal de la suma y media con sus respectivos parámetros de acuerdo a la distribución de origen. Se ayuda a los alumnos a llegar a la siguiente expresión (como aplicación y extensión de lo aprendido sobre el teorema)

$$\text{Si } X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow S_n = \sum X_i \sim N\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right) \text{ ó } \bar{X} = \frac{S_n}{n} \sim N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1/\lambda^2}{n}\right)$$

#### 6.4.2. ANÁLISIS DE EJERCICIOS REALIZADOS POR LOS ALUMNOS FUERA DE CLASE

##### Ejercicio 3.2

Un supervisor de una fábrica está interesado en presupuestar los costos semanales de reparación para cierto tipo de máquina. Los registros de años previos indican que este costo de reparación tiene una distribución exponencial con una media de 20 para cada máquina observada. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_{50}$  los costos de reparación para cincuenta de estas máquinas durante la próxima semana. Determine un número  $c$  tal que  $P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i > c\right\} = 0,05$ , suponiendo que las máquinas operan independientemente.

El ejercicio 3.2 también relacionada con la aplicación del teorema central del límite a variables continuas (CP4) se relaciona con la distribución exponencial. En una de las sesiones de práctica el profesor solicita a 26 alumnos que resuelvan en un tiempo corto el ejercicio, para el caso de que  $n=5$  máquinas, en que el valor de  $c$  toma por valor 173,56. Un 92,3% realizó bien la destipificación (AP2) de la variable suma y un total de 22 alumnos (84,6%) llegaron a calcular correctamente el valor de  $c$ . Se reproduce una solución por un alumno:

$X$  tra costos semanales de reparación para cierta máquina  
 $X \sim \text{Exp}(20)$        $E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda = 0,05$        $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0,05)^2}$   
 $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu = 5 \cdot 20 = 100, \sigma^2 = 5 \cdot \frac{1}{(0,05)^2} = 2000)$   
 $P\left(\sum_{i=1}^n X_i > c\right) = 0,05 = P\left(Z > \frac{c - 100}{\sqrt{2000}}\right) = 0,05$   
 $= P\left(Z > \frac{c - 100}{\sqrt{2000}}\right) = 1,64$   
 $c = 173,34$

Los alumnos concluyeron que la suma de los costos debe ser mayor a 173,34, definiendo las variables  $X_i$ : costos semanales de reparación para la  $i$ -ésima máquina, y

$\sum X_i$  que representa los costos de reparación para cinco máquinas. No hubo dificultades en la operatoria algebraica inversa a la tipificación (AP2), sólo dos alumnos siguen pensando que el parámetro lambda es la esperanza de la variable con distribución exponencial obteniendo un valor de  $5,6 \times 10^{-7}$  muy distinto para c. Se ilustra este caso:

$$\mu = \lambda_0 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20} = E(X)$$

$$Z \sim N\left(\mu = \frac{1}{20}, \frac{\sigma^2}{n} = 80\right)$$

Luego del tiempo concluido el profesor deja a los alumnos la inquietud de si es correcto utilizar el teorema central del límite para un  $n$  pequeño de una población inicial con distribución exponencial. Un alumno en voz alta se cuestiona el uso del teorema “*Todos los  $S_n$  de variables de una muestra se pueden calcular mediante una aproximación normal independiente de la distribución original que ésta tenga?*”.

A continuación el profesor desarrolló junto con los alumnos el ejercicio para  $n=50$  de la forma siguiente: Primero, los alumnos definieron sin problemas la v.a.  $X$ : costos de reparación de una máquina que se distribuye exponencial de parámetro  $X \sim \text{exp}(\lambda)$ , además identifican sin dificultad sus parámetros  $E(X_i)=20$  y  $\text{Var}(X_i)=400$ .

Se discute con ellos el hecho de que puede considerarse los costos de reparación  $X_1, X_2, \dots, X_{50}$  como v.a. independientes, pues no dependen unos de otros. Para  $n=50 > 30$  grande, siguiendo los ejercicios anteriores, podría aplicarse el teorema central del límite (E4), y calculando la media y varianza de la suma (P1, P2), llegamos a

$\bar{X} \sim N\left(\mu = 20, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{400}{50}\right)$ . Debemos encontrar el valor de  $c$  a partir de la expresión

$$P\left\{\sum_{i=1}^{50} X_i > c\right\} = 0,05; \text{ que es equivalente a } P\left\{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c/50 - 20}{20/\sqrt{50}}\right\} = 0,05 \text{ y es igual a}$$

$$P\left\{Z \leq \frac{c/50 - 20}{20/\sqrt{50}}\right\} = 0,95 \Rightarrow \frac{c/50 - 20}{20/\sqrt{50}} = 1,645 \Rightarrow c = 1232,64.$$

En esta secuencia hemos realizado los procedimientos AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias; AP2: Tipificación y operación inversa a la tipificación y AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora, tablas estadísticas u

ordenador, además de seguir un proceso de demostración formal algebraico (A1).

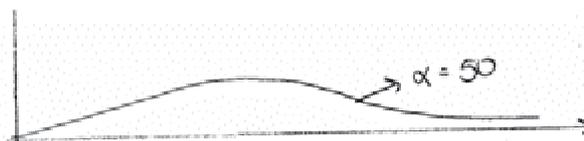
### Ejercicio 3.3

Suponga que la distribución del tiempo  $X$  (en horas) utilizados por estudiantes de cierta universidad en sus proyectos de graduación es gamma con parámetros  $\alpha = 50$  y  $\beta = 2$ . Debido a que  $\alpha$  es grande, se puede demostrar que  $X$  tiene aproximadamente una distribución normal. Utilice este hecho para calcular la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar pase a lo sumo 125 horas en el proyecto de graduación. ¿Cómo sería la gráfica de la distribución gamma ( $\alpha = 50$ ,  $\beta = 2$ )?

De acuerdo al campo de problema CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas, el ejercicio 3.3 tuvo como objetivo obtener el cálculo de probabilidad aproximada de la distribución gamma de parámetros  $\alpha = 50$  y  $\beta = 2$ . Es decir, sigue la propiedad P8: Aproximación de distribuciones clásicas a la distribución normal. Se conduce al alumno a escribir en términos de probabilidad la pregunta y se le confronta con lo difícil de poder resolver el valor exacto de la integral, es decir,  $P(X \leq 125) = \int_0^{125} f dp dx$ . Mediante el uso de la aproximación 25 estudiantes entregaron el cálculo de valor 0,9616 considerando que la media es  $\alpha \cdot \beta = 100$ . Aún hay alumnos que tienen problema con la naturaleza de la variable, al consultar si la v.a. tiempo es discreta o continua. Un caso se muestra en lo que sigue:

$$\begin{aligned}
 X &\sim \text{gamma} (\alpha = 50, \beta = 2) \\
 E(X) &= \alpha \cdot \beta = 100 \\
 V(X) &= \alpha \cdot \beta^2 = 200 \\
 X &\sim N (\mu = 100, \sigma^2 = 200) \\
 P(X \leq 125) &= \\
 P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{125 - 100}{\sqrt{200}}\right) &= P(Z \leq 1,76) = \\
 1 - P(Z > 1,76) &= 1 - 0,0392 = 0,9608 \approx 96,1\%
 \end{aligned}$$

En relación a imaginarse cómo debería ser la gráfica de la distribución gamma de parámetros grande (según la Figura 5.6.2.2), algunos dijeron no saber dibujarlo, otros lo hicieron para una distribución normal y 14 alumnos dibujaron para alpha 50 la gráfica que es casi una línea. Una gráfica se ilustra a continuación señalando “Como alpha = 50 es grande entonces la gráfica se pone más plana, pero toma la tendencia de una distribución normal”.



**Ejercicio 3.9**

Al sumar números, un computador aproxima cada número al entero más próximo. Supongamos todos los errores de aproximación son independientes y distribuidos uniformemente entre  $(-0,5, 0,5)$ .

- Si se suman 1500 números, ¿Cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda de 15?
- Cuántos números pueden sumarse juntos a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad 0,90?

En la parte a) el alumno ha de considerar la variable  $X$ : errores de aproximación, tal que  $X \sim U [-0,5;0,5]$ , donde  $E(X)=0$  y  $V(X)=1/12$ , requiriendo conocimientos previos. Ha de definir  $\sum_{i=1}^{1500} X_i$ : suma de los errores en 1500 números (AP1), determinando su suma y varianza (P1, P2). Debe identificar el campo de problemas CP4: Determinar la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias continuas y aplicar el enunciado (E4) del teorema:  $\sum X_i \approx N(1500 \times 0; 1500 \times 1/12)$ , es decir,  $\sum X_i \approx N(0, 125)$ .

$P\{|\sum X_i| > 15\} = 1 - P\left\{|Z| \leq \frac{15}{\sqrt{125}}\right\} = 1 - P(-1,34 \leq Z \leq 1,34)$ . La probabilidad de que la magnitud del error total exceda de 15 es de 18,02%.

En la parte b) por el teorema, suponiendo  $n$  grande  $\sum X_i \approx N(n \times 0; n \times 1/12)$

$$P\{|\sum X_i| < 10\} = 0,90 \Leftrightarrow P\left\{|Z| \leq \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right\} = 0,90 \Leftrightarrow P\left\{Z \leq \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right\} = 0,95$$

$\phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{n/12}} = 1,645 \Rightarrow n = 443,45$ . Por lo tanto se requieren sumar 444 números para que la magnitud del error total sea menor que 10, con una probabilidad 0,9. En la Tabla 6.2.4.1 se resume la frecuencia de elementos del teorema aplicado en una muestra de 129 alumnos participantes.

En la primera parte, la mayoría de los participantes (94%) caracterizaron la población original y determinaron la distribución aproximada de la suma de números  $X_i$ . Un 90% realizó el cálculo algebraico de la variable suma, donde un 84% utilizó correctamente la tabla estadística de la distribución normal estándar y de la calculadora. Sin embargo, sólo un 30% justificaron el teorema central del límite (E5) asociado al tamaño de la muestra grande.

**Tabla 6.4.2.1.** Frecuencias de elementos de significados aplicados en el Ejercicio 3.9 ( $n = 129$ )

Apartado	Pasos correctos en el problema y elementos implicados	$n_i$ (%)
1	RP: Determinar la esperanza y varianza de los errores $X_i$	122(94,6)
	E5: Enunciar el teorema de forma general para los $X_i$	89 (69,0)
	AP1: Calcular algebraicamente y transformar las v.a. continuas	116(89,9)
	AP3: Calcular las probabilidades con calculadora	108(83,7)
	P8: Aproximar las distribuciones clásicas a la distribución normal	39 (30,2)
2	AP1: Calcular algebraicamente las variables aleatorias	62 (48,1)
	AP2: Tipificar / Destipificar	60 (46,5)
	AP3: Calcular probabilidad del teorema con calculadora	57 (44,2)
	A1: Demostrar de formal algebraica	44 (34,1)
2 (Alternativo)	CP8: Determinar $n$ mediante la fórmula	55 (42,6)
	CP12: Estimar por intervalo de confianza parámetros para $n$ grande	47 (36,4)
	P2: Determinar el valor de la varianza	18 (14,0)

En cuanto a la operación inversa a la estandarización (AP2), en parte b), un 47% lo hizo bien, de los cuales casi todos realizaron el cálculo de probabilidades del teorema. Hubo un 34% que finalmente llegó algebraicamente a despejar  $n$ . Otra solución a este problema fue dada por 55 alumnos (42,6%) mediante la fórmula para determinar el tamaño de muestra adecuado (CP8) de variable aleatorias cuantitativa (Ver sección 5.6.2, sesión 11). Los errores detectados fueron en determinar el coeficiente de confianza y el percentil de la distribución normal estándar (un 36,4% lo hizo), y sólo un 14,1% determinaron el valor de la varianza.

#### 6.4.3. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL IMPLEMENTADO EN LA TERCERA LECCIÓN

Los elementos de significados que se identificaron en las observaciones registradas en las actividades desarrolladas por los alumnos y el profesor, referidas al estudio del comportamiento de la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas, se resumen en la Tabla 6.4.3.1. La comprensión fue alta en general a las actividades y ejercicios de tipo algebraico, destacando el procedimiento formal sistemático empleado por el grupo curso.

**Tabla 6.4.3.1.** Elementos de significados personales empleados a las actividades escritas

Tipo de elementos	Elementos de significado	A3.1	A3.3	E3.2	E3.3	E3.9
Campos de problemas	CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas i.i.d.	X	X	X	X	X
	CP8: Obtener el tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas			X		X
	CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para n grande					X
Lenguaje	Términos y expresiones verbales	X	X	X	X	X
	Notaciones y símbolos	X	X	X	X	X
	Representaciones gráficas				X	
Procedimientos	AP1: Cálculo algebraico y transformación de v.a.	X	X	X	X	X
	AP2: Tipificación / Destipificación	X	X	X	X	X
	AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora	X	X	X	X	X
Enunciados	E4: Enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas	X	X	X	X	X
	E5: Enunciado del teorema de forma general					X
Propiedades	P1: La media de la distribución aproximada de una suma de v.a. es la suma de las medias	X	X	X	X	X
	P2: Varianza de la distribución aproximada de la suma de v.a. es la suma de las varianzas	X	X	X	X	X
	P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño grande sigue una dist. aprox. normal		X			
	P4: La aproximación mejora con el número de sumandos	X				
	P8: Aproximación de distribuciones clásicas a la distribución normal.	X	X		X	X
Argumentos	A1: Demostraciones formales algebraicas y/ o deductivas	X	X	X	X	X

## 6.5. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO IMPLEMENTADO DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

El objetivo de este capítulo fue describir, por medio del análisis de algunas actividades y ejercicios en cada lección, el significado implementado realmente durante el proceso de estudio y detectar, en lo posible, algunas dificultades que surgirían en la evaluación posterior de los conocimientos.

El análisis de la trayectoria didáctica que efectivamente se llevó a cabo, se realizó resumidamente a partir de la observación de las sesiones de clase y respuestas escritas a algunas actividades propuestas en las sesiones de clase o ejercicios realizadas por los estudiantes y enviadas a través del foro de discusión. Se ha presentado un resumen en las Tablas 6.2.3.1, 6.3.3.1 y 6.4.3.1 de los elementos de significados implementados, que fueron detectados del análisis del material descrito. El análisis realizado ha sido de tipo cualitativo, aunque complementado con las frecuencias de respuestas en las pruebas de evaluación al final de cada tema.

El significado implementado del teorema central del límite está de acuerdo

esencialmente con el significado institucional pretendido (Capítulo 5), aplicando las tres configuraciones epistémicas esencialmente en las dos primeras lecciones.

Debido a algunos factores hubo algunas diferencias con respecto al significado pretendido; el tiempo de programación de la asignatura de estadística, que contempla cinco tópicos desde estadística descriptiva a la regresión lineal múltiple y dar oportunidad a los alumnos de analizar los ejercicios, durante la lección tres no fue analizada en conjunto con los alumnos algunos ejercicios de verificación del teorema en el laboratorio (configuración computacional), por ejemplo los ejercicios 3.4 y 3.5. Sin embargo, el trabajo de aplicación contextualizada en el Capítulo 7 los alumnos ponen a prueba sus habilidades para desarrollar las tres configuraciones epistémicas para variables aleatorias continuas. Además, no se profundizó en los campos de obtener la distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones (CP10) y estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes (CP12), y también desarrollar paso a paso la demostración del teorema como límite ordinario de una sucesión de funciones (E2).

Por otro lado se incluyeron situaciones imprevistas. De las once sesiones formales de clase planificadas, se emplearon algunas clases informales de apoyo a las inquietudes y dificultades a las distintas actividades presentadas. Levantar a tiempo los demos de simulación en Excel y @risk fue bastante positivo para la realización de algunas actividades, además de detectar favorablemente el tiempo que dedicaron los estudiantes a la exploración de distintos applet en Internet.

También muestra la riqueza y complejidad del significado del teorema central del límite, cuya construcción gradual fue guiada por el profesor en el aula, y que involucra sistema de muchos elementos de significados conectados, no sólo propios del teorema, sino de otros conceptos previos que el estudiante ha de recordar. Así, lo refleja la Tabla 6.5.1 que resume el total de actividades y ejercicios implementados a lo largo del proceso de estudio del teorema central del límite, analizando un 38,3% de las 47 situaciones-problemas, cuya apropiación del significado del teorema depende del grado de compromiso tanto de los alumnos en aprender como de los profesores en la forma de comunicar el conocimiento específico.

**Tabla 6.5.1.** Frecuencia de Actividades y Ejercicios implementados en las tres lecciones

	Actividades	Ejercicios	Total
Lección 1	12	8	20
Lección 2	6	7	13
Lección 3	5	9	14
Total	23	24	47

### **Idoneidad del proceso de estudio**

La secuencia efectivamente implementada, muestra una alta idoneidad epistémica, al englobar los principales elementos de significado identificados en el estudio previo y que constituyeron el significado institucional pretendido. Comparada con las propuestas tradicionales, las posibilidades de exploración del teorema para diferentes distribuciones (uniforme discreta y continua, binomial, Poisson, exponencial, etc.) y su aplicación a diferentes campos de problemas en el área de la ingeniería (aproximación de distribuciones, estimación de parámetros, determinación de tamaño de muestra) la propuesta tiene una alta idoneidad afectiva, al motivar el interés del estudiante.

El uso de dispositivos didácticos (manipulativos y computacionales, unidos a la plataforma) aumentó las posibilidades de exploración y el tiempo dedicado por el estudiante al estudio, dotándola de alta idoneidad mediacional y didáctica.

Respecto a la idoneidad cognitiva del proceso lo que se desprende del análisis de la observación es que, aunque la mayor parte de las actividades y ejercicios son asequibles a los estudiantes, todavía quedan puntos difíciles para ellos. Tampoco es inmediata la transferencia de los conocimientos anteriores a las nuevas situaciones. Por ejemplo, los estudiantes muestran olvido de las propiedades relacionadas con el estudio de la simetría, la aplicación de la corrección de continuidad sólo cuando aproximamos variables con distribución discreta, la justificación de uso del teorema según las distribuciones de probabilidades y sensibilidad de los parámetros. Por parte del profesor, habrá que evaluar la conveniencia de la simbología de la varianza muestral en la aproximación normal, lo que puede haber conducido en algunos alumnos confundir la varianza con la desviación estándar al aplicar la tipificación de la variable suma o promedio. Por tanto la idoneidad cognitiva podría ser mejorada.

Hubo una alta *idoneidad emocional* por el grado observado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.

La *Idoneidad interaccional* o grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar y resolver conflictos semióticos

potenciales durante el proceso de instrucción, fue buena, pero no suficiente. Por un lado, muchos de los conflictos se detectaron y resolvieron, especialmente los planteados en tutoría y mediante el foro, así como en las actividades realizadas dentro de clase. Pero, en otros casos, los conflictos no se han detectado hasta analizar el proceso de estudio y han quedado sin resolver en algunos estudiantes. No obstante, su identificación permitirá mejorar futuras versiones del proceso de estudio.



## **CAPÍTULO 7.**

# **SIGNIFICADO PERSONAL DE LOS ESTUDIANTES SOBRE EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE AL FINALIZAR EL PROCESO DE ESTUDIO**

### **7.1. INTRODUCCIÓN**

Al final del curso se propuso a los estudiantes de la muestra una prueba de evaluación, llevada a cabo mediante un cuestionario, que consta de ítems de respuestas múltiples o verdadero/falso, algunos de ellos con justificación. También se les entregaron algunos problemas abiertos y una prueba de ensayo, donde el alumno ha de plantear y resolver un proyecto que involucre el teorema aplicado a la ingeniería.

En base a estos instrumentos, este capítulo caracteriza la comprensión lograda por los alumnos de los diferentes elementos de significados relacionados con el teorema, incluidos en el proceso de estudio descrito en los Capítulos 5 y 6. Para este trabajo se entiende la evaluación como un estudio de la correspondencia entre el *significado institucional* presentado en la enseñanza y el *significado personal* efectivamente alcanzado por los alumnos (Godino, 2002a). Es decir, se evaluamos la capacidad de los estudiantes de reconocer y resolver mediante procedimientos correctos las situaciones prácticas ligadas al teorema, uso correcto del lenguaje, comprensión de enunciados y propiedades y capacidad de argumentación. El resultado de la evaluación servirá también para valorar la idoneidad didáctica (epistémica, cognitiva, semiótica, emocional y mediacional) del proceso didáctico propuesto para los alumnos a quienes va dirigida (Godino, Contreras y Font, 2006).

Las tareas propuestas en dichos instrumentos han sido construidas en base a la revisión detallada de los libros de texto de estadística para ingenieros (Capítulo 4) y a la enseñanza planificada (Capítulo 5). En lo que sigue se analizarán los instrumentos de recolección de datos y presentarán los resultados del estudio.

## **7.2. OBJETIVOS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN**

### **7.2.1. OBJETIVOS**

El objetivo principal al construir el cuestionario y las tareas abiertas fue disponer de unos instrumentos en el que, en un corto espacio de tiempo, pudiéramos recoger datos que nos permitan aproximarnos a la comprensión que muestra el grupo de alumnos en relación con los principales elementos de significado incluidos en el proceso de estudio.

De este objetivo principal se deducen otros objetivos. El primero de ellos consiste en estimar la proporción de alumnos en el grupo que muestran una comprensión y capacidad de aplicación de ciertos elementos de significado incluidos en la enseñanza. Asimismo, deseamos identificar cuáles de estos elementos resultaron difíciles, identificando los conflictos semióticos presentados respecto a los mismos, mostrando tanto las características en la comprensión en el grupo de alumnos, como su variabilidad.

Particularmente, en los problemas abiertos y la prueba de ensayo, se trata de describir los elementos de significado usados correcta e incorrectamente por los estudiantes en su resolución y las conexiones que establecen entre los mismos. Todo ello permitirá caracterizar el significado personal de los estudiantes sobre el teorema central del límite al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado de referencia implementado, así como caracterizar la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

### **7.2.2. PROCESO DE CONSTRUCCIÓN**

En el proceso de elaboración del cuestionario y de las tareas se han seguido una serie de recomendaciones tomadas de Osterlind (1989), Thorndike (1989) y Martínez Arias (1995):

- En primer lugar, se delimitó el contenido a evaluar con este instrumento, a partir del análisis de los diversos elementos del significado institucional local previsto descrito en el Capítulo 4.
- Se especificó el formato de los ítems, decidiendo incluir ítems de selección múltiple, algunos con una parte de justificación y también con preguntas de Verdadero/ Falso. Además se propuso a los estudiantes dos problemas abiertos y un

proyecto de aplicación para valorar mediante ellos las habilidades de pensamiento de más alto nivel (Gal, 1997). Estas decisiones se tomaron teniendo en cuenta el tiempo disponible, el tipo de evaluaciones a las que estaban acostumbrados los estudiantes y que se deseaba incluir un número relativamente amplio de ítems para cubrir el máximo de elementos de significado.

- Se procedió a la elaboración de una colección de ítems inicial, a partir de los cuales se seleccionaron, posteriormente, los que habrían de constituir el cuestionario.

En una serie de revisiones sucesivas, se completaron y modificaron los ítems, añadiendo algunos de invención propia y otros elaborados a partir de preguntas o ejercicios de los libros de texto analizados en el Capítulo 4. Una vez que se llegó a unos instrumentos que parecían cubrir el contenido pretendido, se procedió a homogeneizar la redacción y a cambiar el contexto cuando éste no fuese familiar al alumno. Se hicieron pruebas de comprensión del enunciado, con algunos estudiantes de la misma especialidad modificando la redacción en los casos que fue necesario.

En la redacción de los enunciados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos indicados por Brent (1989): Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta sea razonable para el sujeto y pueda darla, evitar hipótesis implícitas, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos.

### **7.3. ANÁLISIS A PRIORI DEL SIGNIFICADO EVALUADO**

En el proceso de estudio implementado (Ver Capítulos 5 y 6) se introdujeron una serie de elementos de significado del teorema central del límite, agrupados en tres lecciones y utilizando tres configuraciones epistémicas en el trabajo en el aula. El cuestionario se centra en la evaluación de la comprensión de parte de estos elementos y presenta 15 ítems, que han sido construidos en base a la revisión detallada de los libros de texto de estadística para ingenieros. El cuestionario presenta ítems de varios tipos que se describen y analizan a continuación:

- Ítems de opción múltiple en los que una de las opciones corresponde a la respuesta correcta y el resto a errores descritos en la literatura o constatados en nuestra

práctica docente (ítems 1, 2, 3, 4, 5 y 15). El ítem 15 tiene una parte de justificación, destinada a valorar la comprensión y aplicación de los conceptos donde el alumno tiene que explicar por qué responde de una determinada manera, interpretar un enunciado y aplicar una propiedad.

- Ítems de verdadero/falso (ítems del 6 al 14), los cuales piden al estudiante reconocer hechos o relaciones, discriminar, analizar, hacer inferencias o aplicar propiedades. Los ítems 6 y 7 contienen tres y cuatro preguntas de verdadero y falso respectivamente y algunas de ellas piden justificar la respuesta.
- Además del cuestionario, hemos incluido dos problemas abiertos y una prueba abierta a resolver con ordenador.

A continuación un análisis detallado, de cada ítem y tarea, describiendo su contenido y los posibles errores que, a priori, es previsible que encontremos en las respuestas de nuestros alumnos. Se marca en negrita la respuesta correcta.

**Ítem 1.** La aproximación de la distribución binomial  $bin(n,p)$  a la distribución normal es suficientemente buena cuando:

- a)  $n$  es menor que 30 y  $np$  aproximadamente igual a 5
- b)  $n$  es mayor que 30 y  $p$  menor que 0,05
- c)  $n$  es mayor que 30 y  $p$  aproximadamente igual a 0,5**
- d)  $n$  mayor que 30 y cualquier  $p$
- e)  $n$  mayor que 30 y  $p$  igual a 0,9

Este ítem, presentado mediante expresiones verbales y simbólicas, pretende evaluar si el alumno reconoce las condiciones que han de cumplir  $n$  y  $p$  para que la aproximación de la distribución binomial a la normal sea suficientemente precisa. Corresponde, al campo de problema CP1: *Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$* , y a las propiedades P4: *La aproximación mejora con el número de sumandos* y P7: *Aproximación de una distribución discreta por una continua*. El alumno debe razonar acerca del teorema como caso especial de un resultado general (argumento A2). Lleva implícito un enunciado intuitivo del teorema central del límite (E6).

La respuesta correcta sería la alternativa (c), pues en este caso la forma de la distribución es simétrica y cumple las condiciones de muestras de tamaño mayor a 30 y ser tanto  $np$  como  $nq$  mayores a 5 (Montgomery y Runger, 1996; Walpole y cols., 1999).

Los distractores incluidos evalúan los siguientes errores: (a) pensar que la

aproximación es buena para tamaños pequeños de muestra; (b) aunque  $n$  es mayor que 30, el valor esperado  $np=1,5$  es menor que 5; (d) reconocer la precisión de aproximación a la binomial sólo mediante el tamaño muestral y no el parámetro  $p$ ; (e) pensar en una buena convergencia para valores del parámetro cercanos a 1; si bien cumple la regla, por ejemplo para  $np=30 \times 0,9= 27$  no se cumple para el complemento  $nq=30 \times 0,1=3$ .

**Ítem 2.** Sean  $X_i=0$  si un producto es defectuoso y  $X_i=1$  si el producto está correcto. En un lote de 30 de estos productos queremos calcular la probabilidad de que 25 al menos sean correctos, aproximando por la normal. La corrección de continuidad para el cálculo implica que tenemos que calcular:

a)  $P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 25,5\right)$

b)  $P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 24,5\right)$

c)  $P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 24\right)$

d)  $P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 25\right)$

e)  $P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 25,5\right)$

El ítem 2, expresado en notación algebraica, evalúa el conocimiento de la aplicación de la corrección de continuidad en el cálculo de una probabilidad en un problema de ingeniería. Se refiere al campo de problema CP1 o CP2: *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas*; y la propiedad específica P12: *Corrección de continuidad*. Lleva implícito un enunciado intuitivo del teorema central del límite. Se ha de razonar de lo particular a lo general.

Para mejorar la aproximación de una variable discreta por una continua, al calcular la probabilidad de encontrar por lo menos 25 productos en buen estado en la muestra de 30, restamos el factor de corrección 0,5 al límite inferior del intervalo, cuya correcta expresión de cálculo es dada en la alternativa (b). Se pretende evaluar las dificultades en traducir el lenguaje a una desigualdad (e); error acerca de los límites de la corrección de continuidad al calcular la probabilidad (a) y no considerar el factor de corrección (c y d).

**Ítem 3.** La aproximación normal mejora cuando el intervalo a calcular en probabilidad:

a) Se acerca al extremo superior de valores de la distribución binomial

b) Se aparta del término central de valores de la distribución binomial

c) Se acerca al extremo inferior de valores de la distribución binomial

**d) Se acerca al término central de valores de la distribución binomial**

Siguiendo con el campo de problema CP1, se estudia la bondad de aproximación en diferentes posiciones del rango de la variable usando términos verbales, considerando *la aproximación de una distribución discreta* (P7). Lleva implícito un enunciado intuitivo del teorema central del límite.

La respuesta correcta sería que la calidad de la aproximación se presenta para valores cercanos al valor esperado de la distribución (d). Los tres distractores están asociados a pensar en una mejor exactitud en la convergencia en valores alejados de los centrales.

**Ítem 4.** Una máquina llena paquetes de azúcar de 1 k. El error promedio de llenado de cada paquete es 2 gramos y la desviación estándar 3 gramos. Si se llenan 400 paquetes a la hora, el cálculo de la probabilidad aproximada de que el exceso de azúcar sea menor que 750, sería:

- a)  $P\left(\frac{\bar{X} - 2}{3} < -0,83\right)$
- b)  $P\left(\frac{\sum X_i - 800}{3/20} < -\frac{5}{6}\right)$
- c)  $P\left(\frac{\bar{X} - 2}{0,15} < -\frac{5}{6}\right)$
- d)  $P\left(\frac{\sum X_i - 400}{9} < -0,83\right)$

De acuerdo a los elementos de significados del teorema central del límite corresponde al campo de problemas CP4, *distribución de la suma de v.a. continuas* y CP12, *estimación de una media*.

Considerando la variable  $X_i$ : error de llenado de un paquete de azúcar (gramos), se pide que se exprese que la v.a. suma  $\sum_{i=1}^{400} X_i$ : exceso de gramos en azúcar de una

muestra de 400 paquetes, no sea mayor a 750 gramos. Utilizando el teorema central del límite para muestras de tamaño suficientemente grande, y las propiedades de cálculo de la media y varianza (P1 y P2) de la distribución asintótica de la suma (P3), se tiene

$\sum_{i=1}^{400} X_i \sim N(n\mu = 400 \cdot 2, n\sigma^2 = 400 \cdot 9) = N(800, 3600)$  o, en forma equivalente, la distribución de

la media muestral  $\bar{X} \sim N(\mu = 2, \sigma^2/n = 9/400)$ . El cálculo de probabilidad pedida es

$$P(\sum X_i < 750) \approx P\left\{\frac{\sum X_i - 800}{60} < \frac{-50}{60}\right\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 2}{3/20} < \frac{-5}{6}\right\},$$

por tanto la respuesta correcta sería la alternativa (c).

Incluiría los procedimientos de *Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias* (AP1) y *tipificación/destipificación* (AP2), y las siguientes

propiedades: P1: *Media de la suma*, P2: *Varianza de la suma*, P3: *Distribución de la media aritmética* de una m.a. de tamaño suficientemente grande, y P5: *Transformaciones lineales de v.a.* siguen una distribución asintótica normal. Lleva implícito un enunciado general del teorema central del límite.

Los distractores apuntan a describir posibles errores de estandarización en la varianza de la media muestral (a), la varianza de la suma (b), y la esperanza de la suma y la confusión de la varianza por la desviación estándar (d).

**Ítem 5.** Sea  $X_i$  variables aleatorias independientes con la misma distribución. Señala cuál de los siguientes enunciados es falso:

a)  $P(a < \sum_{i=1}^{30} X_i < b)$  se puede aproximar mediante el área bajo una curva normal entre a y b.

b) Para  $n$  observaciones grandes de una población con una media finita  $\mu$  y una varianza finita  $\sigma^2$ , la distribución de muestreo de la suma  $S_n = \sum X_i$  se puede aproximar con una función de densidad normal cuya media es  $n\mu$  y varianza  $n\sigma^2$ .

c) La función de densidad  $f_n$  de  $\sum_{i=1}^{30} X_i$  se aproxima a la función de densidad de una distribución normal,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$$

**d) Si  $X_i$  tiene recorrido 1, 2, 3 con probabilidades respectivas 0,2, 0,5, 0,3, entonces, para  $n = 30$ , la expresión  $\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{npq}}$  sigue una distribución normal N (0,1).**

e) Cuando  $n$  es grande, la distribución de la media muestral  $\bar{X}$  se aproxima a la distribución normal  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma/\sqrt{n}$ .

El ítem 5 tiene por objeto establecer los distintos enunciados del teorema central del límite, E2, como *límite de una sucesión de funciones* (alternativa c); E4, como *suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas* (b); como suma de v.a. para  $n$  considerada grande (a) y enunciado del teorema de la forma general (enunciado E5) (e). Se razona de lo general a lo particular.

La respuesta incorrecta es la (d) y pretende evaluar si los alumnos distinguen una variable con *distribución discreta acotada* (campo de problema CP2.2) de la *distribución binomial* (campo de problema CP1). Corresponde a la propiedad P5, *distribución de la media muestral*. Aplicando las operaciones de *esperanza y varianza* de la suma de v.a. (propiedades P1 y P2), se obtiene la siguiente estandarización (AP2)

$$\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 60}{\sqrt{14,7}}$$

**Ítem 6.** La rapidez con la que la suma de variables aleatorias se aproxima a la distribución normal depende: (contesta cada apartado como V o F)  
**a) De las distribuciones de las v.a.  $X_i$**   
**b) Del tamaño de la muestra  $n$**   
**c) De los valores de los parámetros**

Este ítem, que enuncia intuitivamente el teorema (E6), valora las condiciones que aseguran la *rapidez de la convergencia* (Campo CP5). Se espera que la respuesta de los estudiantes a los tres apartados sea la opción verdadera (V), es decir, que la aproximación es mejorada no sólo por el aumento del tamaño muestral, sino también está condicionada a la forma distribucional de la población de origen y de la sensibilidad de los valores de sus parámetros. El estudiante debe recordar las actividades realizadas con la simulación en el estudio del comportamiento de los estadísticos. Por ejemplo, la distribución uniforme discreta converge muy rápidamente (CP2.1) y también la distribución Poisson (CP2.3) se aproxima a la distribución normal a partir del valor de  $\mu > 5$ . Esta pregunta abarca las propiedades P4, *la aproximación mejora con el número de sumandos*; P8, *aproximación de otras distribuciones clásicas a la distribución normal*.

**Ítem 7.** La aproximación a la normal es bastante buena para valores muy pequeños de  $n$  en variables aleatorias con distribución: (contesta cada apartado como V o F):  
**a) Asimétrica**  
**b) Simétrica**  
**c) Uniforme**  
**d) Sesgada**

El objetivo de este ítem es evaluar específicamente la importancia de la forma o distribución de la población original para una buena aproximación, cuando la muestra no sea grande. El alumno debe recordar las actividades analizadas gráficamente y mediante simulación para distintas distribuciones de probabilidades. La convergencia rápida se establece en distribuciones de probabilidades simétricas y en la distribución uniforme, ya sea discreta o continua. Es decir, son verdaderas las opciones (b y c). Hemos visto que la aproximación a la distribución binomial depende del parámetro  $p$ , por lo que para valores cercanos a cero o uno, se obtiene una distribución sesgada a izquierda o derecha, y habría que tomar muestras de tamaño más elevado; también si la distribución es asimétrica se requiere muestras de tamaño muy grande. Implícitamente se evalúa la propiedad P4: *Mejora de la aproximación con  $n$* ; los campos de problemas CP2: *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas*

*idénticamente distribuidas; CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas; y CP5: Condiciones del error de aproximación.*

**Ítem 8.** Una distribución muestral describe los valores que tomaría un estadístico en muchas repeticiones de una muestra o de un experimento en las mismas condiciones. V/F

Se pide al alumno que recuerde el concepto de distribución muestral, tópico en el cual se desarrolla el teorema central del límite, previo a la inferencia estadística. La respuesta es verdadera. No está relacionado directamente con el teorema, pero queríamos asegurar que el alumno comprende este concepto para evaluar mejor su respuesta a los siguientes ítems.

**Ítem 9.** La desviación estándar de la media muestral aumenta a medida que crece el tamaño de la muestra. V/F

Corresponde al campo de problemas CP12, *estimación de la media muestral*. La respuesta es falsa, ya que la desviación estándar  $\sigma/\sqrt{n}$  de la media muestral disminuye al aumentar  $n$ , o dicho de otra forma, la desviación estándar aumenta a medida que el tamaño de la muestra decrece. Corresponde a la propiedad P2, *la varianza de la distribución de la suma de v.a. y P4, la aproximación es mejorada para muestras grandes*. También está presente la propiedad P10, *los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal*; ya que este es el caso de la media muestral, buen estimador de la media poblacional, y por ello, mientras más pequeña es su varianza mayor es la eficiencia de su estimador. El alumno ha de hacer un razonamiento formal.

**Ítem 10.** Las representaciones gráficas de todas las distribuciones muestrales tienen forma simétrica. V/F

Esta afirmación es falsa, la forma gráfica de la distribución, como hemos mencionado anteriormente, depende de la distribución original y valores de los parámetros. El alumno ha de razonar a partir de contraejemplos. Se evalúa implícitamente el conocimiento de qué estadísticos tienen distribución muestral a las que se aplica el teorema (P10 y P11). Se debe razonar de lo general a lo particular (A2).

**Ítem 11.** La media muestral tiene una distribución aproximadamente normal cuando  $n$  es suficientemente grande, independiente de la forma que tenga la población. V/F

Esta afirmación expresada en términos verbales es uno de los enunciados del teorema central del límite de forma general (E5) y que se presenta habitualmente para la media aritmética en textos de estadística para ingenieros. Las propiedades usadas son que *mejora al aumentar en número de variables aleatorias* (P4) y es un buen *estimador asintótico de máxima verosimilitud* (P10). Corresponde al campo de problemas CP12 (estimación de la media). Se ha de razonar mediante ejemplos /contraejemplos (A5).

**Ítem 12.** Cuando el estadístico de prueba es  $t$  y el número de grados de libertad se hace muy grande, el valor crítico de  $t$  está bastante próximo a la normal estándar  $z$ . V/F

Este ítem, al igual que el anterior es verdadero, y es un caso clásico de aplicación del teorema en la construcción de intervalos de confianza y test de hipótesis (Campos de problemas CP12 y CP13). En tablas estadísticas es común ver que, para valores mayores que  $n=30$ , los valores críticos de la distribución t-student coinciden con los de la distribución normal. Considera las propiedades P4 en función *del tamaño de la muestra y la aproximación de otras distribuciones clásicas a la normal*, P8. El estudiante puede justificar su razonamiento mostrando en la tabla estadística de la distribución t-student y comparando numéricamente la convergencia (A5).

**Ítem 13.** El valor normal estándar se usa para todas las inferencias sobre proporciones de la población. V/F.

El ítem 13 es falso, ya que para muestras de tamaño grande se utiliza el estadístico  $Z_0 = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx N(0,1)$  para la construcción de intervalos de confianza de la

proporción población, pero no para muestras pequeñas. Para desarrollar el test de hipótesis que se refieren a parámetros de distribuciones no normales, se puede utilizar el teorema central del límite o resultados referentes a la distribución de probabilidades del estimador máximo verosímil. En particular, en una muestra aleatoria de tamaño  $n$

grande se tiene:  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$ . Por otra parte, si  $\hat{\theta}$  es el estimador máximo verosímil de

$\theta$ , entonces para  $n$  grande:  $\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}} \approx N(0,1)$ . Por tanto, se debe recordar la aplicación del

teorema central del límite para intervalos de confianza (CP12) y para test de hipótesis, CP13 en poblaciones no normales, además de la transformación lineal de la proporción

de v.a. de poblaciones Bernoulli (propiedad P5).

**Ítem 14.** El valor esperado de la distribución muestral de las medias muestrales  $\bar{X}$  es igual a la media de la muestra. V/F

La respuesta es falsa, debido a que el valor esperado de la media muestral es igual a la media de la población  $E(\bar{x}) = \mu$ . Se pretende evaluar si los alumnos diferencian los parámetros poblacionales de los estadísticos obtenidos de las muestras y la propiedad P1. Corresponde al campo de problemas CP12: *Estimación de una media*. Evalúa el conocimiento de términos (valor esperado, media, muestra, población) y los correspondientes conceptos y propiedades.

**Ítem 15.** La primera tarea en un curso introductorio de programación por computadores implica correr un breve programa. Si la experiencia indica que 50% de todos los estudiantes principiantes cometerán errores de programación, ¿Cuál de estos casos te parece más probable?  
Indica por qué has elegido esta opción:  
a) **Que entre los próximos 10 estudiantes seleccionados 8 o más cometan errores de programación.**  
b) Que entre los próximos 100 estudiantes seleccionados 80 o más cometan errores de programación.  
c) Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Este ítem es una variante del problema de Kahneman, Slovic y Tversky (1982) sobre heurística de la representatividad, en contexto de informática, y donde el estudiante debe justificar su elección. La opción (c) pone a prueba si el estudiante tiene en cuenta el tamaño de la muestra en el cálculo de la probabilidad, y su elección supone un sesgo de representatividad. De igual manera la opción (b), conlleva a pensar siempre que mayores muestras tomadas implican mayor chance de ocurrencia en el cálculo de probabilidades, tienen más variabilidad y fue encontrada en la investigación de Serrano (1996).

La respuesta correcta es la alternativa (a) que considera más probable el caso de muestra más pequeña como la de  $n=10$ . Para hallar esta solución, en forma algebraica se debe estandarizar la suma de v.a. Bernoulli y utilizar la corrección de continuidad. Corresponde al campo de problema CP1 de *la distribución aproximada a la binomial*, con procedimientos de *cálculo algebraico de v.a.* (AP1), *tipificación/destipificación* (AP2) y *cálculo de probabilidad mediante tablas estadísticas* (AP3). Justifica el *teorema como caso particular de un resultado general* (A2) y valora las propiedades P1, P2, P12 en la *estandarización de la esperanza, varianza y corrección de continuidad* respectivamente. Para encontrar la respuesta, se seguirían los siguientes

## Capítulo 7

pasos:

$\Sigma X_i \sim \text{bin}(n = 10 ; p = 0,5)$  ; el estadístico de la suma se aproxima a la distribución normal  $\Sigma X_i \approx N(\mu = 5 ; \sigma^2 = 2,5)$ . Luego  $P(\Sigma X_i \geq 8) = 1 - P\left(Z \leq \frac{7,5 - 5}{\sqrt{2,5}}\right) = 1 - \phi(1,58) = 0,057$ .

En cambio,  $\Sigma X_i \sim \text{bin}(n = 100 ; p = 0,5)$  ; luego  $\Sigma X_i \approx N(\mu = 50 ; \sigma^2 = 25)$

$P(\Sigma X_i \geq 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{79,5 - 50}{\sqrt{25}}\right) = 1 - \phi(5,9) = 0$ .

### Problema 1. Construcción de un Cruce

Se supone que  $X$ , el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con  $\mu = 6$ . Si el número de accidentes durante tres años es mayor o igual a 240, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado. Aproxime la probabilidad de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia del estado. Comente el resultado.

Para resolver este problema el alumno ha de considerar la variable  $X$ : n° de accidentes por mes, donde  $X \sim P(\mu=6)$  sigue la distribución de Poisson. Considerando las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_{36}$  independientes e idénticamente distribuidas, con distribución de Poisson y definiendo la variable aleatoria  $\Sigma X_i$ : n° de accidentes en tres años, se puede utilizar el teorema central del límite (para el caso de variables discretas no acotadas)  $\sum_{i=1}^{36} X_i \approx N(36 \times 6 ; 36 \times 6)$ , debido a que el tamaño muestral  $n = 36 > 30$  es grande y  $\mu \geq 6$ .

Es decir se utiliza el campo de problemas CP2: *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas*. El alumno podría hacer un enunciado intuitivo del teorema (E6), especificar el caso de la suma de variables independientes idénticamente distribuidas (E4) o bien hacer un enunciado general del teorema en que la media muestral es aproximada por una normal para un  $n$  grande.

Como propiedades, tiene que utilizar el cálculo de la media y varianza de una suma de variables aleatorias (P1 y P2) y la aproximación de una distribución clásica (Poisson) a la normal (propiedad P8), indicando que se cumplen las condiciones requeridas. Usando la corrección de continuidad, calculamos:

$$P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i \geq 240\right) \approx P\left(Z \geq \frac{239,5 - 216}{\sqrt{216}}\right) = 1 - \phi(1,60) = 0,0548$$

El alumno tiene que aplicar la propiedad de *corrección de continuidad* (P12); como procedimientos ha de usar el AP1: *Cálculo algebraico y transformación de*

variables aleatorias; AP2: Tipificación/destipificación; AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora o tabla. La validación del procedimiento del problema es de forma algebraica y deductiva (A1), mediante el cálculo correcto de la suma o promedios muestrales de variables aleatorias y también razonar de lo general a lo particular (A2). El comentario esperado es que, como la probabilidad de ocurrencia de más de 240 accidentes es baja, el estado no realizará la reconstrucción del cruce. Aparece un argumento A6: *Obtener una conclusión o tomar una decisión en base al teorema central del límite*. En general en esta actividad el alumno usará símbolos y expresiones verbales, podría también utilizar algún gráfico al calcular probabilidades.

**Problema 2. Sondeo político**

Suponga que la proporción de votantes rurales de cierto estado, a favor de un candidato a Diputado es 0,45 y la proporción de votantes urbanos que están a favor del mismo candidato es 0,60. Si se obtiene una muestra de 200 votantes rurales y 300 votantes urbanos, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que por lo menos 250 de estos votantes estén a favor de este candidato?

Se espera que el estudiante siga los siguientes pasos:

1. Identificar uno de los dos campos de problemas: CP1: *Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$* ; o CP2: *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas*.
2. Definir las variables  $W$ : Votante a favor de un candidato y  $\sum W_i$ : n° de votantes a favor del candidato, considerando la suma de dos variables y calculando la media y varianza de la suma de variables (P1 y P2). Usaría la propiedad P7 (aproximación de distribuciones discretas por continuas).

$$E(\sum W_i) = \sum_{i=1}^{200} E(X_i) + \sum_{i=1}^{300} E(Y_i) = 200 \times 0,45 + 300 \times 0,6 = 270$$

$$V(\sum W_i) = n_1 p_1 q_1 + n_2 p_2 q_2 = 200 \times 0,55 \times 0,45 + 300 \times 0,4 \times 0,6 = 121,5.$$

El alumno usaría un enunciado E4: *Enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas*;  $\sum W_i \approx N(270; 121,5)$ , también E6: *Enunciado intuitivo del teorema*; por el teorema central del límite, para  $n$  grande o bien un *enunciado de forma general para la media muestral* (E5). Se requieren también los siguientes elementos: AP1: *Cálculo y transformación algebraica de variables aleatorias*; AP2: *Tipificación y su inversa*; AP3: *Cálculo de probabilidades con calculadora*. Usando la corrección de continuidad (propiedad P12):

$$P(\sum X_i \geq 250) = P\left(Z \leq \frac{249,5 - 270}{\sqrt{121,5}}\right) = 1 - \phi(-1,86) = 1 - 0,0314 = 0,9686$$

Usaría también los argumentos A1: *Demostraciones formales algebraicas y/o deductivas*, en el cálculo correcto de la suma o promedio de la muestra de variables con distribución binomial; A2: *Enunciado del teorema como caso especial de un resultado general*, y también A6: *Obtener una conclusión en base al teorema*, 96,86% corresponde a la probabilidad de que por lo menos 250 de estos votantes estén a favor del candidato.

**Problema 3.** *Proyecto de aplicación del teorema central del límite a la ingeniería con @risk*

Se pidió a los estudiantes aplicar a un problema de la ingeniería elegido por ellos mismos mediante los conceptos estudiados en las tres lecciones sobre el teorema con apoyo de Excel y @risk. Los datos se simularían a través del programa @risk, analizando para distintos valores de los parámetros la convergencia de la distribución de probabilidades de origen que modela la situación de contexto.

Se sugiere a los estudiantes poner a prueba sus conocimientos del teorema central del límite situado en un área específica de aplicación, y apoyada con el ordenador. En un plazo de dos a tres semanas el alumno debería entregar el proyecto utilizando para su solución lo aprendido en relación al teorema. Ellos deben definir la variable de interés dentro del contexto de su problema ingenieril, sea discreta o continua, plantear objetivos y dar referencias de la información. Podrían usar en su planteamiento problemas en las tesis de ingenieros egresados, libros de ciencias de la ingeniería o recolección personal de bases de datos. Además, han de incorporar en la solución entregada las tablas de datos y gráficas como el histograma empleados, la distribución de probabilidad clásica asociada, y estimar la solución mediante la simulación para variados valores de muestras, aportando sus conclusiones.

Se espera que, en la preparación de este informe investigativo individual propuesto al final del semestre académico, el estudiante siga los siguientes pasos:

El primer paso es presentar una problemática en un área específica de aplicación, que incluya procesos de simulación, y que puede ser resuelta mediante la estimación de distribuciones de probabilidades de la media muestral. Son varios campos de problemas que se podrían identificar: *Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de n* (CP1), *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias idénticamente distribuidas ya sean discretas* (CP2) o *continuas* (CP4), y CP3: *Establecer la distribución de la suma de variables aleatorias independientes no*

*idénticamente distribuidas.* También, campos más aplicados como CP8: *Obtener el tamaño adecuado una de muestra aleatoria de poblaciones desconocidas*, CP10: *Distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones*, CP12: *Estimación por intervalos de confianza de la media y otros parámetros para muestras grandes* y CP13: *Contraste de hipótesis de la media y otros parámetros en poblaciones no normales para muestras grandes.*

Para enfrentar el problema, el alumno ha de utilizar más de un lenguaje en la resolución de la situación, tales como términos y expresiones verbales (variable aleatoria, distribución de probabilidad, muestra aleatoria...), símbolos (distribución muestral del promedio y su estandarización, estadísticos...) y representaciones gráficas con simulación (histogramas, curva de densidad,...). Podría describirse el teorema central del límite con enunciados E4: *Suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas*; E5: *Presentar el teorema de forma general*, o bien, *señalar el teorema en forma intuitiva* (E6).

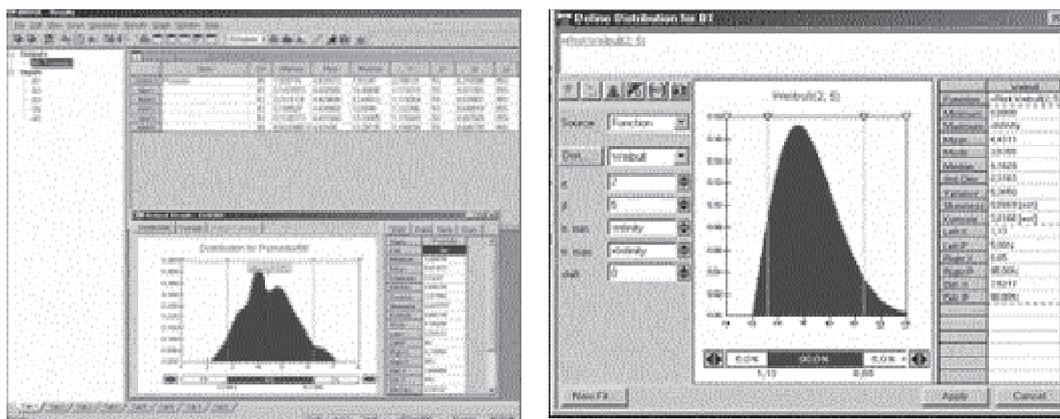
Para estimar las probabilidades aproximadas de la media muestral que se piden en la solución del problema se requiere de varias operaciones, de la cual podemos señalar: definir la variable y asociarle una distribución de probabilidad conocida, estimar los parámetros de la distribución escogida, simular en una tabla de datos la distribución del promedio y representarlo gráficamente, analizar la convergencia del estadístico y comparar las medias empíricas y teóricas. Los procedimientos que pueden usarse en la solución del problema son AP1: *Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias aplicando propiedades*, AP2: *Tipificación y/o operación inversa a la tipificación normal para obtener una m.a. de tamaño adecuado*, AP3: *Cálculo de probabilidades referido al teorema con calculadora o programa de ordenador.*

Las propiedades que pueden utilizar los estudiantes una vez definida la naturaleza de la variable y su distribución de probabilidades son variadas, P1: *Media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias*, P2: *Varianza de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas*, P3: *La media aritmética de una m.a. de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal*, P4: *Aproximación de la suma de variables aleatorias a la distribución normal mejora con el número de sumandos*, P5: *Transformaciones lineales de variables aleatorias siguen una distribución asintótica normal*, P6: *Medias muestrales en dos poblaciones sigue una distribución aproximada*

normal, P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua, P8: Aproximación de distribuciones clásicas a la distribución normal, P10: Estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal, P12: Corrección de continuidad.

Para validar la comprensión de información de datos reales o simulados, el alumno debería dar argumentos tipo análisis y síntesis. Se consideran que son aceptables las demostraciones algebraicas (A1), argumentar el teorema como caso particular de un resultado general (A2), simulación gráfica del teorema mediante el ordenador (A4), mediante comprobación de ejemplos, contraejemplos y comparación de medias empíricas y teóricas (A5) y obtener una conclusión o tomar una decisión en base a resultados del teorema (A6).

**Figura 7.3.1.** Distribución de muestreo de  $\bar{X}$  cuando la distribución de la población es Weibull, con  $\alpha = 2$  y  $\beta = 5$  utilizando el programa @risk



Previo al planteamiento de esta actividad práctica, los estudiantes hicieron otras prácticas de simulación con Excel, como las mostradas en la lección uno. Además, se levantó en la plataforma (EV@ Entorno Virtual de Aprendizaje <http://uvirtual.ucsc.cl>) un demo de comandos y gráficas de salidas del programa @risk, utilizando el ejemplo particular de la distribución Weibull, fijando con valores sus dos parámetros y, para un promedio de una muestra de cinco valores, se ejecutó con 500 réplicas (Ver Figura 7.3.1. de la distribución de probabilidad de la población y la distribución del promedio simulado).

A objeto de verificar que los alumnos habían participado con el programa @risk, se les pidió previamente enviar por EV@, a modo de ejercicio, un experimento de simulación, aproximando una distribución cualquiera de probabilidad clásica, y

estudiando la distribución de muestreo de la media muestral. Los alumnos debieron responder las siguientes interrogantes ¿Para cuáles de los distintos tamaños de muestra la distribución de la media muestral es aproximadamente normal?, ¿Qué efecto tiene el incremento del tamaño de la muestra de 100 a 500?, ¿Qué efecto produce el cambio de 5 a 50 muestras?

Como consecuencia del análisis anterior, se presenta en las tablas 7.3.1 a 7.3.6 los elementos de significados del teorema central del límite evaluados en el cuestionario.

**Tabla 7.3.1.** Campos de problemas presentes en los instrumentos de evaluación

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	P1	P2	P3
CP1. Aproximación de la d. binomial para n grande	X	X	X		X										X		X	X
CP2.1. Uniforme discreta						X												
CP2.2. Discreta acotada		X			X		X										X	X
CP2.3. Discreta no acotada						X										X		X
CP3. Independientes no idénticamente distribuida																		X
CP4. Suma v.a. Continuas				X			X											X
CP5. Error aproximación						X	X											
CP8. Obtener tamaño muestra																		X
CP10. Diferencias de medias																		X
CP12. Estimación de media				X					X		X	X	X	X				X
CP13. Contrastes												X	X					X

**Tabla 7.3.2.** Lenguaje y representaciones presentes en los instrumentos de evaluación

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	P1	P2	P3
Términos	X		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Símbolos	X	X		X	X							X			X	X	X	X
Gráficos							X			X						X		X
Simulación																		X

**Tabla 7.3.3.** Algoritmos y procedimientos presentes en los instrumentos de evaluación

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	P1	P2	P3
AP1. Cálculo algebraico				X	X										X	X	X	X
AP2. Tipificación/Destipificación					X	X									X	X	X	X
AP3. Cálculo prob (tablas)															X	X	X	X
AP4. Resolución mediante simulación																		X

**Tabla 7.3.4.** Enunciados presentes en los instrumentos de evaluación

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	P1	P2	P3
E2. Mediante límite ordinario					X													
E4. Suma v.a.i. i.d.					X											X	X	X
E5. Enunciado general				X	X						X	X			X	X	X	X
E6. Enunciado intuitivo	X	X	X			X										X	X	X

**Tabla 7.3.5.** Propiedades presentes en los instrumentos de evaluación

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	P1	P2	P3
P1. Media suma				X	X									X	X	X	X	X
P2. Varianza suma				X	X				X						X	X	X	X
P3. Distribución media muestral				X	X												X	X
P4. Mejora de la aproximación con $n$	X					X	X		X	X	X	X					X	X
P5. Transformaciones lineales				X	X								X					X
P6. Medias muestrales en dos poblaciones																		X
P7. Aproximación d.discreta por continua	X		X		X		X								X		X	X
P8. Aprox. Distribuciones clásicas						X						X				X		X
P10. Estimador máxima verosimilitud									X	X	X		X					X
P11. Estimador momentos										X								
P12. Corrección de continuidad			X												X	X	X	X

**Tabla 7.3.6.** Argumentos presentes en los instrumentos de evaluación

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	P1	P2	P3
A1. Demostración formal algebraica				X					X						X	X	X	X
A2. Caso especial de un resultado general	X	X			X					X					X	X	X	X
A3. Simulación manipulativa							X											
A4. Simulación con ordenador						X	X											X
A5. Ejemplos /contraejemplos										X	X	X						X
A6. Conclusión o tomar una decisión en base al teorema																X	X	X

## 7.4. RESULTADOS EN EL CUESTIONARIO

Una vez descritos los instrumentos de evaluación, y analizado su contenido, se llevó a cabo la evaluación para evaluar el significado personal adquirido por los estudiantes y compararlo con el *significado institucional local* planificado en el diseño del proceso de estudio del teorema central del límite (Capítulo 5).

A continuación, se describen los resultados obtenidos en el cuestionario. Para ello, en primer lugar, se presenta la frecuencia de respuestas a cada distractor en cada ítem. Seguidamente se hace un estudio global del número total de ítems correctamente resueltos por cada alumno y de las interrelaciones entre los ítems. Finalmente, se identifican tipologías de comprensión del teorema, que se relacionarán con las

configuraciones cognitivas diferenciadas sobre el mismo, caracterizadas por los elementos concretos de significado correctamente adquiridos.

Los 15 ítems se completaron en dos sesiones diferentes; la primera (ítems del 1 al 7) con asistencia de 134 alumnos en una de las sesiones de clase, y la segunda sesión (ítems 8 a 15) como parte de la prueba final del semestre académico. Por lo tanto, en las Tablas 7.4.1.8 a 7.4.1.16 los porcentajes de aciertos son obtenidos de un total de 106 estudiantes, excluyendo a 28 alumnos que no se presentaron, mientras que en las primeras los porcentajes se refieren al total de alumnos.

#### 7.4.1. RESPUESTAS A CADA ÍTEM

A continuación (Tablas 7.4.1.1 a 7.4.1.16) se presenta un análisis detallado de resultados en cada ítem.

**Tabla 7.4.1.1.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 1 (n=134)

Ítem 1. La aproximación normal a la distribución binomial $B(n,p)$ es suficientemente buena cuando:		
	Frecuencia	Porcentaje
a) $n$ es menor que 30 y $np$ aproximadamente igual a 5	6	4,5
b) $n$ es mayor que 30 y $p$ menor que 0,05	21	15,7
<b>c) <math>n</math> es mayor que 30 y <math>p</math> aproximadamente igual a 0,5</b>	<b>79</b>	<b>59,0</b>
d) $n$ mayor que 30 y cualquier $p$	26	19,4
e) $n$ mayor que 30 y $p$ igual a 0,9	2	1,5

El ítem 1 se refiere al campo de problemas CP1: aproximación binomial por la distribución normal y evalúa la comprensión intuitiva del teorema de Laplace-De Moivre, y la comprensión de la sensibilidad de los parámetros. Se observa que un 59% de estudiantes reconocen las condiciones que aseguran la precisión de aproximación (opción c). Los errores se distribuyen en un 41% de alumnos, y son relativos a las condiciones de aproximación, siendo el orden de importancia el siguiente: el 19% sólo tiene en cuenta el tamaño muestral y no el parámetro (opción d), un 17% confunde las condiciones del parámetro para la aproximación (opciones b y e) y un 5% considera que la aproximación es buena para tamaños pequeños de muestra (opción a).

Méndez (1991) postula cuatro propiedades básicas que deben entenderse para poder lograr una comprensión sólida del teorema. El ítem 1 se puede considerar un caso particular de la tercera y cuarta propiedad: “La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada a medida que se incrementa el tamaño muestral y aproximadamente normal independiente de la forma de la distribución en la población” y “La forma de la distribución muestral crece en altura y decrece en dispersión a medida que el tamaño

muestral crece”. Comparada con aquella investigación, los estudiantes muestran mayor dominio del vocabulario técnico.

En relación al esquema de razonamiento en inferencia estadística (ERIE) (Moreno, 2003), más de la mitad del grupo se ubica en el nivel analítico de aplicación, relacionando tres aspectos de convergencia óptima del teorema; influencia del tamaño de la muestra en la estimación, sensibilidad del parámetro  $p$  y condición que  $np = nq = 15 > 5$ . De los distractores, un quinto del grupo utilizó el razonamiento de transición considerando sólo una muestra suficientemente grande para la bondad del ajuste de aproximación (d), y un porcentaje menor razonó equivocadamente en un nivel cuantitativo (b y d) al considerar dos aspectos, un tamaño de muestra grande pero  $np$  o  $nq$  no cumplen la condición.

**Tabla 7.4.1.2.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 2 (n=134)

	Frecuencia	Porcentaje
a) $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 25,5)$	27	20,1
b) $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 24,5)$	<b>99</b>	<b>73,9</b>
c) $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 24)$	0	0,0
d) $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 25)$	6	4,5
e) $P(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 25,5)$	2	1,5

La solución correcta a este ítem tiene implícito reconocer y definir la variable aleatoria binomial como suma de variables de Bernoulli. Del grupo curso (Tabla 7.4.1.2), un 74% aplicó correctamente la corrección de continuidad (b). De los errores observados, un 25% presenta confusión sobre los límites de la corrección de continuidad al calcular la probabilidad (opciones a y d); un 2% (opción e) tiene problemas en traducir el lenguaje a una desigualdad. No se ha encontrado investigaciones previas que hayan analizado la comprensión de la corrección de continuidad por parte de los estudiantes.

**Tabla 7.4.1.3.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el ítem 3 (n=134)

Ítem 3. La aproximación normal mejora cuando el intervalo a calcular en probabilidad:		
	Frecuencia	Porcentaje
a) Se acerca al extremo superior de valores de la distribución binomial	13	9,7
b) Se aparta del término central de valores de la distribución binomial	9	6,7
c) Se acerca al extremo inferior de valores de la distribución binomial	10	7,5
<b>d) Se acerca al término central de valores de la distribución binomial</b>	<b>89</b>	<b>66,4</b>
No responden	13	9,7

En el ítem 3 (Tabla 7.4.1.3) se mide la comprensión de otro factor que influye en la buena aproximación a la binomial: la forma de la distribución binomial mejora en simetría y apuntamiento en torno al valor esperado de la variable, cuando aumenta el valor de  $n$ . Un 66% de estudiantes valora la mejora de la aproximación normal a la binomial al calcular la probabilidad de un intervalo de valores centrales de la distribución (opción d). En cambio, respecto de los errores, un 23,9% espera mejor exactitud en la convergencia en valores alejados de los centrales (opciones a, b y c). Este ítem corresponde a la propiedad cuatro de Méndez y el porcentaje de alumnos que la comprenden es mayor que la obtenida en la investigación citada.

**Tabla 7.4.1.4.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el ítem 4 (n=134)

Ítem 4. Una máquina llena paquetes de azúcar de 1 k. El error promedio de llenado de cada paquete es 2 gramos y la desviación estándar 3 gramos. Si se llenan 400 paquetes a la hora, el cálculo de la probabilidad aproximada de que el exceso de azúcar sea menor que 750, sería:		
	Frecuencia	Porcentaje
a) $P\left(\frac{\bar{X}-2}{3} < -0,83\right)$	5	3,7
b) $P\left(\frac{\sum X_i - 800}{3/20} < -\frac{5}{6}\right)$	70	52,2
c) $P\left(\frac{\bar{X} - 2}{0,15} < -\frac{5}{6}\right)$	<b>50</b>	<b>37,3</b>
d) $P\left(\frac{\sum X_i - 400}{9} < -0,83\right)$	9	6,7

El ítem 4 (Tabla 7.4.1.4) presentó mayores dificultades del grupo, ya que de los 134 estudiantes, sólo un 37% identificó correctamente las operaciones necesitadas en la estandarización para el cálculo de una probabilidad en la distribución asintótica de la media muestral en una muestra suficientemente grande. Se observa que la mayor frecuencia de error, con un 52%, fue considerar la suma de variables aleatorias, en lugar de la media, y no tener en cuenta que la desviación estándar de la suma debe ser 60 y no  $0,15=3/20$ . Un 7% confunde la esperanza de la variable suma y también de la varianza, y un 4% comete errores de estandarización de la varianza del promedio de la muestra.

**Tabla 7.4.1.5.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 5(n=134)

Ítem 5. Sea $X_i$ variables aleatorias independientes con la misma distribución. Señala cuál de los siguientes enunciados es falso		
	Frecuencia	Porcentaje
a) La $P(a < \sum_{i=1}^{30} X_i < b)$ se puede calcular mediante el área bajo una curva normal entre a y b	9	6,7
b) Para $n$ observaciones grandes de una población con una media finita $\mu$ y una varianza finita $\sigma^2$ , la distribución de muestreo de la suma $S_n = \sum X_i$ se puede aproximar con una función de densidad normal cuya media es $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$ .	4	3,0
c) La función de densidad $f_n$ de la $\sum_{i=1}^{30} X_i$ se aproxima a la función de densidad de una distribución normal, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$	51	38,1
<b>d) Si <math>X_i</math> tiene recorrido 1,2,3 con probabilidades respectivas 0,2, 0,5, 0,3, entonces, para <math>n = 30</math>, la expresión <math>\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{npq}}</math> sigue una distribución normal N(0,1).</b>	<b>63</b>	<b>47,0</b>
e) Cuando $n$ es grande, la distribución de la media muestral $\bar{X}$ se aproxima a la distribución normal $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ con media $\mu$ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$ .	7	5,2

El ítem 5 (Tabla 7.4.1.5) pone a prueba los distintos enunciados del teorema central del límite dados a lo largo de las tres lecciones. Un 47% de estudiantes distingue el enunciado falso del teorema, encontrando un error en la estandarización de una variable con distribución discreta acotada de la distribución binomial (opción d). De las respuestas erróneas, un 38% no reconoce el enunciado del teorema como límite de una sucesión de funciones (opción c), lo que puede deberse a que en la lección 3 nos limitamos sólo a enunciar el teorema y desarrollar su demostración. Sólo un 5% no asimila el enunciado clásico a través del promedio muestral, presente en los textos. Un 9,7% no reconoce el teorema para la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, al aplicarlo a un rango de valores para un tamaño muestral grande. No se ha encontrado investigaciones relacionadas con este ítem.

**Tabla 7.4.1.6.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 6(n=134)

Ítem 6. La rapidez con la que la suma de variables aleatorias se aproxima a la distribución normal depende: (contesta cada apartado)	Frecuencias		Porcentaje de aciertos
	V	F	
<b>a) De las distribuciones de las v.a. <math>X_i</math></b>	<b>78</b>	56	<b>58,2</b>
<b>b) Del tamaño de la muestra <math>n</math></b>	<b>124</b>	10	<b>92,5</b>
<b>c) De los valores de los parámetros</b>	<b>90</b>	44	<b>67,2</b>

La importancia del ítem 6 (Tabla 7.4.1.3) es que pone en juego la comprensión intuitiva del teorema y el reconocimiento de las tres componentes que deben considerarse para una buena aproximación, cualquiera sea la distribución de origen. Un 93% de los estudiantes asume la importancia del tamaño muestral en la precisión de la aproximación (b), 67% comprende la sensibilidad de los parámetros (c), y un 58% considera la forma de la distribución poblacional de origen (a). Otra mirada de estos resultados desde la frecuencia de errores es la siguiente: 42% olvida la importancia del tipo de distribución (a) y 33% de los valores de los parámetros (c) para la rapidez de la convergencia. Se puede considerar la opción b) dentro de la propiedad tres de Méndez y la comprensión de nuestros estudiantes fue mayor que la citada en aquella investigación.

De acuerdo al esquema de razonamiento de Moreno (2003), se observa un nivel analítico con un promedio de 72,6% de alumnos que valora la influencia del tamaño muestral relacionándola con la distribución inicial y los valores de sus parámetros.

**Tabla 7.4.1.7.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 7(n=134)

Ítem 7. La aproximación a la normal es bastante buena para valores muy pequeños de $n$ en variables aleatorias con distribución: (contesta cada ítem):	Frecuencias		Porcentaje de aciertos
	V	F	
a) Asimétrica	21	<b>113</b>	84,3
<b>b) Simétrica</b>	<b>110</b>	24	<b>82,1</b>
<b>b) Uniforme</b>	<b>97</b>	37	<b>72,4</b>
c) Sesgada	36	<b>98</b>	73,1

El ítem 7 (Tabla 7.4.1.7) evalúa la comprensión de los estudiantes de las actividades de simulación que han desarrollado a lo largo del proceso de estudio del teorema. Un 82% de alumnos asimila la convergencia rápida en distribuciones de probabilidades simétricas y un 72% en el caso particular de la distribución uniforme discreta o continua. Se puede mencionar, según el esquema ERIE, que una gran parte del grupo utilizó el razonamiento cuantitativo al considerar dos aspectos relevantes en la aproximación.

Los errores manifestados fueron los siguientes: Un 27% de estudiantes no comprendió la dependencia de las formas de las gráficas distribucionales, aunque se trabajó en clase la forma cómo es afectada la distribución binomial para distintos valores del parámetro  $p$ , mostrando gráficas sesgadas para valores extremos. Más aún, se compararon las diferencias de cálculo de esperanzas empíricas y teóricas para muestras pequeñas. Un 16% de estudiantes no comprende que si la distribución de la

población es asimétrica se requerirán muestras de tamaño grande para la aplicación del teorema.

**Tabla 7.4.1.8.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 8 (n=106)

Ítem 8. Responda Verdadero (V) si la proposición es siempre verdadera. En caso contrario justifique sustituyendo las palabras en el casillero Falso para las que hagan siempre verdadera la proposición:	Frecuencias		Porcentaje de aciertos
	V	F	
Una distribución muestral describe los valores que tomaría un estadístico en muchas repeticiones de una muestra o de un experimento en las mismas condiciones.	<b>87</b>	19	<b>82,1</b>

El ítem 8 (Tabla 7.4.1.8) evalúa la comprensión de un tópico clásico de un curso de estadística universitaria: el estudio de muestras aleatorias, que conllevará bajo ciertas condiciones a la necesidad del estudio del teorema central del límite. Del grupo de 106 alumnos que contestaron el ítem, un 82% comprende y reconoce el objetivo de la distribución muestral. Una de las respuestas incorrecta asoció esta definición con el concepto de variable. Un 18% no advierte el estudio de estadísticos obtenidos de muestras, que incidirá en la comprensión del teorema central del límite y su aplicación en los contrastes de hipótesis (Vallecillos, 1994).

**Tabla 7.4.1.9.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 9 (n=106)

Ítem 9. La desviación estándar de la media muestral aumenta a medida que crece el tamaño de la muestra.	Frecuencias	%
Verdadero	46	43,4
Falso (correcto) no justifica	9	8,5
Falso (correcto) justifica correctamente	51	48,1

En el ítem 9 (Tabla 7.4.1.9) un 43% de los estudiantes dio como verdadera la proposición, siendo incorrecta y por tanto tienen dificultades en la interpretación de la estimación de la media muestral, como también de la bondad del ajuste de aproximación. Un 57% respondió falsa (respuesta mayoritaria) es decir, que *disminuye* la desviación estándar del promedio muestral al crecer la muestra. Sin embargo, hubo respuestas con las siguientes argumentaciones erróneas: permanece constante, aumenta según la variabilidad de los datos, sólo si la muestra es representativa de la población, la varianza aumenta, no depende del tamaño de la muestra, se aproxima más a la distribución normal. Este ítem se relaciona con la propiedad dos de Méndez que dice: la varianza de la distribución muestral es menor que la de la población y también fue analizada en las investigaciones de delMas y Garfield y Chance (1998).

**Tabla 7.4.1.10.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 10 (n=106)

Ítem 10. Las representaciones gráficas de todas las distribuciones muestrales tienen forma simétrica.	Frecuencias	%
Verdadero	30	28,3
Falso (correcto) no justifica	14	13,2
Falso (correcto) justifica correctamente	62	58,5

Los resultados del ítem 10 (Tabla 7.4.1.10) permiten apreciar que un 28% del grupo curso ha respondido de forma incorrecta (opción Verdadera) y no conciben que *algunos* histogramas de las distribuciones muestrales tengan forma asimétrica, dependiendo de los factores anteriores mencionados. Wayner (1992) enfatiza las dificultades sobre aspectos de comprensión de gráficos, determinando tres niveles de preguntas, desde nivel elemental a comprensión profunda de la estructura total de datos. Esta pregunta corresponde al nivel más alto en esta clasificación.

**Tabla 7.4.1.11.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 11 (n=106)

Ítem 11. Responda Verdadero (V) si la proposición es siempre verdadera. En caso contrario justifique sustituyendo las palabras en el casillero Falso para las que hagan siempre verdadera la proposición:	Frecuencias		Porcentaje de aciertos
	V	F	
La media muestral tiene una distribución aproximadamente normal cuando $n$ es suficientemente grande, independiente de la forma que tenga la población.	<b>80</b>	26	<b>75,5</b>

Un 72% respondió a la alternativa correcta que es falsa, con varias argumentaciones; por ejemplo, que puede ser asimétrica, que no ocurre en todas las distribuciones. También razonan a través de contraejemplos y gráficas realizadas, con comentarios como: la distribución chi-cuadrado y de Fisher no son simétricas, algunas distribuciones pueden dar forma exponencial, sólo la normal es simétrica, al aproximar a la distribución normal tiene forma simétrica, también que se cumple para  $n > 30$  y  $p$  cercano a 0,5, sólo cuando  $n$  es grande, que depende de su parámetro. Otra argumentación diferente fue que la distribución uniforme es simétrica para  $n$  pequeño.

De los estudiantes participantes del proceso de estudio del teorema, un 76% ha reconocido de forma general uno de los enunciados del teorema central del límite (Ítem 11, Tabla 7.4.1.11) y por otra parte, un porcentaje no despreciable de 24% no se ha familiarizado con este enunciado común en los textos de referencia del curso, que hace referencia al estadístico clásico y potente de la media muestral. Este ítem evalúa la propiedad tres de Méndez. Los resultados fueron mejores que los de aquél autor.

**Tabla 7.4.1.12.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el ítem 12 (n=106)

Ítem 12. Responda Verdadero (V) si la proposición es siempre verdadera. En caso contrario justifique sustituyendo las palabras en el casillero Falso para las que hagan siempre verdadera la proposición:	Frecuencias		Porcentaje de aciertos
	V	F	
Cuando el estadístico de prueba es $t$ y el número de grados de libertad se hace muy grande, el valor crítico de $t$ está bastante próximo a la normal estándar $z$ .	<b>94</b>	12	<b>88,7</b>

En la Tabla 7.4.1.12 se observa que un 89% de los estudiantes asimiló la bondad de la convergencia de la distribución t-student, distribución especial e importante en inferencia estadística, a la distribución normal. Un 11% tiene problemas al no distinguir los grados de libertad o tamaño de la muestra (valores mayores que 30) que se establece en las tablas estadísticas para que la aproximación numérica sea muy buena. El ítem 12 se considera un caso particular de la propiedad tres de Méndez. Al igual que el ítem anterior los resultados fueron mejores en nuestra investigación.

**Tabla 7.4.1.13.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el ítem 13 (n=106)

Ítem 13. El valor normal estándar se usa para todas las inferencias sobre proporciones de la población.	Frecuencias	%
Verdadero	84	79,2
Falso (correcto) no justifica	15	14,2
Falso (correcto) justifica correctamente	7	6,6

El ítem 13 sólo fue contestado correctamente por un 21% del estudiantado, que consideró la afirmación es válida sólo en muestras de tamaño grande. Es alto el porcentaje que contestó equivocadamente que la distribución normal estándar se usa en inferencias para cualquier tamaño de muestra sobre la proporción. Esto concuerda con lo que afirman Hawkins, Joliffe y Glickman (1992) sobre el uso de la tipificación de la normal estándar en general, donde la dificultad no recae en el cálculo, sino más bien al considerarla como supuesto en la estimación relacionada imperiosamente con el teorema central del límite.

**Tabla 7.4.1.14.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el ítem 14 (n=106)

Ítem 14. El valor esperado de la distribución muestral de las medias muestrales $\bar{X}$ es igual a la media de la muestra.	Frecuencias	%
Verdadero	86	81,1
Falso (correcto) no justifica	6	5,7
Falso (correcto) justifica correctamente	14	13,2

El ítem 14 (Tabla 7.4.1.14) también fue difícil de contestar para los futuros ingenieros. Sólo un 19% anotó falsa esta proposición, al comparar las medias del

estadístico y de la población con argumentos tales como: *El valor esperado del promedio muestral es igual a la media poblacional,  $E(\bar{x}) = \mu$ ; Ocurre en la distribución normal; La afirmación debe modificarse, porque no es igual.* Hubo otras respuestas no afortunadas al cambiar en el ítem igual por similar, indicar que se cumple siempre que sea insesgado o que no siempre se cumple. Un 81% de los estudiantes confunde los conceptos de parámetro y estadístico obtenidos de las muestras, confusión que ha sido destacado por Vallecillos (1994) en estudiantes de otras especialidades.

Corresponde también este ítem a la propiedad uno de Méndez: La esperanza de la distribución muestral de la media muestral es igual a la media de la población, a medida que el tamaño de la muestra tiende al infinito. Al igual que en la investigación de Méndez, los estudiantes evidencian una carencia de comprensión intuitiva de la distribución de la media muestral, no así en el procedimiento formal de esta propiedad. Comparado con el constructo de población y muestra del esquema ERIE de Moreno (2203), el razonamiento analítico no fue bien utilizado para diferenciar parámetro y estadístico, es decir razonaron en el nivel de transición sólo formal y no en el contexto intuitivo.

**Tabla 7.4.1.15.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a distractores en el Ítem 15 (n=106)

Ítem 15. La experiencia indica que 50% de todos los estudiantes en un curso cometerán errores de programación, ¿Cuál de estos casos te parece más probable? Indica por qué has elegido esta opción:		
	Frecuencia	Porcentaje
a) <b>Que entre los próximos 10 estudiantes seleccionados 8 o más cometan errores de programación.</b>	13	12,3
b) Que entre los próximos 100 estudiantes seleccionados 80 o más cometan errores de programación.	12	11,3
c) Las dos cosas anteriores son igual de probables.	81	76,4

En el ítem 15, sólo un 12% de estudiantes acertó en considerar más probable el caso de muestra más pequeña como la de  $n=10$ . Un 76% no diferenció el tamaño de la muestra en el cálculo de probabilidad, lo que puede justificarse por la heurística de la representatividad (Kahneman y cols., 1982). También, hubo un 11% que señaló más probable el evento de cometer error de programación asociada a un tamaño de muestra grande, resultado que también fue encontrado por Serrano (1996) en su investigación con futuros profesores. En este ítem las justificaciones fueron diferentes en las tres opciones. A continuación se describen seis categorizaciones encontradas en los alumnos y que son los siguientes:

## Capítulo 7

1. A mayor tamaño de muestra disminuye la probabilidad de ocurrencia (Justificación algebraica correcta). Algunos estudiantes calcularon la probabilidad aproximada para los dos valores de  $n$  (como el ejemplo que se incluye a continuación) en forma simbólica. Ello supone reconocer la aplicación de la distribución binomial en este contexto y utilizar el campo de problemas CP1 (aproximación a la binomial), calcular correctamente la media y varianza de la suma de variables aleatorias (propiedades P1 y P2), aproximar una distribución discreta por una continua (P7), usar la transformación algebraica (AP1), tipificar (procedimiento AP2) y calcular probabilidades con tablas o calculadora (AP3), aplicar la corrección de continuidad (propiedad P12). Realizan un argumento algebraico y deductivo (A1) mediante el cálculo correcto de probabilidades y razonan de lo general a lo particular (A2). El teorema central del límite es aplicable en ambos casos, ya que satisfacen la regla empírica que  $np$  y  $nq$  son mayores o iguales a 5 (Walpole y Myers, 1999, pp. 217). A continuación se muestra un ejemplo:

$$\begin{aligned}
 & X \sim \text{bin}(n, p) \Rightarrow Z = \frac{X - N/np}{\sqrt{npq}} \\
 (1) \quad & n=10 \quad P(X \geq 8) \Rightarrow P(X \geq 7.5) \text{ -- error por continuidad} \\
 & \text{Ej: } X \sim N(10 \cdot 0.5, 10 \cdot 0.5) \\
 & \text{Ej: } Z \sim N(0, 1) \Rightarrow 1 - P(Z < \frac{7.5 - 5}{\sqrt{2.5}}) \\
 & 1 - P(Z < \frac{2.5}{\sqrt{2.5}}) = 1 - \Phi(1.58) = 0.055 \\
 & \text{Ej: que no cometa errores de programación es de 0,055} \\
 (2) \quad & n=100 \quad P(X \geq 79) \text{ -- error por continuidad} \\
 & \text{Ej: } X \sim N(100 \cdot 0.5, 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5) \\
 & \text{Ej: } Z \sim N(0, 1) \Rightarrow 1 - P(Z < \frac{79 - 50}{\sqrt{25}}) \\
 & 1 - \Phi(5.8) = 1 - 1 = 0 \\
 & \text{Ej: que no cometa errores de programación es de 0}
 \end{aligned}$$

2. También se registró el desarrollo de la probabilidad mediante la binomial para  $n=10$  y mediante la aplicación del teorema para  $n=100$ . Los elementos de significado usados serían similares al caso anterior, considerando las propiedades “si  $n$  es grande se puede usar el teorema central del límite” (propiedad P4: la aproximación de la suma de variables aleatorias mejora para muestras grandes), “la aproximación de una distribución discreta por una continua” (P7) y “usando la corrección de continuidad” (P12).

“Si  $X_i \sim \text{bin}(n=10, p=1/2)$  entonces  $P(X \geq 8) = 0,055$

Si  $X_i \sim \text{bin}(n=100, p=1/2)$  entonces  $P(X \geq 79,5) = 9,87 \times 10^{-10}$ ”.

3. A mayor tamaño de muestra disminuye la probabilidad de ocurrencia (Justificación algebraica sin usar corrección de continuidad). Varios estudiantes optaron correctamente por la opción a), pero no aplicaron en el desarrollo algebraico (AP1, AP2 y AP3) la propiedad de corrección de continuidad (P12); al aproximar una variable discreta con distribución binomial por una variable continua de distribución normal (P7). Un ejemplo de este tipo de respuesta se muestra a continuación para el caso en que  $n=100$ , usando las propiedades P1 y P2 y mediante las validaciones (A1 y A2).

$$\begin{aligned}
 a) \quad n=10 \quad P(X \geq 8) &= P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{8} 0,5^8 \cdot 0,5^2 + \binom{10}{9} 0,5^9 \cdot 0,5 + \binom{10}{10} 0,5^{10} \\
 &= 0,0547 \\
 b) \quad n=100 \quad P(X \geq 80) &\sim N(\mu, \sigma^2) \\
 &\sim (50, 25) \quad \Rightarrow 1 - P(X < 80) = 1 - P\left(\frac{X-50}{5} \leq \frac{80-50}{5}\right) = 1 - \Phi(6) \approx 0
 \end{aligned}$$

4. A mayor tamaño de muestra disminuye la probabilidad de ocurrencia (Justificación algebraica con algún error o bien no la completa). Nueve fueron los alumnos que intentaron validar su respuesta algebraicamente (A1); algunos quedaron a mitad del desarrollo, con errores de tipificación (AP2) en la varianza del estadístico de la suma (P2) y por ende el procedimiento de cálculo de la probabilidad (AP3) es incorrecto. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento algebraico incorrecto sin usar también la propiedad P12.

Indica por qué has elegido esta opción:

$$\begin{aligned}
 & p=0,5 \quad n=10 \quad X \sim \text{Bin}(n, p) \quad \left. \begin{array}{l} p=0,5 \quad n=100 \quad X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow \text{RXTCL} \quad X \sim N(50, 25) \\ P(X \geq 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{80-50}{5}\right) \\ = 1 - \Phi(6) \approx 0 \end{array} \right\} \\
 & \Rightarrow \text{RXTCL} \quad X \sim N(5, 2,5) \\
 & P(X \geq 8) = 1 - P\left(Z \leq \frac{8-5}{\sqrt{2,5}}\right) \\
 & = 1 - \Phi(1,2) \\
 & = 0,1151 \\
 & P(X \geq 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - P\left(Z \leq \frac{80-50}{5}\right) \\
 & = 1 - \Phi(6) \\
 & = 0,1151
 \end{aligned}$$

5. A mayor tamaño de muestra mayor probabilidad de ocurrencia (Justificación verbal incorrecta). Algunos alumnos piensan que debido a la convergencia en probabilidad, al crecer el tamaño muestral, aumentarán las posibilidades de éxito. Algunas respuestas en esta categoría fueron: Se presenta un ejemplo en que se reconoce el campo CP1 y la propiedad P4: que la aproximación mejora según aumenta el número de sumandos, pero obtiene incorrectamente una conclusión (argumento A6).

“Son los dos probables  $p=1/2$ , se trata la misma proporción porque a medida que aumentamos el  $n$  la probabilidad referida a la muestra va aumentando”.

6. *Heurística de representatividad*: No se tiene en cuenta el tamaño de la muestra (justificación verbal incorrecta). Como se observa en la tabla 7.4.1.16, es alto el porcentaje de estudiantes que presentaron insensibilidad al tamaño muestral, considerando que en los dos tamaños muestrales dados el porcentaje de cometer error en la programación es el mismo. Estas concepciones erróneas fueron principalmente declaradas de forma verbal, señalando por ejemplo: “*El parámetro sigue siendo el mismo, sólo estamos variando el tamaño de la muestra; son equivalentes ya que sólo se está multiplicando por un escalar 10*”; “*No importa el tamaño de la muestra pues el enunciado habla del 50% del total entonces esta información se puede ocupar para cualquier muestra*”. La solución más frecuente se muestra a continuación, en que no se reconoce el campo de problema CP1 y se comparan sólo las proporciones. Tampoco se usan las estrategias, propiedades y argumentos que otorga el teorema en una solución algebraica aproximada.

*“Porque al sacar la proporción de estudiantes en las dos opciones dio el mismo resultado, es decir, al sacar la probabilidad de que 8 de 10 alumnos cometa errores es 0,8 y la probabilidad de que 80 de 100 alumnos cometan errores es 0,8”.*

**Tabla 7.4.1.16.** Frecuencias y porcentajes de respuestas a justificaciones en el Ítem 15

Ítem 15. La experiencia indica que 50% de todos los estudiantes en un curso cometerán errores de programación, ¿Cuál de estos casos te parece más probable? <i>Indica por qué has elegido esta opción:</i>		
	Frecuencia	Porcentaje
1. Justificación algebraica correcta usando corrección de continuidad	2	1,9
2. Justificación algebraica correcta sin usar corrección de continuidad	8	7,5
3. Justificación algebraica incorrecta	9	8,5
4. Justificación verbal incorrecta	10	9,4
5. Heurística de representatividad	48	45,3
6. No justifica	29	27,4

Las frecuencias de tipos de justificaciones encontradas en el ítem 15 se presentan en la tabla 7.4.1.16. Se registraron un 27% de respuestas sin justificación alguna; de las cuales 23 alumnos eligieron la opción c), 3 la a) y 3 la b). Además, un 54,7% de los 106 alumnos justificaron en palabras, un 17,9% lo hizo mediante formulación algebraica, de los cuales un 9% tuvo problemas con el desarrollo algebraico y de las 10 respuestas correctas sólo 2 utilizaron la corrección de continuidad. Se destaca el alto porcentaje de alumnos que muestran la heurística de la representatividad, incluso después de la enseñanza formal del teorema central del límite y de las variadas actividades de simulación.

#### 7.4.2. RESULTADOS GLOBALES

Para completar el estudio del cuestionario, se presenta en las Figuras 7.4.2.1 a 7.4.2.3 la distribución del número total de respuestas correctas en la primera y segunda parte y en el total (teniendo en cuenta que el número de alumnos participantes en cada caso varía). En todos los casos el número medio de respuestas correctas es superior a la media teórica (mitad de preguntas) y hay normalidad aproximada de las distribuciones. Ello sugiere un primer criterio de idoneidad cognitiva del proceso de estudio, aunque, por supuesto, se aprecia una variabilidad en los resultados, oscilando el número de respuestas correctas en el global de la prueba entre 5 y 19.

Figura 7.4.2.1. Distribución del número de ítems correctos en la primera parte del cuestionario (12 ítems)

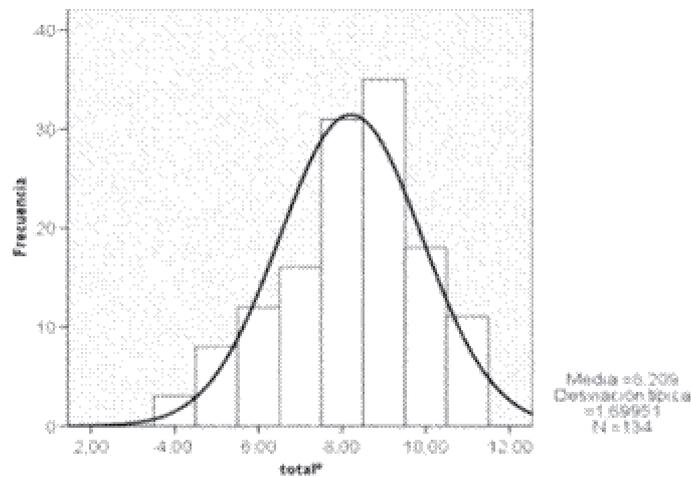
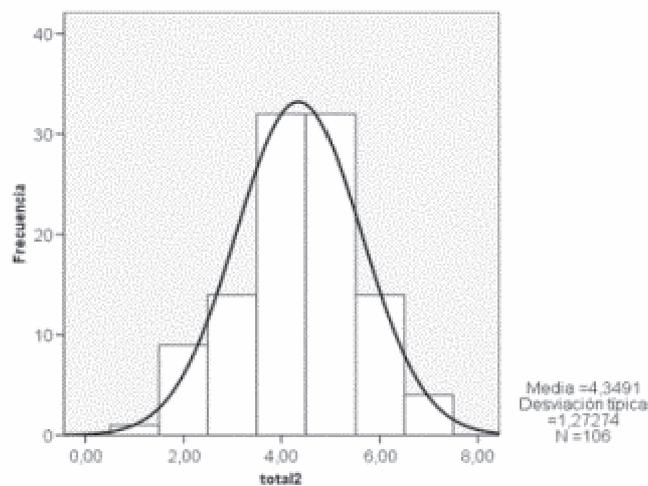


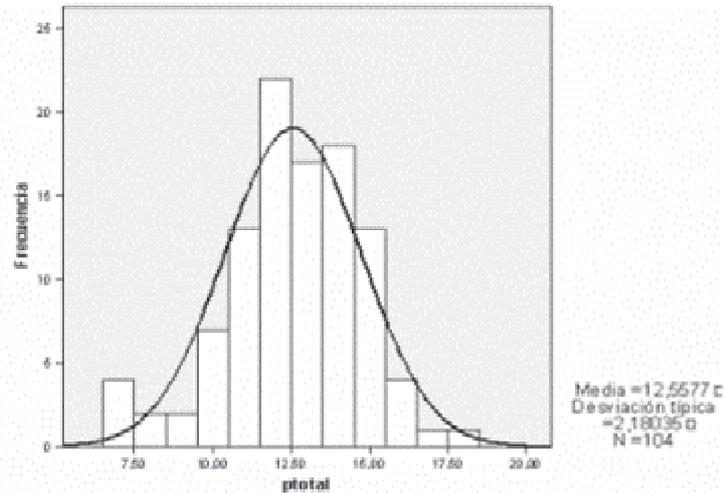
Figura 7.4.2.2. Distribución del número de ítems correctos en la segunda parte del cuestionario (8 ítems)



El estudio se complementa con un análisis cluster de la matriz alumnos por respuestas a los diferentes ítems, con la finalidad de mostrar agrupaciones de preguntas

y de estudiantes. Con frecuencia la clasificación es el primer paso para la comprensión de un fenómeno complejo, ya que el interés está en determinar, en el conjunto dado, clases tan diferenciadas como sea posible (Cuadras, 1991).

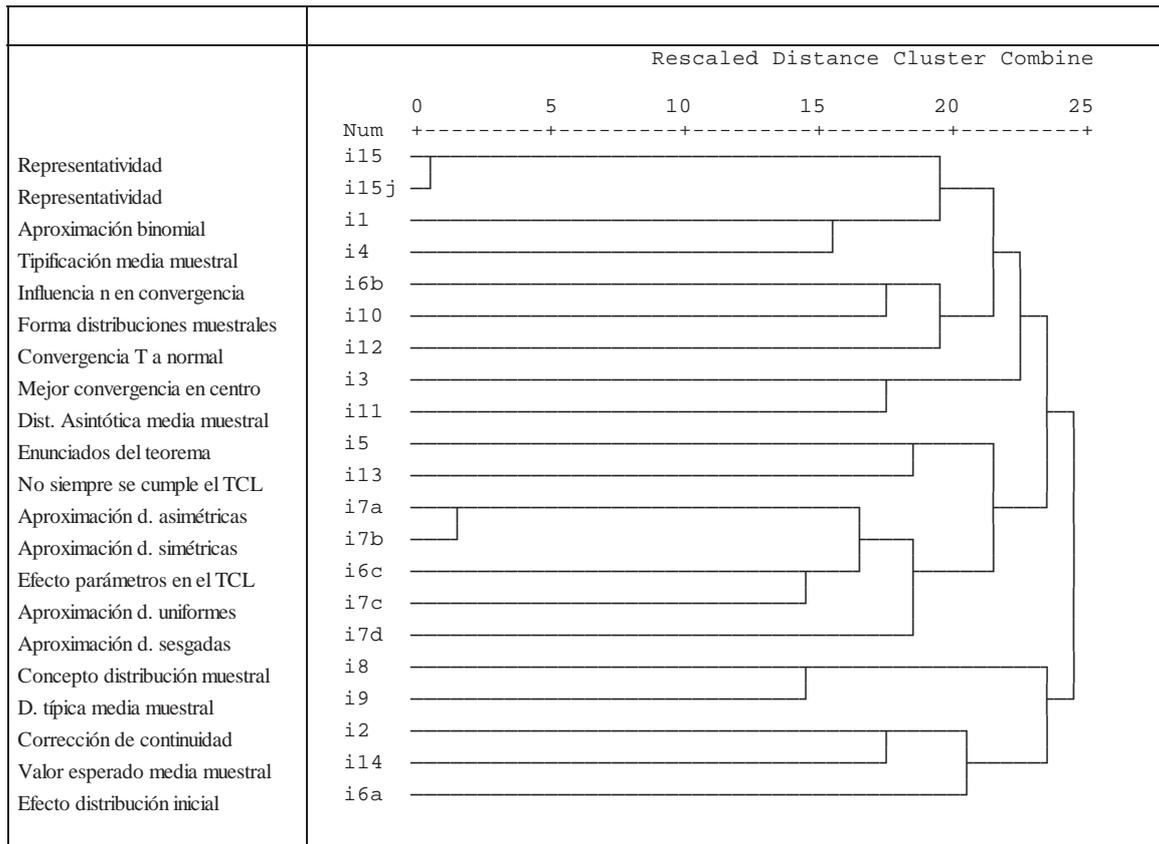
Figura 7.4.2.3. Distribución del número total de ítems correctos en el cuestionario (20 ítems)



Si con este procedimiento se llega a determinar la existencia de agrupaciones claramente diferenciadas, se puede lograr un doble objetivo: En primer lugar, las variables pertenecientes a un mismo grupo, podrían estar midiendo el mismo tipo de conocimiento, por lo que sería posible prescindir de alguna de ellas o sustituir todo el grupo por una función de las variables que lo integran. Por otro lado, el número de grupos claramente diferenciados determina el número de características esencialmente diferentes, por lo que este método puede ser un paso previo al análisis factorial, que en este caso no podemos aplicar por ser pequeño el número de alumnos, en relación al número de variables.

El análisis cluster de variables (respuestas correctas/incorrectas a los ítems), utilizando como distancia el coeficiente de correlación (aplicable al ser ítems dicotómicos) y criterio de aglomeración el vecino más próximo, se presenta en la Figura 7.4.2.4. De este modo, al formarse los grupos cada variable se une, en primer lugar con la que más correlaciona con ella. Cada grupo, una vez formado, se sustituye por su centro de gravedad y el proceso continúa iterativamente hasta agotar las variables. Se observa tres grandes grupos de variables, que a su vez se dividen en varios:

Figura 7.4.2.4. Resultados del análisis cluster de variables



- El primer grupo (ítems 15, 15j, 1, 4, 6b, 10, 12, 3, 11) engloba la aproximación binomial, heurística de representatividad (relacionada con ella), influencia de  $n$  y mejor convergencia en el centro de la distribución. La mayoría de los criterios se relacionan con el campo de problemas CP1 (Aproximación de la distribución binomial a la normal). La configuración que podría representar este grupo es de una comprensión intuitiva del teorema destacada en casos particulares de las distribuciones binomiales y t-student bajo la condición de bondad de la convergencia principalmente en el tamaño de la muestra.
- El grupo central (ítems 5, 13, 17 a y b, 6c, 7c, 7d) incluye los enunciados del teorema para la distribución muestral de la suma y el promedio que es alcanzada por la función densidad normal, condiciones de cumplimiento y aproximación en ciertos tipos de distribuciones (sesgadas/no, simétricas/no). Al distinguir las distintas formas del teorema, importancia del estudio paramétrico de las distribuciones, realizadas en actividades experimentales con ordenador, relacionamos este grupo con la configuración de simulación utilizada en la enseñanza.

- El último grupo (ítems 8, 9, 2, 14, 6a) se relaciona con el concepto de distribución muestral, valor esperado y varianza de la media muestral, corrección de continuidad y el efecto de la distribución de probabilidad inicial. Podemos caracterizar este grupo en una *comprensión formal algebraica del teorema* con sus elementos relacionados.

También se ha realizado un análisis cluster de sujetos, utilizando de nuevo el vecino más próximo como criterio de aglomeración y como distancia la distancia euclídea simple. En este caso se usó el algoritmo de k-medias (en lugar del cluster jerárquico), que permite solicitar un número concreto de grupos y examinar las posibles diferencias de los mismos en cuanto a las variables. Se probaron diferentes agrupaciones (número de grupos) con los criterios de que el número de estudiantes por grupo fuese razonable y que los grupos pudiesen interpretarse en relación al marco teórico. En la Tabla 7.4.2.1 se presentan los “promedios” (valor típico) de las diferentes variables para cada grupo, en la Tabla 7.4.2.2 los contrastes Anova de diferencia de medias por grupo para cada variable y en la Tabla 7.4.2.3 el número de sujetos por grupo.

**Tabla 7.4.2.1.** Centros de los conglomerados finales en el análisis cluster de sujetos

	3	4	1	2
i1	1	0	1	1
i2	1	1	0	1
i3	1	0	0	1
i4	0	0	1	0
i5	1	0	0	0
i6a	0	1	0	1
i6b	1	1	1	1
i6c	1	1	1	0
i7a	1	1	1	0
i7b	1	1	1	0
i7c	1	1	1	0
i7d	1	1	1	0
i8	1	1	1	1
i9	1	1	0	1
i10	1	1	1	1
i11	1	0	1	1
i12	1	1	1	1
i13	0	0	0	0
i14	0	0	0	0
i15	0	0	0	0
i15j	0	0	0	0
Total	15	12	12	10

**Tabla 7.4.2.2.** Resultados de ANOVA (Contraste de diferencia de medias)

	Conglomerado		Error		F	Sig.
	Media cuadrática	gl	Media cuadrática	gl		
i1	1,104	3	,215	100	5,131	,002
i2	1,283	3	,141	100	9,121	,000
i3	4,490	3	,109	100	41,180	,000
i4	3,585	3	,141	100	25,459	,000
i5	,680	3	,238	100	2,858	,041
i6a	1,943	3	,197	100	9,864	,000
i6b	,136	3	,070	100	1,948	,127
i6c	1,575	3	,185	100	8,519	,000
i7a	1,598	3	,087	100	18,278	,000
i7b	1,900	3	,092	100	20,678	,000
i7c	2,534	3	,133	100	19,035	,000
i7d	,763	3	,186	100	4,098	,009
i8	,258	3	,148	100	1,750	,162
i9	,827	3	,232	100	3,569	,017
i10	,831	3	,189	100	4,410	,006
i11	1,210	3	,159	100	7,622	,000
i12	,036	3	,105	100	,340	,796
i13	,587	3	,156	100	3,765	,013
i14	,381	3	,150	100	2,539	,061
i15	,467	3	,100	100	4,677	,004
i15j	,091	3	,088	100	1,040	,378

**Tabla 7.4.2.3.** Número de casos en cada conglomerado

Conglomerado	1	25,000
	2	18,000
	3	38,000
	4	23,000
Válidos		104,000
Perdidos		32,000

En lo que sigue se interpretan los grupos formados como “Configuraciones cognitivas” diferenciadas en la comprensión del teorema central del límite en los estudiantes de la muestra. Los ítems 6b, 8, 9, 12, 13, 14 y 15j no discriminan a los estudiantes. Todos los grupos presentan la heurística de la representatividad, generalizan excesivamente el teorema central del límite y confunden las diferentes medias (muestral, poblacional, valor esperado de la media).

- El grupo 3 (38 sujetos) es el que más respuestas correctas dan (15). Manifiesta una *comprensión casi completa del teorema central del límite*, aparte de los errores citados.
- El grupo 4 (23 estudiantes) con 12 respuestas correctas se caracteriza por fallar a la vez en los ítems 1 y 3, correspondientes al campo de problemas CP1 (aproximación binomial a la normal), donde no ha comprendido bien las condiciones de la

convergencia y la parte del rango de la variable donde hay mejor aproximación. *No relaciona la convergencia de la distribución binomial como un caso particular del teorema central del límite.* También presenta confusión sobre la convergencia de la media muestral (campo de problemas CP12) y propiedad P3 (distribución de la media muestral).

- El grupo 1 (25 estudiantes) también con 12 respuestas correctas es el único que *realiza correctamente la tipificación de la media muestral.* Al igual que el anterior falla en parte de las propiedades de la convergencia de la distribución binomial, aunque hace diferentes errores, como el concepto de distribución muestral.
- Por último el grupo 2 (18 estudiantes) con sólo 10 respuestas correctas, aunque parece comprender bien el campo de problemas CP1, *tiene errores en la tipificación, confunde los diferentes enunciados del teorema y las condiciones de convergencias* (diferentes apartados en los ítems 6 y 7).

En consecuencia, se puede diferenciar cuatro niveles de configuraciones cognitivas:

- Alumnos que consideran el problema de aproximación de la distribución binomial a la normal (CP1) y de la convergencia de la media muestral (CP12) como casos particulares del teorema central del límite e identifican los diferentes enunciados del teorema (Grupo 3) y condiciones de convergencia.
- Alumnos que no incluyen en el teorema los anteriores campos de problemas, aunque identifican sus diferentes enunciados y las condiciones de convergencia (Grupos 1 y 4) que se diferencian entre si por errores en algunos conceptos relacionados y en la correcta /incorrecta tipificación, es decir en algunos errores procedimentales.
- Alumnos que, aunque incluyen el caso de la aproximación de la distribución binomial a la normal (CP1) como un caso particular del teorema, no comprenden las condiciones de la convergencia y confunden los diferentes enunciados.

## 7.5. RESULTADOS EN PROBLEMAS ABIERTOS

Para completar la evaluación llevada a cabo con el cuestionario, se incluye en el mismo dos problemas abiertos que permitirían un análisis más detallado del uso de argumentos y procedimientos de los alumnos en relación con el teorema central del límite, los cuales fueron escasamente evaluados en el conjunto de ítems. Asimismo, se

quería analizar la capacidad de los estudiantes para poner en relación los diversos elementos de significado en la resolución de estos problemas.

Una vez recogidas las respuestas escritas de los alumnos a los problemas, se realizó un análisis de contenido de dichas respuestas, deduciendo a partir de los mismos una serie de variables estadísticas que posteriormente se analizarían. Para llevar a cabo este análisis de contenido, primero se definió los elementos de significado que podían aparecer en la resolución de los problemas. Para cada alumno y cada problema, analizamos si en su resolución el alumno había usado correcta o incorrectamente dicho elemento de significado, asignando un código a una variable definida para tener en cuenta dicho elemento. Una vez que realizamos la clasificación de elementos de significado, se procedió a la codificación de las respuestas de la siguiente manera:

- Blanco si el alumno no aplicó el elemento correspondiente;
- 1 si el alumno lo aplicó de forma correcta;
- 0 si el alumno lo aplicó de forma incorrecta.

De esta forma, resultaron 15 variables (una por cada elemento de significado interviniente) en el problema 1 y 22 variables en el problema 2. Se grabaron dos ficheros de datos, uno correspondiente a cada problema. En lo que sigue se describe los resultados obtenidos en estos problemas, cuyo contenido se analizó en la sección 7.3.

#### 7.5.1. RESULTADOS EN EL PROBLEMA 1

**Problema 1.** *Construcción de un Cruce.* Se supone que  $X$ , el número de accidentes por mes en un cruce de carreteras dado, tiene una distribución Poisson con  $\mu=6$ . Si el número de accidentes durante tres años es mayor o igual de 240, se deberá reconstruir el cruce debido a un programa otorgado por el estado. Aproxime la probabilidad de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia del estado. Comente el resultado.

En este problema se debe aplicar el teorema central del límite para el caso de la suma de variables aleatorias discretas independientes idénticamente distribuidas (CP2). El procedimiento de resolución clásico se basa en un desarrollo algebraico, relacionando varias propiedades expresadas en forma simbólica; y en que el alumno debe tomar una decisión situada en la ingeniería civil, basada en la aproximación de la distribución de Poisson por la normal. Los objetos matemáticos identificados en las respuestas de los 134 alumnos se describen a continuación.

### Campos de problemas

Sesenta y un alumnos hacen referencia explícita al teorema para la distribución de la suma de variables discretas no acotadas idénticamente distribuidas (CP2), ya que la distribución Poisson, aunque se presenta acotada en las aplicaciones, no lo está teóricamente. Un ejemplo es el siguiente: “*X es el número de accidentes por mes en un cruce, luego aplicando el principio de variables discretas no acotadas, se puede normalizar con media y varianza  $n$  veces el parámetro de la Poisson*”.

El resto de estudiantes que proporciona solución trabajaron mediante la v.a.  $X$  (número de accidentes en un mes) y no definieron la nueva v.a. suma  $\sum_{i=1}^{36} X_i$  (número total de accidentes en tres años), como se muestra en el siguiente ejemplo, donde el alumno divide el número total de accidentes cuya probabilidad se pide entre los 36 meses. Por tanto, estos alumnos no identificaron este problema como uno específico del teorema central del límite para el campo CP2.

*Sea  $X$ : número de accidentes por mes en un cruce de carreteras*

*$X \sim P(\mu=6)$  con aproximación  $X \sim N(6,6)$  y entonces se pide  $P(X \geq 240/36) = P(X \geq 6,67)$*

### Lenguaje

Un elemento característico del lenguaje usado en las aulas de estadística para ingenieros son las notaciones y la simbología, incluyendo las expresiones utilizadas en la formulación del teorema y la descripción de los conceptos relacionados. En este problema los alumnos, en su mayoría, utilizan símbolos para expresar la distribución de la suma de v.a., la estandarización a la distribución normal y el cálculo de la probabilidad de  $S_n$ ; también para la esperanza y varianza de la suma. En algunos casos hubo error de notación, utilizando  $X$  para la varianza en vez de la media muestral. No hubo representación gráfica.

### Enunciados

Un grupo numeroso de alumnos llega a enunciar explícitamente el teorema central del límite para la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (E4). Como el número de accidentes en tres años es la suma de una muestra aleatoria de tamaño 36 (meses) de los valores de la distribución de Poisson, aplicamos el teorema obteniendo que la suma  $S_n$  es aproximada por la distribución normal de

media y varianza 216. Por ejemplo, un alumno indica “ $S_n$ : el n° de accidentes en una muestra de 36 meses es una variable aleatoria discreta no acotada que puede ser aproximada por una distribución normal”.

Otros alumnos enuncian correctamente el teorema de forma general (E5), es decir, sin hacer referencia explícita a que la variable es discreta o de tipo Poisson. Estos alumnos utilizan el hecho que sea cual sea la distribución de la población, la media muestral es aproximada por una normal para un  $n$  grande. Un ejemplo, es el siguiente, en que el alumno usa también un procedimiento algebraico correcto (AP1), junto con una tipificación (AP2) correcta y cálculo de probabilidades correcto (AP3), y enuncia la forma clásica del teorema, en los textos, para el estimador de la media muestral.

aplicando TCC  
 $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$   
 estandarizando  
 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

$P(Z \geq \frac{6,666 - 6}{\sqrt{6/36}})$   
 $P(Z \geq 1,64)$

Un ejemplo de enunciados incorrecto del teorema se muestra a continuación, donde, aparte de no indicar que se requiere una muestra grande, hay error en el procedimiento de tipificación (AP2) y en la varianza del estadístico (P2):

“Por el teorema se aproxima  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , así  $P(\bar{X} > \frac{6,666 - 6}{\sqrt{6}})$ ”

Otro de los errores presentados fue mezclar los enunciados del teorema para la suma de variables aleatorias (E4) y para el promedio muestral (E5), como el siguiente caso, que usa la media de  $S_n$  y la varianza de la media muestral, es decir, conlleva un error en la varianza del estimador (P2):

como la muestra es de tamaño grande aplicamos  
 Teorema central del limite \*  
 $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$P\left(\frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{240 - 216}{2,144/\sqrt{36}}\right) \rightarrow P(Z > 1,63)$

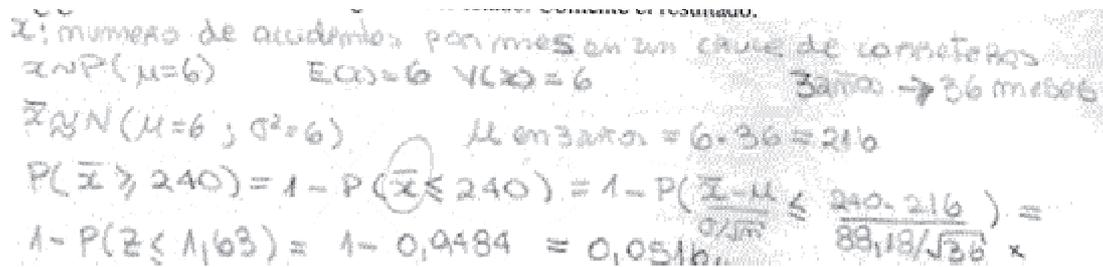
No se registró ningún enunciado intuitivo del teorema (E6), es decir, usando un gráfico o recordando algunas actividades hechas en clase.

**Procedimientos**

Los estudiantes, en general utilizan el cálculo y transformación algebraica de variables aleatorias (AP1). Fue alta la frecuencia de uso correcto de esta técnica por los alumnos, así como estandarizar una variable discreta Poisson para aproximar por una normal (AP2). Asimismo usan el cálculo de probabilidades correctamente, pero sin considerar la corrección de continuidad (P12), como el ejemplo a continuación:

$$P(S_n \geq 240) = 1 - P(Z < \frac{240 - 216}{\sqrt{216}}) = 1 - P(Z < 1,63) = 1 - 0,9484 = 0,0516$$

Otras dificultades en los procedimientos de resolución se derivan del enunciado incorrecto del teorema para la media muestral (E5), que se traduce en error en la transformación algebraica. El siguiente ejemplo muestra estos errores en la esperanza y varianza de la media muestral declarada (P1 y P2), aunque la estandarización sería correcta (AP2):



Los alumnos en su mayoría realizan bien el cálculo de probabilidades con calculadora o tabla (AP3); casi no hubo errores en cuanto a la lectura de la tabla estadística de la distribución normal o el uso de la calculadora. Se observa en el siguiente caso la correcta aplicación del procedimiento de transformación de la media muestral, las propiedades P1 y P2, pero con el error de lectura de tabla, con un alto costo en la decisión equivocada como ingeniero de sugerir que debería ser una prioridad del estado la construcción del cruce:

$\Sigma X_i$ : número total de accidentes durante los tres años.

$$P(\Sigma X_i \geq 240) = P(\bar{X} > 6,67) = P(Z > \frac{6,67 - 6}{\sqrt{1/6}}) = P(Z > 1,64) = 0,9495$$

“Respuesta: La probabilidad de que en tres años el número de accidentes sea mayor a 240 es alto, por lo que el cruce en cuestión debería ser considerado en el programa de emergencia del estado”.

Otros errores en el algoritmo de resolución fueron debidos a que confunden la desigualdad mayor o igual por menor o igual, y se equivocan al colocar la varianza por la desviación estándar de  $S_n$  en la estandarización.

### Propiedades

Una primera propiedad necesaria para resolver el problema es la media de la suma de variables aleatorias (P1). La v.a. con distribución Poisson de media y varianza  $\mu$  es reproductiva, esto es, la suma de v.a.i. i.d. Poisson continúa siendo Poisson pero de media y varianza  $n \mu$ . En el siguiente caso se expresa explícitamente la propiedad y se calcula correctamente la media de la suma (AP1).

$$\begin{aligned} & \text{"}X \sim P(\mu=6) \text{ entonces } E(X)=6, V(X)=6 \\ & E(\sum X_i) = 6 \times 36 = 216 \text{ y } V(\sum X_i) = 6 \times 36 = 216 \text{"} \end{aligned}$$

Varios alumnos tuvieron dificultades en deducir el valor de la media de la suma, debido a que no identifican el problema como relacionado con una suma de variables aleatorias. En lugar de ello, y, como se dijo anteriormente, aplicaron la regla de tres simple para deducir el número de accidentes en un mes (considerando dicho número como constante) es de  $240/36 = 6,67$ . Otro de los errores al enunciar el teorema fue confundir el parámetro  $\mu$  con el de la distribución exponencial  $1/\lambda$ , con su consecuencia en el mal cálculo de la media y varianza de la suma (P1 y P2):

$$\text{"}S_n : \sum X_i : \text{número de accidentes en 36 meses. Como } n > 30 \text{ por el teorema central del límite aproximamos } S_n \sim N(n \mu, n \mu) = N(6,6) \text{ donde } E(S_n) = n \times (1/6) = 36 \times (1/6) = 6 \text{ y } V(S_n) = n \mu \text{"}$$

Igualmente se requiere conocer la varianza de la suma de variables aleatorias (P2). Al igual que la propiedad P1 fue alto el porcentaje de estudiantes que utilizó correctamente esta propiedad, como se han visto en algunos de los ejemplos anteriores. Sin embargo, hubo estudiantes que cometieron errores en su aplicación, confundiendo la varianza de la suma con la varianza de la media, como se ha mostrado en los casos anteriores.

Se esperaba que algunos estudiantes reconozcan que se puede aproximar la distribución de Poisson (aproximación de distribuciones clásicas P8) y que la

aproximación será buena bajo las condiciones que el tamaño muestral sea grande y el parámetro de media sea mayor que 5. No se encontró explícitamente esta respuesta.

Algunos alumnos utilizan la corrección de continuidad (P12), recordando que esta propiedad se utiliza siempre que se aproxima una variable discreta por una continua, como es el caso de la Poisson. Como se ha ilustrado anteriormente, gran parte del grupo resolvió el problema sin considerar esta propiedad. El siguiente alumno obtiene un resultado de 0,456 al tomar la varianza en vez de la desviación estándar y no relaciona correctamente la interpretación del valor de probabilidad: *“Por la probabilidad que hemos obtenido hay un 46% de posibilidades que la media se acerque a 240 accidentes en 3 años, por lo cual es muy probable que se pueda reconstruir el cruce gracias al programa de emergencia del estado”*. Otros usan la corrección de continuidad, pero sólo calculan la probabilidad de un valor puntual 240 de la suma o suman y restan 5 en lugar de 0,5, como se ejemplifica en estos dos casos:

$$\begin{aligned}
 &P(239,5 \leq x \leq 240,5) \\
 &\Rightarrow P(x \leq 240,5) - P(x \leq 239,5) \\
 &\Rightarrow P\left(z = \frac{240,5 - 216}{\sqrt{216}}\right) - P\left(z = \frac{239,5 - 216}{\sqrt{216}}\right)
 \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned}
 &\text{(algunos } P(x > 240) \dots) \quad \mu = 6 \cdot 30 = 216 = \\
 &1 - P(235 < x < 245) \\
 &1 - P\left(\frac{235 - 216}{\sqrt{216}} \leq z \leq \frac{245 - 216}{\sqrt{216}}\right)
 \end{aligned}$$

También, se usa erradamente la propiedad P12, sumando (en vez de restar) y obteniendo como límite para calcular la probabilidad 240,5:

“Aplicando corrección de continuidad  $P(Z \geq \frac{240,5 - 216}{216/6}) = P(Z \geq 0,68)$ ”

En otros casos se aplica la corrección al número de días (y no al número de accidentes), obteniendo 1095 días en tres años en lugar de 36 meses, y calculando la probabilidad de un accidente en un día  $p = \mu/n = 6/30 = 0,2$ , obteniendo la esperanza y varianza respectivamente:

“La variable  $X$  se aproxima a la distribución normal  $X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$  donde  $\mu = 0,2 \times 1095 = 219$  y  $\sigma^2 = 175,2$ . Aplicando corrección de continuidad se tiene  $1 - P(S_n < 240) = 1 - P(Z < \frac{240,5 - 219}{\sqrt{175,2}}) = 1 - P(Z < 1,62) = 0,0526$ ”

Un alumno procedió como valor de corrección de restarle 1 a 240:

$$P(X > 239) = 1 - P(X \leq 239) = 1 - P(Z \leq \frac{239 - 216}{\sqrt{216}})$$

### Argumentos

En general, como se ha mostrado en los distintos casos anteriores, hubo poca argumentación, limitándose los alumnos a realizar un razonamiento algebraico deductivo mediante simbolización, con escasa expresión verbal.

Algunos alumnos llegan explícitamente a una conclusión, tomando una decisión sobre la necesidad de construir un puente, en base a resultados del teorema (A6). Ejemplo: “La probabilidad de que en el cruce se produzcan por lo menos 240 accidentes en tres años es muy baja (5,16%), por lo que creo no será considerado en el programa de emergencia”. Muchos alumnos sencillamente calcularon la probabilidad, pero no interpretaron el resultado de esta probabilidad pequeña para la toma de una decisión, por ejemplo:

“La probabilidad de que el cruce en cuestión sea considerado en el programa de emergencia es de un 5,48%”

Un error conceptual de algunos alumnos, que dificultó la toma de decisión fue considerar la probabilidad de ocurrencia 0,0516 del evento alta: “Se podría construir ya que es alta la probabilidad de accidentes en los tres años”. Otros argumentos fallan porque no llegan a la probabilidad correcta, por ejemplo un alumno obtuvo un resultado de 0,7967, sin embargo la conclusión es correcta: “tiene una importancia alta alrededor del 80% de prioridad para el estado”. Otros valores mal calculados fueron 0,09259 y 0,0084 al no aplicar bien la propiedad P12, y 0,0 al calcular mal la media y varianza. El siguiente alumno confunde el tamaño muestral con el recorrido de la variable suma, usando  $n = 240$  en lugar de los 36 meses, además de equivocarse en la tipificación (AP2) al considerar la varianza en lugar de la desviación estándar:

## Capítulo 7

“Si  $X \sim P(\mu=6)$  aproximamos  $X \approx N(\mu, \mu)$  y entonces  $\Sigma X_i \approx N(n\mu, n\mu)$  es decir,

$S_n = \Sigma X_i \approx N(240 \times 6, 240 \times 6) = N(1440, 1440)$ . Para determinar si el cruce es considerado en el programa de emergencia debemos calcular:

$$P(\Sigma X_i > 240) = 1 - P(Z < \frac{240 - 1440}{1440}) = 1 - P(Z < -0,83) = 1 - 0,2033 = 0,7967”$$

“La probabilidad de que se active el programa de emergencia es de un 80% ya que su esperanza es de 1440 accidentes, entonces supera los 240 que se tienen como mínimo”

No hubo justificaciones razonando de lo general a lo particular (A2), aunque la situación típica en los textos es argumentar el teorema basado en la aproximación binomial, que es válida para la distribución Poisson.

La Tabla 7.5.1.1 muestra los resultados obtenidos. Sólo la mitad de los alumnos, aproximadamente reconocen explícitamente el campo de problemas CP2.3, suma de variables aleatorias discretas no acotadas y hace referencia explícita al mismo, la mayoría de ellos correctamente. El resto, como hemos dicho, trabaja directamente con la distribución de Poisson, calculando la probabilidad de un número de accidentes en un mes.

**Tabla 7.5.1.1.** Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado del problema 1 (n=134)

Elementos usados	Incorrecto	Correcto
<i>Campos de problemas</i>		
CP2.3: Variables aleatorias discretas no acotadas	6 (4,5)	61 (45,5)
<i>Lenguaje</i>		
Términos	0 (0,0)	40 (29,9)
Símbolos	34 (25,4)	89 (66,4)
<i>Procedimientos</i>		
AP1: Cálculo algebraico	0 (0,0)	126 (94,0)
AP2: Tipificación, destipificación	36 (27,9)	90 (67,2)
AP3: Cálculo probabilidades (calculadoras, tablas)	30 (22,4)	95 (70,9)
<i>Enunciados</i>		
E4: Enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas	46 (34,3)	54 (40,3)
E5: Enunciado del teorema de forma general	8 (6,0)	6 (4,5)
<i>Propiedades</i>		
P1: Media de la distribución de una suma de variables aleatorias	18 (13,4)	109 (81,3)
P2: Varianza de la distribución de la suma de variables aleatorias	35 (26,1)	92 (68,7)
P3: Distribución de la media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande	7 (5,2)	5 (3,7)
P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal	0 (0,0)	0 (0,0)
P12: Corrección de continuidad	17 (12,7)	44 (32,8)
<i>Argumentos</i>		
A1: Demostraciones formales algebraicas y/ o deductivas	88 (65,7)	35 (26,1)
A6: Obtener una conclusión o tomar una decisión en base al teorema	63 (47,0)	50 (37,3)

La mayoría usa el lenguaje simbólico, aunque una cuarta parte de los estudiantes comete algún error en la simbolización, confundiendo la expresión simbólica de algunos conceptos (por ejemplo, varianza); son muchos menos los que usan expresiones verbales, aunque todos ellos correctamente. Debido a que el problema requiere de un algoritmo de resolución algebraica y simbólica, la mayoría lo usa, y todos ellos correctamente. Un 67% aplicó el procedimiento de tipificación /destipificación correctamente y un 28% tuvo errores, generalmente en la varianza del estimador o al invertir la tipificación. El cálculo de probabilidades con tabla y calculadora es generalmente correcto, con algunos errores en la lectura de tablas.

Sin embargo, pocos alumnos llegaron a la solución correcta, utilizando la corrección de continuidad; un 26% calculó bien la probabilidad de  $S_n$ , aplicando P1, P2, P12, AP1, AP2 y AP3. Gran parte del alumnado intentó aplicar los algoritmos descritos, se registraron errores en el cálculo adecuado de la probabilidad, ya sea por no estandarizar bien la suma o no usar la corrección de continuidad (ver ejemplos descritos en procedimientos). En particular, un 28% tuvo dificultades con la tipificación y un 22% con el uso de tablas estadísticas.

En cuanto a la forma de presentar el teorema, el enunciado más empleado por los estudiantes es el de la suma de v.a.i.i.d., donde un 40% lo especificaron correctamente, aunque no todos escribieron que la muestra es grande mayor que 30; sólo lo hicieron 14 alumnos de 54. Fueron 14 los estudiantes que declararon un enunciado de forma general del teorema, mediante la media muestral; de los cuales sólo 6 (4,5%) lo escribieron correctamente.

Las propiedades que consideramos fueron aceptadas en un número importante por los alumnos, el cálculo de la media y la varianza de la suma con aciertos de 81% y 69% respectivamente. Al utilizar la técnica de estandarización se registraron errores de un 13% al calcular la esperanza de  $S_n$  y de 26% en la varianza. Por otro lado, un tercio del grupo aplicó correctamente la corrección de continuidad y un 13% que lo aplicó lo hizo incorrectamente (ver los ejemplos en P12). Cabe destacar que fue alto el número de estudiantes que no consideró esta propiedad (54,5%). Es destacable mencionar que ninguno del grupo haya señalado que estamos en la presencia de una aproximación de distribuciones clásicas por la norma. Para este punto vimos en la lección 2 del Capítulo 5 que se aplica el teorema en la distribución Poisson para valores grandes de  $n$  y sobre todo se muestra una convergencia razonable a partir del valor del parámetro  $\mu$  de media mayor que 5, que en este caso es  $\mu = 6$ .

## Capítulo 7

Los argumentos utilizados para justificar sus respuestas a este problema han sido el deductivo, con muchos errores y también a través de una conclusión a partir del valor calculado aproximado de la probabilidad de la suma de v.a. y tomar una decisión frente a situaciones en el campo de la ingeniería; hubo un 37% que respondió acertadamente al problema de cruce de carreteras. Siendo un elemento de significado importante para evaluar las decisiones de un ingeniero, un 47% no concluyó en esta situación, ya sea por cálculos erróneos o desconocer el significado e interpretación de la probabilidad de variables aleatorias.

En resumen, el análisis de los elementos usados al resolver esta situación nos señala que la mayoría de los estudiantes ha identificado y dominado el procedimiento de transformar el estadístico de la suma que proviene de una muestra aleatoria de población Poisson a una estandarización normal con el cálculo correcto de los nuevos parámetros de media y varianza, observándose poca cantidad de errores. Sin embargo, solo una parte identifica el campo de problema y hace alusión explícita al teorema y sus condiciones de aplicación.

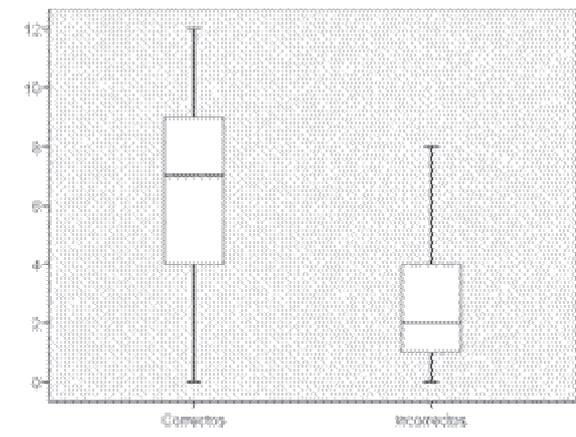
También se nota una falta de rigurosidad en sus justificaciones deductivas, la especificación de las condiciones de uso del teorema central del límite en esta distribución clásica, la notación de la suma de v.a. y la notación simbólica de los muchos elementos que incorpora el teorema. A diferencia del caso de la distribución binomial, no ha sido internalizado en los alumnos que en las v.a. discretas con distribución Poisson aproximadas por v.a. con distribución continua se debe utilizar la corrección de continuidad. Más aún, fue bajo el porcentaje de cálculo correcto de la probabilidad y su interpretación, fundamental para la toma de decisiones de un futuro ingeniero.

A objeto de resumir con una medida el número de elementos de significados del teorema correctamente aprendido por los estudiantes (entre los 15 posibles identificados en la solución normativa del enunciado), se presenta a continuación un estudio de las diferencias entre elementos usados correcta e incorrectamente.

Se observa en el gráfico de caja (Figura 7.5.1.1.) que el número de elementos correctamente utilizados por alumno en la solución varía de 0 a 12, mientras que para el número de elementos incorrectamente utilizados va de 0 a 8, siendo también mayor el rango de variación y el número máximo de elementos correctamente utilizados. También se destaca la superioridad de los cuartiles correspondientes a los elementos correctos en el 50% central de la distribución y la mediana en relación a las respuestas

incorrectas. También, la figura da cuenta que las medias poblacionales de puntuaciones totales de elementos correctos e incorrectos podrían ser distintas ya que no se produce un traslape de la información central.

**Figura 7.5.1.1.** Número de elementos correcta e incorrectamente usados en el problema 1



En la Tabla 7.5.1.2 se presentan los estadísticos del número de elementos de significado del teorema correcto e incorrecto en el problema 1, analizando la diferencia entre los 134 alumnos participantes. Se observa que el número promedio de respuestas correctas supera el doble de las respuestas incorrectas, con una media de 6 a 7 elementos de significados por alumno y 2-3 incorrectos de los 15 elementos analizados en la Tabla 7.5.1.1, siendo ambas de respuestas heterogéneas con coeficientes de variación 49,6% y 72,9% respectivamente.

**Tabla 7.5.1.2.** Estadísticos del número de elementos correctos e incorrectos en el problema 1 (n=134)

	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Correctos	6,6866	3,31871	,28669
Incorrectos	2,8955	2,11073	,18234

Los resultados anteriores nos permiten inferir un contraste T de diferencias de medias en muestras relacionadas, cuyos resultados se muestran en la Tabla 7.5.1.3 cuya significación es 0,000 y calculamos el intervalo de confianza del 95% de confianza para la diferencia de medias en muestras relacionadas. Se puede apreciar que la diferencia promedio entre respuestas correctas e incorrectas por alumno es altamente significativa, con un intervalo de confianza dentro de los valores positivos entre 2,9 y 4,6; lo cual permite rechazar la hipótesis de igualdad de las medias. Ello indica que los alumnos en

su conjunto utilizan más elementos de significado correctamente que incorrectamente en la resolución de este problema.

**Tabla 7.5.1.3.** Contraste e intervalo de confianza de la diferencia de elementos correcto e incorrecto en el problema 1

Diferencias relacionadas					t	gl	Sig.
Media diferencia	Desviación típ.	Error típico	95% Intervalo de confianza				
			Inferior	Superior			
3,79104	4,98581	,43071	2,93912	4,64297	8,802	133	,000

## 7.5.2. RESULTADOS EN EL PROBLEMA 2

**Problema 2.** *Sondeo político.* Suponga que la proporción de votantes rurales de cierto estado, a favor de un candidato a diputado es 0,45 y la proporción de votantes urbanos que están a favor del mismo candidato es 0,60. Si se obtiene una muestra de 200 votantes rurales y 300 votantes urbanos, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que por lo menos 250 de estos votantes estén a favor de este candidato?

Este problema se espera un desarrollo con cálculo de probabilidades, notación simbólica, uso de la distribución binomial y que se conjugue dos muestras aleatorias de distintos tamaños. Se obtuvieron las siguientes respuestas en un total de 106 estudiantes:

### Campos de problemas

El problema corresponde a *Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de n* (CP1) o bien *Determinar la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias discretas acotadas idénticamente distribuidas* (CP2.2).

No hubo referencia explícita de ninguno de los dos campos señalados por los estudiantes, aunque aproximadamente 30% de alumnos hace una identificación implícita a cada uno de estos campos (aplicando el teorema sin explicitarlo). Una cuarta parte, aproximadamente de los que usan implícitamente el campo CP1 lo hace incorrectamente y también la mitad de los que usan implícitamente el campo CP2.

Algunos alumnos no utilizan el teorema, sino que obtienen una solución exacta por medio de la distribución hipergeométrica, haciendo uso de la propiedad P8.

Un 29,3% se equivocó en plantear la situación por los campos CP10 (diferencia de dos poblaciones, en lugar de la suma) y CP12 (distribución de la media muestral), aunque luego, en muchos casos, se realiza correctamente la transformación algebraica al obtener la distribución de promedios muestrales o el estadístico de la diferencia de

proporciones muestrales dada en intervalos de confianza. Un ejemplo es el siguiente, en que también se incurre en el error de tomar la probabilidad de que una persona vote a ese candidato como 0,5 y no la probabilidad dada en el problema, utilizando así mal las propiedades P1 y P2:

*“Como  $n_1 > 30$  y  $n_2 > 30$  se utiliza el teorema central del límite, en que la probabilidad de que una persona elija al diputado es 0,5. Luego,  $n_1 \times p = 200 \times 0,5 = 100$  y  $n_2 \times p = 300 \times 0,5 = 150$ ”*

### Lenguaje

El lenguaje utilizado por el alumno en este problema es generalmente algebraico, mediante la simbología y notaciones, así como expresiones verbales, generalmente correctas, y utilizadas para describir las variables, distribuciones y sus parámetros. En general no trabajan con la notación de la sumatoria, sino más bien como una variable, en cada caso, del sector rural o urbano. Se encontró en algunos casos la falta de rigurosidad en las notaciones y simbología y, generalmente, intentan enunciar el teorema mediante una sola variable aleatoria y no como suma de variables Bernoulli.

### Enunciados

Se esperaba que los alumnos enunciasen el teorema central del límite para la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (E4), de forma general (E5) o bien diesen un enunciado intuitivo general (E6). Muy pocos comenzaron a resolver el problema explicitando la distribución binomial como suma de variables aleatorias independientes Bernoulli, lo que dificulta la aplicación del teorema a este caso particular. El siguiente ejemplo, es un caso donde el alumno identifica correctamente el enunciado E4 y muestra como la rigurosidad al describir las variables favorece el planteamiento y cálculo de la probabilidad de la suma:

$X_1 = 1$  si el votante rural está a favor del diputado, y 0 en caso contrario;  $X_1 \sim \text{bernoulli}(p=0,45)$

$\Sigma X_1 = S_{n1}$  : número de votantes rurales a favor del diputado;  $S_{n1} \sim \text{Bin}(n=200, p=0,45)$

$E(S_{n1}) = n_1 \times p = 200 \times 0,45 = 90$  y  $V(S_{n1}) = n_1 \times p \times (1-p) = 200 \times 0,45 \times 0,55 = 49,5$

De igual forma se procede para  $X_2$ .

La definición sistemática de las variables aleatorias observadas como Bernoulli, conduce a definir la suma de variables, identificar su suma y varianza (P1, P2) y a

plantear la aproximación normal de la variable suma, por tanto, al campo de problemas CP1 (aproximación normal a binomial) y el enunciado E4.

El siguiente caso formula el problema sólo en base a la distribución binomial. Aunque usa correctamente las propiedades P1 y P2, así como el argumento A1 y la notación algebraica, no llega a concluir el problema.

$$\begin{array}{ll}
 X_1 \sim \text{bin}(np, \sqrt{npq}) & X_2 \sim \text{bin}(np, \sqrt{npq}) \\
 X_1 \sim \text{bin}(90, \sqrt{49,5}) & X_2 \sim \text{bin}(180, \sqrt{72}) \\
 \\
 P(X_1 + X_2 > 250) = 1 - P(X_1 + X_2 < 250) \\
 \\
 X_1 + X_2 \sim \text{bin}(90 + 180, (7,03 + 7,48)) & N=500 \\
 (X_1 + X_2) \sim \text{bin}(270; 15,52)
 \end{array}$$

Muy pocos enunciados explícitos del teorema se encontraron en su forma general E5 (es decir la formulación del teorema para la media muestral cuando la muestra de tamaño 500 es grande), y casi todos incorrectos. Lo que sí se observó en los procedimientos de resolución fue mezclar los enunciados de la suma (E4) con el del promedio muestral (E5), al definir y calcular la distribución para la suma, pero planteando la probabilidad para la media muestral, como se muestra a continuación:

$$P(\bar{X} > 250) = P(Z > \frac{250 - 270}{\sqrt{49,5 + 72}})$$

Se registró el enunciado intuitivo del teorema (E6), en que los alumnos indican que utilizan la aproximación debido a que la muestra es de tamaño suficientemente grande, y por tanto recuerdan la aplicación del teorema mostrada gráficamente en las actividades de aula y/o de los ejercicios de simulación manipulativa.

### Procedimientos

Se usa en forma generalizada el cálculo y transformación algebraica de variables aleatorias (AP1), así como la tipificación /destipificación (AP2). Cerca de dos terceras partes del grupo trabajaron la técnica de tipificación, aunque no alcanzó al 50% de uso correcto. Hubo dificultades en las estrategias de resolución. Por ejemplo, un alumno usa correctamente la propiedad P1 (media de la suma de variables) y P2 (varianza de la



## Capítulo 7

la distribución normal para un área menor de -1,81 en vez de 0,0352; que conlleva a una probabilidad mal calculada:

$$1 - P(Z < \frac{250 - 270}{\sqrt{121,5}}) = 1 - P(Z < -1,81) = 1 - 0,352 = 0,648$$

Finalmente los estudiantes realizan el cálculo correcto de los promedios muestrales o de una suma de variables (A1, argumento algebraico). Un caso de aplicación correcta de este procedimiento se muestra para la suma de dos variables aproximadas normales que provienen de poblaciones binomiales de distintos parámetros, en que utilizan bien los algoritmos AP1, AP2 y AP3 y la propiedad de corrección de continuidad P12:

SV: VOTANTES RURALES A FAVOR DEL CATOLICISMO DISPUTADO:  $p_A = 0,45$ ;  $m_A = 200$   
UV: VOTANTES URBANOS A FAVOR DEL CATOLICISMO DISPUTADO:  $p_B = 0,60$ ;  $m_B = 300$   
 $Z_{X_1} \sim \text{bin}(m_A = 200; p = 0,45)$ ;  $Z_{X_2} \sim \text{bin}(m_B = 300; p = 0,60)$   
COMO  $m$  (TAMAÑO DE MUESTRA ES GRANDE ( $\geq 30$ )) APROXIMAMOS A UNA DIST. NORMAL)  
 $Z_{X_A} \sim N(m_A p_A = 90; m_A p_A q_A = 119,5)$ ;  $Z_{X_B} \sim N(m_B p_B = 180; m_B p_B q_B = 122)$   
 $Z_{X_A + X_B} \sim N(m_A p_A + m_B p_B = 90 + 180 = 270; m_A p_A q_A + m_B p_B q_B = 119,5 + 122 = 241,5)$   
 $P(X_T \geq 250)$ ; REALIZANDO CORRECCIÓN DE CONTINUIDAD  
 $P(X_T \geq 249,5) = 1 - P(X_T < 249,5) = 1 - P\left(\frac{Z_{X_T} - m_{PT}}{\sqrt{m p q}} < \frac{249,5 - 270}{\sqrt{241,5}}\right)$   
 $= 1 - P(Z < -1,86) = 1 - 0,0314 = 0,9686$

### Propiedades

Las propiedades más ampliamente usadas han sido el cálculo de estadísticos. Respecto al cálculo de la media de la suma de variables aleatorias (P1) los estudiantes calculan la esperanza de la suma de dos variables con distribución binomial resultando un valor de 270. Una forma alternativa y correcta de calcular la esperanza (P1) y varianza (P2) es utilizando la proporción ponderada  $P_T = (n_1 \times p_1 + n_2 \times p_2) / (n_1 + n_2) = 0,54$  obteniendo un valor 0,9633 de probabilidad, como se muestra a continuación.

$$P(Z \geq \frac{250 - m_P}{\sqrt{m p q}}) = 1 - P(Z \leq \frac{250 - 500 \cdot 0,54}{\sqrt{500 \cdot 0,54 \cdot 0,46}})$$
$$= 1 - P(Z \leq -1,79)$$

Respecto al cálculo de la varianza de la suma de variables aleatorias (P2), uno de

los errores presentados al trabajar con la proporción fue no usar el tamaño total de la muestra  $n = 500$ .

Hubo estudiantes que, al enunciar el teorema, no explicitan que la muestra es lo suficientemente grande para aplicarlo (uso incorrecto de la propiedad P4: la aproximación mejora con el número de sumandos) y también en la notación correspondiente a la distribución normal, reemplazan con la notación de la binomial (uso incorrecto de símbolos), como se muestra en este caso que, sin embargo, está bien desarrollado (AP1, AP2, AP3) e incluso considera la corrección de continuidad (P12):

$$p_R = 0,45, n_R = 200, X_R \approx \text{bin}(90, 49,5) \text{ y } p_U = 0,6, n_U = 300, X_U \approx \text{bin}(180, 72)$$

$$\text{Así, } X_R + X_U \approx \text{bin}(\mu_R + \mu_U, \sigma_R^2 + \sigma_U^2) \text{ y } P(X_R + X_U \geq 249,5) = 1 - 0,0314 = 0,968$$

Otros estudiantes cometieron errores al estandarizar la variable suma, al considerar erradamente la varianza  $pq/n$  del estimador de la proporción poblacional.

El siguiente ejemplo, transforma el problema en otro sobre una v.a. discreta acotada de sólo dos valores 200 y 300 con probabilidades 0,45 y 0,60 respectivamente (error en CP2). La función de probabilidad de la variable se define equivocadamente: Proporción de votantes de cierto estado a favor de un candidato. El estudiante incurre en dos errores: Que no se cumple el axioma de que la suma de las probabilidades debe ser 1 y que obtiene una varianza negativa (error en P2):

$$\begin{array}{c}
 X \mid 200 \mid 300 \\
 P(X) \mid 0,45 \mid 0,60 \\
 \hline
 P_X(A) = P(X=x) \begin{cases} 200 & 0,45 \\ 300 & 0,60 \\ & 0,05 \end{cases}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{DE UN VOTANTE} \\
 P(X > 250)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Tenemos } E(X) = \sum P(X)X = 200 \cdot 0,45 + 300 \cdot 0,60 = 270 \\
 V(X) = \sum x^2 P(x) - E(X)^2 = (200)^2 \cdot 0,45 + (300)^2 \cdot 0,60 - (270)^2 = -900
 \end{array}$$

Otra propiedad usada es la aproximación de la distribución binomial por la normal (P7, aproximación de una distribución discreta por una continua). En este caso la aproximación será buena, bajo las condiciones de que los productos  $np$  y  $nq$  sean mayores que 5. No se registraron respuestas que indiquen estas condiciones, aunque son muchos los alumnos que indican implícitamente la aproximación normal. Hubo dos alumnos que trataron el problema con el modelo de la distribución hipergeométrica, como se muestra para la variable definida  $X_I$ : número de votantes rurales a favor del

## Capítulo 7

candidato e indican explícitamente la aproximación normal (P8).

$X_I \sim H(N, n, r)$  y se tiene  $p = 90/200 = 0,45$ . Debido a que  $n$  es mayor que 30 utilizamos el teorema obteniendo la media  $\mu = n r/N = n p = 10 \times 0,45 = 4,5$  y la varianza  $npq = 90 \times 0,45 \times 0,55 = 22,28$ . Por lo tanto  $X_I \sim N(40,5, 22,28)$

Pocos alumnos utilizan la corrección de continuidad (P12). Un caso de no usar esta propiedad se presenta a continuación, obteniendo un valor de probabilidad de 0,9641 en vez de 0,9686.

$$1 - P(X < 250) = 1 - P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{250 - 270}{\sqrt{121,5}}\right) = 1 - P(Z < -1,81) = 1 - 0,0359 = 0,9641$$

Se observaron en relación a esta propiedad varios tipos de errores, como aplicarla a todo un intervalo:

Handwritten calculation showing the application of continuity correction to a binomial distribution:

$$P(X \geq 250) = 1 - P(X \leq 250)$$
$$= 1 - P(249,5 \leq X \leq 250,5)$$
$$= 1 - P\left(\frac{249,5 - 270}{\sqrt{121,5}} \leq Z \leq \frac{250,5 - 270}{\sqrt{121,5}}\right) = 1 - (\Phi(-1,76) - \Phi(-1,65))$$
$$= 1 - (0,0392 - 0,0322) = 0,9686$$

Otros tomaron la corrección de continuidad del valor 250 sumándole 0,5 en lugar de restar y obteniendo un valor de probabilidad de  $P(X \geq 250,5) = 0,9616$ .

### Argumentos

Al igual que en el problema 1, el argumento más común es el deductivo y algebraico (A1). También se razona de lo general a lo particular (A2), aunque la aproximación binomial como caso especial del teorema no fue explicada; hubo validaciones erróneas asociadas por ejemplo: “como el  $n$  es grande utilizamos el siguiente estadístico de la normal para la proporción” y luego calculaban la probabilidad pedida.

Otros alumnos obtienen una conclusión o toman una decisión en base a resultados del teorema (A6). En este problema no se pide que comente la solución, por tanto el único comentario es que “La probabilidad aproximada de que por lo menos 250 votos estén a favor del candidato es del 96%”.

En resumen, se obtuvieron, con distintos procedimientos y propiedades mal utilizadas, variados valores de probabilidad calculados desde 0, 0,0314, 0,195, 0,4128, 0,5219, 0,648, 0,8078, 0,8106, 0,993, 1 a valores 0,9616, 0,9633, 0,9772 muy próximos a la solución. Estos resultados indican las dificultades de comprensión del teorema, incluso después de un periodo de enseñanza dilatado (seis semanas). Asimismo, indica las dificultades a las que puede enfrentar un ingeniero en una situación donde debe de tomar decisiones en base al pensamiento estocástico. El siguiente ejemplo lo demuestra, el alumno plantea el teorema para la diferencia de variables con distribuciones aproximadas normales, en lugar de utilizar la suma, y aunque usa bien las propiedades P12 y P2, obtiene equivocadamente la esperanza con resultado de probabilidad cero. Esto implicaría un pronóstico de que el candidato prácticamente no tiene posibilidad de ganar una elección.

$$X_i \sim \text{bin}(n_1=200, p_1=0,45) \quad \wedge \quad Y_i \sim \text{bin}(n_2=300, p_2=0,1)$$
 como  $n_1 p_1$  y  $n_2 p_2 > 30$ . A través de Teo. de De Moivre y Laplace y Corolario por Centralidad podemos aproximar estas variables a una dist. normal y obtener las aprox. buenas.

$$P(X_i - Y_i > 250)$$

$$P(X_i - Y_i > 250, r) =$$

$$P\left(\frac{(X_i - Y_i) - (n_1 p_1 - n_2 p_2)}{\sqrt{n_1 p_1 q_1 + n_2 p_2 q_2}} > \frac{250,5 + 90}{\sqrt{121,5}}\right) = P(Z > 23,76) = 1 - \Phi(23,76) = 0\%$$

$$\therefore \text{La prob. de ganar por lo menos cero, de esta votación esta a favor de los candidatos A de OX}$$

La Tabla 7.5.2.1 muestra los resultados de los elementos de significado aplicados correcta e incorrectamente. Se observa un uso escaso de uno de los dos campos de problemas del teorema previstos: Aproximación de la suma de variables aleatorias discretas acotadas (15,5%) o aproximación de la distribución binomial (26,4%). Aproximadamente un tercio del grupo sitúa mal el problema, un 24% lo plantea para el estadístico de diferencias de proporciones en intervalos de confianza y un 6% por diferencia o suma de promedios muestrales.

Los algoritmos de resolución algebraica alcanzaron el 59% de aciertos; un 43% aplicó bien el procedimiento de transformación de la suma de v.a. y un 53% del grupo utilizó correctamente la calculadora y tabla estadística en el cálculo de probabilidad. Hubo un 37% de error en la tipificación de las dos variables con distribución binomial o consideradas como variables aleatorias. Por otro lado, un 42% utiliza el lenguaje ya sea

## Capítulo 7

en palabra o por símbolos, donde destaca un 42,5% de error en expresar correctamente la simbología pertinente al problema.

En cuanto a la forma de presentar el teorema, el enunciado mejor empleado por los estudiantes fue el de la suma de v.a.i.i.d. con distribución aproximada normal de media 270 y varianza 121,5, donde un 28% lo especificaron, y un 20% escribieron que la muestra es bastante grande; sólo un caso describió el teorema mediante promedios muestrales.

**Tabla 7.5.2.1.** Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado del problema 2 (n=106)

Elementos usados	Incorrecto	Correcto
<i>Campos de problemas</i>		
CP1: Obtener una aproximación de la dist. binomial para valores grandes de n	6 (5,7)	28 (26,4)
CP2: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas	18 (17,0)	16 (15,5)
CP10: Obtener la distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones	6 (5,7)	0 (0,0)
CP12: Estimar por intervalos de confianza de la media y otros parámetros para muestras grandes	25 (23,6)	0 (0,0)
<i>Lenguaje</i>		
Términos	8 (7,5)	45 (42,5)
Simbólico	45 (42,5)	44 (41,5)
<i>Procedimientos</i>		
AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias	40 (37,7)	62 (58,5)
AP2: Tipificación / Destipificación	39 (36,8)	45 (42,5)
AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora o tablas estadísticas	12 (11,3)	56 (52,8)
<i>Enunciados</i>		
E4: Enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas	4 (3,8)	30 (28,3)
E5: Enunciado del teorema de forma general	6 (5,7)	1 (0,9)
E6: Enunciado intuitivo del teorema	25 (23,6)	21 (19,8)
<i>Propiedades</i>		
P1: Media de la distribución de una suma de variables aleatorias	18 (17,0)	59 (55,7)
P2: Varianza de la distribución de la suma de variables aleatorias	34 (32,1)	45 (42,5)
P3: La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal	4 (3,8)	1 (0,9)
P4: La aproximación mejora con el número de sumandos	0 (0,0)	26 (24,5)
P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua	7 (6,6)	24 (22,6)
P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal	3 (2,8)	0 (0,0)
P12: Corrección de continuidad	9 (8,5)	14 (13,2)
<i>Argumentos</i>		
A1: Demostraciones formales algebraicas y/ o deductivas	40 (37,7)	34 (32,1)
A2: Presentación del teorema como caso especial de un resultado general	0 (0,0)	0 (0,0)
A6: Obtener una conclusión o tomar una decisión en base al teorema	9 (8,5)	48 (45,3)

Las propiedades que se utilizaron aproximadamente la mitad del grupo de alumnos fueron el cálculo de la media y la varianza de la suma de variables aleatorias con aciertos de 56% y 43% respectivamente. Se observó en general al utilizar la técnica de tipificación un 17% de errores al calcular la esperanza de la suma y de 32% en la varianza. Cabe señalar que un 23% del grupo haya señalado que estamos en la presencia

de la aproximación la distribución clásica de la binomial por la normal. Por otro lado, fue escaso el número de estudiantes que consideró la propiedad de corrección de continuidad; tan solo un 13% aplicó correctamente la corrección de continuidad y un 9% lo hizo incorrectamente (ver las dificultades en los ejemplos presentados en P12).

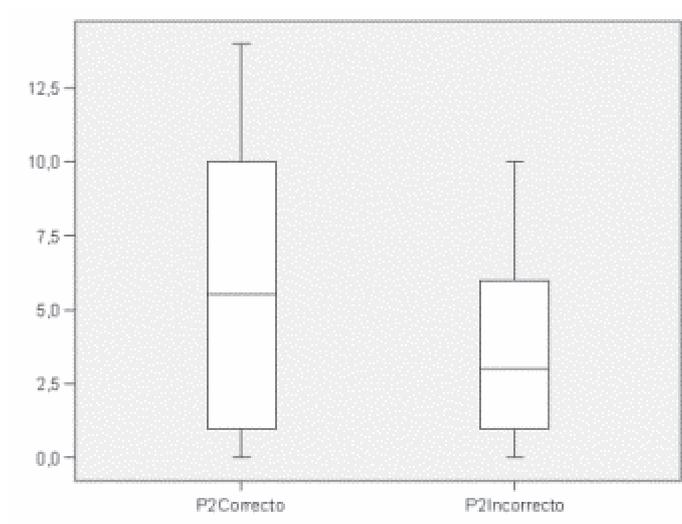
El argumento mejor descrito para justificar sus respuestas a este problema ha sido a través de una conclusión simple a partir del valor calculado aproximado de la probabilidad de la suma de v.a. y tomar una decisión frente a situaciones en el campo de la ingeniería; hubo un 45% que escribió acertadamente el resultado de la probabilidad.

Además, un 32% del grupo justificó adecuadamente en forma algebraica, utilizando la corrección de continuidad P12 y aplicando propiedades P1, P2 y las técnicas AP1, AP2 y AP3. De los errores, hubo un 38% debido a cálculos incompletos o equivocados. No se registró argumento de enunciar el teorema como caso especial de un resultado general dando las condiciones de aproximación binomial por la normal.

En resumen, este problema ha resultado difícil para los estudiantes, como se ha mostrado a lo largo del análisis de las respuestas; de los alumnos que han intentado plantear esta situación, han dominado la estrategia de transformación algebraica con el buen uso de las propiedades señaladas. Sin embargo, constatamos debilidades importantes en la declaración de las variables involucradas, la justificación de las condiciones de uso del teorema central del límite en la distribución binomial, la aplicación de la corrección de continuidad y la inexactitud en el cálculo correcto de la probabilidad, cuya precisión en los análisis de datos es importante en las conclusiones de un ingeniero.

En cuanto a la diferencia entre el número de elementos de significado correcta e incorrectamente empleados por los alumnos al resolver el problema 2, el análisis indica una discrepancia respecto a los resultados de aplicación del teorema para esta situación. En la Figura 7.5.2.1 se aprecia la dispersión y medidas de los cuartiles del número de elementos correctos e incorrectos en las respuestas de cada alumno. Se observa que el número de elementos correctos es mayor que el número de elementos incorrectos, manifestado en el recorrido de los elementos correctos que va de 0 a 14, mientras que para los incorrectos varía de 0 a 10. También, la mediana es visiblemente superior, al igual que el 50% central de puntuación total; de elementos de significados correctos comprendido en el intervalo (1; 10), y el intervalo (1; 5) para los elementos incorrectos. Lo que no se aprecia claramente es si los parámetros de medias de las puntuaciones correctas e incorrectas pueden o no ser iguales.

**Figura 7.5.2.1.** Número de elementos correcta e incorrectamente usados en el problema 2



Lo anterior, es reforzado por el resumen de los estadísticos de posición y dispersión establecidos en la Tabla 7.5.2.2. Se muestra que la media de elementos adquiridos correctamente por los alumnos es mayor al de elementos incorrectos, además con coeficientes de variación en las dos distribuciones muy similares (81,6% y 84,7% respectivamente).

**Tabla 7.5.2.2.** Estadísticos del número de elementos correctos e incorrectos en el problema 2

	Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
P2 Correcto	5,7212	104	4,66854	,45779
P2 Incorrecto	3,3558	104	2,84184	,27867

Para un estudio formal de las afirmaciones anteriores se realizó un contraste de hipótesis de la diferencia entre puntuaciones medias de elementos correcto e incorrecto para muestras relacionadas, obteniendo un resultado altamente significativo (valor de probabilidad 0,001). El intervalo de confianza para la diferencia de medias tiene unos límites comprendidos entre 1,05 y 3,68, indicando que se espera que los estudiantes contesten correctamente entre 1 y 4 elementos de significados del teorema central del límite más que el número de errores no adquiridos de los elementos establecidos en Tabla 7.5.2.1.

**Tabla 7.5.2.3.** Contraste e intervalo de confianza de la diferencia de elementos correcto e incorrecto en el problema 2

Media	Desviación típ.	Diferencias relacionadas		t	gl	Sig. (bilateral)	
		Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
			Inferior				Superior
2,36538	6,76952	,66381	1,04888	3,563	103	,001	

## 7.6. RESULTADOS DE LA PRUEBA DE ENSAYO

Para completar la evaluación y alcanzar de una forma más completa sus objetivos, se elaboró un tercer instrumento de evaluación. Este instrumento se centraría en el análisis más detallado del uso de argumentos, los cuales fueron escasamente incluidos en el cuestionario y que constituye un elemento de significado específico. Se considera muy importante porque generalmente en la enseñanza tradicional, no se presta atención específica al desarrollo de esta capacidad, mientras que en nuestro caso, se ha tratado de reforzarla mediante las actividades de análisis de datos.

Asimismo, se quería analizar la capacidad de los estudiantes para poner en relación los diversos elementos de significado en tareas de análisis de datos de alto nivel y su dominio de la herramienta informática software @risk. En lo que sigue se describe los resultados de esta prueba que fue analizada a priori en la sección 7.3.

### **Proyecto de aplicación del teorema central del límite a la ingeniería con @risk**

Se pidió a los estudiantes aplicar a un problema de la ingeniería elegido por ellos mismos los conceptos estudiados en las tres lecciones sobre el teorema con apoyo de Excel y @risk. Los datos se simularían a través del programa @risk, analizando para distintos valores de los parámetros la convergencia de la distribución de probabilidades de origen que modela la situación de contexto.

Como se ha indicado en el análisis a priori de este proyecto, los alumnos tuvieron la libertad de emplear los distintos elementos de significado del teorema adquiridos en la enseñanza. Para realizarlo, los alumnos bajaron por Internet el @risk. Cada trabajo individual fue enviado por escrito en el procesador Word y se recogieron 83 de estos informes en la plataforma, del cual 12 corresponden a alumnos de la especialidad de Acuicultura y Pesca, 7 de Marítimo Portuario, 14 de Informática, 43 de Industrial y 7 de la ingeniería civil. A continuación, se presentan los principales elementos de significado del teorema central del límite explicitado por los alumnos.

### Campos de problemas

Los problemas planteados por los estudiantes para aplicar lo estudiado sobre el teorema central del límite han abarcado distintas situaciones en las siguientes áreas de desarrollo: Resistencia de materiales, estructura de construcción, control de calidad, servicio de atención a clientes, consumo de empresas, forestal, central hidroeléctrica, tiempo de falla, industria salmonera, cultivo, transporte, flota pesca, computación, programación, seguridad vial, educación, deporte, automotriz, encuesta laboral, bolsa de comercio, ganadería y apícola. Se puede clasificar estas aplicaciones en diferentes campos de problemas.

Hubo 26 alumnos que plantean una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de  $n$  (CP1). Un ejemplo es la estimación de número de peces enfermos en muestras aleatorias, que corresponde a una variable con distribución binomial: *“Número de salmónidos contagiados por el parásito nematodo *Hysterothycacium* en cultivos marinos del sur de Chile”*. Sin embargo, este estudiante trabajó su problema sólo mediante esta distribución, encontrando la solución exacta, sin utilizar el teorema, por lo que se puede considerar que hizo un uso incorrecto del campo de problemas.

En otros casos se plantea la obtención de la distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas (CP2). Encontramos 15 alumnos con ejemplos correctos de uso del teorema en variable discreta con distribución Poisson, como, por ejemplo: *“Número de camiones cargados por el cargador frontal en un período de una hora”*. Algunos fallos en la resolución fueron usar sólo esta distribución, sin estimar el valor mediante el teorema, o suponer la distribución Poisson como una variable continua con distribución exponencial, como el siguiente ejemplo:

*“Una empresa de logística desea controlar de mejor manera los tiempos de permanencia de camiones en el puerto Novix. El tiempo de espera en horas medido a 5 camiones tiene una distribución Poisson, y se estudia la siguiente variable para varios valores del parámetro (2 y 6) y tamaños muestrales (5, 15, 25 y 55),  $X$ : horas que está un camión en el puerto Novix”*.

También se encontró la obtención de la distribución de la suma de variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas (CP4) en 23 estudiantes. La distribución continua más utilizada fue la exponencial para diferentes aplicaciones:

*“Tiempo en horas que demora una máquina de pino en obtener un metro cúbico de*

*producción”, “Estimación del crecimiento de Onckorynchus mykiss a través de la utilización de un factor de conversión” y “Estimar el tiempo de espera que realizan los usuarios al realizar una transacción bancaria del cajero automático”.*

Otra variable continua estudiada fue la distribución uniforme: *“Precio de cada paquete comprado en la transacción en la bolsa de comercio”*. Las dificultades de algunos alumnos en este campo de problemas fueron comenzar su problema asumiendo que la distribución de la variable de interés es normal, por lo que no es necesario aplicar el teorema central del límite, o bien definir una variable con distribución exponencial cuando el modelo adecuado es Poisson. Por ejemplo: *”Estimar la probabilidad de falla en la producción de chocolate Costa”,* el alumno señala:

*“Sea  $X_1, X_2, \dots, X_{12}$  la cantidad de máquinas en la empresa “COSTA”, en todo Chile y sea  $X$ : “cantidad de productos con falla por mes” variable aleatoria continua independientes que se distribuye exponencial con promedio igual a 10 (por cien) y la varianza igual a 100 (por cien)”.*

Además, se encontró un ejemplo de obtención del tamaño de muestra aleatoria para realizar inferencias sobre la media en poblaciones de distribuciones desconocidas (CP8):

*“Una Apícola quiere analizar el cuidado de las abejas con el fin de reducir las pérdidas de producción de miel. Las proporciones de abejas muertas debido a las enfermedades es de un 11,5%, a condiciones climáticas de un 1,5%. También se conoce la población la cual es de 150 colmenas y cada colmena tiene aproximadamente 50.000 abejas, el promedio porcentual poblacional de abejas muertas por ambas consecuencias es de 13%. Para comenzar a calcular probabilidades e intervalos de confianza se necesita analizar un tamaño de muestra adecuado para poder realizar una investigación real y que sea significativa, si trabajamos con un 95% de confiabilidad y un error pequeño que no sea mayor que 0,0005. Estudio 1, “Calcular un tamaño de muestra adecuado para las 3 proporciones”.*

Respecto a la estimación por intervalos de confianza de la media y otros parámetros para muestras grandes (CP12) una alumna sugiere la siguiente situación:

*“Un ingeniero analiza el estado de un disco duro de un computador y piensa que al momento de revisar los computadores más del 30% de los discos duros se encuentran en buen estado. Para comprobarlo se toma una muestra al azar de 5, 15 y 30 discos duros que hay distintas oficinas de la empresa. Para determinar si la empresa necesita o no un mantenimiento en sus*

## Capítulo 7

*computadores se desea estimar a través de un intervalo de confianza del 99% qué proporción de los discos duros están en buen estado a partir de una muestra de 75 discos duro, de los cuáles 40 están en buen estado”.*

Un error respecto a este campo de problemas fue calcular un intervalo de confianza para la media poblacional cuando se estaba trabajando con la estimación de la proporción en una variable con distribución binomial.

En el contraste de hipótesis de la media y otros parámetros en poblaciones no normales para muestras grandes (CP13) y de varianza poblacional desconocida, un error fue usar la distribución t-student al plantear una dócima para un tamaño considerado grande en la siguiente situación:

*“Análisis de la factibilidad de la pesca del pulpo, mediante un muestreo donde se sondeó el rendimiento de uno de los barcos destinados a la captura de pulpo, y se tomó el promedio obtenido de pulpo durante cada semana por un año. Nuestros datos se distribuyen en forma normal con media 53,32 (ton/cesta) y varianza 7156,04. Para que la productividad de la explotación de este recurso sea favorable la media anual debe ser superior o igual a 60 (ton/cesta). Para comprobarlo se realizará una prueba de hipótesis con nivel de significación del 5%”.*

El siguiente ejemplo que sitúa el campo CP13, requiere una solución de un cuestionamiento informático:

*“Suponga que se seleccionó al azar un tamaño de muestra  $n=50$  variables de un conjunto de programas en Pascal y entre ellas se registraron 8 variables de tipo vector. Queremos probar la hipótesis de que Pascal es un lenguaje más eficiente que Algol, en el sentido de que el 20% de las variables o más son de vector. Es decir, probaremos  $H_0: p=0,20$  contra  $H_1: p>0,20$  donde  $p$  es la probabilidad de observar una variable tipo vector en cada prueba. (Suponga que las 50 pruebas son independientes)”.*

### Lenguaje

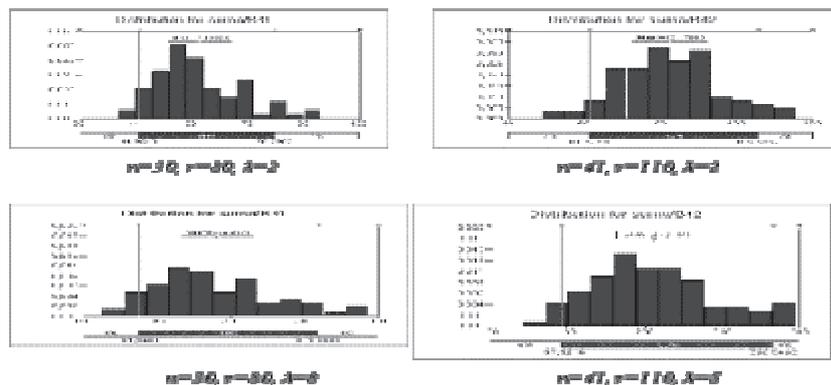
Los *términos y expresiones verbales* fueron usados correctamente por un 66% de los estudiantes siendo las expresiones más utilizadas las siguientes: Variable aleatoria, distribución de probabilidad, distribución normal, muestra aleatoria, estadístico, distribución muestral, teorema central del límite, suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuida, simulación, histograma, intervalo de confianza, dispersión, población. Hubo errores al definir una sola variable en lugar

de la suma de variables aleatorias, y no mencionar algunos de los términos anteriores debido a que no reconocen la aplicación del teorema como solución.

En los proyectos, las *notaciones simbólicas* más recurridas son:  $X_2, X_2, \dots, X_n$  para referirse a los datos de una muestra aleatoria,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{bin}(n, p)$  al enunciar la suma de  $n$  variables aleatorias binomiales,  $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$  al describir la distribución muestral de la media de la muestra para  $n$  suficientemente grande, la fórmula de estandarización de la suma de v.a.  $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . El lenguaje simbólico fue el menos alcanzado por el grupo, ya que sólo un 39% lo escribieron acertadamente; otros alumnos continúan empleando la notación de una variable en el cálculo de probabilidades de la suma, mezclan la notación de la suma o promedio de una muestra en el cálculo, también denotan la esperanza de una variable Poisson y calculan la de una exponencial.

En cuanto a las *Representaciones gráficas*, muy usadas en las respuestas (72%), las consideradas fueron: Gráfico de barras, histograma, polígono de frecuencia, curva densidad normal y distribuciones clásicas de probabilidad. Hubo algunas respuestas descontextualizadas en que presentan sólo un gráfico de barras de población binomial, sin indicar la aplicación a que se refieren. En la *simulación* se trabajó con la planilla Excel y el programa estadístico @risk. Un ejemplo de gráfico producido se incluye en la Figura 7.5.1.

Figura 7.5.1. Simulación gráfica producido por un estudiante



## Enunciados

Se enuncia el teorema central del límite para especificar la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (E4), como el siguiente caso:

*“Se eligió una distribución Poisson, ya que las variables discretas aleatorias Poisson:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes entre sí, toman valores enteros y tienen una media común  $\mu$ . Además por el teorema central del límite, sabemos que la distribución  $S_n = \sum X_i$  es aproximadamente normal con media  $n\mu$  y varianza  $n\mu$ , siempre y cuando  $n$  sea lo suficientemente grande.  $X \sim P(\mu = 13) \rightarrow S_n \sim N(n\mu, n\mu)$ ”.*

Otros alumnos describen el teorema de forma general (E5), apoyándose en que, sea cual sea la distribución de la población, la media muestral es aproximada por una normal para un  $n$  grande. Un ejemplo es el siguiente:

*“  $X_i$ : es el tiempo que tarda una persona en comer en una mesa de comida rápida Doggis. La variable se distribuye exponencial con parámetro  $\lambda=0,033$ . Utilizando el teorema central del límite para  $n= 32$  aproximamos el estimador de la media muestral a la distribución normal:*

$$X \sim e(\lambda) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\frac{1}{\lambda} = 30, \frac{1/\lambda}{n} = 918,27\right) ”$$

También se han recogido enunciados intuitivos del teorema mediante dispositivos didácticos (E6). Registramos 58 respuestas por medio gráfico con @risk. Un ejemplo (población exponencial) se muestra a continuación:

*“Para mejorar el servicio de atención al cliente en distintas sucursales del banco Estado en horas de 12:00 a 14:00 y evitar las aglomeraciones de clientes se definió la variable.  $X_i$ : Tiempo que se demora una cajera en atender a un cliente. Para comenzar con el estudio, el Gerente tomó varios parámetros y muestras de clientes que llegan al Banco en la hora punta para cada grupo de cajeras que hay en las sucursales y analizó las gráficas mediante el teorema central del límite. Se denota:  $n$  = número de clientes (tamaño muestral),  $r$  = número de cajeras (réplicas) y el parámetro  $\lambda$  en minutos”.*

Los errores de enunciar el teorema fueron varios, como considerar la población de origen con distribución normal, utilizar la distribución t-student (en vez de la normal) en el teorema o simplemente trabajar las probabilidades sólo con la distribución de origen y no mencionar el teorema, es decir, no usar la aproximación normal.

## Procedimientos

El algoritmo más reiterativo que utilizaron los estudiantes en la resolución de su situación-problema fue definir la variable aleatoria a la ingeniería, generar una matriz de datos, representar por un histograma la distribución muestral de la media muestral o suma de variables aleatorias, interpretar gráficas por ejemplo el histograma, obtener distribución de probabilidad clásica asociada, cálculo de parámetros de la distribución de probabilidad escogida, obtener la distribución de muestreo de la media muestral cuando la población no es normal, comparar valores teóricos esperados con su correspondiente valor empírico y cálculo de probabilidad en intervalos de la distribución normal.

Los alumnos usan con corrección el cálculo y transformación algebraica de variables aleatorias (AP1). Igualmente realizan la tipificación o su operación inversa (AP2) y el cálculo de probabilidades utilizando el teorema con calculadora o programa de ordenador (AP3). Uno de los pocos errores fue no considerar la corrección de continuidad (P12), como se muestra en el siguiente ejemplo, donde, sin embargo se usan correctamente los elementos anteriores:

*¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 70 alumnos de ingeniería civil estén en la condición de “pérdida de carrera” para una muestra de 170 alumnos?*

$$E[X] = n \times p = 71,4; \quad V[X] = n \times p \times q = 170 \times 0,42 \times 0,58 = 41,41;$$

$$P(X \leq 70) = P\left(Z \leq \frac{70 - 71,4}{(41,4)^{1/2}}\right) = P(Z \leq -0,21) = 0,4168$$

Otra de las equivocaciones se presentó al plantear y calcular la probabilidad de la variable normal estándar mezclada con la media muestral:

*Se quiere estimar el intervalo en que fluctúa el tiempo que demoran en revisar un motor de automóvil cuya distribución es gamma con parámetros conocidos  $\alpha$  y  $\beta$ , y de media y varianza  $E(X) = \alpha \times \beta = (17) \times (3,5) = 59,5$ ,  $V(X) = 208,25$ . Se observó el tiempo que tardan 40 mecánicos de distintos talleres en revisar un motor. ¿Cuál es la probabilidad que los 40 mecánicos se demoren más de 6 horas en revisar un motor? Entonces:*

$$P(\bar{X} \geq 6) = 1 - P(\bar{X} < 6) = 1 - P\left(Z < \frac{6 - 59,5}{\sqrt{208,25/40}}\right) = 1 - \phi(-3,71) = 1 - 0 = 1$$

Los errores producidos son sugerir que la interrogante debiera ser ¿cuál es la probabilidad que el *tiempo promedio* que un mecánico de la muestra tarda en revisar un

## Capítulo 7

motor sea superior a 6 horas ? Otro error es anotar el parámetro de localización  $\alpha=17$  en vez de 1,7; por lo tanto induce a error en la transformación algebraica (AP1), la tipificación (AP2) y el cálculo mediante la calculadora y tabla estadística (AP3), cuyo valor correcto es 0,33.

### Propiedades

Bastantes alumnos calculan correctamente la media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias como la suma de las medias (P1), así como la varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias como suma de las varianzas (P2). Dichas propiedades P1 y P2 fueron utilizadas correctamente por 35 alumnos. Un error fue mezclar las distribuciones uniforme y binomial al aplicar estas propiedades:

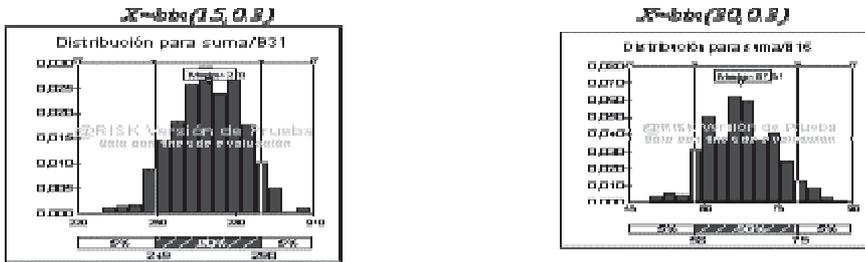
*“El precio  $S_n$  de cada paquete comprado es una v.a.i. distribuida uniformemente entre 100 dolares y 200 dolares, de media 150 y varianza 833,3. El precio total de los 10 paquetes comprados se distribuye según una distribución normal con media  $n \times \mu = 1500$  y varianza 8333 (utilizando el teorema de Laplace). Para estimar la probabilidad de que ganemos dinero, calculamos:  $Z = (1300-1500) / \sqrt{8333} = -0,024$ . Usando corrección de continuidad:  
 $P(S_n > 1300) = P(Z > -0,024) = 1 - P(Z < -0,476) = 1 - 0,3156 = 0,6844$  ”*

Hubo ocho alumnos que usaron la propiedad de que la media aritmética de una m.a. de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal (P3). Otra de las propiedades más usadas (57 alumnos) fue que la aproximación de la suma de variables aleatorias a la distribución normal mejora con el número de sumandos (P4).

*“Al aumentar la muestra, la distribución Poisson se aproxima de mejor manera a una normal, su grafica toma forma de campana”, “El valor  $\lambda$  al aumentar mejora la aproximación a una distribución normal”.*

Algunos alumnos aproximan una distribución discreta por una continua (P7). Son los alumnos que situaron su problema en el campo CP1, utilizando la distribución binomial como población de origen, y mencionaron el teorema de Laplace De-Moivre. Un ejemplo en el estudio de defectos de computadores que fue resuelto simulando para

varias muestras es el siguiente: Para el caso de  $n=30$  la aproximación de la distribución binomial a la distribución normal será buena ya que  $np$  y  $nq$  son mayores que 5 y  $p$  y  $q$  no son demasiado pequeños. El alumno incluye los siguientes gráficos:



Se aproximan algunas distribuciones clásicas a la distribución normal (P8). Los modelos probabilísticos estimados más comentados fueron la Poisson (15 casos) para variables discretas y la exponencial (20 casos) para variables continuas. Un alumno usó correctamente la propiedad de que los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal (P10).

Respecto a la corrección de continuidad (P12), que se aplica sumando en este caso 0,5 al comienzo del cálculo de la probabilidad para luego estandarizar la variable  $S_n$ , fue empleada en las distribuciones binomial y Poisson. Un ejemplo de error al considerar esta propiedad en el cálculo de  $P(S_1 > 15)$  fue usar 14,5 en lugar de 15,5:

*$S_1$ : El número de compradores de la computadora que adquieren el paquete de software de 80 clientes con probabilidad de éxito  $p=0,2$ . Para calcular la probabilidad la distribución binomial la podemos aproximar a una normal mediante el teorema central del límite porque nuestro tamaño de muestra es grande. Además, debemos utilizar corrección por continuidad por que estoy aproximando de una distribución discreta a una continua.*

$$S_1 \sim N(\mu=n \times p=16; \sigma^2=n \times p \times q=12,8);$$

$$P(S_1 > 15) = P(S_1 > 14,5) = 1 - P((S_1 - \mu) / \sigma < (14,5 - 16) / 3,57) = 1 - P(Z < -0,42) = 0,66.$$

## Argumentos

Fueron 30 los alumnos que argumentan y realizan el cálculo correcto de los promedios muestrales o de una suma de variables (A1), como se muestra en el siguiente ejemplo de aplicación correcta de los algoritmos AP1, AP2 y AP3 y propiedades P1, P2 y P12:

*“Un ingeniero toma una muestra de 50 memorias RAM, y quiere determinar la confiabilidad de obtener, a lo mas 10 memorias defectuosas. Se define la v.a.  $X$ : numero de memorias RAM defectuosas obtenidos de las 50 extracciones consecutivas. Entonces  $X \sim \text{Bin}(n=50, p=1/2)$ ,*

## Capítulo 7

$E(X)=n \times p=25$ ,  $V(X)=n \times p \times q=12,5$ . Utilizando el teorema de Laplace-DeMoivre se tiene que  $X$  se aproxima a la normal:  $P(X \leq 10)=P(X < 10,5)$ . Por c.c.  $P(X < 10,5)=P\left(Z < \frac{10,5-25}{\sqrt{12,5}}\right)=P(Z < -4,10)$   
 $= 0,000020548939$ . La confiabilidad de obtener a lo mas 10 memorias defectuosas de una muestra de 50, es de un 0,002%”.

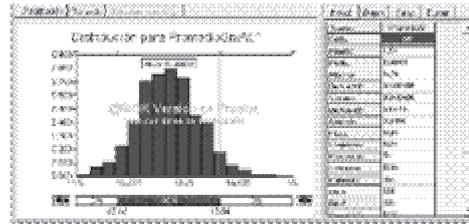
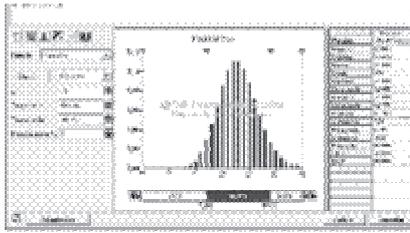
Veinte alumnos razonan el teorema como caso especial de un resultado general (A2), aplicándolo a la aproximación de la distribución binomial, que validaron como caso particular del teorema.

La validación del teorema por medio de la simulación gráfica con ordenador (A4) fue la más empleada y alcanzada por un 80% del grupo. En el siguiente ejemplo, de bioingeniería se justifica visualmente mediante la función logística la variación de las varianzas, que es la segunda propiedad citada por Méndez (1991) sobre la comprensión del teorema central del límite:

*“La sustentabilidad de la merluza de cola, se verifica por la talla (longitud total), a objeto de saber cuando se debe extraer el recurso y en que latitudes de Chile. La variable es la longitud máxima que alcanza esta especie para su primera madurez sexual. Es importante mencionar que gráficamente se observa que la varianza, para un  $n$  pequeño, es mucho mayor que para un  $n$  grande (nos indicaría de alguna forma que al aumentar  $n$  deberían variar menos los datos que es lo que generalmente se espera), esta distribución podría de alguna forma representar muy bien a muestras de poblaciones grandes en donde es importante ver en que medida están variando los datos”.*

Otro ejemplo argumentado por las representaciones gráficas es la que sigue:

*“En el gráfico con  $n=520$ , se representa el pedido del gerente. Se puede ver claramente la prueba de que se puede utilizar el teorema central del limite para apreciar como la distribución de Poisson de los promedios muestrales se aproxima a una distribución normal cuando el  $n$  es suficientemente grande. Además, la media de esta simulación, es la que más se asemeja a la media teórica planteada en el ejercicio  $\lambda = 13$ . Con la simulación de @RISK se puede ver que una distribución de Poisson estará sesgada a la derecha cuando  $\lambda$  es pequeña y se aproximará a la simetría al crecer”.*



También, se justifica el teorema mediante la comprobación de ejemplos y contraejemplos sin pretensión de generalizar (A5). Se observaron 26 respuestas utilizando este argumento, una de las cuales compara las probabilidades exactas y aproximadas del teorema para la distribución Poisson:

*“En la compra de 520 chips para el uso de su empresa, que sigue la distribución Poisson donde aparecen 2 chips defectuosos de 40, se tiene como variable el número de chips defectuosos en un lote de 520 chips. Sea  $X \sim P(\mu = 0,025)$  de parámetro  $\mu = 2/80 = 0,025$  de 520. Se sabe que el gerente sólo puede recibir a lo más 5 chips defectuosos de su pedido de 520, por lo tanto  $\mu = 520 \times 2/80 = 13$  o sea 13 defectuosos de 520 chips. Se calcula la probabilidad de que  $X < 5$ , para saber la probabilidad de que en el pedido se encuentre a lo más 5 chips defectuosos.  $P(X \leq 5) = \sum \frac{13^x \times e^{-13}}{x!} = 1,0731 \times 10^{-2}$ . Como se ve la Probabilidad exacta de que en el pedido se encuentre a lo más 5 chips defectuosos es de 1,07%. Aproximando a una Normal:  $X \sim P(\mu = 13) \rightarrow S_n \sim N(n\mu, n\mu)$ ;  $P(X \leq 5) = P(Z < \frac{5,0 - 13}{\sqrt{13}}) = P(Z < -2,22) = 0,0132$ ”.*

Veintiseis alumnos obtienen una conclusión o toman una decisión en base a resultados del teorema (A6). Un ejemplo en estimación de tiempos de espera de atención se muestra en lo que sigue:

*“En su estudio se da cuenta de que para un  $\beta = 2$  minutos, para los distintos tamaños de muestras y replicas, las cajeras se demoran alrededor de 2 a 3 minutos en atender a un cliente. Para un  $\beta = 5$  minutos, para los distintos tamaños de muestras y replicas las cajeras se demoran alrededor de 5 a 6 minutos en atender a un cliente. Para un  $\beta = 8$  minutos, para los distintos tamaños de muestras y replicas las cajeras se demoran alrededor de 7 a 9 minutos en atender a un cliente. Por lo tanto, lo más conveniente para el Banco Estado y para los clientes es considerar el parámetro  $\beta = 2$  minutos”.*

La Tabla 7.6.1 muestra los resultados obtenidos al analizar los proyectos presentados por los estudiantes en cuanto a los diferentes procedimientos,

## Capítulo 7

argumentaciones y lenguajes de representaciones gráficas, simbólicos y expresiones verbales usadas. Se observa que los campos de aplicación del teorema más requerido son los que provienen de poblaciones binomiales, de distribuciones de la suma de variables continuas y discretas con participación respectiva de 31%, 28% y 18%. También, un 15% estimó parámetros por intervalos de confianza. En conjunto han aparecido todos los campos de problemas incluidos en la enseñanza, en general con uso correcto.

**Tabla 7.6.1.** Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado del problema abierto (n=83)

Elementos usados	Incorrecto	Correcto
<i>Campos de problemas</i>		
CP1: Obtener una aproximación de la dist. binomial para valores grandes de $n$	2 (2,4)	26 (31,3)
CP2: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas i.i.d.	6 (7,2)	15 (18,1)
CP4: Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas i.i.d	8 (9,6)	23 (27,7)
CP8: Obtener del tamaño adecuado de una m.a. de poblaciones desconocidas	0 (0,0)	1 (1,2)
CP12: Estimar por intervalos de confianza la media y otros parámetros para muestras grandes	1 (1,2)	12 (14,5)
CP13: Establecer pruebas de hipótesis de la media y otros parámetros para muestras grandes	2 (2,4)	1 (1,2)
<i>Lenguaje</i>		
Términos y expresiones verbales	2 (2,4)	55 (66,3)
Notaciones y símbolos	9 (10,8)	32 (38,6)
Representaciones gráficas	3 (3,6)	60 (72,3)
<i>Enunciados</i>		
E4: Enunciado del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas	0 (0,0)	20 (24,1)
E5: Enunciado del teorema de forma general	1 (1,2)	7 (8,4)
E6: Enunciado intuitivo del teorema	5 (6,0)	58 (69,9)
<i>Procedimientos</i>		
AP1: Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias	3 (3,6)	37 (44,6)
AP2: Tipificación /Destipificación	9 (10,8)	30 (36,1)
AP3: Cálculo de probabilidades con calculadora, tablas u ordenador	3 (3,6)	35 (42,2)
AP4: Cálculo de probabilidades a partir de la simulación	3 (3,6)	66 (79,5)
<i>Propiedades</i>		
P1: La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias	5 (6,0)	35 (42,2)
P2: La varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas	5 (6,0)	35 (42,2)
P3: La media aritmética de una m.a. de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal	0 (0,0)	8 (9,6)
P4: La aproximación de la suma de variables aleatorias a la distribución normal mejora con el número de sumandos	1 (1,2)	57 (68,7)
P7: Aproximación de una distribución discreta por una continua	0 (0,0)	20 (24,1)
P8: Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal	4 (4,8)	18 (21,7)
P10: Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal	0 (0,0)	1 (1,2)
P12: Corrección de continuidad	5 (6,0)	15 (18,1)
<i>Argumentos</i>		
A1: Demostraciones formales algebraicas y/ o deductivas	9 (10,8)	30 (36,1)
A2: Presentación del teorema como caso especial de un resultado general	1 (1,2)	20 (24,1)
A4: Simulación gráfica con ordenador del teorema	3 (3,6)	66 (79,5)
A5: Comprobación de ejemplos y contraejemplos sin pretensión de generalizar	0 (0,0)	26 (31,3)
A6: Obtener una conclusión o tomar una decisión en base al teorema.	7 (8,4)	26 (31,3)

Este proyecto por ser abierto, llevó a que los estudiantes se expresarán con diverso lenguaje, con un 66% de uso correcto de la terminología verbal y un 39% en notación simbólica. La de mayor uso, con un 72%, fue la de representaciones gráficas, donde la experiencia de trabajar el teorema mediante la simulación con el computador resultó positiva. Las respuestas de los estudiantes muestran que aprendieron a utilizar el programa @risk, obteniendo tablas de la distribución de la suma de variables aleatorias con muestras de distintos tamaños muestrales y la gráfica de barras e histograma como un medio de validar la forma simétrica de la distribución de la media muestral y aproximación a la normal a medida que aumenta el tamaño muestral; propiedades propuesta por Méndez (1991).

La forma de enunciar intuitivamente el teorema fue la más utilizada con un 70%, seguido de la suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (24%) y un 8% declaró el teorema de forma general.

En cuanto a los procedimientos usados para resolver los problemas planteados, un promedio de 40% usó correctamente las estrategias del cálculo algebraico, tipificación y cálculo con calculadora, tablas estadísticas o programa de ordenador. La frecuencia de uso incorrecto de los procedimientos fue pequeña; no todos los alumnos usan los procedimientos algebraicos, pues algunos plantean los problemas y hacen un estudio mediante simulación (en lugar de usar un procedimiento algebraico). No se había considerado este elemento como objeto de estudio, pero muchos estudiantes han resuelto el problema considerado por medio de la simulación, y por ello lo incluimos ahora como procedimiento.

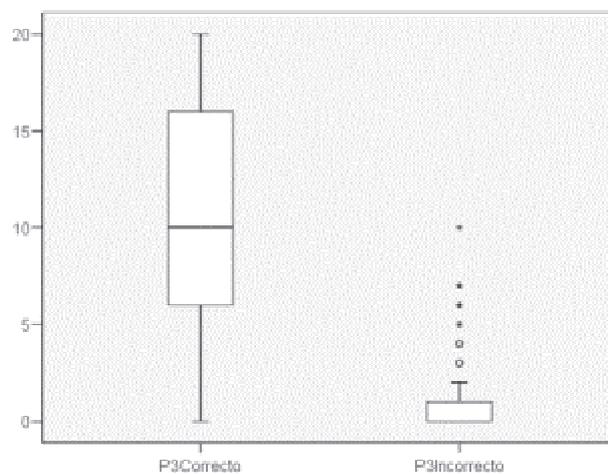
En cuanto a las propiedades, los estudiantes en general utilizan el tipo de variables aleatorias para identificar la distribución clásica de probabilidades y luego aplicar algunas propiedades de aproximación a la distribución normal. Las de mayor reconocimiento son: P4, que la aproximación mejora al aumentar el número de variables (69%), P1 y P2, la media y varianza de la distribución aproximada de la suma de variables aleatorias es la suma de las medias y varianzas respectivamente (42%), P7, aproximación de una distribución discreta por una normal (24%), y con un 22% la propiedad P8 de aproximación de distribuciones clásicas a la distribución normal. Los alumnos que trabajaron en muestras de poblaciones con distribución discreta, un 18% usó correctamente la corrección de continuidad P12 con un 6% de error en la aplicación. Sólo un 10% aplicó que la media de la muestra se aproxima a una distribución normal

para un tamaño muestral grande, P3. Observamos errores en algunos estudiantes que confunden una variable discreta con una continua, como es el caso de la distribución Poisson con la distribución exponencial.

Fueron varias las argumentaciones en los distintos problemas de aplicación; la validación del teorema de mayor éxito fue la simulación gráfica con ordenador (80%), seguida de formas algebraicas (36%), la comprobación de ejemplos de cálculo de probabilidades y esperanzas tanto empíricas como teóricas (31%) y un 24% lo argumentó como caso especial de un resultado general. Muy pocos estudiantes llegan a una conclusión final correcta en el contexto del problema, relacionando gran parte de los elementos de significados, realizando un análisis de cada propiedad y concluyendo con una síntesis. Sólo un 31% concluye con una decisión de contexto basado en el teorema.

Una síntesis del número de elementos de significados del teorema correctamente e incorrectamente empleados en este problema por los estudiantes (entre los 29 identificados en la Tabla 7.6.1), se expone en lo que sigue. Se observa en el gráfico de caja (Figura 7.6.1) que el número de elementos correctamente utilizados por alumno en la solución varía de 0 a 20, mientras que el número de elementos incorrectamente utilizados va de 0 a 10. También se destaca la superioridad de los cuantiles correspondientes a los elementos correctos en el 50% central de la distribución y la mediana en relación a las respuestas incorrectas. Además, se percibe que las medias poblacionales de puntuaciones totales de elementos correctos e incorrectos podrían ser distintas ya que no se produce un traslape de la información central.

**Figura 7.6.1.** Número de elementos correcta e incorrectamente usados en el proyecto



En la Tabla 7.6.2 se presentan los estadísticos del número de elementos de significado del teorema correcto e incorrecto en la prueba de ensayo, analizando la diferencia entre los alumnos participantes. Se observa que el número promedio de respuestas correctas es altamente mayor de las respuestas incorrectas, con una media de 10,6 elementos de significados por alumno y 1 incorrecto del total de los 29 especificado en la Tabla 7.6.1, siendo ambas de respuestas heterogéneas (coeficientes de variación superior a 35%) con desviaciones típicas muy distintas.

**Tabla 7.6.2.** Estadísticos del número de elementos correctos e incorrectos en el problema de ensayo

	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Correctos	10,6026	5,95293	,67404
Incorrectos	1,1795	2,19056	,24803

Los comentarios anteriores son confirmados mediante la inferencia en un contraste T de diferencias de medias en muestras relacionadas, resultados presentes en la Tabla 7.6.3 cuyo valor de probabilidad es 0,000 y se calcularon el intervalo de confianza del 95% de confianza para la diferencia de medias en muestras relacionadas. Se puede apreciar que la diferencia promedio entre respuestas correctas e incorrectas por alumno es altamente significativa, con un intervalo de confianza dentro de los valores positivos entre 7,8 y 11,1; lo cual permite rechazar la hipótesis de igualdad de las medias. Ello indica que los alumnos en su conjunto utilizan más elementos de significado correctamente que incorrectamente en la resolución del proyecto de aplicación contextualizado del teorema central del límite.

**Tabla 7.6.3.** Contraste e intervalo de confianza de la diferencia de elementos correcto e incorrecto en el problema de ensayo

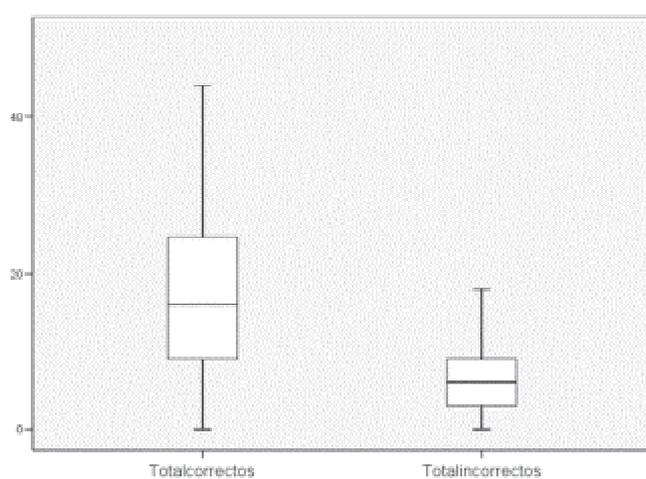
Media	Desviación típ.	Diferencias relacionadas		t	gl	Sig. (bilateral)
		Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia			
9,42308	7,23361	,81905	Inferior 7,79215	11,505	77	,000
			Superior 11,05400			

## 7.7. RESUMEN DE RESULTADOS EN LAS TRES PRUEBAS ABIERTAS

Como resumen, se realiza un estudio comparativo del número de elementos de significado usados correcta o incorrectamente por cada estudiante en el total de las tres pruebas abiertas.

En relación a la diferencia entre el número de elementos de significado correcto e incorrectamente empleados por los alumnos al resolver los tres problemas abiertos, el análisis indica una divergencia respecto a los resultados de aplicación del teorema en las tres situaciones. En la Figura 7.7.1 se puede valorar que el número de elementos correctos es mayor que el número de elementos incorrectos, ya que el recorrido de los elementos correctos que va de 0 a 45, mientras que para los incorrectos varía de 0 a 19. También, la mediana es visiblemente superior (16 y 7 respectivamente), al igual que el 50% central de puntuación total; de elementos de significados correctos comprendido en el intervalo (9; 25), y el intervalo (5; 10) para los elementos incorrectos. Se muestra claramente que las medias poblacionales de las puntuaciones correctas e incorrectas pueden ser distintos.

**Figura 7.7.1.** Número de elementos correcta e incorrectamente usados en las tres pruebas



Las afirmaciones anteriores son fortalecidas por el resumen de los estadísticos de posición y dispersión establecidos en la Tabla 7.7.1. La media de elementos adquiridos correctamente por los alumnos es casi el triple del valor de elementos incorrectos, además en las dos distribuciones con coeficientes de variación heterogénea muy similares (59,3% y 62,5% respectivamente).

**Tabla 7.7.1.** Estadísticos del número de elementos correctos e incorrectos usados en las tres pruebas (n = 134)

	Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Total correctos	17,2519	134	10,22487	,88002
Total incorrectos	6,2000	134	3,87645	,33363

Una forma de consolidar las observaciones anteriores es mediante un contraste de hipótesis de la diferencia entre puntuaciones medias de elementos correctos e incorrectos para muestras relacionadas, obteniendo un resultado altamente significativo (significación de 0,000). El intervalo de confianza para la diferencia de medias tiene unos límites comprendidos entre 9,1 y 12,9 indicando que los estudiantes usaron correctamente entre 9 y 13 elementos de significados del teorema central del límite más que el número de elementos en que presentaron errores, entre los establecidos en las Tablas 7.5.1.1, 7.5.2.1 y 7.6.1.

**Tabla 7.7.2.** Contraste e intervalo de confianza de la diferencia de elementos correcto e incorrecto en los tres problemas abiertos

Media	Diferencias relacionadas				t	gl	Sig. (bilateral)
	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
			Inferior	Superior			
11,05185	11,37050	,97862	9,11632	12,98739	11,293	133	,000

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la gran diversidad de elementos que el alumno debe usar para resolver los problemas y las tareas planteadas y la diferencia del proyecto abierto planteado con las tareas tradicionales incluidas en los libros de texto. El alumno debe reconocer los campos de problemas del teorema central del límite, elegir un lenguaje adecuado para representar sus datos, y operar con ellos mediante una serie de procedimientos que le producen resultados numéricos o gráficos. Estos resultados han de ser interpretado adecuadamente, estableciendo correspondencias semióticas pertinentes entre los mismos y los objetos matemáticos y sus propiedades que intervienen en el teorema y en las tareas.

Finalmente, debe ser capaz de ligar todos estos resultados por medio de una argumentación pertinente. Es muy importante a la hora de planificar una enseñanza, tener en cuenta todos los elementos previos que el alumno deberá conocer y manejar para poder adquirir de manera coherente el significado global del teorema central del límite. En lo que sigue comparamos el significado personal de los estudiantes, evaluado mediante el conjunto de pruebas, con el significado institucional de referencia implementado.

## **7.8. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO PERSONAL DE LOS ESTUDIANTES**

Al finalizar el proceso de estudio del teorema central del límite se han analizado las respuestas a varios instrumentos de evaluación, un cuestionario y tres problemas abiertos. A continuación se hace una síntesis de las principales tendencias en el grupo en cuanto al significado personal de los estudiantes.

### **7.8.1 CONCORDANCIAS ENTRE SIGNIFICADO PERSONAL Y SIGNIFICADO IMPLEMENTADO**

Una gran variedad de los elementos de significados del teorema ha sido aplicado en forma correcta por los alumnos, tanto en el cuestionario, como en las pruebas abiertas. Los campos de problemas más intuitivos en los ítems del cuestionario fueron obtener un estimador para la media muestral (CP12, 76% en ítem 11), aproximación binomial a la normal CP1, (59% en ítem 1), el reconocimiento del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas (CP2, CP4, ítem 5 parte a), b) y c)) y aproximación de distribuciones clásicas continuas (CP4, 89% la distribución T en ítem 12).

En los problemas abiertos estos campos fueron menos reconocidos, pues algunos alumnos transforman el problema en otro correspondiente a la distribución de Poisson o normal. No obstante un porcentaje de estudiantes reconoce el campo CP1 en el problema 2 relativo a la aproximación binomial y el CP2 en el problema 1. A diferencia de los problemas parciales anteriores, el problema 3 destaca el reconocimiento de otros cuatro campos de problemas en que se utiliza el teorema (CP4, CP8, CP12 y CP13); en total hay 6 campos de problemas reconocidos (un 94% de estudiantes reconoce alguno de ellos). Parece que fue más sencillo para el estudiante idear él mismo un problema que pudiese resolverse mediante el teorema central del límite que identificar el teorema como solución de un problema previamente planteado.

El lenguaje simbólico fue, en general, sencillo, para los estudiantes, con algunas excepciones. En los problemas abiertos, observamos que en la aplicación del teorema mediante la distribución de probabilidad Poisson (problema 1) se ha mostrado una comprensión de la representación algebraica con distintos porcentajes de logros (66% en problema 1, 42% en problema 2, 39% en el problema 3); también se añade con fuerza en este último problema el uso correcto de la representación gráfica (72%).

Los procedimientos mejor utilizados han sido las estrategias algebraicas AP1

(94% correcto en problema 1 y 59% en problema 2, 45% en el proyecto), la tipificación y destipificación AP2 (67% correcto en problema 1, 43% en problema 2, 36% en el proyecto) y el cálculo de probabilidad con tablas AP3 (71% en problema 1, 53% en problema 2). En el proyecto abierto además, se incorpora la simulación como resolución del problema de aplicación (70% de uso correcto).

Las propiedades más sencillas fueron la condición del tamaño muestral P4 (93% en ítem 6 b)), la media de la suma de variables aleatorias P1 (81% en problema 1, 56% en problema 2, 42% en el proyecto), la varianza de la suma de variables aleatorias P2 (69% en problema 1, 43% en problema 2, 42% en el proyecto), el uso de la corrección de continuidad a nivel declarativo P12 (74% en ítem 2) y la convergencia de la distribución binomial en el centro del rango de la distribución P7 (66% en ítem 3). Lo siguen las propiedades de la distribución de origen y condiciones de la convergencia para la suma de variables, propiedades no incluidas en el significado institucional de referencia (entre 58 y 67% de aciertos en los apartados a) y c) del ítem 6; 69% en el proyecto). Asimismo, se reconoce la convergencia para valores pequeños de  $n$  de algunas distribuciones (entre 72 y 84% de aciertos en diferentes partes del ítem 7). Se maneja a nivel declarativo el concepto de distribución muestral (82% en ítem 8) y se conoce la forma de su gráfica (59% en ítem 10).

De las cinco maneras convenientes de validar el procedimiento de análisis, sobresale la simulación gráfica con ordenador (A4) en el proyecto (80%), la aproximación a la distribución binomial como caso especial del teorema (A2, 66% en ítems 1 y 2) y la simulación manipulativa (A3, 77% en ítem 7). Se emplea correctamente el argumento de conclusión específica en base al resultado (A6), aunque la frecuencia de uso correcto no alcanza el 50% en los problemas abiertos.

Respecto a las configuraciones empleadas en el proceso de estudio, en el cuestionario fueron positivos los resultados (frecuencia de éxito) en los ítems 1 y 6 relacionados con configuración manipulativa (un promedio de respuestas correctas de 69,2%), por ejemplo en la comprensión de la convergencia binomial por una distribución continua. Una tasa de aciertos de 72,1% en la configuración simulación computacional (ítems 3, 7, 9, 10, 11 y 12) y en la configuración algebraica de 42,9% (ítems 2, 4, 5 y 14). Por lo tanto, las tres configuraciones epistémicas instauradas en la primera evaluación (cuestionario) han sido robustecidas la configuración algebraica en los problemas 1 y 2 y la configuración de simulación e intuitiva en la tarea de contexto a la ingeniería. Se observa también la mayor dificultad de la configuración algebraica

respecto a las manipulativas y computacional, por lo que la enseñanza con dicha configuración sólo debiera abordarse, alcanzada la comprensión de las dos primeras.

### **7.8.2. DIFERENCIAS ENTRE SIGNIFICADO PERSONAL Y SIGNIFICADO IMPLEMENTADO**

Por otro lado, no todos los elementos de significado han sido aplicados con la misma frecuencia ni todos resultaron igualmente sencillos, habiendo una gama de dificultad, desde preguntas acertadas por todo el grupo hasta otras con un porcentaje de aciertos muy bajo. Dentro de las características generales que hemos podido determinar en las resoluciones de los alumnos, los errores más comunes se describen a continuación. Una parte importante de estos errores podrían deberse a conflictos semióticos, aunque este punto deberá ser investigado más adelante, pues en este trabajo no hemos llevado a cabo un análisis semiótico detallado de las respuestas de los estudiantes.

Reconocer los campos de problemas donde el teorema es una herramienta de análisis no fue siempre sencillo para los estudiantes; en el primer problema abierto sólo el 46% reconoce la aproximación de variables discretas no acotadas correctamente (CP2). En el problema 2 sólo 26% reconoce la aproximación a la distribución binomial (CP1) y el 16% la distribución de la suma de variables discretas (CP2). En estos problemas los alumnos resuelven un problema diferente al planteado mediante la distribución exacta de Poisson o binomial, respectivamente.

Sólo una cuarta parte del grupo inspecciona aproximaciones de estadísticos que provienen de poblaciones ya sea discreta o continua y su inferencia en intervalos de confianza y contraste de hipótesis (CP11 y CP12). Se entiende que una dificultad de los estudiantes es identificar la distribución de probabilidad apropiada que modela la variable estadística situada en la ingeniería. Es por ello que hubo mejores respuestas correctas en el problema 1, donde se indica que el problema de transporte ha sido modelado por la distribución Poisson. También se presentan errores al extender indebidamente el teorema para  $n$  pequeño en el caso de la proporción (CP1, ítem 13 con solo 21% de respuestas correctas e ítem 15 con sólo 12% de respuestas correctas), resultados que se explican por la heurística de la representatividad.

El lenguaje menos utilizado es el de términos y expresiones verbales debido a la gran cantidad de palabras relacionadas con teorema central del límite y que el alumno prefiere expresarse en lenguaje simbólico; en general, cuando se usa se hace

correctamente, pero también se producen errores. Destaca el proyecto abierto, donde hay un uso correcto del lenguaje en el 66% de los estudiantes.

Fue difícil el procedimiento de estandarización (AP2) a nivel declarativo (ítem 4) pues algunos estudiantes confunden la desviación típica de la media y de la proporción o comenten errores en el manejo de desigualdades. Cerca de un 25% de los estudiantes tienen problemas con la tipificación y este porcentaje fue más alto en el ítem 4 con un 62,7% al confundir la tipificación de la suma de variables aleatorias con la correspondiente a la media aritmética.

Aunque, en general, los alumnos usan la mayor parte de los enunciados del teorema, les resultó difícil identificar un enunciado incorrecto (sólo 47% en ítem 5) aunque el error se relaciona con el olvido de la desviación típica para la proporción. En el problema 1 sólo el 40% reconocen el enunciado para la suma de variables aleatorias (E4), debido a la falta de reconocimiento del campo de problema CP2. Lo mismo ocurre en el problema 2 con un 28% y un 20% en plantear el teorema de forma intuitiva (E6) y muy pocos lo declaran de manera general (E5). Por el contrario, en el proyecto abierto el 70% usa correctamente el enunciado intuitivo (E6).

En las propiedades hubo un 81% de error al comparar las medias del estadístico y de la población (ítem 14) (P1) formulada en términos verbales de la distribución muestral. Resalta que no utilicen la corrección de continuidad en el procedimiento algebraico (P12) en las distintas situaciones de estimación de distribución discreta por una continua; de los que la utilizaron esta propiedad un 9,1% lo hicieron mal y sólo un 21,4% en promedio lo aplicó correctamente. Sólo el 33% la usa correctamente en el problema 1. En cambio en el ítem 2 del cuestionario sólo un 26,1% expresó simbólicamente mal la corrección, haciendo notar al alumno que el propósito de la pregunta era aplicar la propiedad. Tampoco alcanzó el 25% del uso correcto de las propiedades de la media aritmética (P3), aproximación de una distribución discreta por una continua (P7) y de otras distribuciones clásicas (P8), a diferencia de la aplicación de la media de la suma de variables aleatorias (P1) y varianza de la suma de variables aleatorias (P2).

Por último, la unión de todos los elementos de significado del teorema central del límite presentes no fue consolidada en una buena argumentación por el grupo; un promedio de 38% concluye en base a la simulación gráfica (A4) o forma algebraica (A1) determinando una decisión, así también es alto el porcentaje de errores de la argumentación deductiva (A1) (sólo 26% de razonamientos deductivos correctos en el

problema 1, 32% en el problema 2 y 36,1% en el proyecto abierto). También hay dificultad al obtener una conclusión a partir del análisis (A6) (sólo 37% lo hacen correctamente en el problema 1 y 45% en el problema 2). Sin embargo, en el proyecto abierto la simulación se usa con éxito en la argumentación en un 80% de los estudiantes.

### **7.9. CONCLUSIONES SOBRE LA IDONEIDAD DEL PROCESO DE ESTUDIO**

Además de estudiar con detalle la comprensión adquirida por los estudiantes sobre los diferentes elementos de significado incluidos en el proceso de estudio, se planteó analizar el punto hasta el cuál el proceso de instrucción ha sido eficaz. Para ello se basó en el análisis de los criterios de idoneidad definidos por Godino, Contreras y Font (2006).

#### **Idoneidad epistémica**

Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia. Incluye también las conexiones o apertura hacia otras configuraciones epistémicas que constituyen la trayectoria correspondiente (Godino, Contreras y Font, 2006).

En el estudio la idoneidad epistémica ha sido muy alta, como se pone de manifiesto en el análisis realizado en los capítulos 5 y 6 sobre el proceso de estudio diseñado e implementado y al compararlo con el estudio histórico y en análisis de libros de texto realizados en los capítulos anteriores. El estudio de libros de texto reveló que existe diversidad de significados en los libros de estadística para ingenieros en la forma de presentación del teorema central del límite, aunque el énfasis general se pone en la resolución de ejercicios rutinarios, bien descontextualizados o contextualizados a la ingeniería, pero con datos que en ningún modo son reales. Además, la presentación del teorema se restringe a la distribución de la media de la muestra (en el mejor de los casos a la suma de variables aleatorias) y se hace poco uso de la herramienta informática.

En la propuesta se han ampliado notablemente los campos de problemas, para incluir prácticamente todos los encontrados en el estudio histórico, incluyendo, desde la aproximación de la distribución binomial a las aplicaciones a estimación y obtención del tamaño de muestra. El significado implementado (Capítulo 6) ha reforzado la aplicación del teorema central del límite a variables discretas, problemas enfocados a varias especialidades con dispositivo de simulación y resolución justificada. Se inicia la

introducción del teorema en la lección 1 a partir de la aproximación de una distribución de probabilidades particular (utilizada para generar algunos modelos probabilísticos clásicos), comprometiendo al estudiante a observar distintos acercamientos de la distribución muestral de varios estadísticos tomados de datos reales recogidos por los estudiantes e incorporando la informática.

Respecto a la forma de argumentación, se ha ampliado las formas tradicionales, que consisten esencialmente en el razonamiento formal deductivo. La experiencia de enseñanza ha permitido otras formas de argumentación que incluyen expresar el teorema como caso particular de un resultado general, exponer la simulación con ordenador, formularla mediante ejemplos y contraejemplos y tomar una decisión en base a los resultados. Especialmente importante ha sido la argumentación basada en la simulación y visualización con ordenador. La facilidad de simulación de experimentos aleatorios hizo posible a los alumnos la experimentación y exploración del teorema central del límite, variando los tipos de distribuciones y sus parámetros y observando como depende la convergencia de ellos, de una forma interactiva. De este modo el "objeto" teorema central del límite pierde su carácter abstracto, proporcionando una experiencia estocástica que no es fácil alcanzar en la vida real (Biehler, 1991, 1997; Tauber, 2001).

Por tanto los elementos de significado presentados en el proceso de estudio son una muestra representativa de los que se detallaron en el significado de referencia, puesto que se han incluido todos los campos de problemas pretendidos, así como los procedimientos pertinentes, propiedades relacionadas, enunciado y lenguaje. De los 45 elementos de significado del teorema, hubo dos elementos (CP7: campo de problema de la suma de variables aleatorias dependientes y E1: presentación del teorema como convergencia de sucesiones de v.a.) no tomados en el diseño debido a su excesiva dificultad para los estudiantes a que iba dirigido el estudio. Se han establecido también conexiones hacia otros objetos matemáticos (configuraciones epistémicas), en particular hacia las distribuciones muestrales de la media y proporción y hacia sus aplicaciones en la construcción de intervalos de confianza y contrastes de hipótesis.

### **Idoneidad cognitiva**

Expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o, de manera equivalente, la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los

alumnos (Godino, Contreras y Font, 2006). Puesto que un grupo de estudiantes siempre es variado, respecto a sus capacidades, conocimientos previos, interés y esfuerzo durante el proceso de estudio, este tipo de idoneidad nunca será completa (en el sentido de que todos los estudiantes alcancen todos los objetivos educativos). Por consiguiente, se habrá de dar un juicio respecto al grado en que se ha conseguido en relación con el esfuerzo hecho por el estudiante e identificar criterios de mejora para futuras implementaciones del proceso.

En relación a los fines de la enseñanza, una primera evidencia de idoneidad cognitiva es el aprendizaje mostrado por el estudiante, evidenciado en las diferentes pruebas de evaluación. El aprendizaje de los diferentes elementos de significado fue, sin embargo, desigual, como se ha mostrado al analizar las concordancias y diferencias del significado implementado y personal de los alumnos y en las diferencias de porcentajes de respuestas correctas a diferentes ítems del cuestionario. Cada estudiante responde correctamente en promedio 12-13 ítems correctamente, de un total de 20 en el cuestionario y la mayor parte de los ítems tienen una alta tasa de respuestas correctas (aunque en unos pocos casos, como en el ítem relacionado con la heurística de la representatividad los estudiantes en su mayoría dan la respuesta incorrecta).

La idoneidad cognitiva también se manifiesta en el hecho de que al resolver los problemas abiertos y el proyecto los alumnos utilizan más elementos de significado correctamente que incorrectamente en cada una de estas tareas y en su conjunto (el número de elementos correctamente utilizados duplica al de usados con errores). Además, casi todos los estudiantes aprendieron a manejar la planilla Excel y el software @risk, son capaces de simular experimentos y el 62% realizaron un proyecto opcional en el que fueron capaces de idear un contexto de la ingeniería donde se pueda aplicar el teorema central del límite. Dichos estudiantes mostraron una alta capacidad de manejos de procedimientos y la mayoría de las propiedades, variando los campos de problemas y enunciados presentados. Aún así muchos de ellos no llegan a interpretar todos los resultados de su proyecto, limitándose a proporcionar los resultados numéricos sin interpretación.

Esta dificultad (la interpretación) junto con la identificación de los campos de problemas (en los problemas abiertos 1 y 2) fueron los puntos menos alcanzados. Los estudiantes dominan los procedimientos, lenguaje y propiedades y son capaces de inventar un problema que involucre al teorema cuando así se les pide. Es más difícil para ellos reconocer un problema relativo al teorema central del límite (si no se les

indica explícitamente) o interpretar los resultados en un contexto de ingeniería.

También la lectura de los capítulos 5 y 6 nos hace reflexionar sobre que posiblemente hubo diferencia de intensidad de implementación de los diferentes elementos de significado, dedicándose menos tiempo a estas actividades. No se emplearon con la misma frecuencia los cinco tipos de argumentación, posiblemente se priorizó la simulación, cálculo y desarrollo algebraico, que también es frecuente en las asignaturas previas de Cálculos y Probabilidades. Son estos los puntos en que hay que mejorar la idoneidad cognitiva del proceso de estudio, posiblemente con más tiempo dedicado al tema y sobre todo, con más experiencia de los estudiantes en aplicación del teorema en su futura vida profesional.

### **Idoneidad semiótica**

Tiene en cuenta las posibilidades que ofrece una configuración didáctica para identificar conflictos semióticos potenciales y de resolverlos mediante la negociación de significados (Godino, Contreras y Font, 2006).

El dispositivo didáctico implementado permitió identificar muchos de estos conflictos, tanto a través de las evaluaciones intermedias y finales, como mediante las preguntas planteadas por los estudiantes a la plataforma EV@. A lo largo del Capítulo 6 se describieron algunos de estos conflictos, aunque no se ha descrito con detalle la forma en que fueron resueltos colectivamente en la clase, o bien, individualmente en las tutorías implementadas por el profesor. Los resultados de la evaluación final, en todo caso, muestra la resolución de una parte importante de los mencionados conflictos.

Por ejemplo, lo mismo que ocurrió en la investigación de Tauber (2001), en nuestro curso los alumnos mostraron variados conocimientos previos, y mostraron conflictos semióticos en relación a la interpretación de histograma y cálculo de área dentro de un intervalo, y el hecho de que una variable cuantitativa discreta puede ser aproximada por una distribución continua. Estos conflictos fueron resueltos a lo largo de la enseñanza. Otros conflictos detectados en la enseñanza y resueltos fueron debidos a la ejecución de situaciones de estudio mediante la simulación. En los casos de estudio de la sensibilidad paramétrica para la convergencia en distribución de probabilidad detectamos y resolvimos en algún grado otros conflictos de diferenciación en los tipos de asimetría, diferenciación entre modelos teórico y datos empíricos, y entre estadístico y parámetro.

El tiempo disponible no permitió resolver todos los conflictos presentados, lo cual sería utópico para un objeto matemático de tal complejidad. Por ejemplo, no se logró identificar algunos de los campos de problemas o bien no aplicar (o aplicar incorrectamente) la corrección de continuidad. Otro de los conflictos fue reconocer y describir la distribución de probabilidades de la población, que concuerda con lo indicado por Vallecillos (1999) quien indica que muchos alumnos tienen dificultad con las distribuciones muestrales y su influencia en los procedimientos inferenciales. Sin embargo, el hecho de que el proceso haya permitido identificarlos indica, por un lado un grado de idoneidad semiótica. Por otro, proporciona los medios para aumentar dicha idoneidad en futuras experimentaciones del material, donde se puede tener en cuenta los conflictos semióticos identificados y tenerlos en cuenta en la revisión y mejora del proceso de estudio.

### **Idoneidad mediacional**

Es el grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad (Godino, Contreras y Font, 2006). El proceso de estudio analizado tiene una alta idoneidad mediacional, pues permitió a los estudiantes el trabajo con el teorema central del límite desde tres configuraciones didácticas diferenciadas: manipulativa, computacional y algebraica, para facilitar la comprensión progresiva y generalización del teorema central del límite.

En otros cursos de estadística, las clases se desarrollan sólo en el aula tradicional, presentando a los estudiantes generalmente actividades de problemas y ejercicios con desarrollo algebraico y demostraciones de propiedades deducidas de los teoremas y corolarios. Los modelos probabilísticos, presentados comúnmente en forma matemática, y el estudio de su comportamiento en aplicaciones a la ingeniería, no es un tema fácil para los estudiantes, que manifiestan sus dificultades y errores en las distintas evaluaciones implementadas en un semestre académico.

Las actividades propuestas en este caso contemplan un rango de dificultad, variedad de procedimientos y formas de exploración bastante mayor que la forma tradicional presentada en los textos de estadística para ingenieros. La simulación y posibilidades gráficas de software permitió a los estudiantes, sobre todo con applets en los informáticos, explorar y visualizar conceptos y propiedades complejas, en el caso de los modelos probabilísticos, analizar las familias de distribuciones de probabilidad mediante el estudio de sus parámetros y las características de la convergencia. En

nuestro proceso de estudio, las actividades planificadas en las tres lecciones guían de forma inductiva la introducción del teorema central del límite, la comprensión de la variabilidad y búsqueda de soluciones a problemas del diseño experimental de situaciones a la ingeniería.

Las tres configuraciones didácticas implementadas permitieron ampliar mediante la representación del teorema con ordenador la parte algebraica, conectando los modelos de probabilidades con su experimentación. No obstante, si bien, las actividades realizadas con el ordenador han complementado la construcción del significado del teorema, ha implicado un coste cognitivo al alumno (Garfield y delMas, 1989), ya que deben asimilar distintas formas de comunicación en un tiempo limitado de su carga académica del semestre.

La plataforma puesta a disposición de los estudiantes, permitió, asimismo, ampliar sus posibilidades de trabajo en el tema, fuera de las lecciones programadas. El único punto limitado fue el tiempo disponible que, aunque amplio para algunos de los alumnos fue insuficiente para que otros llegaran a asimilar todos los objetivos programados.

### **Idoneidad emocional**

Describe el grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa (Godino, Contreras y Font, 2006).

Para valorarla, hay que tener en cuenta la caracterización del estudiante de ingeniería cuyas competencias matemáticas son débiles y su ingreso a esta Universidad no ha sido la primera opción. Los métodos tradicionales que se han estado aplicando en la Universidad conlleva altos grados de reprobación de estos estudiantes en cursos de Probabilidades y de Estadística, observando una desmotivación. Los alumnos expresan su preocupación por la cantidad y complejidad de conceptos y propiedades que han de asimilar. Una primera medida de la idoneidad emocional fueron los resultados de la encuesta de evaluación del desempeño docente en el aula de estadística, en los que la etapa de implementación del proceso de estudio fueron bien evaluados, con un alto porcentaje favorable a la pregunta si realizaría el curso con el mismo profesor.

En este proceso de estudio se trató de ampliar la idoneidad emocional mediante un diseño cuidadoso de las aplicaciones presentadas en diversas áreas de la ingeniería.

## *Capítulo 7*

Ello llevó a una implicación bastante alta de los estudiantes, puesto de manifiesto en el número de proyectos presentados (83 de un total de 106 estudiantes que se presentaron al examen final, hubo otros alumnos que no la rindieron por tener nota de presentación a examen calificada de bueno), así como en las temáticas elegidas para los mismos.

## **CAPÍTULO 8.**

### **CONCLUSIONES**

#### **8.1. INTRODUCCIÓN**

En esta memoria se ha presentado un estudio teórico y experimental sobre la enseñanza del teorema central del límite en el contexto de las carreras de ingeniería, basado en el enfoque ontosemiótico desarrollado por Godino y colaboradores, que se recogen en las referencias citadas a lo largo de la investigación y publicadas de 1994 a 2007. El marco teórico ha permitido analizar sistemáticamente el significado de referencia del teorema central del límite como objeto matemático y comparar el significado institucional pretendido con el implementado por el profesor. También se ha intentado evaluar criterios de idoneidad didáctica del proceso de estudio diseñado y el significado personal adquirido por estudiantes de ingeniería en una asignatura de Estadística del área de Ciencias Básicas, comparándolo con el significado implementado.

A continuación, se presentarán las principales conclusiones desprendidas en los diferentes capítulos. Se comienza describiendo las conclusiones respecto a los objetivos e hipótesis de la investigación y presentando las aportaciones más relevantes. Se finaliza indicando las implicaciones de los resultados de esta memoria para la enseñanza de la estadística en la educación universitaria y su alcance para futuras líneas de investigación.

#### **8.2. CONCLUSIONES EN RELACIÓN A LOS OBJETIVOS**

En el Capítulo 1 se planteó un objetivo general y varios objetivos específicos. El objetivo general propuesto se dirigió a fundamentar, diseñar y evaluar un proceso de enseñanza y aprendizaje del teorema central del límite, que describiése la implementación de dicho proceso y el aprendizaje de los estudiantes, en la misma línea de otras investigaciones realizadas en la Universidad de Granada sobre educación estadística y principalmente de la tesis de Tauber (2001). Este objetivo se expresó en los siguientes términos:

## Conclusiones

*Diseñar y evaluar un proceso de estudio dirigido sobre el teorema central del límite a estudiantes de ingeniería, que tenga en cuenta la evolución histórica del teorema, el contexto educativo y tipos de estudiantes junto con el marco teórico en que se basa la investigación.*

Se ha intentado responder a este objetivo mediante el diseño y evaluación de un proceso de estudio fundamentado por un riguroso análisis de tipo teórico y experimental. El marco teórico permitió desglosar el objeto "teorema central del límite" en componentes específicos, que han sido estudiados desde el punto de vista institucional y personal con exhaustividad. Este objetivo general se divide, en otros específicos, cuyos resultados se describen a continuación, tratando de justificar el grado de cumplimiento en cada cuestión.

### **Objetivo 1**

*Realizar un análisis epistemológico de la evolución histórica del teorema central del límite desde el punto de vista de su significado, identificando los diversos campos de problemas abordados, así como las diversas formulaciones (enunciados) del mismo.*

Este objetivo se abordó en el Capítulo 2 (Sección 2.3) donde se estudia la historia del teorema central del límite, identificando siete campos de problemas, comenzando por la necesidad de aproximar la distribución binomial para valores grandes del parámetro  $n$ , hasta llegar a la generalización del teorema para la distribución de la suma de variables aleatorias dependientes. También se describieron otros campos consistentes en el estudio de las condiciones necesarias y suficientes para su aplicación. El interés de matemáticos de prestigio (desde Laplace a Lévy) en el desarrollo del teorema (1733 a 1937), así como sus numerosas aplicaciones, dan cuenta de su relevancia en la teoría de la probabilidad y estadística matemática (ver Tabla 2.3.8.1). La descripción de los progresivos campos de problemas permitió posteriormente, dirigir el diseño del proceso de estudio sobre el teorema, de acuerdo a los estudiantes de ingeniería, considerando tres campos de problemas con intensidad progresiva en la abstracción de los contenidos y manteniendo el orden de la evolución histórica.

El desarrollo histórico permitió también describir diferentes enunciados del teorema y caracterizar las herramientas matemáticas usadas en su demostración. Dichas herramientas incluyen temas asequibles a los estudiantes de ingeniería, como la distribución normal, transformaciones algebraicas, tipificación de variables aleatorias y cálculo de probabilidades. Pero también contienen otros, como la función generatriz de momentos, desarrollo en serie o método de momentos que, si bien es cierto podrían estar al alcance de estos estudiantes, se hacen inviables en el tiempo disponible de estudio. La caracterización de estos procedimientos condujo al desafío de implementar otras dos herramientas previas (configuraciones manipulativa y de simulación) para sustituir dichos procedimientos formales y lograr un grado de comprensión aceptable del teorema central del límite. Con todo ello, se ha establecido una primera parte del significado institucional de referencia del teorema central del límite.

Los resultados de este estudio se publicaron en Alvarado (2004c) y Alvarado y Batanero (2006a).

## **Objetivo 2**

*Describir el significado que se presenta del teorema central del límite en los libros de estadística para ingenieros, identificando los campos de problemas, lenguaje, procedimientos, enunciados, propiedades y argumentos usualmente utilizados en la enseñanza a ingenieros en una muestra representativa de libros de texto destinados a estos estudiantes.*

Este objetivo se aborda en el Capítulo 4, mediante un estudio de la presentación del teorema en una muestra de dieciséis libros de textos universitarios específicos que se presentan en la Tabla 4.2.1. Mediante el análisis de contenido (Weber, 1985; Ghiglione y Matalón, 1991) se ha identificado y caracterizado las diferentes categorías de los elementos de significado más comunes del teorema central del límite en estos libros, revelándose la complejidad del significado del teorema y su enlace con otros conceptos estadísticos importantes. Este estudio, que ha enriquecido y complementado el estudio histórico, ha sido la base del proceso de estudio, teniendo presente en el diseño los posibles conflictos para una correcta aplicación del mismo.

En el estudio de los libros surgieron algunos nuevos campos de problemas de aplicación y se mostró que el aparato avanzado formal de demostración es sustituido en los textos por una aproximación menos rigurosa pero más adecuada al tipo de alumnos,

## *Conclusiones*

donde se emplean otras formas de argumentación como el estudio de ejemplos y contraejemplos. El análisis también permitió mostrar la escasa presencia de las representaciones gráficas y simulaciones, medios que consideramos relevantes para el estudio del teorema. También se observó falta de relación del teorema central del límite con los subsiguientes temas de inferencia, así como la no diferenciación del teorema en la aplicación a la media o a la suma de variables aleatorias y poco estudio de las condiciones de convergencia para familias usuales de distribuciones, como la distribución uniforme o binomial.

Los resultados obtenidos se han presentado en Alvarado (2004a) y Alvarado y Batanero (2005b).

### **Objetivo 3**

*Seleccionar los elementos de significados más adecuados a la construcción de la propuesta didáctica, contextualizándolos en campos específicos de problemas con aplicación a la ingeniería y definiendo las configuraciones didácticas adecuadas para abordar su enseñanza. Secuenciar y organizar estos elementos y configuraciones en un proceso de estudio viable para la enseñanza del teorema central del límite a ingenieros y analizar esta propuesta con objeto de determinar el significado de referencia pretendido en el proceso de estudio.*

La propuesta del proceso de estudio del teorema, analizada en el Capítulo 5, se basó en el estudio previo histórico y de libros de textos organizándose en tres lecciones, incorporando también otra sobre conceptos previos acerca de la distribución de estimadores que provienen de poblaciones con distribución normal. Estas lecciones complementan los símbolos, procedimiento algebraico en la resolución de problemas, presentación de forma general del teorema para la media muestral, presentes en los textos analizados junto con otros procedimientos, lenguaje y argumentos del teorema, que no están destacados en textos de estadística para ingenieros.

El estudio previo de una muestra amplia de textos con distintos enfoques, permitió guiar en el diseño al estudiante para un acercamiento progresivo al teorema, presentándose más de una forma de comunicación e incorporándose situaciones de aplicación a la ingeniería, con justificación paso a paso en los procedimientos, argumentando el teorema mediante simulación, tomando decisiones en base a la utilización del teorema y haciendo notar la diferencia de la convergencia en distribución

para la suma de variables aleatorias y para el promedio muestral. Además, se establecen varias formulaciones matemáticas del teorema y sobre todo el recurso tecnológico (plataforma virtual, applet y software estadístico) que se pone a disposición de los estudiantes y profesores.

El diseño, construido en orden creciente de dificultad y de acuerdo al desarrollo histórico, permitió ir ampliando el alcance de aplicación de esta proposición según la naturaleza de las variables, comenzando con su aplicación a la distribución binomial, luego a variables discretas y finalmente a variables continuas. Para ello, se tuvo presente varios factores, como el tiempo dedicado a la enseñanza en las distintas sesiones por semana y las exigencias del programa de la asignatura de Estadística para ingenieros. También se incorporaron tres configuraciones epistémicas (manipulativa, algebraica y computacional) como recurso para la resolución de una situación-problema.

En las distintas secciones de cada lección se consideraron la idoneidad afectiva; incluyendo campos de problemas accesibles a los estudiantes, contextualizados en aplicaciones a la ingeniería y con bastantes actividades a resolver individual y colectivamente, tanto en la clase como fuera del aula y estableciendo las funciones específicas del alumno como también del profesor. Así, se determinó el significado institucional de referencia pretendido del teorema central del límite, resumido en la Tabla 5.7.1, constatándose una buena idoneidad epistémica al considerar los elementos de significado más importantes del teorema. Además, este diseño aporta una base consistente para compararlo con el significado personal que construyeron los estudiantes sobre el teorema (idoneidad cognitiva).

Todo este proceso de estudio es analizado con detalle, para cada sesión y actividad, en el Capítulo 5, proporcionando como conclusión una descripción del significado de referencia pretendido, que se resume en la Tabla 5.7.1. Los resultados de esta fase se han publicado en Alvarado y Batanero (2006b).

#### **Objetivo 4**

*Experimentar el proceso de estudio, observación del mismo y evaluar su idoneidad potencial para los fines pretendidos.*

En el Capítulo 6 se describe la experimentación y observación del proceso de estudio diseñado en un curso de Estadística dirigido a ingenieros, en el que participan 134 estudiantes aunque, como en cualquier curso universitario, no todos están presentes

## *Conclusiones*

en todas las sesiones. La observación se lleva a cabo mediante un estudio cualitativo y diferentes metodologías, que incluyen la observación en el aula y el análisis de las producciones escritas de los estudiantes dentro y fuera del aula, así como una breve evaluación al finalizar cada una de las tres lecciones.

Como resultado de esta observación se ha evaluado positivamente la implementación del proceso de estudio, destacando una alta idoneidad epistémica, al considerar la mayoría de los elementos de significado pretendido del teorema. Se observa una alta idoneidad afectiva al implementar la exploración del teorema en distintas distribuciones de probabilidades en campos de problemas que interesaron a la mayoría de los estudiantes. Las nuevas aplicaciones del teorema con apoyo principalmente de dispositivos de simulación aumentaron la idoneidad mediacional y didáctica, plasmada en el compromiso de entrega oportuna de las variadas actividades.

La comprensión del teorema que se deduce de la observación y análisis de actividades y evaluaciones en general se estima, aunque también permitió describir los conflictos semióticos observados mediante las evaluaciones continuas parciales realizadas, durante y al finalizar cada una de las tres lecciones. La experiencia sugiere que la idoneidad cognitiva debe ser revisada en futuras experiencias de enseñanza. En particular, se podría mejorar la conexión de contenidos teóricos y aplicaciones con las situaciones, procedimientos y argumentos establecidos anteriormente, así como insistir en el uso de la corrección de continuidad. En consecuencia, la idoneidad interaccional fue positiva, pero no suficiente, al detectarse la mayoría de los conflictos semióticos solo una vez finalizada la experiencia didáctica.

### **Objetivo 5**

*Evaluar el significado personal de los estudiantes al finalizar el proceso de estudio y compararlo con el significado institucional implementado.*

Este último objetivo fue analizado en el Capítulo 7, por medio de los resultados de la evaluación llevada a cabo al finalizar la enseñanza, mediante un cuestionario y varios problemas abiertos desarrollados por los estudiantes. En base al análisis a priori del significado evaluado, se caracterizó la comprensión lograda por los futuros ingenieros, describiéndose los problemas identificados en forma pertinente, además de los procedimientos, lenguaje, propiedades y argumentos del teorema usados correctamente.

En base a los resultados podemos decir que, en general fueron positivos en cuanto a reconocer campos de problemas específicos, elegir un lenguaje adecuado y trabajar los algoritmos numéricos y gráficos enlazando estos elementos en una argumentación aceptable.

En particular, los estudiantes de ingeniería han mostrado una mejor comprensión, del análisis de la distribución aproximada de la media muestral de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, que provienen de poblaciones binomiales. Esto es corroborado por un número importante de problemas creados por los alumnos, utilizando correctamente esta población de origen en la prueba abierta de ensayo. Tampoco tuvo mayor dificultad el lenguaje simbólico, con algunas excepciones en los problemas algebraicos abiertos. El procedimiento algebraico y la tipificación fueron los mejor utilizados en general, así como la simulación en la resolución del proyecto contextualizado con apoyo de Excel. Se destaca la apropiación de las propiedades de la media y varianza de la suma de variables aleatorias y en el proyecto, la argumentación vía simulación gráfica.

Por otro lado, fueron varios los elementos de significado del teorema que no han sido aplicados correctamente en los diferentes instrumentos de evaluación, evidenciando la dificultad de identificación de algunos campos de problemas e identificación de la distribución de probabilidad que modela la variable estadística en una aplicación a la ingeniería. Los principales elementos que dan origen a conflictos semióticos en una proporción importante de los alumnos son los siguientes: No reconocer campos de problemas en problemas específicos de aplicación a la ingeniería, expresión verbal incorrecta en una gama de palabras relacionadas con el teorema, errores de estandarización al confundir la suma de variables aleatorias con el promedio, no aplicar la corrección de continuidad y no ser capaces de dar una decisión en base al análisis del teorema central del límite.

El grado de comprensión del teorema en las pruebas de evaluación sugiere de nuevo, que la idoneidad cognitiva fue positiva pero desigual en el aprendizaje. El grupo de alumnos, utilizó en promedio y significativamente más elementos de significado del teorema en forma correcta que incorrecta. Sin embargo, habrá que implementar acciones de mejora en los elementos menos alcanzados. Como se ha indicado también, la idoneidad semiótica fue insuficiente para resolver cada uno de los conflictos detectados y ha de ser mejorada. Parte de los resultados se han publicado en Alvarado y Batanero (2007).

### 8.3. CONCLUSIONES EN RELACIÓN A LAS HIPÓTESIS

En relación a las expectativas iniciales que se tenían sobre lo que se esperaba confirmar con esta investigación, han sido analizadas en las siguientes hipótesis del trabajo:

#### **Hipótesis 1**

*H1: El significado del teorema central del límite tiene un carácter complejo, debido a la multiplicidad de elementos y su interrelación, y ha ido surgiendo lentamente a lo largo de la historia. Diversos campos de problemas dieron lugar a enunciados diferenciados del teorema.*

Esta hipótesis fue analizada en el estudio histórico, que mostró los variados campos de problemas de los que surge el teorema central del límite, la diversidad de objetos asociados y su aparato analítico altamente formalizado. La deducción de las diferentes versiones del teorema ha evidenciado una sofisticada argumentación algebraica para llegar a la generalización de diversos tipos de variables y estudiar las condiciones de validez y alcance de aplicaciones en determinados campos de problemas. Una primera consecuencia es que la enseñanza de este teorema en cursos de servicio, tales como los de ingeniería, requería un gran esfuerzo didáctico para simplificar la presentación y hacerla asequible a los estudiantes.

#### **Hipótesis 2**

*H2: Asimismo, es complejo el significado del teorema central del límite presentado en los textos de estadística dirigido a ingenieros y se encontrará una variedad de enfoques y aproximaciones. En relación a los campos de problemas, se descubrirán nuevos campos de aplicación y faltarán los campos más complejos. Las herramientas para resolver los problemas serán de menor complejidad que las usadas en el estudio histórico, lo que conllevará una menor rigurosidad en las demostraciones del teorema.*

La hipótesis 2, que está en relación con el objetivo 2, y que se deduce de la anterior, fue corroborada por el análisis de una muestra de libros de textos de estadística para ingenieros y otros libros con enfoque clásico, que presentan fundamentos probabilísticos del teorema y tienen un nivel intermedio. El análisis mostrado en el

Capítulo 4 verificó que los textos considerados minimizan las aplicaciones, dando prioridad al procedimiento y argumentación algebraica. También apoyan los resultados de otras investigaciones sobre libros de texto de investigadores en Educación Estadística (Tauber, 2001; Cobo, 2003) que sugieren posibles obstáculos en la presentación de otros conceptos previos necesitados, como medidas de posición central o la distribución normal.

### **Hipótesis 3**

*H3: La introducción de tres configuraciones epistémicas (manipulativa, computacional y algebraica) permitirá introducir elementos originales en el significado de referencia pretendido en la investigación. En particular, la introducción del ordenador permitirá variación en los campos de problemas, lenguaje y modos de argumentación.*

Esta hipótesis es justificada por los resultados obtenidos en el análisis a priori del proceso de estudio (Capítulo 5), donde se describe el significado institucional pretendido. En dicho análisis es visible un abanico amplio de aplicaciones del teorema central del límite apoyado en las tres configuraciones epistémicas descritas.

Algunos de los elementos originales son la simulación gráfica en forma dinámica utilizada, tanto como procedimiento de exploración y resolución de problemas, como para ampliar los tipos de argumentación. El uso de la configuración manipulativa incorpora y pone en relación con el teorema central del límite objetos como los de variable estadística y su distribución o la concepción frecuencial de la probabilidad. El lenguaje gráfico se amplía notablemente mediante la configuración computacional, tanto en variedad como en posibilidad de ejecución rápida por parte del estudiante. Los problemas pueden ser más reales al utilizar conjuntos de datos y poder realizar los cálculos de una forma automática.

Finalmente se destaca la alta correspondencia en la implementación de muchos de los elementos de significado del teorema presentado en el diseño (significado pretendido e implementado).

### **Hipótesis 4**

*H4: A lo largo de la enseñanza surgirán conflictos semióticos, algunos de los cuáles se harán explícitos a través de las preguntas de los estudiantes en clase o de las*

## *Conclusiones*

*respuestas a actividades escritas. La gama de dificultades y conflictos planteados ampliará los resultados de las investigaciones previas sobre el teorema central del límite.*

El análisis de las interacciones observadas en algunas de las actividades realizadas en clase, así como de las respuestas escritas en la evaluación continua y tareas realizadas fuera de la clase (Capítulo 6), apoyó esta hipótesis. Es visible de la descripción hecha en este capítulo (así como de lo previsto en el análisis a priori del Capítulo 5) los numerosos conflictos y dificultades de los estudiantes en las tareas y actividades planteadas. La comprensión observada fue desigual, dependiendo de los elementos de significado, en que algunos fueron retroalimentados oportunamente, llegando a solucionar el conflicto y en otros (como obtener una conclusión basada en el teorema central del límite) no fue posible, debido principalmente al factor de tiempo.

Los resultados también corroboran los conflictos descritos en las investigaciones de Méndez (1991) y Kahneman y cols. (1982) por ejemplo, la confusión de parámetro y estadístico o la heurística de la representatividad. Se encontraron nuevas dificultades, no descritas en la investigación previa, como definir inadecuadamente la variable que modeliza el experimento o el problema situado a la ingeniería y reconocer parcialmente la distribución de probabilidad asociada, no diferenciar una variable discreta de una continua por ejemplo, la distribución Poisson de la distribución exponencial y considerar en el cálculo de probabilidades la varianza de la suma de variables aleatorias en la tipificación en lugar de la desviación estándar. Otros conflictos son no considerar, además del tamaño muestral, la naturaleza de la distribución de probabilidades en una convergencia óptima del teorema y en el caso de la suma de variables discretas, confundir el número de ensayos de un experimento con el tamaño de la muestra. Muchos de estos conflictos corresponden a conocimientos previos de la asignatura de Probabilidades.

### **Hipótesis 5**

*H5: Se espera también que una parte importante de estas dificultades y conflictos quede superada al finalizar la enseñanza y que los estudiantes usen correctamente un gran abanico de elementos de significado del teorema central del límite en sus respuestas a las tareas de evaluación, incluso en el caso en que no lleguen a una respuesta totalmente correcta.*

La hipótesis fue corroborada por los resultados descritos en el Capítulo 7. Por un lado, cuantitativamente se observa una diferencia estadísticamente significativa en el número de elementos de significado usados correcta o incorrectamente en cada una de las pruebas abiertas así como en su conjunto. Por otro, se describen con detalle dando frecuencias los elementos específicos cuya comprensión se observa en los estudiantes, tanto en las pruebas abiertas como en el cuestionario de opciones múltiples.

La comprensión en las actividades y ejercicios de las lecciones, sobre todo del lenguaje gráfico, fue aceptable en general, permitiendo la generalización del teorema a otras distribuciones importantes en ingeniería por medio de situaciones de contexto. A partir de las representaciones gráficas dinámica con applets y software estadístico, los alumnos interactuaron con la simulación y efecto de los parámetros sobre la aproximación y llegaron a una versión intuitiva del teorema, favorecida por dispositivos didácticos. El estudio del teorema para el caso de la suma de variables continuas se basó principalmente en actividades algebraicas en que la mayoría de los estudiantes dominaron el cálculo de la esperanza y varianza de la suma de variables aleatorias. Tampoco tuvieron problemas con la estandarización y el cálculo de probabilidades con tablas de la distribución normal y mediante calculadora.

### **Hipótesis 6**

*H6: Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos al cuestionario, se espera describir tipologías de estudiantes que correspondan a significados personales diferenciadas sobre el teorema central del límite.*

Las técnicas de análisis univariantes y multivariantes utilizadas en el Capítulo 7 han apoyado en gran medida este supuesto, en que logramos definir cuatro grupos de estudiantes, en relación al tipo de comprensión lograda del teorema, que podemos describir como configuraciones cognitivas diferenciadas y son los siguientes:

- Alumnos que consideran el problema de aproximación de la distribución binomial a la normal (CP1) y de la convergencia de la media muestral (CP12) como casos particulares del teorema central del límite e identifican los diferentes enunciados del teorema y condiciones de convergencia;
- Alumnos que no incluyen en el teorema central del límite los anteriores campos de problemas, aunque identifican sus diferentes enunciados y las condiciones de

## *Conclusiones*

convergencia y que constituyen dos grupos que se diferencian entre sí por errores en algunos conceptos relacionados y en la correcta /incorrecta tipificación, es decir, en algunos errores procedimentales;

- Alumnos que, aunque incluyen el caso de la aproximación de la distribución binomial a la normal (CP1) como un caso particular del teorema central del límite, no comprenden las condiciones de la convergencia y confunden los diferentes enunciados.

### **8.4. PRINCIPALES APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN**

El trabajo presentado a lo largo de esta memoria presenta algunas contribuciones a la Didáctica de la Estadística a nivel universitario y en particular, al estudio de la enseñanza del teorema central del límite, que se reflejan también en las diferentes publicaciones citadas a lo largo de este capítulo y en la lista de referencias.

En primer lugar, se presentó una descripción pormenorizada de la evolución histórica del teorema central del límite, que permite clasificar sus campos de problemas y describir algunas de las herramientas analíticas empleadas en su resolución.

Asimismo, se hace un estudio exhaustivo analítico de la presentación del teorema central del límite en una amplia muestra de libros de texto adecuados para la enseñanza de ingenieros, clasificando los diversos tipos de elementos de significado y estudiando su presencia en los mismos. Con todo ello se describe el significado de referencia del teorema en esta investigación, que puede ser la base para otras investigaciones sobre el teorema central del límite a nivel universitario.

Otro punto a destacar, es el diseño de un proceso de estudio sobre el teorema central del límite dirigido a ingenieros, fundamentado en la evolución histórica del teorema y análisis de los libros de texto, cuya estructura permite distintos acercamientos hacia la comprensión del teorema. Se ha complementado la forma tradicional de enseñanza del teorema basada principalmente en el razonamiento formal deductivo, con una metodología inductiva, basada en la simulación manual y computacional, aminorando el carácter abstracto de la presentación del teorema central del límite.

También se ha elaborado un cuestionario de evaluación, basado en ítems de opciones múltiples y problemas abiertos. Estos instrumentos, aunque aún poco validados, junto con el conjunto de actividades y ejercicios planteados en las tres lecciones, podrían servir para construir otros instrumentos de evaluación. Además, se pone a disposición de profesores e investigadores una medida del grado de comprensión

adquirido por los estudiantes, analizando el acuerdo y desacuerdo entre el significado previsto y el adquirido por los estudiantes.

Finalmente, el exhaustivo estado de la cuestión es una base para la investigación posterior en el tema.

### **8.5. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE EN UN CURSO DE ESTADÍSTICA UNIVERSITARIA**

La investigación realizada también proporciona algunas conclusiones de cara a la docencia. Cada día hay más consenso que la problemática de aula debe estar centrada en determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe establecer el profesor para una enseñanza eficaz. Si bien hay esfuerzos en describir las características de los estudiantes universitarios en relación a su rendimiento académico escolar y competencias matemáticas previas al ingreso, son pocas las investigaciones que se centran en avanzar en la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje, evaluando criterios de idoneidad de procesos de estudio o los conflictos presentados en las evaluaciones.

Este trabajo proporciona evidencia de los distintos factores que deberían tenerse presente al momento de preparar la lección del teorema central del límite, considerando por un lado, más de una forma de comunicar el objeto matemático-estadístico y por otro, incorporando los recursos tecnológicos a la enseñanza. Además de variadas formas de argumentación, se analiza la validez del teorema, según la naturaleza de las distribuciones de probabilidades (discretas o continuas), que no es contemplada en la mayoría de los libros de texto de estadística para ingenieros.

Todo ello podría ayudar a revisar el currículum de la asignatura de estadística, respecto a una de las proposiciones fundamentales en esta materia, rica también en aplicaciones a distintas áreas del conocimiento.

### **8.6. PERSPECTIVAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN**

Finalmente, como en cualquier investigación didáctica, este trabajo tiene limitaciones lógicas, debido a los necesarios procesos de muestreo (tipo y número de estudiantes, tiempo limitado de enseñanza, número limitado de ítems de evaluación). Se espera por tanto, que otros investigadores puedan completar este estudio, modificar algunas de las variables y estudiar si las hipótesis formuladas se mantienen en otras

## *Conclusiones*

experiencias educativas. Algunos puntos concretos en que la investigación podría continuarse manteniendo este marco teórico, son los siguientes:

- Repetir el proceso de estudio con estudiantes de otras características académicas (por ejemplo, ingenieros en otras universidades o estudiantes de otras especialidades) para evaluar si se repiten los resultados;
- Mejorar el proceso de estudio para que permita superar los conflictos semióticos descritos en esta investigación y que no fueron resueltos o que permitan identificar otros nuevos;
- Diseñar, implementar y evaluar variaciones del proceso de estudio con diferente software estadístico y estudiar las consecuencias del cambio;
- Mejorar los instrumentos de evaluación, para incluir el estudio de la comprensión del teorema para la distribución de la suma de variables aleatorias independientes no idénticamente distribuidas (CP3), que está al alcance de los futuros ingenieros y que no fueron analizados. Incorporar también transformaciones de variables aleatorias con distribución de probabilidades clásicas, como las que se presentan en la propiedad P8 del Capítulo 4;
- Continuar el estudio de la comprensión de las aplicaciones del teorema central del límite en la construcción de intervalos de confianza y contrastes de hipótesis.

## REFERENCIAS

- Accreditation Board for Engineering and Technology. (1997). Trabajo presentado en el *Thirteenth Annual Meeting of National Electrical Engineering Department Heads Association*. Orlando, FL.
- Afifi, A. y Azen, S. (1980). *Statistical analysis: A computer oriented approach*. London: Academic Press.
- Afifi, A. y Clark, V. (1990). *Computer-aided multivariate analysis*. New York: Van Nostrand.
- Alvarado, H. (2004a). Significado y comprensión de un teorema estadístico: Elementos básicos en el desarrollo profesional del profesor para una buena enseñanza. *Boletín de Investigación Educativa*, 19 (1), 227-244.
- Alvarado, H. (2004b). Significado del teorema central del límite: elemento fundamental en el desarrollo profesional del profesor para una buena enseñanza. Trabajo presentado en el *VI Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística*, Universidad de Concepción, Chile.
- Alvarado H. (2004c). *Significados del teorema central del límite y sus campos de problemas en los textos de estadística para ingenieros*. Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada, España.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2004a). Elementos del significado del teorema central del límite. Trabajo presentado en el *VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, La Coruña, España.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2004b). Elementos del significado del teorema central del límite. Trabajo presentado en el *I Coloquio de Estadística*. Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2005a). Diferentes aproximaciones al teorema central del límite en la enseñanza a ingenieros. Congreso. Trabajo presentado en el *IX Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud*, Universidad de Granada, Granada, España.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2005b). Significado del teorema central del límite en

## Referencias

- textos universitarios de probabilidad y estadística. Trabajo presentado en las *XXXII Jornadas Nacionales de Estadística*, Universidad de Valparaíso, Chile.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2006a). El significado del teorema central del límite: Evolución histórica a partir de sus campos de problemas. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas/ Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 257-277). Jaén: Universidad de Jaén, España.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2006b). Designing a study process of the central limit theorem for engineers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM.
- Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67.
- Alvarado, H., Sánchez, I. y Uribe, M. (2000). Correspondencia entre estrategias de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Boletín de Investigación Educativa*, 15, 70-88.
- Alvarado, H., Sánchez, I., Retamal, L. y Ramos, J. (2003). Una propuesta metodológica hacia el aprendizaje activo en las matemáticas. *Boletín de Investigación Educativa*, 18, 111-126.
- Ardanuy, R. y Martín, Q. (1998). *Estadística para ingenieros*. Salamanca: Hespérides.
- Artigue, M., Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., & NCTM.
- Batanero, C. (2000) Controversies around significance tests, *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1-2), 75-98.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía*, 35, 37-64.
- Batanero, C. (2006). The challenges of teaching statistical inference. En H. Bacelar (Ed.), *XIII Jornadas de Classificação e Análise de Dados* (pp. 162-166). Lisboa: Associação de Classificação e Análise de Dados.
- Batanero, C. y Díaz, M. C. (2006). Methodological and didactical controversies around

- statistical inference. *Actes du 38ièmes Journées de Statistique*. Paris: Société Française de Statistique. CD ROM.
- Batanero, C., Tauber, L. y Meyer, R. (1999). From data analysis to inference: A research project on the teaching of normal distributions. *Proceedings of the 52<sup>nd</sup> Session of the International Statistical Institute* (Tome LVIII, Book 1, pp. 57-58). Helsinki: ISI.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, B. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso de análisis de datos. *Cuadrante*, 10 (1), 59-92.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2004). Student's reasoning about the normal distribution. En D. Ben-Zvi y J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 257-276). Dordrecht: Kluwer.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña, España.
- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169-211). Dordrecht: Kluwer.
- Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review*, 65 (2), 167-190.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: CEAC.
- Brent, E. E. (1989). *Data collection selection: An expert system to assist in the selection of appropriate data selection procedures*. Columbia, MI: The Idea Works inc.
- Bunge, M. (1985). *La investigación científica*. Madrid: Ariel.
- Cam, L. (1986). The central limit theorem around 1935. *Statistical Science* 1(1), 78-96.
- Canavos, G. (1992). *Probabilidad y estadística*. México: McGraw Hill.
- Carrasco, G. (2002). *Determinación de tamaños muestrales mínimos para la aplicación del teorema central del límite en poblaciones forestales*. Tesis de Magíster. Universidad de Concepción, Chile.
- Castillo, J. (1990). *Estadística inferencial básica*. México: UNAM.
- Chance, B. L., delMas, R. C., y Garfield, J. B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Chance, B. L., Garfield, J. B. y delMas, R. C. (1999). The role of assessment in research on teaching and learning statistics. Trabajo presentado en el *American Educational Research Association. Annual Meeting*. Montreal, Canadá.

## Referencias

- Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage.
- Comisión Nacional de Acreditación de Pregrado (2003). *Criterios de acreditación de carreras de ingeniería*. Santiago, Chile. On line: <http://www.cnap.cl/>.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Countinho, C. (2001). *Introduction aus situations aléatoires dés le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre-II*. Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble.
- Cuadras, C. (1991). *Análisis multivariante*. Barcelona: Eunibar.
- Cuadras, C. (1999). *Problemas de probabilidades y estadística*. Barcelona: EUB.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Pacific Grove: Cole Publishing Company.
- De Groot, M. (1988). *Probabilidad y estadística*. Wilmington: Addison-Wesley.
- delMas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (1998). Exploring the role of computer simulations in developing understand of sampling distributions. Trabajo presentado en el *American Educational Research Association. Annual Meeting*. Montreal.
- delMas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students' statistical reasoning. *Journal of Statistic Education*, 7, 3. On line: <http://www.amstat.org/publications/jse>.
- delMas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (2004). Using assessment to study the development of students' reasoning about sampling distributions. Trabajo presentado en el *American Educational Research Association. Annual Meeting*. California.
- Devore, J. (2001). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (5ª ed.). México: Thompson.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento: Volumen especial 2004*, 161-167.
- Durand, A. e Ipiña, S. (1994). *Introducción a la teoría de la probabilidad y la inferencia estadística*. Madrid: Rueda.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución*

- como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Estepa, A. y Moya, J. (2007). The meaning of statistics variation in university books in Spain. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fisher, H. (2000). *The central limit theorem from Laplace to Cauchy: Changes in stochastic objectives and in analytical methods*. On line: <http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/didmath/seite/1850.pdf>.
- Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Freund, J. y Smith, R. (1989). *Estadística*. Cuarta edición. México: Prentice Hall.
- Gal, I. (1997). Assessing students' interpretations of data: Conceptual and pragmatic issues. En B. Phillips (Ed.), *Papers on Statistical Education presented at ICME-8* (pp. 49-58). Universidad Tecnológica de Swinburne.
- Gallardo, S. (2001). *Variabilidad y representatividad muestral: Un estudio de casos*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.
- García Cruz, J.A. (2002). Inferencia y significación estadística. En E. Palacián y J. Sancho (Eds.), *Actas de las X JAEM* (Vol. II, 457-466). ICE Universidad de Zaragoza, Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas.
- García Cruz, J.A. (2007). La construcción del significado en la enseñanza de la inferencia estadística. *Actas de las XII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 237-247). Universidad de Castilla-La Mancha. Albacete.
- Garfield, J. B., y delMas, R. C. (1989). Reasoning about chance events: Assessing and changing students' conceptions of probability. En C. Maher, G. Goldin y B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Eleven Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, 184-195). Rutgers: Rutgers University Press.
- Garfield, J. B., delMas, R. C., y Chance, B. L. (2004). Tools for teaching and assessing statistical inference. On line: [http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat\\_tools/](http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat_tools/).
- Ghiglione, R. y Matalón, B. (1991). *Les enquêtes sociologiques. Théories et pratique*. París: Armand Colin.
- Gil, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos*. Barcelona: P.P.U.

## Referencias

- Glencross, M. (1988). A practical approach to the central limit theorem. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 287-291). Victoria BC: University of Victoria.
- Godino, J. D. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística? *UNO*, 5, 45-55.
- Godino, J. D. (1996a). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. En L. Puig y J. Calderón (Eds.), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas* (pp. 119-128). Madrid: CIDE.
- Godino, J. D. (1996b). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. En Puig y A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th PME Conference* (pp. 417-424). Universidad de Valencia.
- Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. Comunicación presentada en el *VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*. Granada.
- Godino, J. D. (1999a). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212). Valladolid: SEIEM.
- Godino, J. D. (1999b). Análisis epistémico semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Trabajo presentado en el *III Simposio de la SEIEM*, Valladolid. On line: [www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm).
- Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2 y 3).
- Godino, J. D. (2002b). Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, 9-19.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Seminario de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 25-45). Lisboa: Associação de Profesores de Matemática.

- Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M, Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V,V, Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). New York: LEGAS.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Fonts, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). A semiotic analysis of combinatorial problems and its resolution by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36,
- Godino, J. D., Bencomo, E., Font, V. y Wilhelmi, M. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en educación*. Morata: Madrid.
- Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics from 1750 a 1930*. New York: John Wiley.
- Harlow, L. L., Mulaik, S. A. y Steiger, J. H. (1997) *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Hawkins, A., Joliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. Londres: Longman.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Instituto de Ingenieros de Chile (2002). *Educación en ingeniería: Una visión integradora de las perspectivas profesional y académica*. Santiago. On line: [http://www.iing.cl/iexplorer/index\\_public.html](http://www.iing.cl/iexplorer/index_public.html).
- James, B. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediario*. Brasil: Euclides.
- Johnson, R. y Kubly, P. (2004). *Estadística elemental* (3ª ed.). México: Thompson.
- Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Kalbfleisch, J. (1984). *Probabilidad e inferencia estadística*. Madrid: AC.

## Referencias

- Kennedy, J. y Neville, A. (1982). *Estadística para ciencias e ingeniería* (2ª ed.). México: Harla.
- Lebart, L., Morineau, A. y Fénélon, J. (1985). *Tratamiento estadístico de datos*. México: Marcombo.
- Lehmann, E. L. (1999). *Elements of large-sample theory*. New York: Springer.
- Lipson, K. (1994). Understanding the role of computer based technology in developing fundamental concepts of statistical inference. En *Proceedings of the IV International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1, 65-72). Marrakech: The National Institute of Statistics and Applied Economics.
- Lipson, K. (1997). What do students gain from computer simulation exercises? En Garfield, J. B. y Burril, G. (Eds.), *Proceedings of the IASE 1996 Round Table Conference*. (pp. 131-144). Vooburg, Holanda: International Statistical Institute e International Association for Statistical Education.
- Loève, M. (1976). *Teoría de la probabilidad*. Madrid: Tecnos.
- MacGillivray, H. L. (2002a). Technology, statistical thinking and engineering students. En B. Phillips (Ed), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, Cape Town: ISI. CDROM.
- MacGillivray, H. L. (2002b). Lessons from engineering student projects in statistics, *Proceedings of the Australasian Engineering Education Conference* (pp. 225-230). Australia: The Institution of Engineers.
- Martín, P. (2006). Achieving success in industrial training. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM.
- Martínez Arias, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid: Síntesis.
- Mendenhall, W. y Sincich, T. (1997). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (4ª ed.). México: Prentice Hall.
- Mendenhall, W., Wackerly, D. y Scheaffer R. (1994). *Estadística matemática con aplicaciones* (2ª ed.). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Méndez, H. (1991): *Understanding the central limit theorem*. Tesis Doctoral. Universidad de California. UMI 6369.
- Mether, M. (2003). The history of the central limit theorem. *Sovelletun Matematiikan erikoistyöt*. On line: <http://www.sal.tkk.fi/Opinnot/Mat-2.108/pdf-files/emet03.pdf>.

- Meyer, P. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadística* (2ª ed.). México: Addison-Wesley.
- Miller, I., Freund, J. y Johnson, R. (1992). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (4ª ed.). México: Prentice Hall.
- Montgomery, D. y Runger, G. (1996). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería* (3ª ed.). México: Mc Graw Hill.
- Moore, D. S. (1995). *Estadística aplicada básica*. España: Antoni Bosch.
- Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, 65 (2), 123-155.
- Moreno, A. J. (2003). *Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en el nivel de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Moreno, A. y Vallecillos, A. (2001). Exploratory study on inferential' concepts learning in secondary level in Spain. En M. van der Heuvel (Ed.), *Proceedings of the 25 th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME)* (p. 343). Utrech: Freudenthal Institute and Utrecht University.
- Morrison, D. E. y Henkel, R. E. (1970) *The significance tests controversy. A reader*, Chicago: Aldine.
- Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. En D. C. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectivas on contemporary statistics* (pp. 107-122). Washington: Mathematical Association of America.
- Novalés, A. (1997). *Estadística y econometría*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Olivo (2006). *Análisis de la presentación de intervalos de confianza en textos de estadística para ingenieros*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Olivo, E., Ruiz, B. y Albert, A. (2006). Confidence intervals: fields of problems in engineering textbooks. En A. Rossman y Beth Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education.
- Ortiz, J. J. (1996). *Significado de los conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. y Cañizares, M. J. (2000). Variables de tarea en los

## Referencias

- ejercicios de probabilidad en los libros de texto. En C. Loureiro, F. Olivera y L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 138-146). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Osterlind, S. (1989). *Constructing test item*. Boston: Kluwer.
- Parra, E., Alvarado, H., Morales, J., Constenla, J. y Díaz, C. (2001). Percepción del estudiante y del docente de la UCSC respecto del desempeño académico en el aula. *Boletín de Investigación Educativa*, 16, 246-264.
- Parzen, E. (1987). *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones* (5ª ed.). México: Limusa.
- Paulauskas, V. (1999). J.W. Linderberg and the central limit theorem. *Statistics, registries and research- experiences from Finland* (pp. 111-112). Helsinki: National Statistical Institute.
- Peña, D. (1995). *Estadística. Modelos y métodos* (8ª ed.). Madrid: Alianza Universitaria.
- Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. Madrid: McGraw-Hill.
- Reynolds, M., Burk, T. y Huang, W. (1988). Goodness-of-fit test and model selection procedures for diameter distributions models. *Forest Science*, 34, 373-399.
- Romeu, J. (2006). Teaching engineering statistics to practicing engineers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM.
- Rossman, A. (1996). *Workshop statistics. Discovery with data*. New York: Springer.
- Rubin, A., Bruce, B. y Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 314-319). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.
- Saldanha, L. A. (2004). "Is this sample unusual?": An investigation of students exploring connections between sampling distributions and statistical inference. Tesis Doctoral. Vanderbilt University.
- Saldanha, L. A. y Thompson, P. W. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 257-270.
- Sánchez-Cobo, F. (1999). *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Scheaffer, R. y McClave, J. (1993). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (3ª ed.).

- México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics* (v. 2, 486-489). Dunedin, Australia: Universidad de Otago.
- Sedlmeier, P. y Gigerenzer, G. (1997). Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers. *Journal of Behavioral Decision Making*, 10, 33-51.
- Seneta, E. (1984). The central limit problem and linear least squares in pre revolutionary Russia: The background. *Mathematical Scientist*, 9, 37-77.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Shiryayev, A. N. (1984). *Probability*. New York: Springer.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Stent, A. y McAleve, L. (1990). Exhibiting the central limit theorem on a spreadsheet. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of ICOTS III* (pp. 178-182). Dunedin: International Statistical Institute.
- Stigler, S. M. (1986). *The history of statistics the measurement of uncertainty before 1900*. Harvard: Prensa de Belknap.
- Tauber, L. (2001). *Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- Tauber, L., Batanero, C. y Sánchez, V. (2005). Diseño, implementación y análisis de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario. *EMA*, 9 (2), 82-105.
- Thompson, P. W., Saldanha, L. A. y Liu, Y. (2004). Why statistical inference is hard to understand. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, California.
- Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa.
- Uspensky, J. V. (1937). *Introduction to mathematical probability*. New York: McGraw-Hill.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

## Referencias

- Vallecillos, A. (1995). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (3), 53-81.
- Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: Un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Madrid: Comares.
- Vallecillos, A. (1998). Experimental study on the learning of the significance level concept. En L.Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee & W. Wong (Eds.), *Proceedings of ICOTS 5* (pp. 1475-1476). Singapore: Nanyang Technological University.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 201-204). Helsinki, Finland.
- Vallecillos, A. y Moreno, A. (2002). Framework for instruction and assessment on elementary inferential statistics thinking. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. USA: John Wiley. CDROM.
- Velasco, G. y Wisniewski, P. (2001). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Thompson.
- Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (6ª ed.). México: Prentice Hall, Pearson.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (1), 44-70.
- Wayner, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* 21 (1), 14-23.
- Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis*. Londres: Sage.
- Well, A., Pollatsek, A. y Boyce, S. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 47, 289-312.
- Wisniewski, P. y Velasco, G. (2001). *Problemario de probabilidad*. México: Thompson.
- Xiuyu, J. (2003). Historical development of central limit theorem. On line: <http://www.stat.rice.edu/~blairc/seminar/Files/julieTalk.pdf>.