

# Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España

Emilse Gómez-Torres, Carmen Batanero y José Miguel Contreras

Epsilon 31(2), 25-42

**Resumen:** *En este artículo se analizan los procedimientos asociados a la probabilidad en dos series de libros de texto de educación primaria, observando la introducción de procedimientos básicos ligados a los enfoques intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo. Al comparar las dos series, es notable el diferente tratamiento del enfoque frecuencial, ya que una sólo presenta el punto de vista estadístico; mientras que la otra, además, desarrolla el punto de vista probabilístico. Respecto a los enfoques de la probabilidad, el intuitivo está presente en todos los ciclos y los demás en los dos últimos; el subjetivo únicamente se menciona tangencialmente.*

**Palabras clave:** Libros de texto, significados de la probabilidad, procedimientos.

## Probabilistic procedures in Spanish primary school mathematics textbooks

**Abstract:** *In this paper we analyse probabilistic procedures in two series of primary school textbooks and observe that they include basic procedures linked to the intuitive, classical, frequentist and subjective approaches. In comparing the two series we noticed a difference in the frequentist approach, since one publisher only focus on the statistical point of view, while the other also presents the probabilistic approach. While the intuitive approach is developed at all the cycles, the remaining meanings appear only at the second and third cycle; moreover the, subjective approach is only taken into account implicitly.*

**Key words:** Textbooks, meanings of probability, procedures.

### INTRODUCCIÓN<sup>1</sup>

En los últimos años se ha reconocido la necesidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia, para que el ciudadano pueda desenvolverse con éxito en las situaciones inciertas. La importancia de la probabilidad en la vida diaria y en el currículo es visible en diversas publicaciones (por ejemplo NCTM, 2000; Jones, 2005; Jones, Langrall, y Mooney, 2007; Batanero, Burril, y Reading, 2011).

Como consecuencia, en España, siguiendo la tendencia internacional, se ha incluido recientemente la enseñanza de la probabilidad desde los primeros niveles educativos. El decreto de enseñanzas mínimas para la educación primaria (MEC, 2006) sugiere,

---

<sup>1</sup> Proyecto EDU2013-41141-P (Ministerio de Economía y Competitividad), y grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

para los tres ciclos, contenidos referidos al carácter aleatorio de experiencias en las que interviene el azar (Bloque 4. *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*).

Este documento curricular, analizado en Gómez y Contreras (2013, 2014), así como el currículo básico promulgado recientemente (MECD, 2014), promueven iniciar al niño en los conceptos y procedimientos probabilísticos elementales, mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales; para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue, al final de la etapa, a asignar algunas probabilidades sencillas.

El objetivo de este trabajo es analizar los procedimientos probabilísticos presentados en dos series completas de libros de texto de educación primaria en España y clasificarlos, teniendo en cuenta el significado de la probabilidad que subyace en cada procedimiento. Nos basamos en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino y Batanero, 2004) y en un análisis previo de los significados de la probabilidad (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007). En lo que sigue presentamos los fundamentos teóricos, el método utilizado, y los resultados obtenidos, comparando las dos series en cada ciclo de la educación primaria. Se finaliza con unas implicaciones para la enseñanza y la formación de profesores.

## **FUNDAMENTOS**

### **Marco teórico**

La importancia de los libros de texto en el aula ha sido reconocida por diversos autores (por ejemplo Lowe y Pimm, 1996; Herbel, 2007). Los libros son un proceso de la transposición didáctica, descrita por Chevallard (1991), y que consiste en la adaptación del conocimiento matemático formal que se ha adaptado para convertirlo en conocimiento matemático para ser enseñado. El análisis de libros de texto es un componente del análisis curricular, dado que el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores es un paso entre el currículo pretendido y el implementado en el aula (Herbel, 2007).

Por otro lado, conocimiento conceptual y procedimental son dos partes de un continuo y están relacionados (Rittle-Johnson y Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001), siendo de interés trabajar en ambas partes. En tal sentido, este artículo completa otros previos sobre la probabilidad en la educación primaria, más concretamente, sobre el análisis de orientaciones curriculares (Gómez y Contreras, 2013, 2014), el lenguaje en los libros de texto (Gómez, Ortiz, Batanero, y Contreras, 2013), y los conceptos y propiedades (Gómez, Ortiz, y Gea, 2014). En lo que sigue se profundiza en la parte procedimental y en sus relaciones con la conceptual.

Los procedimientos cobran gran importancia en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS), donde los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas (Godino y Batanero, 2004). En consecuencia, cuándo se quiere caracterizar el significado de un objeto para una persona o para una institución (por ejemplo, los libros de texto), las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. Dentro de estas prácticas, cobran un papel fundamental en la enseñanza los procedimientos, donde incluimos todos los algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo que se enseña a los estudiantes para resolver los problemas.

Asimismo, los autores mencionan que al analizar las prácticas matemáticas (por ejemplo, los procedimientos incluidos en los textos) se pueden reconocer posibles conflictos semióticos, entendiendo por tales “*cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)*” (Godino, Batanero, 2004). En nuestro caso, serían las posibles disparidades entre el significado matemático de un procedimiento y el significado presentado en el texto.

### **Significados de la probabilidad**

Dada la diferenciación entre significados atribuidos a la probabilidad a lo largo de su historia (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007), analizaremos en el trabajo cuáles procedimientos están ligados a los significados de la probabilidad más relevantes para la enseñanza escolar. Estos significados se describen a continuación.

*Significado intuitivo.* Las primeras ideas intuitivas sobre probabilidad surgen ligadas a las apuestas. Este significado intuitivo utiliza la probabilidad sin formalización y sin llegar a una asignación numérica, es decir, en forma cualitativa. Es muy adecuado en la educación primaria, pues el interés de los niños por los juegos puede usarse en la enseñanza para introducir la noción de probabilidad. Reconociendo la impredecibilidad de los resultados, los niños pueden percibir que algunos sucesos merecen más confianza que otros, en función de su experiencia. La asignación de probabilidades, desde este significado, se puede hacer comparando la verosimilitud de sucesos con palabras del lenguaje habitual.

*Significado clásico.* La teoría de la probabilidad tiene su origen formal en el siglo XVII. Esta acepción se asocia a la definición de probabilidad dada por Laplace, donde la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables al mismo y el número de casos posibles (considerando todos los casos como equiprobables). A pesar de que sólo puede aplicarse a experimentos aleatorios con un número finito de posibilidades, este significado ha primado en la escuela durante muchos años. La razón es que puede utilizarse para calcular probabilidades en juegos de azar (ej., con dados, monedas, urnas) que forman parte de la vida cotidiana del niño. Sin embargo, en cuanto tratamos de calcular la probabilidad en experimentos compuestos, el cálculo se complica, pues se requiere razonamiento combinatorio, que es difícil para los estudiantes. Por otra parte, la ausencia de contraste con otros significados de la probabilidad promueve el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), donde se consideran equiprobables todos los resultados aleatorios, incluso aquellos que no lo son, y que es persistente con la edad.

*Significado frecuencial.* La observación de que las frecuencias relativas de los sucesos aleatorios parecen tener un límite fijo cuando se repite el experimento un gran número de veces y la demostración por Bernoulli de la primera ley de los grandes números llevó al significado frecuencial. En esta acepción la probabilidad se define como el límite hacia el cual tiende la frecuencia relativa, en un gran número de ensayos repetidos en las mismas condiciones. El significado frecuencial es adecuado en la enseñanza, porque tiene una aplicación más amplia que el clásico en muchos fenómenos de la vida real y conecta la estadística con la probabilidad. Además, las posibilidades actuales de simulación facilitan el tratamiento de este enfoque (Fernandes, Batanero, Contreras, y Díaz, 2009).

*Significado subjetivo.* En los anteriores significados, la probabilidad es un valor objetivo, independiente de la persona que la asigna. Esta acepción desaparece y la probabilidad se convierte en un valor subjetivo mediante el teorema de Bayes. El significado subjetivo de la probabilidad, donde todas las probabilidades se asumen como condicionadas a un sistema de creencias es apropiado en situaciones como el diagnóstico médico o la evaluación de un estudiante. En estas situaciones, el que asigna la probabilidad (médico o profesor) puede tener una información sobre el suceso que le permite mejorar su asignación de probabilidades. Está basada en el teorema de Bayes, que permite transformar probabilidades a priori en probabilidades a posteriori, utilizando la información de los datos observados. Desde el punto de vista de la enseñanza, Borovcnik (2012) señala su escasa presencia, en currículos vigentes. Aunque la probabilidad condicional y el teorema de Bayes se retrasan a la educación secundaria, Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren usar en forma intuitiva este enfoque, en la educación primaria, con situaciones cotidianas del niño; se comenzaría asignando valores por parte del niño a las probabilidades, que se revisarían posteriormente con nuevas experiencias.

### **Investigaciones previas**

La presentación de la probabilidad en libros de texto ha recibido baja atención en la investigación; debido a que hasta la última década estaba ausente en la educación primaria, los estudios previos se habían concentrado en la educación secundaria.

Ortiz (2002) analizó los procedimientos asociados a la probabilidad en dos libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años, abarcando el período 1975-1991. El autor observó escasez de procedimientos ligados a conceptos como espacio muestral, frecuencia relativa, probabilidad estimada, dependencia e independencia. Sus resultados muestran un predominio de procedimientos algorítmicos como el cálculo de la regla de Laplace y que apenas aparecen procedimientos relacionados con los significados frecuencial y subjetivo, que teóricamente sí se presentan. Asimismo, el autor ilustra algunos sesgos observados en estos libros, indicando que, para evitar su transmisión a los alumnos, el uso de textos debe estar acompañado de una vigilancia epistemológica por parte del profesor.

Azcárate y Serradó (2006) y Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) analizaron el contenido de probabilidad en cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria. Encontraron diferencias en su desarrollo: mientras dos editoriales presentan los contenidos de forma lineal, comenzando con nociones teóricas y actividades de aplicación; las otras dos organizan de forma helicoidal, alternan nociones teóricas con actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo. Los autores concluyen que hay diferenciación en el nivel de desarrollo de los significados según editoriales, en unas predomina el clásico y en otras el frecuencial; además, notaron ausencia de relación entre la experimentación y las nociones teóricas.

Partiendo de estos antecedentes, en este trabajo se analizan los procedimientos probabilísticos presentados en las dos series de texto, clasificándolos según el significado de la probabilidad al que estén asociados, y por ciclo de la educación primaria. Esta información puede ser de utilidad para profesores en ejercicio en la preparación de sus clases o para complementar o modificar los libros de texto, y para

los formadores de profesores, quienes la pueden utilizar en dicha formación. En lo que sigue se presentan el método y resultados del estudio.

## **METODOLOGÍA**

Las series de los libros de texto analizados se eligieron por ser las más utilizadas en Andalucía durante el curso 2011-2012 (según datos de la página web de la Consejería de Educación). Cada editorial tiene varios proyectos vigentes, dependiendo del ciclo. Nuestra muestra intencional está constituida por diez libros de texto (ver Anexo). Se revisaron las series completas tomando los textos en que aparecía probabilidad.

El análisis fue cualitativo y adapta la metodología de Cobo (2003):

1. En los libros de texto se identifican páginas o capítulos que incluyen temas de azar o probabilidad. De ellas se toman los párrafos que incluyen procedimientos, que serán las unidades de análisis.
2. Se clasifican los procedimientos según estén ligados a los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo.
3. A través de un proceso cíclico e inductivo, de lectura de los libros y de discusión y revisión por los autores, se fijan las categorías de análisis para cada significado. Nos basamos en los documentos curriculares y trabajos previos (Ortiz, 2002; Batanero, 2005; Batanero, Henry, y Parzysz, 2005; Batanero y Díaz, 2007).
4. Las categorías observadas se ilustran con ejemplos seleccionados de los textos analizados. También se organizan en tablas, cuya lectura facilite concluir con respecto a la presentación de procedimientos probabilísticos en estas dos series.

## **RESULTADOS**

Observamos una amplia variedad de algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo básicos que se aplican para resolver problemas probabilísticos, en los que se utiliza terminología informal. A continuación presentamos los procedimientos que observamos, clasificados de acuerdo con el significado de la probabilidad al que correspondan.

### **Procedimientos relacionados con el significado intuitivo**

Consideramos en este apartado todos aquellos procedimientos en que la asignación de probabilidades es objetiva, pero no se pide al niño el valor numérico, sino sólo una graduación cualitativa.

*PR11. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas.* Los textos analizados evocan situaciones conocidas por el niño, e invitan a la reflexión sobre la presencia del azar en tales situaciones. El reconocimiento de este tipo de experiencias fortalece la comprensión de los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio. Un ejemplo se presenta en la Figura 1.

*PR12. Reconocer la impredecibilidad de un resultado.* Los textos analizados piden al niño decidir si se puede predecir o no el resultado que se obtendrá, antes de la experimentación, en situaciones conocidas. Esta reflexión conlleva al reconocimiento

de la variabilidad en los resultados y de la propiedad de impredecibilidad; por ejemplo al niño de primer ciclo se presenta una ruleta hexagonal de seis colores y se pregunta “Antes de girar la ruleta, ¿podemos saber qué color saldrá? \_\_ Sí \_\_ No” ([T6], p. 165).



Figura 1. Distinción de fenómenos aleatorios y deterministas ([T3], p. 205)

**PRI3. Reconocer tipos de sucesos** (posibles, imposibles, seguros). Los textos analizados plantean este procedimiento con dos clases de situación didáctica: presentan a la vez varios sucesos, cada uno ligado a un experimento diferente (como en la Figura 2), o presentan un experimento y definen varios sucesos referidos a éste (como en la Figura 3).



Figura 2. Reconocimiento de tipos de sucesos ([T1], p. 188)

**PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades.** Los textos presentan situaciones didácticas para que el niño distinga niveles de posibilidad de ocurrencia de un suceso asociado a un cierto experimento aleatorio por medio de expresiones verbales, como “muy probable” o “poco probable”.

**PRI5. Comparar cualitativamente probabilidades.** Dados dos o más sucesos, se pide elegir el que parece más (o menos) probable. Este tipo de actividades aparecen en el ejemplo mostrado en la Figura 3.



*Figura 3.* Comparación cualitativa de probabilidades ([T8], p. 125)

## Procedimientos relacionados con el significado clásico

Son aquellas situaciones en que el espacio muestral del experimento es finito, con sucesos equiprobables y se pide al niño estimar o calcular la probabilidad o bien analizar los experimentos o sucesos implicados.

*PRC1. Analizar diferentes juegos de azar.* Los textos analizados evocan juegos conocidos por el niño, como el parchís o los sorteos, y proponen comparar (o calcular) la probabilidad de algunos sucesos relacionados con estos juegos, más que la reflexión sobre sus características.

*PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles.* En los textos analizados identificamos dos niveles para este procedimiento, de acuerdo con la complejidad del experimento. El primer nivel trata de enumeración en experimentos simples, donde se pide la lista de posibles resultados sin una técnica, como en la Figura 4.



Figura 4. Enumeración del espacio muestral ([T5], p.205)

El segundo nivel de enumeración en experimentos compuestos potencia el interés de los niños para buscar procedimientos de enumeración sistemática, apoyados de gráficos como el diagrama en árbol, pues las técnicas de combinatoria no se desarrollan formalmente en educación primaria. Un ejemplo sencillo es el siguiente: “Copia y completa todos los resultados posibles (cara-cruz), en la experiencia “tirar dos monedas al aire”, una de 50 céntimos y otra de 10 céntimos” ([T5], p.205).

*PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables.* Los textos analizados se enfocan en identificar o enumerar casos favorables y posibles, previo a la aplicación de la regla de Laplace, tanto en experimentos simples como compuestos. El reconocimiento de casos desfavorables está también implícito y es un paso previo a la noción de suceso complementario.

*PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables.* La mayoría de situaciones didácticas asumen la equiprobabilidad de los sucesos elementales, sin hacerlo explícito; en tales casos sería labor del profesor hacer notar esta propiedad y explicar las situaciones bajo las cuales es válida para evitar en sus alumnos el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Aunque las situaciones con sucesos elementales equiprobables aparecen desde primer ciclo, más adelante aparecen preguntas para diferenciar si los sucesos son o no equiprobables.

*PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional.* Antes de la introducción de la asignación numérica de probabilidades, algunas actividades proponen comparar la probabilidad de un suceso en dos o más situaciones. El objetivo principal es la comparación; la respuesta puede darse en términos de la relación de orden sin asignación numérica de estas probabilidades (Figura 5).





Figura 5. Comparación de probabilidades con razonamiento proporcional ([T3], p. 213)

*PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples.* La Serie 1 introduce la asignación numérica de probabilidades con el significado clásico en segundo ciclo y la Serie 2 en tercero. Este procedimiento es muy frecuente en esta muestra de textos, que presentan la forma de cálculo sin mención a sucesos elementales o compuestos, los cuales tampoco se definen, como es de esperar para la edad de los niños:

La probabilidad de un suceso mide la posibilidad de que un suceso ocurra. Para calcularla utilizamos una fracción

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} \quad ([T10], \text{ p. 215}).$$

*PRC7. Decidir si un juego es equitativo o no.* Los textos analizados rara vez proponen reflexionar acerca de las condiciones globales del juego de azar que están analizando los niños; en general, preguntan por probabilidades de resultados particulares o de que gane algún niño específico. Decidir si un juego es equitativo en las situaciones planteadas en estos textos sólo requiere la comparación de las probabilidades de ganar de los jugadores, pues son juegos sencillos que no incluyen valores de apuesta. La única situación encontrada donde se pregunta si un juego es equitativo es la siguiente:

Rosa, Iria y Esteban no se ponen de acuerdo en qué película ver en el cine. Deciden lanzar dos monedas: si salen dos caras elige Rosa; si sale cara y cruz elige Iria. Si no, elige Esteban. ¿Es justo? Ayúdate de un dibujo, y explica tu respuesta. ([T9], p. 219).

Otros procedimientos donde se espera una asignación de probabilidad con regla de Laplace son los siguientes:

*PRC8. Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos etapas independientes.* Como ya se ha indicado, los textos analizados no hacen distinción entre experimentos simples y compuestos, de modo que los niños tratan experimentos compuestos y calculan algunas probabilidades conjuntas sin utilizar lenguaje formal. Hay pocas situaciones didácticas de este tipo, en ellas los sucesos conjuntos elementales son equiprobables y el procedimiento seguido por los textos es aplicar la regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente.

En la experiencia “tirar dos monedas”:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos cruces?
- b) ¿Y la de obtener una cara y una cruz? ([T5], p. 209).

*PRC9. Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos etapas dependientes.* El análisis de experimentos compuestos de dos etapas dependientes constituye un avance importante en el desarrollo del razonamiento probabilístico del niño, pues requiere, por ejemplo, que el niño reconozca la intersección de sucesos, la importancia que puede tener el orden y la dependencia (sin conocer aún la probabilidad condicional). Hay muy pocas situaciones didácticas de este tipo; un ejemplo se observa en la Figura 6.



Figura 6. Asignación de probabilidad conjunta en experimentos dependientes ([T5], p. 209)

### **Procedimientos relacionados con el significado frecuencial**

En este apartado consideramos los procedimientos en que se estima la probabilidad, en base a la frecuencia relativa, y los previos para hacer esta estimación, como clasificación de atributos o cálculo de frecuencias relativas.

*PRF1. Enumerar o discriminar atributos en un colectivo.* La recolección de datos es poco frecuente en estos textos; la discriminación de atributos en un colectivo aparece pocas veces y se realiza a partir de una lista de datos disponible en el mismo enunciado. El siguiente ejemplo propone la construcción de la tabla para una variable, que implica identificar y enumerar los diferentes atributos observados:

Al preguntar a un grupo de chicos y chicas por su postre preferido se obtuvieron las respuestas siguientes:

helado – flan – fruta – fruta – helado – natillas – yogur – natillas – helado – fruta – flan – yogur – fruta – helado – yogur – fruta – flan

- a) Construye la tabla de frecuencias de los datos e indica cuáles son la frecuencia absoluta y relativa del helado. ([T5], p. 199)

*PRF2. Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones o datos.* En la Serie 1, todas las actividades dedicadas a estadística descriptiva del 6º curso, se orientan a calcular frecuencias relativas de valores observados de una variable estadística a partir del listado de datos, de un gráfico o la tabla de recuentos. Hay pocas actividades en las que el niño calcule la frecuencia relativa a partir de los datos o de la observación; un ejemplo se observa en la Figura 7.

*PRF3. Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica.* Este procedimiento solo se asocia a la estadística y no a la probabilidad en nuestra muestra de textos. La representación de una distribución de frecuencias es el último paso en la evolución del uso de lenguaje tabular y es un paso previo a la estimación de probabilidades. Un ejemplo se muestra en la Figura 7 donde a partir de lista de datos de una variable se propone la construcción de la tabla. La representación gráfica de las

frecuencias absolutas se realiza desde primer ciclo informalmente. Este nivel de representación es más accesible a los niños que la representación gráfica de frecuencias relativas, que no se propone en estos textos, suponemos que debido a la dificultad del cambio de escalas con números enteros a escalas con decimales o fraccionarios. Hacemos notar, sin embargo, que para el nuevo currículo (MECD, 2014) se espera que los niños al final de la primaria trabajen tablas de frecuencias relativas.

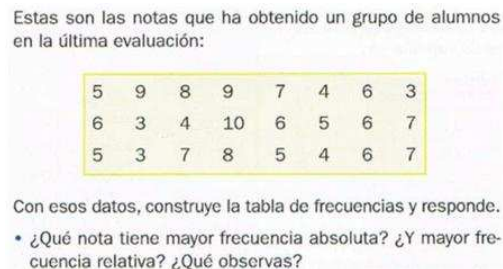


Figura 7. Representación tabular de una distribución ([T5], p. 192)

*PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimentos compuestos).* El uso de lenguaje tabular para experimentos compuestos es poco frecuente; algunas tablas de doble entrada se encuentran en la parte de tratamiento de datos, ninguna en la parte de probabilidad.

*PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos.* Todas las situaciones didácticas, en la sección de “probabilidad a partir de datos” de la Serie 1 en cuarto y sexto curso, se orientan a proporcionar una estimación para una probabilidad; en la mayoría de casos, a partir del listado de datos o la tabla de recuentos (Figura 10), en pocas situaciones, proponiendo la experimentación por parte del niño (Figura 8).

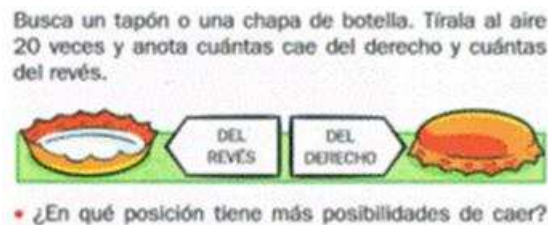


Figura 8. Estimación de una probabilidad teórica ([T3], p. 211)

*PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad.* En estos textos no hay mención explícita a la diferencia entre el valor teórico de la probabilidad y su estimación; queda en manos del profesor hacer esta aclaración, así como explicar la diferencia entre “calcular la probabilidad”, del significado clásico, y “estimar la probabilidad”, del significado frecuencial. Solo una situación didáctica permite reflexionar acerca del carácter aproximado de la estimación de probabilidades (Figura 9). Esta actividad también permitiría contrastar el valor teórico con el estimado, que dejaría en evidencia la calidad de la aproximación.

Iván ha tirado 20 veces dos monedas iguales y ha ido anotando los resultados.



- a) Repite tú la experiencia y compara tus resultados con los de Iván.  
 b) ¿A cuál de los tres resultados apostarías?

Figura 9. Variabilidad de las frecuencias en dos series de 20 ensayos ([T3], p. 211)

*PRF7. Análisis de experimentos en los que puede aplicarse el significado frecuencial.* Los textos presentan diversidad de situaciones adecuadas para la aplicación del significado frecuencial, sin analizar las razones que justifican esta aplicación. En la mayoría de casos no se dispone de suficiente información de tipo estadístico, para que la asignación frecuencial de probabilidades sea suficientemente precisa, pues el tamaño de muestra es pequeño.

*PRF8. Reflexionar sobre la fiabilidad.* Los textos sólo hacen mención a la fiabilidad en dos ocasiones, cuando se enuncia la propiedad y en la actividad de la Figura 10.



Figura 10. Reflexión sobre la fiabilidad de una estimación de probabilidad ([T5], p. 210)

### Procedimientos relacionados con el significado subjetivo

El único procedimiento relacionado con el significado subjetivo está presente de forma implícita en los textos analizados.

*PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal.* Se presentan algunos experimentos aleatorios ligados a fenómenos naturales, situaciones cotidianas o a juegos de destreza que se pueden analizar con el significado subjetivo dependiendo de la disponibilidad de información o del conocimiento previo. En el siguiente ejemplo, el conocimiento del niño puede llevar a respuestas parcialmente diferentes para la misma pregunta: “Escribe todos los resultados posibles en la experiencia “lanzar tres tiros libres”” ([T5], p. 214).

Para resumir los hallazgos se presentan las Tablas 1 y 2. En la primera se observa que ambas editoriales atienden las directrices curriculares al incluir procedimientos de cada uno de los significados, aunque con diferente intensidad. La presencia del significado intuitivo es notable en toda la educación primaria, donde los procedimientos de reconocimiento aparecen desde el primer ciclo y los de valoración y comparación desde segundo ciclo. El ciclo en que se introducen procedimientos del significado

clásico varía de una editorial a otra. En el significado frecuencial, el foco de atención varía de una editorial a otra, solo la Serie 1 incluye procedimientos de naturaleza probabilística; ambas incluyen procedimientos de naturaleza estadística, y ninguna incluye procedimientos de simulación, que están sugeridos en los documentos curriculares (MEC, 2006; MECD, 2014). Los procedimientos del significado subjetivo están implícitos en otros, y tienen baja presencia en estos textos.

Tabla 1. Procedimientos presentes en los libros de texto y en los documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo		
	Serie	1	2	1	2	1	2
<b>Intuitivo</b>							
PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas		x	x	x	x	x	x
PRI2. Reconocer la impredecibilidad de un resultado		x	x	x	x	x	x
PRI3. Reconocer tipos de sucesos		x	x	x	x	x	x
PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades				x	x	x	x
PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades				x	x	x	x
<b>Clásico</b>							
PRC1. Analizar juegos de azar		x	x	x	x	x	x
PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles				x	x	x	x
PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables							
PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables				x		x	x
PRC5. Comparar con razonamiento proporcional				x		x	x
PRC6. Aplicar regla de Laplace en experimentos simples				x		x	x
<b>Frecuencial</b>							
PRF1. Enumerar o discriminar atributos		x	x	x	x	x	x
PRF2. Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos						x	x
PRF3. Representar distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica		x	x	x	x	x	x
PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada				x			
PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos				x		x	
PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación				x		x	
<b>Subjetivo</b>							
PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal				x	x	x	x

Tabla 2. Procedimientos presentes en los libros y ausentes en los documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo		
	Serie	1	2	1	2	1	2
<b>Clásico</b>							
PRC7. Decidir si un juego es equitativo							x
PRC8. Asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes						x	
PRC9. Asignar probabilidad conjunta en experimentos dependientes						x	
<b>Frecuencial</b>							
PRF7. Analizar experimentos donde pueda aplicarse el significado frecuencial				x		x	
PRF8. Reflexionar sobre la fiabilidad de la estimación						x	

En la Tabla 2 se observa que ambas editoriales mencionan en el último ciclo procedimientos importantes de los significados clásico y frecuencial que no se identificaron en el análisis de los documentos curriculares (Gómez y Contreras, 2013).

En la Serie 1, observamos la inclusión de dos procedimientos, enmarcados en situaciones del significado clásico, que son transversales a los cuatro significados (PRC8 y PRC9), con respecto al desarrollo del significado axiomático. Por otra parte, resaltamos que la Serie 2 incluye procedimientos que implican creatividad, en los dos últimos ciclos pregunta al niño por su propia ejemplificación de conceptos.

Ortiz (2002) identificó en su estudio, con baja frecuencia, procedimientos de mayor complejidad, por ejemplo el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos con experimentos compuestos dependientes, o con más formalidad, como determinar la distribución de una variable aleatoria. Es razonable que no aparezcan en nuestro estudio, al ser libros de educación primaria. Al igual que este autor, observamos el predominio de procedimientos algorítmicos sobre los interpretativos, y que una de las editoriales presenta pocos procedimientos del significado frecuencial, y únicamente en el contexto estadístico.

## CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado la diversidad de procedimientos relacionados con la probabilidad que se introducen, de forma implícita o explícita, en las series analizadas de libros de texto de educación primaria. Además, identificamos el significado de la probabilidad en las actividades propuestas en estos libros de texto.

En general, ambas editoriales desarrollan los procedimientos ligados a los diferentes significados sugeridos en las orientaciones curriculares. Asimismo, se presentan procedimientos que no aparecen en los documentos curriculares y que han sido consideradas por las editoriales, como se observó en la Tabla 2.

En ambas editoriales, los procedimientos propios del significado intuitivo de la probabilidad se presentan desde el primer ciclo, y los del significado clásico desde el segundo. Mientras que los del significado subjetivo prácticamente se omiten; algunas situaciones que podrían promover el análisis de situaciones donde la probabilidad depende de información complementaria son tratadas desde otro enfoque o su tratamiento se deja en manos del profesor.

Con relación al significado frecuencial se reconocen dos tipos de procedimientos los de naturaleza probabilística y los de naturaleza estadística; las editoriales analizadas hacen un trato diferenciado de éstos. Ambas series exponen procedimientos estadísticos en todos los cursos; pero solo la Serie 1 presenta los probabilísticos, en los dos últimos ciclos. Hay también en las dos series escasa atención a la experimentación y nula a la simulación (que podría desarrollarse con ayuda de material manipulativo o tecnología). Creemos que la omisión del significado frecuencial en la Serie 2 puede favorecer la aparición del sesgo de equiprobabilidad en los niños; si extienden la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas que enfrentan, ya que no conocerían otras alternativas para asignar o aproximar numéricamente probabilidades. Por otra parte, el número de ensayos presentados en la Serie 1 es siempre menor que 30, lo que puede favorecer la creencia en la convergencia en pequeñas muestras.

El tratamiento dado al significado subjetivo sigue las sugerencias de Godino, Batanero y Cañizares (1987) con respecto a usar en forma intuitiva este enfoque con situaciones cotidianas del niño, en la educación primaria. Sería labor del profesor comenzar a sugerir la asignación, por parte del niño, de valores numéricos a las probabilidades, así

como proponer la revisión de estas probabilidades asignadas, después de nuevas experiencias.

Asimismo se observa el tratamiento inicial de cuatro de los cinco tipos de conocimiento que forman parte de la alfabetización probabilística, según Gal (2005): ideas probabilísticas, asignación de probabilidades, uso de lenguaje probabilístico y capacidad de contextualizar, aunque no se hace énfasis en la evaluación de la calidad de la información disponible.

Este análisis puede ser de interés a profesores y formadores de profesores, por cuanto les alerta sobre posibles razonamientos errados, heurísticas y sesgos que se estén promoviendo en los niños, a través del libro de forma inconsciente. También puede usarse para desarrollar mejor el currículo, ya que hemos puesto de manifiesto la transversalidad de algunos procedimientos presentes en los tres ciclos formativos y su progresión en el tiempo. Además mostramos ejemplos de situaciones que pueden ser desarrolladas con diferentes significados de la probabilidad.

El impacto de un libro de texto depende de múltiples factores externos al libro, entre ellos el estudiante, el profesor, su uso en el aula y el material complementario (Lowe y Pimm, 1996). En este sentido, reconocemos que al profesor corresponde un importante papel no sólo al decidir el libro de texto que recomienda a sus alumnos, sino también las partes de éste a usar en la enseñanza, así como los recursos con que debe ser complementado. Asimismo, es el profesor quien busca estrategias para que los estudiantes progresen desde un enfoque intuitivo a los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo.

Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la probabilidad, en la educación primaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

## ANEXO

Los libros de texto utilizados en el análisis fueron los siguientes:

*Serie 1:* Editorial Anaya:

[T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T., y Cid, O. (2011). *Matemáticas 2*. Proyecto Una a una.

[T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 3*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.

[T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., y Martínez, L. (2008). *Matemáticas 4*. Proyecto Abre la puerta, reedición 2011.

[T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I., y Martín, P. (2009). *Matemáticas 5*. Proyecto Abre la puerta.

[T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I., y Martín, P. (2009). *Matemáticas 6*. Proyecto Abre la puerta.

*Serie 2:* Editorial S.M.

[T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandíz, B., y Galve, R. (2011). *Matemáticas. 2º*. Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.

- [T7]. Peña, M., Aranzubía, V., y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 3º*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
- [T8]. Peña, M., Aranzubía, V., y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 4º*. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
- [T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V., y Sanz, B. (2009). *Matemáticas 6º*. Proyecto Timonel, reedición 2010.
- [T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J., y Pérez, E. (2009). *Matemáticas 6º*. Nuevo proyecto Planeta Amigo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Batanero, C., Green, D. R. y Serrano, L. R. (1998). Randomness, its meanings and educational implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29(1), 113-123.
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2, 5-27.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, XVIII (1 y 2), 161-183.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3), 325-255.



Gómez, E. y Contreras, J. M. (2013). Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria. *Actas de las I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada: SEIEM.

Gómez, E. y Contreras, J. M. (2014). Meanings of probability in Spanish curriculum for primary school. En *Proceedings of 9<sup>th</sup> International Conference of the Teaching Statistics*. Flagstaff, Arizona: IASE.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.

Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 5(1), 49-71.

Herbel, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.

Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* Vol. 2 (pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria*. Madrid: Autor.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria*. Madrid: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Rittle-Johnson, B. y Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175- 189

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 343-362.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 38, 91-112.