EXPERIENCIAS Y SUGERENCIAS PARA LA FORMACIÓN PROBABILÍSTICA DE LOS PROFESORES[1]

Carmen Batanero, J. Miguel Contreras
Universidad de Granada, España
batanero@ugr.es, jmcontreras@ugr.es
Carmen Díaz
Universidad de Huelva, España
carmen.diaz@dpsi.uhu.es

Resumen

En este trabajo analizamos el contenido necesario para la preparación didáctica de profesores para la enseñanza de la probabilidad y sugerimos las posibilidades que las paradojas clásicas de probabilidad ofrecen para organizar actividades didácticas que puedan contribuir a esta formación. Se presenta también un ejemplo usado en nuestros propios cursos con profesores y se sugieren diversos tipos de análisis didáctico con el mismo.

Palabras clave: Formación de profesores, componentes del conocimiento del profesor, paradojas como recurso didáctico, probabilidad.

Abstract

In this paper we analyze the content needed in the didactic preparation of teachers to teach probability. We also suggest the possibility that classical paradoxes of probability offer to organize didactic situations that can contribute to this education. We also present an example used in our own courses and suggest different levels of didactic analysis of the same.

Keywords: Teacher education, components in teacher' knowledge, paradoxes as a didactic tool, probability.

1 Paradígma vol.32 no.2 2011

1. Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos de enseñanza secundaria en las últimas dos décadas, recientemente se propone renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica más directa desde su infancia (ej. NCTM, 2000; M.E.C., 2006a, 2006b; Campos, Cazorla y Kataoka, 2011). En estas orientaciones curriculares también se recomienda reforzar las intuiciones de los estudiantes y el razonamiento estadístico, que van más allá de la comprensión de los conceptos y procedimientos.

Una condición para asegurar el éxito de estas propuestas es la formación de los profesores. Sin embargo, autores como Pierce y Chick (2011) indican que algunos profesores de matemáticas se encuentran inseguros al enseñar esta materia, pues su interés es contribuir a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas. Aunque la mayoría de los profesores de secundaria tienen una formación sólida en probabilidad, muchos desearían reforzar su conocimiento del contenido didáctico relacionado con la enseñanza de probabilidad; por ejemplo, sobre el uso de la simulación, los diferentes significados de la probabilidad o las etapas en el desarrollo del razonamiento probabilístico de sus alumnos.

La situación es aún más crítica para los profesores de la escuela primaria, puesto que pocos de ellos han tenido la formación necesaria para la enseñanza de la probabilidad y algunos ni siquiera han seguido un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros. Ello ocasiona en algunos casos concepciones incorrectas sobre las ideas de azar y probabilidad (Azcárate, 1996) y en otras lleva a los profesores a tratar de reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Por consiguiente, es urgente ofrecer una mejor educación previa a estos profesores, lo que puede lograrse con el apoyo continuo de departamentos universitarios y de grupos de investigación (Franklin y Mewborn, 2006).

En este trabajo describimos los componentes del conocimiento que los profesores necesitan para enseñar adecuadamente la probabilidad. Seguidamente sugerimos las posibilidades que ofrecen algunas paradojas clásicas de la teoría de la probabilidad para organizar situaciones didácticas orientadas a mejorar la formación matemática y didáctica de los profesores en el campo de la probabilidad. Finalizamos con el análisis de un taller basado en una de estas paradojas.

2. Conocimiento del profesor y enseñanza de la probabilidad

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). Aunque para la enseñanza de la probabilidad en la escuela, no necesitan altos niveles de conocimientos matemáticos, tales como, por ejemplo, la teoría de la medida, sin embargo Batanero y Díaz (2012) recuerdan que los profesores requieren una comprensión profunda de las matemáticas básicas que enseñan. Dicha comprensión incluye un conocimiento suficiente de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos y sus aplicaciones, y también otros conocimientos no estrictamente matemáticos, que son necesarios para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica.

La investigación en educación matemática sobre conocimientos y formación de profesores es muy extensa, como se pone de manifiesto por la existencia de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, el "handbook" publicado por Wood (2008) y el libro publicado como consecuencia del ICMI Study 15, "The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics Teachers" (Even y Ball, 2008).

Uno de los autores que ha tenido mayor influencia fue Shulman (1986a) quien describió un conocimiento específico del profesor que denomina "conocimiento pedagógico del contenido" (PCK). Según este autor, sería un componente distintivo de conocimiento, necesario para la enseñanza de un cierto tema, el cual interactúa con el conocimiento de contenido y el conocimiento curricular. Dicho conocimiento incluye diferentes formas de representación y formulación de un tema para hacerlo comprensible a los aprendices, así como una comprensión de los elementos que facilitan o dificultan el aprendizaje de tópicos específicos en cada edad, por ejemplo, las preconcepciones acertadas o erradas sobre dicho tema (Shulman, 1986b).

Otro trabajo de gran impacto es el de Ball y colaboradores, quienes han definido el "mathematical knowledge for teaching" (MKT), o conocimiento matemático para la enseñanza, que es "*el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno*" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374), y está compuesto por dos grandes categorías: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido. El primero lo dividen en tres partes: (a) "conocimiento común del contenido" (CCK), o conocimiento del tema que tiene cualquier alumno o persona educada; (b) "conocimiento especializado del contenido” (SCK), algo más amplio y específico del profesor, que le permite, por ejemplo, para proponer tareas matemáticas; y (c) “conocimiento en el horizonte matemático” utilizado para establecer conexiones de un contenido particular con otros temas; por ejemplo, para la probabilidad incluye el conocimiento de los problemas filosóficos de los diferentes enfoques clásico, frecuencial o subjetivo.

También dividen el conocimiento pedagógico del contenido en tres partes: “conocimiento del contenido y los estudiantes” (KCS) “*es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular*” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375); “conocimiento del contenido y la enseñanza” (KCT) o conocimiento sobre procesos adecuados para enseñar y evaluar un tema, y “conocimiento del currículo”,

Aunque son muchos los modelos sobre conocimientos del profesor dentro de la educación matemática, no son tan abundantes los relacionados con la probabilidad y estadística. Batanero, Godino y Roa (2004) especifican las siguientes componentes necesarias para el conocimiento profesional de los docentes:

- *Epistemología:* El maestro requiere no sólo conocer el significado matemático de los conceptos, sino también el de su desarrollo histórico y de los diversos significados que cada concepto que enseña ha recibido en diferentes periodos. Es también útil comprender las controversias asociadas a estas diferentes definiciones, para ayudarle a comprender mejor las dificultades de sus alumnos. Por ejemplo, los diferentes significados de la probabilidad estuvieron en su día sujetos a debates filosóficos, algunos de los cuáles se mantienen incluso en la actualidad (ver Batanero, Henry y Parzysz, 2005).
- *Cognición:* Es importante tener conocimientos sobre el desarrollo de la comprensión que los niños alcanzan de los conceptos básicos, dependiendo de su edad. Ello permitirá una mejor predicción de las dificultades de aprendizaje de los alumnos, sus posibles errores, obstáculos y estrategias en la resolución de problemas. Los aspectos afectivos que los estudiantes puedan desarrollar en relación a la materia (miedo, interés, etc.) también deben tenerse en cuenta.
- *Materiales*: El profesor debe conocer los recursos que pueden favorecer el aprendizaje y las técnicas de enseñanza adecuadas. Debe tener experiencia con buenos ejemplos de situaciones de enseñanza y herramientas didácticas, y alcanzar una capacidad crítica para analizar los libros de texto y documentos curriculares, así

como habilidad para adaptar los temas a los conocimientos en diferentes niveles de enseñanza. Debe conseguir el interés de los alumnos, teniendo en cuenta sus actitudes y creencias.

- *Interacción:* Capacidad para crear una buena comunicación en el aula y organizar el discurso y comunicación entre alumnos y entre alumnos y profesor. Asimismo debe utilizar la evaluación como una forma de guiar la instrucción.

Estos tipos de conocimiento son revisados por Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi (2011), quienes incluyen los siguientes componentes en su modelo de conocimiento profesional de los docentes:

- *Componente epistémica:* conocimiento del contenido matemático o estadístico, es decir, el conjunto de problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, el lenguaje y argumentos incluidos en la enseñanza de un tema dado y su distribución en el tiempo de enseñanza.
- *Componente cognitiva*: conocimiento de los niveles de los estudiantes del desarrollo y la comprensión del tema, las estrategias de los estudiantes, las dificultades y errores en cuanto al contenido previsto.
- *Aspecto afectivo:* conocimiento de las actitudes de los estudiantes, las emociones, las motivaciones sobre el contenido y el proceso de estudio.
- *Componente mediacional:* conocimiento de los recursos didácticos y tecnológicos disponibles para la enseñanza y las posibles formas de utilizar y distribuir estos recursos en el tiempo.
- *Componente interaccional*: gestión de las organizaciones posibles del discurso en el aula y las interacciones entre el profesor y los estudiantes que ayudan a resolver las dificultades de los estudiantes y los conflictos.
- *Componente ecológico:* el conocimiento de la relación del tema con el currículo oficial, otros temas matemáticos o estadísticos y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan la enseñanza y el aprendizaje.

Estos modelos de formación del profesor proporcionan una pauta para organizar actividades formativas dirigidas a desarrollar todo o parte de dicho conocimiento. Como indican Ponte y Chapman (2006), debemos considerar los profesores como profesionales, y formar a los docentes en la práctica profesional, haciendo que todos los elementos de la práctica (preparación de las clases, tareas y materiales, la realización de clases, observación y reflexión sobre la experiencia) sean el elemento central del proceso de formación del profesorado. En la siguiente sección se sugiere el interés de las paradojas de la historia clásica de la probabilidad para organizar algunas actividades didácticas dirigidas a capacitar a los profesores en la probabilidad. El objetivo es provocar la reflexión de los profesores sobre el significado de las nociones estocásticas elementales, ayudarles a darse cuenta de las dificultades de los estudiantes y los obstáculos, y darles ejemplos de metodología y materiales didácticos.

3. Paradojas como herramienta para desarrollar el conocimiento del docente

Los modelos anteriores de conocimientos del profesor sugieren que los conocimientos estadísticos en sí mismos no son suficientes para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva y desarrollar en sus estudiantes un adecuado razonamiento probabilístico. Algunos profesores pudieran no estar familiarizados con la metodología propuesta en los nuevos currículos (basada en experimentos y simulaciones) o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus alumnos (Stohl, 2005). Si su formación inicial se centró en las competencias matemáticas, pueden sentirse inseguros con enfoques más informales.

Una implicación del anterior análisis es la necesidad de evaluar y desarrollar los conocimientos de los docentes, teniendo en cuenta los diferentes componentes descritos. Es importante apoyar a los profesores y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos (Ball, 2000). Puesto que queremos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (Jaworski, 2001).

Una herramienta didáctica posible es utilizar algunas de las paradojas clásicas aparecidas en la historia de la probabilidad para diseñar actividades dirigidas a la formación de profesores. Podemos servirnos de algunas de estas paradojas (ver Székely, 1986) para crear situaciones didácticas que sirvan para provocar la reflexión didáctica de los profesores. Puesto que el profesor tiene unos conocimientos sólidos de probabilidad elemental, hemos de buscar problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan tener soluciones contra intuitivas o sorprendentes.

Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas, que algunos participantes puedan defender vehementemente al tratar de solucionarlos, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos, como reconocen varios autores. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de estos ejemplos contra-intuitivos apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Falk y Konold (1992), por su parte, afirman que estas actividades requieren una consciencia de los propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente.

A continuación describimos un taller dirigido a profesores y basado en una paradoja clásica y analizamos el conocimiento que, mediante dicho taller, pueden adquirir los profesores.

4. Una actividad formativa basada en una paradoja de Bertrand

La actividad está basada en una paradoja propuesta por Joseph Bertrand (1822-1900), que es analizada con detalle en Contreras, Batanero, Arteaga Cañadas (en prensa). Una de estas variantes fue sugerida por Batanero, Godino y Roa (2004) para diseñar una actividad de formación de profesores que nosotros hemos ampliado en el taller que se describe a continuación. El taller se inicia proponiendo a los profesores un juego de apuestas, animándoles a que descubran la mejor estrategia para ganar el juego. La descripción del juego es la siguiente:

> *Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y agitar la caja, antes de seleccionar una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se*

muestra uno de los lados. El objetivo del juego es adivinar el color de la cara oculta. Repetimos el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Hacemos predicciones sobre el color del lado oculto y gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta.

Para organizar correctamente el taller, los participantes primero han de hacer algunas pruebas del juego y, a continuación, el formador de profesores ha de pedirles que encuentren la estrategia que produce la oportunidad de ganar más veces en una serie larga de ensayos. Debido al carácter contra intuitivo, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). Después de algunas repeticiones del juego, todas las estrategias sugeridas por los profesores deben figurar en la pizarra y posteriormente sería organizado por el formador de profesores un debate para decidir cuál es la mejor estrategia. El objetivo de este debate, donde es posible tanto el razonamiento correcto como los conceptos erróneos, es aumentar el conocimiento probabilístico del maestro.

Si no hay acuerdo final, los participantes serán animados a realizar una demostración matemática de su estrategia y se organiza un debate que permitirá revelar los razonamientos erróneos. La actividad se complementa con el análisis didáctico con los pasos que se describen a continuación.

Primer nivel de análisis: objetos matemáticos implícitos en las posibles soluciones

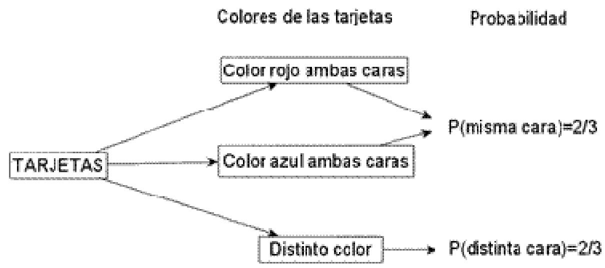
Una vez finalizado el taller, se procede a estudiar con los asistentes los objetos matemáticos utilizados, que dependerían de la solución encontrada. Según Godino (2009), este tipo de actividad permite explicitar e incrementar el *conocimiento especializado del contenido* por parte de los profesores.

Como se ha dicho, la solución que esperamos encuentren los profesores es que la mejor estrategia es dar el mismo color de la cara mostrada, es decir, si se muestra color azul predecir azul y lo mismo para el color rojo. A continuación incluimos algunos posibles razonamientos para justificar esta solución.

Solución 1. La forma más sencilla de encontrar la solución es razonar que, de las tres tarjetas, dos tienen las caras del mismo color. Por tanto, en el experimento consistente en obtener una tarjeta al azar tenemos tres posibilidades (las tres tarjetas).

Los casos favorables son las dos tarjetas con las dos caras iguales, como se representa en la Figura 1 presentamos el espacio muestral en este experimento

Figura 1. Espacio muestral en el experimento descrito en la solución 1

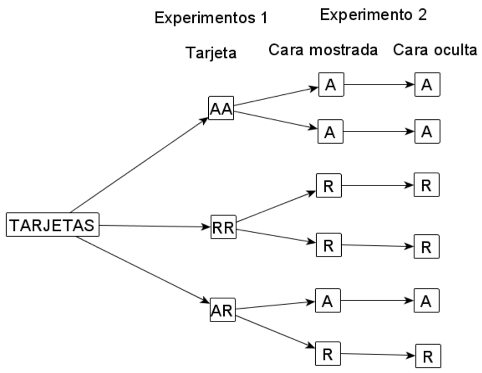


Solución 2. Podemos considerar el espacio muestral en el experimento compuesto de dos experimentos simples (Figura 2):

- Experimento 1: Tomar al azar una de las tres tarjetas. Cada una tiene probabilidad 1/3.
- Experimento 2: Mostrar una de las dos caras de la tarjeta, elegida al azar. En cada tarjeta, cada cara tiene una probabilidad 1/2. Respecto a los colores, en la tarjeta de dos colores, cada color tiene probabilidad 1/2; en la azul, la única posibilidad es que la cara oculta sea azul y en la roja, que sea roja.

El espacio muestral consta de seis sucesos {*AA*, *AA*, *RR*, *RR*, *RA y AR*}, pues en las tarjetas con las dos caras iguales hay que considerar dos veces el color azul o el rojo, dependiendo de si se muestra la cara de arriba o la de abajo. El dato de que la cara mostrada es azul implica la reducción del espacio muestral {*AA*, *AA y AR*}. Aplicando la regla de Laplace, tenemos *P(oculta A/mostrada A)= 2/3*.

Figura 2. Espacio muestral en el experimento descrito en la solución 2



Solución 3: Consideramos la cara mostrada (Figura 3) y calculamos la probabilidad de todos los posibles sucesos (AA, RR, AR, RA) donde el primer elemento del par indica la cara mostrada. Aplicando la fórmula de la probabilidad compuesta para sucesos dependientes tenemos:

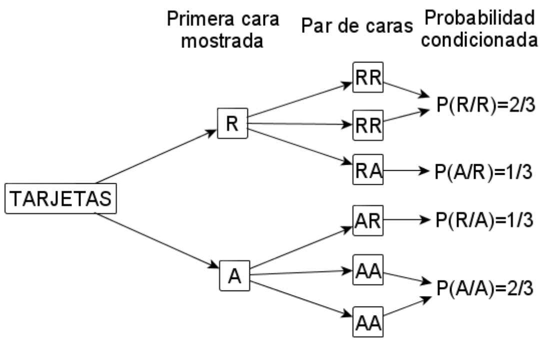
$$P(AA)=P(A)\cdot P(A/A)=1/2\cdot 2/3=1/3$$

$$P(RR)=P(R)\cdot P(R/R)=1/2\cdot 2/3=1/3$$

$$P(AR)=P(A)\cdot P(R/A)=1/2\cdot 1/3=1/6$$

$$P(RA)=P(R)\cdot P(A/R)=1/2\cdot 1/3=1/6$$

Figura 3. Espacio muestral del experimento descrito en la solución 4



Solución 4. Solución empírica. El alumno podría usar los datos obtenidos durante el juego y observar empíricamente cuál es la solución correcta, es decir, obtener la solución estimando las probabilidades a partir de la frecuencia relativa. Sería una comprobación empírica de la solución, aunque no llegaría a comprender por qué una estrategia es preferible a otra.

El análisis realizado con los profesores de las cuatro soluciones correctas descritas muestra los objetos matemáticos implícitos en este juego, resumidos en la Tabla 1. El profesor participante en el taller o bien un alumno usaría implícita o explícitamente algunos de estos objetos matemáticos, que varían dependiendo del tipo de solución encontrada. Según Godino, Font y Wilhelmi (2008), este primer nivel de análisis se aplica tanto en la planificación como en la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas implicadas en dicho proceso. Permite describir una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas.

Se observa que dependiendo del tipo de solución, hay una mayor profundidad del trabajo matemático. La solución empírica es la menos deseable, pues involucra un conjunto de objetos matemáticos notablemente menor y de menor complejidad que el resto. Asimismo, la primera solución no hace uso de las ideas de experimento compuesto, probabilidad condicional o independencia. Sería, por tanto deseable que el profesor condujera la clase hacia una de las otras soluciones.

Tabla 1. Objetos matemáticos implícitos en la situación, según solución

Tipos	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación	S1	S2	S3	S4
Situaciones-problemas	- Encontrar la mejor estrategia	- Calcular la probabilidad condicional de que la ficha oculta sea roja o azul, dependiendo del color mostrado	X	X	X	X
Lenguajes	- Verbal	- Explicación de la situación	X	X	X	X
	- Gráfico	- Diagrama en árbol - Representación icónica del juego	X X	X X	X X	
	- Tabular	- Tabla de resultados en el juego				X
	- Simbólico	- Expresar sucesos, probabilidades	X	X	X	
	- Numérico: Frecuencias	- Frecuencia de resultados				X
	- Icónico (si se simula el juego)	- Iconos que representan los sucesos y resultados	X	X	X	X
Conceptos	- Experimento aleatorio	- Tarjeta que se elige - Cara que se muestra - Cara opuesta	X X X	X X X	X X X	X X X
	- Sucesos; espacio muestral	- Tarjetas - *(R/R) (A/A) (R/A)* - *(R/R) (A/A) (R/A) (A/R)* - *(R/R) (R/R) (A/A) (A/A) (R/A) (A/R)*	X X	X X X	X X X	
	- Experimento compuesto	- Composición de los experimentos anteriores		X	X	
	- Sucesos en el experimento Compuesto	- Producto cartesiano de los espacios muéstrales anteriores		X	X	
	- Frecuencia relativa	- Éxitos / número experimentos	X	X	X	
	- Convergencia	- Tendencia de la frecuencia a un valor fijo				X
	- Intersección de	- Conjunto común de sucesos.			X	

	sucesos					
	- Unión de sucesos	- Sucesos en uno u otro conjunto	X	X		X
	- Probabilidad clásica	- Proporción de casos favorables a posibles	X	X	X	
	- Estimación frecuencial	- Límite de la frecuencia				X
	- Axiomas probabilidad	- Explicitación de los axiomas	X	X	X	X
	- Probabilidad condicional	- Proporción de ocurrencia suceso respecto a la ocurrencia de otro		X	X	
	- Regla de la suma	- Probabilidad de acertar	X			X
	- Regla del producto	- Probabilidad conjunta; dependencia			X	
	- Variable aleatoria	- Número de aciertos	X	X	X	
	- Distribución de probabilidad	- Conjunto de valores con sus probabilidades	X	X	X	
	- Distribución discreta uniforme	- Conjunto finito de valores equiprobables	X	X	X	
Procedimientos	- Enumeración del espacio muestral	- Desarrollar conjunto de elementos simples	X	X	X	X
	- Representación; construcción de un diagrama en árbol	- Ver figuras	X	X	X	
	- Cálculo de probabilidades	- Aplicar la regla de Laplace	X	X	X	
Propiedades	- Los experimentos son dependientes	- El número de caras azules depende de la tarjeta elegida en primer lugar		X	X	
	- Reducción del espacio muestral	- Conocer una cara cambia el espacio muestral		X	X	
	- Axioma de unión	- La probabilidad de la suma es suma de probabilidades en este caso		X		
	- Regla del producto	- La probabilidad de la intersección es el producto de la probabilidad simple por la condicionada			X	
Argumentos	- Razonamiento deductivo	- Demostración de la solución	X	X	X	
	- Razonamiento empírico	- Comparar aciertos fallos con distintas estrategias				X

La finalidad de este primer nivel de análisis didáctico, es que los profesores reflexionen sobre el proceso de resolución del problema y los objetos que hemos descrito y lleguen a identificar algunos de ellos. También se trata de que el profesor observe cómo la matemática que se trabaja en la clase no sólo depende del problema planteado, sino de los recursos matemáticos proporcionados a los estudiantes.

Segundo nivel de análisis: posibles conflictos de los estudiantes

Godino, Font y Wilhelmi (2008) proponen un segundo nivel de análisis, que incluye los procesos matemáticos y conflictos semióticos. Los autores señalan que en toda práctica se identifica un sujeto agente (en nuestro caso los profesores) y un medio en el que dicha práctica se realiza (en nuestro caso el taller). Este nivel de análisis tiene como objeto describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

Este problema, aparentemente simple, conlleva varias problemáticas a la hora de su interpretación y de su razonamiento, relacionadas mayoritariamente con una deficiente intuición sobre la probabilidad. A lo largo del taller, se pedirá a los participantes que expliciten sus soluciones y que traten de justificarlas. Puesto que el juego es paradójico, diferentes participantes defenderán con interés sus estrategias, algunas de las cuáles coincidirán con las correctas que acabamos de analizar. Pero otras serán erróneas, y debidas a algunos conflictos semióticos.

Se espera que la fase de debate y validación permita a los participantes detectar que sus razonamientos iniciales eran erróneos y en consecuencia, identificar algunos de los siguientes posibles conflictos semióticos en el desarrollo de la actividad:

1. *Conflicto en la identificación del experimento compuesto y del correspondiente espacio muestral.* Es plausible que algunos profesores, aunque perciban que en el juego haya tres fichas rojas y tres azules, no construyan correctamente el espacio muestral, debido a un insuficiente razonamiento combinatorio. Por este motivo algunos profesores podrían tener dificultades al comprender la restricción del espacio muestral en la probabilidad condicionada (Sánchez, 1996; Truran y Truran, 1996). Por ello, algunos sujetos podrían considerar los dos lados de cada tarjeta como sucesos independientes entre sí. De esta forma, podría haber profesores que identifiquen sólo dos sucesos simples *R* y *A*, cada uno de ellos con tres posibilidades, *A*, *A*, *A* y *R*, *R*, *R* en lugar de identificar los sucesos (*RR*) (*AA*) (*RA*) y (*AR*) del espacio muestral producto. Este razonamiento llevará al error de suponer que no hay estrategia en este juego.
2. *Conflicto al identificar la probabilidades de los sucesos en el espacio muestral producto*. Incluso aunque se identifiquen correctamente los sucesos (*AR*) (*RA*) (*AA*) y (*RR*) en el experimento, es posible que se asigne la misma probabilidad a los sucesos, aunque de hecho (*AA*) y (*RR*) tienen doble probabilidad. Ello se debería a un razonamiento muy similar al que aparece al trabajar con dos dados, y consiste en

no ver la importancia del orden. Este sesgo, denominado, *sesgo de equiprobabilidad* ha sido descrito en la investigación de Lecoutre (1992).

3. *Conflicto en la identificación de dependencia de los experimentos.* Como indica Maury (1985), las principales dificultades al resolver un problema de probabilidad condicional aparecen cuando no se sabe si dos sucesos son o no independientes. En nuestro caso, no hemos proporcionado a los alumnos el listado de los sucesos del experimento, sino que son ellos quienes tienen que identificarlos y esto, según Maury, añade dificultad al problema. Las dificultades con la idea de independencia, han sido también señaladas por Sánchez (1996) o Kelly y Zwiers (1986). Por ello algunos encuestados podrían pensar que la probabilidad de la cara oculta no depende de la mostrada. Por ello podrían pensar que los sucesos "color de la cara oculta" son equiprobables.
4. *Conflicto en la comprensión de la independencia de ensayos del mismo juego.* Aunque los experimentos en cada realización del juego son dependientes, cada vez que se juega, el resultado es independiente de los obtenidos con anterioridad. Esto ocurre en cualquier repetición de un experimento aleatorio, pero podría no ser percibido por los participantes. Por las mismas razones señaladas en el punto anterior, algunos profesores podrían suponer dependientes los resultados de la repetición del experimento. Éstos tendrían tendencia a predecir el resultado en cada realización del juego, en función de los resultados anteriores. Por ejemplo si ha salido 5 rojas dobles podrían pensar que es más fácil que la siguiente extracción no se repita la tarjeta. Este razonamiento mostrar una conducta propia de la *heurística de la representatividad* (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), por la que se espera una convergencia rápida en una serie corta de ensayos.

Tercer nivel de análisis: configuraciones didácticas

Otro análisis es el de las configuraciones didácticas puestas de manifiesto a lo largo del juego. Se pretende utilizar la situación para mostrar a los profesores una posible metodología de enseñanza de la probabilidad, tomada de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986; 1997). Con ello se quiere aumentar su conocimiento didáctico del contenido y la enseñanza (Hill, Ball, y Schilling, 2008). Para Brousseau, una situación didáctica se establece entre un grupo de alumnos y un profesor que usa un medio didáctico, incluyendo los problemas, materiales e instrumentos, con el fin específico de ayudar a sus alumnos a reconstruir un cierto conocimiento. Para lograr el aprendizaje, el alumno debe interesarse personalmente por la resolución del problema planteado. Diferencia cuatro tipos de situaciones didácticas:

- *Situación de acción:* Donde se resuelve el problema planteado, que consiste en buscar la mejor estrategia en el juego.
- *Situación de formulación-comunicación:* En la que el alumno debe poner por escrito para otra persona la solución hallada, lo que le hace usar el lenguaje matemático. En nuestro caso los participantes tratan de describir su estrategia por escrito.
- *Situación de validación:* Donde se pide a los alumnos las pruebas de que su solución es la correcta. En caso de que no sea así, el debate con los compañeros les permite descubrir los puntos erróneos. En el taller se trata de razonar por qué la estrategia da buenos resultados.
- *Institucionalización:* Tiene como fin dar un estatuto "oficial" al nuevo conocimiento aparecido, ponerse de acuerdo en la nomenclatura, formulación, propiedades, para que pueda ser usado en el trabajo posterior. En el taller, una vez realizadas varias series de jugadas se organizó un debate para llegar a un acuerdo sobre la solución correcta y reflexionar sobre lo que se ha aprendido fijando conjuntamente las soluciones correctas.

Se pretende que los participantes en el taller identifiquen estas fases en el desarrollo de la actividad vivida por ellos mismos.

Evaluación del taller

Nosotros hemos experimentado el taller con un total de 166 profesores en formación o ejercicio en cursos ofrecidos asignaturas de grado o congresos dirigidos al profesorado (Contreras, Díaz, Batanero y Ortiz, 2010) comprobando que, aproximadamente los dos tercios de los participantes propusieron estrategias incorrectas al comienzo del taller, que fueron evolucionando hacia la solución correcta en la mayoría de los casos como consecuencia de la actividad.

Con ayuda del análisis didáctico, los profesores identificaron algunas ideas fundamentales descritas por Heitele (1975): sucesos y espacio muestral, probabilidad y convergencia, operaciones combinatorias, las reglas de adición y multiplicación de probabilidades, independencia, probabilidad condicionada, variable aleatoria, equidistribución y simetría, esperanza matemática y muestreo. Aunque el número de ideas estocásticas identificadas por cada profesor fue pequeño, pensamos ello fue debido a que hubiese sido necesario un mayor tiempo para la actividad. La actividad también ayudó, de acuerdo con Batanero et al., (2004), a aumentar algunas componentes de los conocimientos profesionales:

- *Componente epistémica:* Al hacer reflexionar al futuro profesor sobre los diversos significados históricos de la probabilidad (subjetiva, frequentista y clásica) y las controversias ligadas a su definición en diferentes momentos históricos;
- *Componente cognitivo:* pues se analizaron las principales dificultades de los estudiantes con los conceptos de probabilidad condicional e independencia y los razonamientos y estrategias correctas e incorrectas para resolver el problema;
- *Componente afectivo:* experimentando nuevos métodos de enseñanza, basados en el juego, experimentación y debate, que permitió aumentar el interés de los profesores y su participación en la actividad;
- *Componente interaccional*: aumentando su experiencia sobre la forma de organizar el discurso y el tiempo didáctico y de hacer aflorar y resolver los conflictos cognitivos de los estudiantes;
- *Componente ecológico:* pues la actividad se puede conectar con el estudio de las concepciones erróneas sobre el azar (psicología) y con los problemas sociales relacionados con la adicción a los juegos de azar (sociología).

5. Reflexiones finales

Los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad. Lamentablemente, no todos los profesores no siempre reciben una buena preparación para enseñar a la probabilidad en su formación inicial. Sin embargo, actividades como la que se analizan en este trabajo pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos profesionales.

Además, los maestros pueden trabajar muchos conceptos matemáticos (como los números, porcentajes, índices, combinatoria, pruebas, etc.) con estos ejemplos.

Finalizamos recordando la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores para enseñar la probabilidad y el método adecuado en el que cada componente debe ser enseñado. Aunque ha habido un esfuerzo de investigación importante centrado en la educación matemática y en el desarrollo profesional docente en la última década (por ejemplo, Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Wood, 2008), no se han reflejado en la educación estadística. Esta es un área importante de investigación que puede contribuir a mejorar la educación estadística a nivel escolar.

Agradecimientos: este trabajo forma parte del proyecto: EDU2010-14947, MICINN-FEDER y Grupo PAI FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education,* 51, 241-247.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO,* 59, 9-17.

Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training teachers to teach probability. *Chilean Journal of Statistics, 3*(1), en prensa.

Batanero, C., Fernándes, J. A. y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *SUMA*, 62, 11-18.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12* (1). On line: www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématique, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990.* Dordrecht: Kluwer.

Campos, T., Cazorla, I. y Kataoka, V. (2011). Statistics school curricula in Brazil. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 5-8). New York: Springer.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (En prensa). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon*.

Contreras, J. M. Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2011). O dilema dos prisioneiros: valor de o paradoxos na clase da matemáticas. *Gamma, 11, 91-96.*

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educaçao Matemática e Pesquisa*, *12* (2), 181-198.

Even, R. y Ball, D. (2008) (Eds.). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

Falk, R. y Konold, C. (1992). The pshycology of learning probability. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fernández, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, Número monográfico. "As novas tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática", *XVIII* (1-2), 161-183.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). *The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility*. In G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones, 38,* 25-48.

Godino, J. D., Ortiz, J. J., C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Models for statistical pedagogical knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching* *statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 271-282). New York: Springer.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Hill H. C., Ball D. L., Schilling S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). *Assessing teachers' mathematical knowledge.* In F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher educators and researchers as co-learners. En L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht: Kluwer.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics 8*, 96-100.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, *87*(4), 232-235.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics, 20*(1), 10-12.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 283-301.

MEC (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

MEC (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C.

Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: Past, present and future (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Shulman, L. S. (1986a). Paradigm and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4 - 14.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.

Székely, G. J. (1986). Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics. Dordrech: Reidel.

Truran, J. M. y Truran, K. M. (1997). Statistical independence: One concept or two? En B. Phillips (Ed.), *Papers from statistical education presented at ICME 8* (pp. 87–100). Swinburne University of Technology.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*.

Rotterdam: Sense Publishers.