Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad

Carmen Batanero, José M. Contreras, Gustavo R. Cañadas, M. Madgalena Gea.
email: batanero@ugr.es; jmcontreras@ugr.es; grcanadas@ugr.es; mmgea@ugr.es;
Novedades Educativas, 261, 78-84

En este trabajo reflexionamos sobre el interés de las paradojas para organizar situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas. Un caso particularmente relevante es la probabilidad, pues en su desarrollo histórico aparecen numerosas paradojas que se reproducen, a veces, en las intuiciones erróneas de los estudiantes. Analizamos una de estas paradojas, el dilema de los tres prisioneros, mostrando los contenidos de probabilidad que pueden emplearse al trabajar con la misma y los posibles razonamientos erróneos de los estudiantes.

1. Introducción

Una de las tareas fundamentales del profesor es localizar recursos didácticos de interés para la enseñanza de la materia que imparte y que le permita motivar a sus estudiantes. Estos recursos son especialmente importantes en la clase de matemáticas, donde la abstracción de los temas o las ideas contra intuitivas que, a veces, presentan los estudiantes plantean un reto didáctico para los profesores.

Es por ello que el profesor de matemáticas requiere una gama muy variada de conocimiento y experiencia, que Ball, Lubienski y Mewborn (2001) denominan *conocimiento matemático para la enseñanza*, y que incluye, el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden cada contenido, conocimiento del currículo y de las estrategias instruccionales.

El objetivo de este trabajo es contribuir a reforzar este conocimiento del profesor, con unas reflexiones sobre el valor de las paradojas en la clase de matemáticas y el análisis detallado de un ejemplo, que puede utilizarse en la clase de probabilidad, tema en que con frecuencia aparecen situaciones aparentemente paradójicas para los estudiantes, que pueden ser retomadas por el profesor para transformarlas en recurso didáctico.

2. Los contenidos de probabilidad en el currículo español

El currículo español vigente potencia la enseñanza de la probabilidad. La principal novedad es su presencia explícita a lo largo de todos los niveles educativos y cursos desde los 6 años (MEC, 2006).

Podemos incluso ubicar el inicio de la enseñanza de la aleatoriedad desde segundo ciclo de Educación infantil (4-5 años), en el área de conocimiento del entorno, donde se pretende desarrollar, entre otras, la capacidad de interpretar situaciones y hechos significativos mostrando interés por su conocimiento así como la iniciación en las habilidades matemáticas (MEC, 2007a). A modo de ejemplo, cabe citar el desarrollo del currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía donde se considera relevante que los niños y las niñas se enfrenten a situaciones con interrogantes o incógnitas cuya resolución exige la reflexión sobre ellas y la aplicación de esquemas de pensamiento. Para ello se plantea la necesidad de la recogida de datos, la organización de los mismos y la reflexión sobre los resultados obtenidos donde se pueda discernir, desde una terminología cercana y comprensible, “si una situación es probable o improbable.” (Consejería de Educación, 2008a, p.33).

Ya en la Educación Primaria (6-11 años), dentro del Bloque *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* del área de Matemáticas se incluyen, en el primer ciclo (6-7 años) las ideas de azar y probabilidad, el carácter aleatorio de algunas experiencias, la distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y la utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad. Se continúa en segundo ciclo (8-9 años) con la valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto e introducción al lenguaje del azar. Se completa en tercer ciclo (10-11 años) con la estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Estos contenidos se continúan en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-15 años; MEC, 2007b), donde se refuerza el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y estimación de las mismas mediante simulación y experimentación; diagramas de caja, fases de un estudio estadístico, experiencias compuestas, uso de tablas de contingencia y diagrama en árbol en el cálculo de probabilidad compuesta y condicionada en cuarto curso.

Las orientaciones metodológicas incluidas en los Decretos de Enseñanzas Mínimas insisten en conectar la Estadística con la vida cotidiana y realizar actividades que impliquen otras áreas de conocimiento. Desde la Educación Primaria (MEC, 2006) se sugiere enfatizar el aspecto interpretativo, incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, dando especial importancia a los contenidos actitudinales.

Se indica, que abordando contextos funcionales se producirá en el alumno un aprendizaje progresivo hacia conocimientos más complejos partiendo de sus experiencias y conocimientos previos. Es por ello que los nuevos conocimientos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria se abordarán preferiblemente desde situaciones intuitivas y cercanas al alumno que permitan retomar los contenidos introducidos en la etapa precedente desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad, todo ello de forma gradual y cíclica (MEC, 2007b).

Se da también importancia a las experiencias aleatorias y las predicciones sobre las mismas, que deben ser revisadas a la luz de los datos. Mediante juegos y actividades variables el alumno podrá explorar los conceptos de azar y determinismo. Como herramienta para ayudar a ir construyendo intuiciones sobre la probabilidad se recomienda el uso del diagrama en árbol. Se recomienda también el uso de la tecnología para evitar cálculos rutinarios. Recomiendan además reforzar las intuiciones de los estudiantes y su razonamiento probabilístico, por lo que sería importante proporcionar a los profesores actividades que les sirvan para motivar a sus alumnos y ayudarles a enfrentarse con algunas de sus intuiciones erróneas, al tiempo que les aporten información sobre las posibles dificultades de los alumnos (Stohl, 2005).

En cuanto a la enseñanza en Bachillerato (16-17 años, MEC, 2007c), en la asignatura *Matemáticas I, modalidad de Ciencias y Tecnología*, se incluyen la probabilidad condicional y teorema de Bayes, distribuciones binomial y normal. Estos contenidos se tratan de modo más amplios en la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*, en la *modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales*. Además en la asignatura *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II*, en dicha modalidad, se profundiza en la probabilidad condicionada y Teorema de Bayes y se introduce el Teorema Central del límite, las distribuciones muestrales de las medias y proporciones, los intervalos de confianza y el contraste de hipótesis para medias y proporciones.

Basándonos en estas orientaciones curriculares y en las sugerencias sobre el uso de diversos contextos (no sólo juegos de azar), sugerimos la presentación de paradojas relacionadas con la toma de decisión y previsión a los estudiantes de últimos años de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato dado que favorecen el estudio de situaciones similares a problemas a los que tendrán que enfrentarse a lo largo de la vida. En lo que sigue analizamos las características de las paradojas como recurso didáctico.

3. Valor didáctico de las paradojas en la clase de matemáticas

Son varios los autores que justifican el interés de utilizar paradojas sencillas para plantear situaciones motivadoras en el aula que puedan beneficiar el desarrollo de la motivación y meta cognición de los estudiantes y hacerles descubrir conexiones entre la historia y la vida cotidiana. Una paradoja es un resultado o idea que, aparentemente, es opuesta a la opinión general, porque lleva implícita una contradicción lógica que, a primera vista, no se percibe. Una vez resuelta, generalmente se produce un aprendizaje, bien de un concepto que no se conocía o de una relación entre conceptos que aparecía oculta en el problema.

Lesser (1998) indica que el uso inteligente de paradojas en la clase de matemáticas apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje.

Falk y Konold (1992) afirman que el análisis de paradojas requiere, por parte del que analiza, una conciencia de sus propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador al obtener resultados sorprendentes en la resolución de paradojas, que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente.

En el caso particular de la probabilidad no es difícil encontrar ejemplos sencillos de tareas con soluciones contra-intuitivas, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña. La construcción de la teoría de la probabilidad ha sido lenta, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de la misma (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Estos problemas fueron resueltos, en su mayoría, mediante un cambio de punto de vista sobre la situación dada y en general, implicaban la introducción de nuevos conceptos. Muchas de estas paradojas se describen en el libro de Székely (1986) y permiten crear situaciones de aprendizaje donde se fomente la reflexión de los alumnos sobre sus propias intuiciones incorrectas.

Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo. Si el profesor de matemáticas, que debe enseñar probabilidad a sus alumnos, no es consciente de esta problemática, difícilmente podrá comprender algunas dificultades de sus estudiantes, quienes encuentran a lo largo de su aprendizaje las mismas paradojas y situaciones contraintuivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades. Aunque las teorías constructivistas sugieren la necesidad de que el alumno sea protagonista de su propio aprendizaje, el profesor debe guiar al alumno a lo largo de este proceso ayudándole a superar los obstáculos que se les puede presentar y proporcionándoles las herramientas necesarias para crecer en su comprensión de la probabilidad.

Los estudiantes se pueden beneficiar al desarrollar su motivación y meta-cognición, descubriendo las conexiones entre la historia y la vida cotidiana. Esto es importante, pues en los documentos curriculares españoles se incluye el componente histórico como bloque transversal en el currículo de matemáticas, tanto en la educación secundaria obligatoria como en el bachillerato (Consejería de Educación, 2007; 2008).

En lo que sigue describimos el dilema de los tres prisioneros, mostrando una posible solución correcta y analizando los contenidos matemáticos que se trabajan en la solución de esta paradoja. Mostramos también algunas formulaciones diferentes y posibles soluciones a las mismas. Analizamos las posibles dificultades de los estudiantes al trabajar con este problema y finalizamos con algunas implicaciones didácticas.

4. Un ejemplo de probabilidad: El dilema de los prisioneros

Esta paradoja es una variante de la conocida como *paradoja de la caja de Bertrand,* formulada por Joseph Bertrand (1822-1900), matemático francés del siglo XIX, que trabajó entre otros temas la teoría de probabilidades. En su libro "*Cálcul des probabilités*" (Bertrand, 1889), describe el siguiente problema, hoy conocido como la "Paradoja de la caja de Bertrand", una de cuyas posibles formulaciones es la siguiente:

Tenemos tres cajas y cada caja tiene dos cajones con una moneda cada una: una caja contiene dos monedas de oro, otra caja dos monedas de plata, y la caja final con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma un cajón al azar, y resulta por ejemplo que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

El "dilema del prisionero" fue propuesto por Hardin (1968). Uno de los enunciados más conocidos es el siguiente:

Tres prisioneros esperan encarcelados su juicio. Se les informa que a uno de ellos se les condenará a muerte y que a los otros dos se les liberará. Cuando cada prisionero piensa en las posibilidades que tiene de salvarse, el juez informa al primer prisionero que el tercero será liberado, preguntándole si quiere intercambiar su suerte con el segundo. ¿Qué debe hacer el prisionero?

La paradoja se produce porque, cuando se propone este problema a los estudiantes, la mayoría forma el espacio muestral de sucesos asociado a este experimento sin considerar la información proporcionada por el juez, que afecta a las probabilidades. Si no se conoce que el tercer prisionero se salva, e indicando los prisioneros con las letras *A*, *B* y *V*, las posibilidades de vida y muerte de los prisioneros serían las indicadas en la Tabla 1, por lo que intuitivamente se piensa que la probabilidad de que el prisionero *A* muera es de 1/3 ya que sólo moriría en el supuesto 1.

Tabla 1. Supuestos posibles en el dilema de los tres prisioneros

	Prisionero *A*	Prisionero *B*	Prisionero *C*
Supuesto 1	Muere	Libre	Libre
Supuesto 2	Libre	Muere	Libre
Supuesto 3	Libre	Libre	Muere

Una vez el juez informa al prisionero *A* que el prisionero *C* se salva, aparentemente sólo quedan dos supuestos (1 y 2), por lo que la respuesta más usual sería asignar a *A* y *B* la misma probabilidad (1/2) de morir, y pensar que al prisionero *A* no le merece la pena intercambiar su suerte con la de *B*. Sin embargo, este razonamiento es incorrecto.

4.1. Solución correcta y contenidos matemáticos utilizados

Una solución correcta se obtendría comparando las probabilidades de que mueran *A* y *B*, sabiendo que se salva *C*. Sean *MA*, *MB* y *MC* los sucesos de que mueran, respectivamente *A*, *B* y *C* y *SA*, *SB* y *SC* los sucesos consistentes en que se salven. Para calcular $P(MA|SC)$ habría que aplicar la fórmula de la probabilidad condicional, es decir: $P(MA|SC)=\frac{P(MA\cap SC)}{P(SC)}$.

Como sabemos que *C* se salva, $P(SC)=1$,y la probabilidad pedida es igual a la del numerador, $P(MA\cap SC)$. Utilizando la fórmula de la probabilidad compuesta: $P(MA\cap SC)=P(MA)\times P(SC|MA)$.

Al salvarse siempre *C*: $P(SC|MA)=P(SC)=1$, por tanto, $P(MA\cap SC)=P(MA)=1/3$, de donde:

$$P(MA|SC)=\frac{P(MA\cap SC)}{P(SC)}=\frac{1/3}{1}=1/3$$

La probabilidad de que muera *B*, conociendo que se salva *C*, sería la complementaria de la anterior, pues sabemos que o bien el segundo o el tercero han de morir, por lo que dicha probabilidad sería: $P(MB|SC)=1-P(MC|SC)=2/3$.Luego al primer prisionero no le conviene intercambiar su suerte con el segundo, ya que así tendría el doble de posibilidades de morir, lo cual es paradójico.

En el trabajo en el aula con esta paradoja se usarán implícita o explícitamente los siguientes objetos matemáticos (en la clasificación de Godino, Font y Wilhelmi, 2008):

- *Lenguaje matemático:* Se utilizan expresiones verbales y numéricas de las probabilidades de los sucesos implicados, así como lenguaje simbólico para calcular dichas probabilidades. Podría también utilizarse un diagrama en árbol para visualizar la situación.
- *Conceptos*: En esta paradoja los alumnos trabajan la idea de experimento aleatorio, suceso, suceso simple y compuesto, complementario de un suceso, espacio muestral, probabilidad simple, compuesta y condicional, dependencia e independencia.
- *Propiedades:* Algunas propiedades que aparecen en la resolución de estos problemas son la diferencia entre probabilidad condicionada y simple, la relación entre probabilidad condicionada, conjunta y simple, la relación entre la probabilidad de un suceso y la de su complementario, así como las reglas de la unión y del producto.
- *Procedimientos:* Algunos procedimientos que podemos encontrar en la resolución de estas paradojas son el cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionadas. También se podría utilizar un diagrama en árbol para representar el espacio muestral y los pasos en la solución.
- *Argumentos:* La actividad permite usar el razonamiento deductivo y la realización de conjeturas y refutaciones.

También podemos observar los siguientes procesos matemáticos (Godino, Font y Wilhelmi, 2008):

1. *Procesos de materialización - idealización* (pasar de algo que se percibe a algo que no se percibe). Por ejemplo, los prisioneros y situación de supervivencia a los que hacen referencia la paradoja son objetos imaginarios, que podemos materializar, si por ejemplo, llevamos a cabo una simulación del experimento o incluso con la notación elegida.
2. *Procesos de particularización – generalización:* Es cuando pasamos de un caso particular a uno general, generalizando a una propiedad de un conjunto o viceversa. Por ejemplo, sabemos que la suma total de todas las probabilidades de los sucesos en un experimento es la unidad. En el trabajo con este problema podemos particularizar esta propiedad que es general y así llegar a las probabilidades de los sucesos dados. Así sabemos que la suma de la probabilidad de supervivencia y muerte ha de ser una en cada caso sin tener que calcularla.
3. *Procesos de representación – significación.* Los procesos de representación y significación aparecen continuamente en el trabajo matemático, pues como no podemos operar directamente con objetos ideales, representamos las operaciones sobre los mismos por medio de símbolos u otros objetos. Por ejemplo, el objeto "probabilidad" lo representamos por la letra P; la probabilidad de un suceso que denominamos A lo representamos mediante $P(A)$.
4. *Procesos de descomposición – reificación:* El alumno que trata de resolver el problema tiene que pasar constantemente de considerar objetos elementales (unitarios) a considerar objetos compuestos de varios objetos elementales (sistémico): por ejemplo, cada suceso de un experimento aleatorio es elemental, pero el espacio muestral del experimento es sistémico.

4.2. Otras formulaciones del problema

Son muchas las formulaciones de este problema y, a veces, pequeños cambios, influyen en la solución. Una versión de Gardner (1959) es la siguiente, de enunciado muy similar al problema de Monty Hall (Batanero, Fernandes y Contreras, 2009).

Tres prisioneros, A, B y C han sido condenados a muerte. El gobernador ha seleccionado uno de ellos al azar para ser perdonado. El prisionero A pide al gobernador: "Si B es el perdonado, dame el nombre de C. Si C es el perdonado, dame el nombre de B, y si voy a ser perdonado, lanza una moneda para decidir si dar el nombre de B o C".
El juez le dice a A que B se va a ser ejecutado. A se alegra, creyendo que, tanto su probabilidad de supervivencia, como la de C han aumentado de 1/3 a1 1/2. El prisionero A comunica a C la noticia. Pero C razona que A todavía tiene una posibilidad de 1/3 de ser el perdonado, y en cambio su probabilidad (la de C) es ahora 2/3. ¿Quién tiene razón?

Como vemos, esta formulación es ligeramente diferente, pues en este caso, son dos los prisioneros que mueren. Al igual que en la primera versión, sean SA, SB y SC los sucesos consistente en que se salven, respectivamente A, B y C; y MA, MB y MC que el gobernador informe que muere el correspondiente. Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(SA/MB)=\frac{P(SA\cap MB)}{P(MB)}=\frac{P(MB/SA)P(SA)}{P(MB/SA)P(SA)+P(MB/SB)P(SB)+P(MB/SC)P(SC)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

En consecuencia con la información dada por el juez, *A* tiene ahora una probabilidad de salvarse igual a 1/3, mientras que *C* tiene una probabilidad de 2/3, al ser las dos probabilidades complementarias. Por tanto *C* tiene razón.

Otra variante del problema de los prisioneros es la proporcionada por Arriojas (2004):

Tres prisioneros A, B y C, saben que dos de ellos serán liberados. Puesto que no se tiene ningún criterio para decidir quién es liberado, A pide al juez el nombre de uno de los prisioneros (distinto de él mismo), a ser liberado. El juez se niega con el siguiente argumento: "En este momento tu probabilidad de ser liberado es de 2/3. Sin embargo, si te digo el nombre de uno de los prisioneros que será liberado tu probabilidad de salir libre se reducirá a 1/2. Como no quiero perjudicarte no te diré nada". ¿Tiene razón el juez?

El cambio de este enunciado respecto a los anteriores, consiste en que estamos pensando en qué ocurriría, antes de saber el nombre de uno de los prisioneros liberados, mientras que en las formulaciones anteriores conocíamos este nombre. Para analizar esta nueva situación, utilizamos de nuevo la misma notación: *MA, MB* y *MC* para designar los sucesos de que mueran, respectivamente *A*, *B* y *C* y *SA*, *SB* y *SC* los sucesos consistentes en que se salven. El espacio muestral del experimento descrito en el enunciado tiene tres resultados posibles:{(*SA*, *SB*), (*SA*, *SC*), (*SB*, *SC*)}. Como asumimos que los prisioneros liberados se escogen al azar, en ausencia de información, cada uno de estos posibles resultados debe tener la misma posibilidad de ocurrir y, por tanto, la probabilidad de que quede libre el prisionero *A*, en ausencia de información, es igual a 2/3.

Sea *A* el prisionero que hace la pregunta. Para tener en cuenta la información dada por el juez, debemos considerar un experimento compuesto de dos: (a) la pareja de presos liberada; y (b) la información que daría el juez. Por tanto tendremos cuatro posibles sucesos:

O_1 = {(SA, SB), *el juez informa a A que B será liberado*}

O_2 = {(SA, SC), *el juez informa a A que C será liberado*}

O_3 = {(SB, SC), *el juez informa a A que B será liberado*}

O_4 = {(SB, SC), *el juez informa a A que C será liberado*}

Observamos que *A* es liberado si ocurre $O_1 u O_2$, pues el juez nunca dirá a *A* su propio nombre, mientras que si son liberados *B* y *C*, el juez dirá el nombre de *B* o *C* al azar. En consecuencia, *P*(O_1) = *P*(SA, SB)= 1/3. Análogamente *P*(O_2)=*P*(SA, SC)=1/3. Por tanto la probabilidad de que *A* sea liberado, una vez se dispone de la información del juez sigue siendo 1/3+1/3= 2/3. Por consiguiente, la información que dé el juez en el futuro no altera en este momento las posibilidades de que *A* salga libre.

4.3. Posibles dificultades en la actividad

Aunque la paradoja de los tres prisioneros y su solución es aparentemente simple, su complejidad se muestra en el análisis realizado de los objetos matemáticos y de los procesos que se utilizan, así como al ver que pequeños cambios en su formulación afectan al razonamiento correcto y requieren una solución diferente.

Es interesante resaltar que, si la pregunta efectuada por el prisionero *A* en el caso anterior hubiese sido "¿Se ejecutará al prisionero *B*?", entonces la respuesta, "Sí, *B* será ejecutado" de daría lugar a una probabilidad de 1/2 de salvarse a *A*. Pearl (1988) utilizó una variante de este ejemplo para mostrar que las actualizaciones de los grados de creencia deben depender no sólo en los hechos observados, sino también de la información a priori sobre las condiciones del experimento (en el ejemplo, la consulta que se hace).

También en la literatura relacionada con este problema se han descrito las siguientes dificultades:

Percepción de la independencia

La primera dificultad que podrían tener los estudiantes es no percibir la dependencia de los sucesivos experimentos (morir o salvarse) y (nombre dado por el informante). Es decir, o bien no se visualiza la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos como independientes, atribuyendo una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos.

A primera vista parece obvio que da igual cambiar o no, pues no se percibe la forma en que la información proporcionada afecta a la probabilidad inicial de salvarse que, sin esta información, es 1/3. Es difícil reconocer que se puede condicionar la probabilidad de un suceso, sabiendo que ocurre otro que se produce con posterioridad, pero, a pesar de ello, puede cambiar la probabilidad del suceso anterior a él. Este error de razonamiento es explicado por Falk (1986), mediante la “falacia del eje temporal” que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (información sobre un prisionero que se salva) no puede afectar a la probabilidad de un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (si el prisionero *A* había sido indultado). Sin embargo, hemos visto en las soluciones como esta información repercute sobre la probabilidad dada, lo mismo que ocurre en las pruebas diagnósticas, en que el resultado de un análisis clínico (que es posterior) afecta a la probabilidad de tener una enfermedad (anterior al análisis). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso *A* es la causa estricta de un suceso *B*, siempre que suceda *A*, sucederá *B*, por lo que $P(B/A)=1$, es decir, si un suceso *A* es causa de otro suceso *B*, entonces *A* es dependiente de *B*. Pero el contrario no siempre se cumple, según Falk (1986), pues un suceso *A* puede ser dependiente de otro suceso *B* sin que uno sea la causa del otro. Por ejemplo, se sabe que el cáncer de pulmón depende del hábito de fumar; pero fumar en sí mismo no es siempre la causa del cáncer.

Incorrecta percepción del espacio muestral

Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. La intuición nos dice que, una vez salvado al prisionero *C*, sólo quedan dos posibles sucesos, que se salve *A* y que se salve *B*. En este razonamiento se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral, pues todavía el prisionero que sabemos se salva interviene en el espacio muestral para el cálculo final de las probabilidades, y los sucesivos experimentos descritos en cada formulación. Esta dificultad de enumerar el espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada, fue descrita por Gras y Totohasina (1995) y ocurre porque hay una errónea descomposición-composición de los sucesivos espacios muéstrales en los diferentes experimentos.

5. Implicaciones para la enseñanza

En esta paradoja se muestra la influencia de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades. El azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y probabilidad, como los mostrados en la paradoja. En estas situaciones, cualquier persona ha de reaccionar a la información disponible, para tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones.

En estos contextos, la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos que nos afectan (como sería, por ejemplo, el peso, color, superficie o temperatura) sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso (que ocurrirá o no). Por ello la visión subjetiva de la probabilidad sería más apropiada que la frecuencial o clásica. Sin embargo, aunque las concepciones clásicas y frecuencial se contemplan en la enseñanza, apenas se tiene en cuenta la concepción subjetiva o los contextos en que esta concepción podría aplicarse.

La paradoja analizada sugiere la importancia de que la enseñanza de la probabilidad sirva para educar el razonamiento probabilístico necesario para enfrentarse al azar en la vida cotidiana y mejorar las intuiciones de los estudiantes. Como sostuvo Fischbein (1975) la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales, porque está influenciada por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas. La investigación en didáctica de la probabilidad muestra la prevalencia de estas intuiciones erróneas (Jones, 2005).

El estado actual de la tecnología permite las simulaciones y los experimentos, que ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos y podrían servir para explorar situaciones probabilísticas de la vida real, sin necesidad de un gran nivel de formalización.

Por supuesto que un enfoque experimental puro de la enseñanza de la probabilidad no es suficiente. Incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar la solución de problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no puede probar que esta solución es la más adecuada, porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en el ordenador. Un conocimiento genuino de probabilidad solo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque este estudio debe ser gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes. Es importante también mostrar aplicaciones que vayan más allá de la teoría de juegos; en Godino, Batanero, y Cañizares (1987) presentamos una variedad de aplicaciones reales de la probabilidad con actividades sencillas que permite introducir los conceptos de una manera gradual a lo largo de la educación obligatoria.

Autores como León (2009) indican que la historia de la probabilidad presenta situaciones muy atractivas que pueden conducir a reflexionar sobre la presencia del azar en la cotidianidad además de servir de motivación hacia el estudio por parte de los alumnos. González (2004) también señala que el uso de la historia con fines didácticos depende del conocimiento histórico del profesor y su iniciativa para adaptar este saber a los intereses y necesidades del grupo. El estudio de la historia de la probabilidad y de las paradojas asociadas a la misma será entonces un componente importante en la preparación de los profesores.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947, beca FPU-AP2009-2807, y beca FPI

BES-2011-044684 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Arriojas, M. (2004). *Teoría de las probabilidades.* Caracas: Universidad Simón Bolivar.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educaçao Matemática Pesquisa, 14*(2), 279-297

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO*, 59, 9-17.

Batanero, C., Fernandes, J. A. y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *SUMA*, 62, 11-18.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Bertrand, J. (1889). *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars et fils.

Contreras, J. M. **Batanero, C**., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). La paradoja de Simpson. SUMA, 71, 27-34

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2008a). *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía. (2008b). *ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. y Konold, C. (1992). The psychology of learning probability.En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twenty-first century,* MAA Notes 26 (pp. 151-164).Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, *1*, 180–182.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). Azar y probabilidad. *Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R., (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico, *Publicaciones*, 38, 25-48.

González, P. (2004).La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, 45, 17-28.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Hardin, G. (1968). The tragedy of commons. *Science,162*, 1243-1248.

Jones, J. (Ed.) (2005). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* New York: Springer.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, 87(4), 232-235.

León, N. (2009). La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 1, 69-88.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12.

MEC. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.* Madrid: Autor.

MEC. (2007a). *Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación infantil.* Madrid: Autor.

MEC (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*Madrid: Autor.

MEC (2007c). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*Madrid: Autor.

Pearl, J. (1988). Embracing causality in formal reasoning. *Artificial Intelligence, 35*.259-271.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and* learning (pp. 345-366). Nueva York: Springer.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics.* Dordrech: Reidel.

Currículos:

Carmen Batanero Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada. Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal.

José M. Contreras García, Nacido en Granada; profesor ayudante doctor de la universidad de Granada. Licenciado en ciencias matemáticas y Ciencias y Técnicas estadísticas, diploma de estudios avanzados en Estadística e Investigación Operativa, Máster en Didáctica de la Matemática, Máster en Estadística aplicada y Doctor en Didáctica de la Matemática. Publicaciones en didáctica de la probabilidad (email: jmcontreras@ugr.es).

Gustavo R. Cañadas, nacido en Linares (Jaén). Licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas en la Universidad de Granada, Master en Metodología por la Universidad Nacional de Educación a Distancia y Master en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Fue becado en el Plan de Formación del Profesorado Universitario para trabajar en la Universidad de Granada en la convocatoria del 2009. Ha publicado trabajos relacionados con las tablas de contingencia (email: grcanadas@ugr.es).

María Magdalena Gea, nacida en Cantoria (Almería) es Licenciada en Matemáticas (Universidad de Murcia), Licenciada en Ciencias y Técnicas Estadísticas (Universidad de Granada), posee el Máster en Estadística Aplicada (Universidad de Granada) y el Diploma de estudios avanzados (Universidad de Jaén). Su investigación se proyecta en torno a la enseñanza y aprendizaje de la asociación estadística. En la actualidad es becada por el Plan de Formación de Personal Investigador (2011) (email: mmgea@ugr.es).