

El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística

Carmen Batanero y Carmen Díaz

Universidad de Granada

En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza: ICE. ISBN: 84-7791-208-4.

“Para la mayoría de los estudiantes la estadística es un tema misterioso donde operamos con números por medio de fórmulas que no tienen sentido” (Graham, 1987, p. 5).

Introducción

En una sociedad en continuo cambio, como la que nos ha tocado vivir, hemos dejado de asombrarnos por los avances de la ciencia y la tecnología. La estadística ha jugado un papel primordial en este desarrollo, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Esta relevancia ha producido un interés creciente por la enseñanza de la estadística, como se refleja en diferentes documentos curriculares, donde se insiste en la necesidad de comenzarla lo antes posible, y, al menos, en la educación secundaria obligatoria. Se habla de proporcionar una *cultura estadística*,

“que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante” (Gal, 2002, p. 2-3).

Por ejemplo, en los recientes Principios y Estándares Curriculares del National Council of Teachers of Mathematic (NCTM, 2000) se recogen los siguientes objetivos para los niños de los niveles de 3º a 5º de primaria:

- Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.
- Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.
- Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.
- Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de datos se muestran mejor con cada una de ellas.
- Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para mejorar las conclusiones y predicciones.

Objetivos semejantes, aunque a nivel más avanzado, se incluyen para el resto de la educación primaria y educación secundaria obligatoria, en que no sólo se hace referencia a los conceptos y procedimientos, sino que se enfatiza todo el proceso de razonamiento estadístico, y el sentido de los datos.

Sin duda esta es una propuesta curricular avanzada. A una mayor variedad y cantidad de contenidos estadísticos se une también la recomendación sobre un cambio en el enfoque: Se trata de presentar el análisis exploratorio de datos, centrar la estadística sobre las aplicaciones y mostrar su utilidad a partir de áreas diversas.

Pensamos que la mejor forma de seguir estas recomendaciones es introducir en las clases de estadística el trabajo con proyectos, algunos de los cuales son planteados por el profesor y otros

escogidos libremente por los alumnos. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado.

Este recurso es ya habitual en algunos países, que incluso organizan competiciones de proyectos estadísticos en las escuelas y universidades, semejantes a lo que nosotros conocemos como Olimpiadas Matemáticas (Hawkins, 1991; Holmes, 1997). Por ejemplo, Connor, Davies y Payne (2002) indican que cada vez es más frecuente la realización de estos proyectos por los alumnos de secundaria de entre 14 y 16 años en Inglaterra y el País de Gales, debido a que en su currículo de matemáticas se contempla la realización obligatoria de proyectos. Los proyectos varían desde problemas sencillos de representación de datos, hasta la comprobación de hipótesis o el uso de la simulación.

Nosotros hemos aplicado esta filosofía de enseñanza desde hace algunos años, preparando algunos materiales (Batanero y Godino, 2001) para asignaturas de estadística aplicada que hemos impartido a alumnos de primer curso de Universidad.

Comenzaremos este capítulo presentando un ejemplo, que puede ser reproducido por los profesores de secundaria o bachillerato en sus clases de estadística. Describiremos sus objetivos, los datos y la forma en que han sido recogido, sugiriendo algunas posibles actividades que propicien la reflexión sobre los conceptos estadísticos y permitan la ejercitación de las diversas representaciones, técnicas y tipos de argumentación. Dependiendo de la edad y conocimientos previos de los alumnos, de sus intereses, tiempo disponible, el profesor puede suprimir o añadir otras actividades. Otros ejemplos pueden encontrarse en Anderson y Loynes (1987) y en Batanero (2001), en donde presentamos un curso de estadística para secundaria basado en cinco proyectos.

Seguidamente, justificaremos la importancia de contextualizar la enseñanza de la estadística alrededor de una o varias investigaciones al alcance de los alumnos, y reflexionaremos sobre las características de un buen proyecto, abordando también el problema de la evaluación. Analizaremos a continuación uno de los proyectos realizados dentro de una asignatura de introducción a la estadística por una de nuestras estudiantes, reflexionando sobre los objetivos de aprendizaje que la elaboración de este tipo de trabajos –frente a tareas específicas o rutinarias- supone para el alumno. Finalizamos con algunas implicaciones para la labor docente.

Un Proyecto Propuesto por el Profesor: Comprobar las intuiciones sobre el azar

Una de las primeras actividades que proponemos a nuestros alumnos, cuando estamos comenzando un curso de estadística, consiste en realizar un experimento para decidir si tienen buenas intuiciones respecto a los experimentos aleatorios.

El experimento consiste en averiguar si son capaces de engañar a un compañero, inventando una secuencia de caras y cruces que pueda pasar por aleatoria. El profesor reflexionará con los alumnos que el experimento aleatorio más sencillo posible es justamente lanzar una moneda equilibrada. Se propone comparar los resultados obtenidos al lanzar realmente una moneda con los inventados.

La finalidad principal es hacer reflexionar al alumno sobre el hecho de que nuestras intuiciones sobre el azar nos engañan con frecuencia. También se les quiere mostrar la utilidad de la estadística en la prueba de nuestras hipótesis o teorías (en este caso la hipótesis de que nuestras intuiciones sobre los fenómenos estocásticos son correctas).

Puesto que las variables a tratar son discretas y las actividades no introducen conceptos estadísticos complejos, el proyecto podría ser adecuado para alumnos a partir de 13-14 años, es decir, desde el comienzo de la educación secundaria.

Se sugiere empezar con preguntas similares a las siguientes y realizar en clase una discusión colectiva de las soluciones en cada paso.

1. *¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino*

como tú pienses que debieran salir) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad. O, ¿podría otra persona adivinar que estás haciendo trampa?

Los datos

Los datos son producidos como resultados del experimento que será realizado por cada uno de los alumnos de la clase. Se le proporciona a cada alumno una pauta cuadrículada, dándole la siguiente consigna:

2. *Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Abajo tienes dos cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. En la segunda mitad lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y + para cruz.*

Una vez que los alumnos han realizado el experimento tendrán diferentes resultados. Un ejemplo (obtenido realmente por uno de los alumnos) es el siguiente:

C	C	+	C	+	+	+	C	C	+	C	+	C	+	+	C	C	C	+	+
+	C	+	C	+	+	C	+	C	C	C	C	+	+	+	+	+	C	+	+

Actividades y gestión de la clase

Cuando todos los alumnos han finalizado la realización del experimento se pueden plantear preguntas similares a las que reproducimos a continuación.

3. *¿Cómo podremos distinguir una secuencia realmente aleatoria de otra que hemos inventado?*

Se dejará algún tiempo para pensar y a continuación se organiza una discusión colectiva. Es frecuente que algún alumno sugiera contar el número de caras y cruces que debe ser aproximadamente igual, ya que hay las mismas posibilidades para la cara que para la cruz.

4. *Pero, ¿hemos de obtener exactamente 10 caras y 10 cruces? ¿Qué pasa si obtenemos 11 caras y 9 cruces? ¿Y si obtenemos 18 y 2? ¿Que os parece si comparamos el número de caras en las secuencias real e inventada de todos los alumnos de la clase?*

Para realizar esta comparación se recogen los datos de todos los alumnos de la clase, tanto del número de caras en las secuencias inventadas como en las reales, para proceder, primero al análisis de cada una de estas dos variables, y luego a la comparación de las principales diferencias en su distribución. Para ejemplificar la realización de la actividad utilizaremos los resultados obtenidos en una clase de 27 alumnos, quienes obtuvieron los siguientes números de caras en las secuencias inventadas.

10, 12, 11, 10, 11, 9, 10, 11, 9, 10, 10, 10, 7, 10, 10, 10, 10, 12, 11, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 12, 11

4. *Hemos recogido el número de caras en las secuencias inventadas por cada alumno de la clase ¿Como podríamos organizar y resumir estos datos? ¿Cuáles son el valor mínimo y máximo obtenido? ¿Cómo representar los datos de modo que sepamos cuántas veces aparece cada valor? ¿Cuál es el valor más frecuente?*

El profesor ayudaría a los chicos a identificar el valor máximo y mínimo y a organizar un recuento y tabla de frecuencias como la Tabla 1, haciéndoles ver su utilidad para resumir la

información. Para chicos mayores se podría agregar las columnas de frecuencias relativas y frecuencias acumuladas.

Tabla 1. Número de caras en las secuencias inventadas

Número de caras	Recuento	Frecuencia
7	x	1
8		0
9	xxxx	4
10	xxxxxxxxxxxxxxxx	14
11	xxxxx	5
12	xxx	3
Total		27

Figura 1. Número de caras en secuencias inventadas. Gráfico de puntos

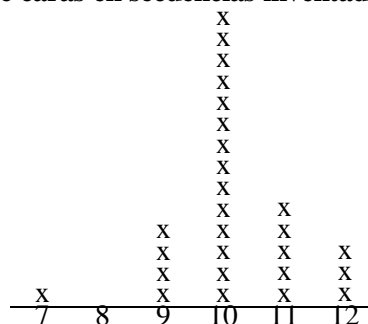


Figura 2. Gráfico de barras

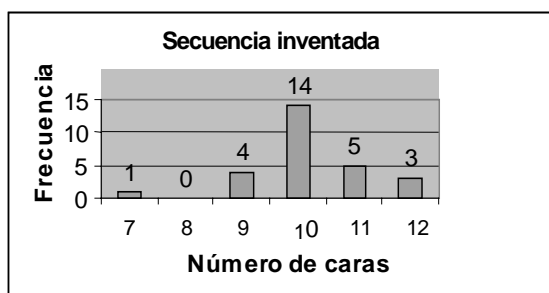
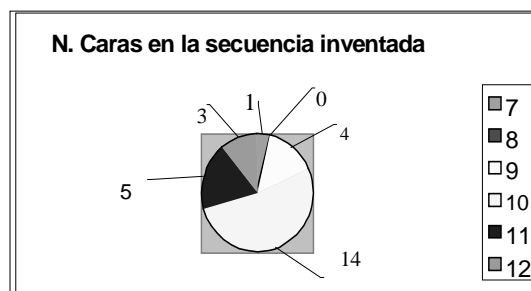


Figura 3. Gráfico de sectores



El gráfico de puntos (Figura 1) es muy sencillo de construir con ayuda de un papel cuadrulado y puede ser un paso previo a la introducción del gráfico de barras (Figura 2) y gráfico de sectores (Figura 3), que en este ejemplo se han elaborado con la hoja Excel, aunque podrían también realizarse a mano con ayuda de instrumentos de dibujo adecuados.

Mientras en los dos primeros gráficos se visualiza mejor el carácter numérico de la variable, la moda, la dispersión y la forma de la distribución, en el gráfico de sectores se percibe mejor la importancia relativa de cada valor respecto al conjunto de datos. Puede mostrarse también como una aplicación en el tema de las fracciones y servir para introducir o repasar los conceptos de sector circular y amplitud del mismo, así como de aplicación en el tema de la proporcionalidad. Si no se dispone de ordenadores, el profesor podría dividir la clase en equipos, de modo que cada uno de ellos elaborase uno de los gráficos. Posteriormente se fotocopiarían para todos los equipos para que se pudieran utilizar en la obtención de conclusiones.

De igual manera se realizaría el estudio del número de caras en las secuencias reales, para finalmente comparar las dos distribuciones y analizar si existen algunas diferencias importantes que indiquen que nuestra intuición respecto a la aleatoriedad nos engaña. En nuestra clase hemos obtenido los siguientes valores:

11, 11, 11, 8, 7, 8, 9, 11, 10, 9, 9, 9, 9, 14, 7, 10, 9, 10, 11, 13, 11, 8, 8, 11, 12, 9, 8

5. Compara ahora los gráficos del número de caras en las secuencias reales e inventadas. ¿En qué se parecen? ¿En que se diferencian? ¿Es el valor más frecuente el mismo? ¿Hay el mismo rango de variación de valores? ¿Cuál de las dos variables tiene mayor variabilidad? ¿Piensas que nuestras intuiciones sobre el número de caras que se obtienen al lanzar 20 veces una moneda equilibrada son totalmente correctas? ¿Podrías idear algún tipo de gráfico en que se viesan más claramente las diferencias?

Una característica del número de caras en una secuencia real es que, en general, es más variable de lo que nuestra intuición nos sugiere, mientras que los valores medios coinciden, aproximadamente, en ambas distribuciones, ya que somos muy exactos al reflejar la equiprobabilidad de resultados, incluso más exactos de lo debido, puesto que la secuencia inventada tiene menos dispersión que la real.

En el ejemplo de nuestra clase, hemos obtenido una distribución *bimodal* (Figura 4) lo cual sugiere la necesidad de introducir aquí las ideas de media ($\bar{x}=10,14$ para las secuencias inventadas, $\bar{x}=9,74$ para las reales en nuestro ejemplo).

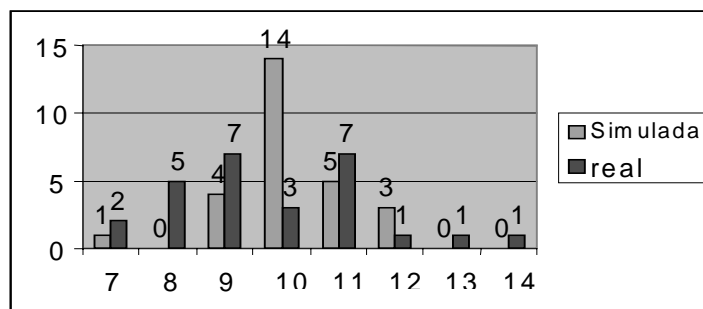
También surge en esta actividad la idea de dispersión de una forma sencilla. Bien a través del recorrido, o del 50 % de casos centrales, se observa mayor dispersión en la secuencia real, donde el 50% de los casos centrales se presentan en el intervalo (9-11) y el recorrido es 7, mientras que en la secuencia simulada el 50% de casos centrales se reduce al valor 10 y el recorrido es 5. Es conveniente llevar a los alumnos a realizar gráficos simultáneos para las dos distribuciones, como el presentado en la Figura 4 o el gráfico de barras adosado (Figura 5).

El número de caras es sólo una de las variables que podemos analizar en una secuencia de resultados aleatorios, en la que aparecen otros muchos modelos probabilísticos. Uno de ellos es la longitud de las rachas que, intuitivamente esperamos que sean cortas. Es bien conocida la *falacia del jugador* por la que esperamos que, tras una corta racha de, por ejemplo, caras, la probabilidad de que aparezca una cruz aumente. En otro plano, si un matrimonio tiene ya dos hijos varones, tendrá una gran seguridad en que el siguiente sea una niña, sin darse cuenta que no es demasiado raro (1 caso de cada ocho) los matrimonios con tres varones ni de que, de los matrimonios que ya tienen dos varones, aproximadamente la mitad de los que tengan un nuevo hijo, deben esperar que sea varón, exactamente lo mismo que cuando esperaban a su hijo mayor.

Figura 4. Comparación del número de caras en secuencias reales e inventadas

<i>Secuencia inventada</i>	<i>N. Caras</i>	<i>Secuencia real</i>
X	7	XX
	8	XXXXX
XXXX	9	XXXXXXXX
XXXXXXXXXXXXXXXXXX	10	XXX
XXXXX	11	XXXXXXXX
XXX	12	X
	13	X
	14	X

Figura 5. Gráficos de barras adosados del número de caras en secuencias reales y simuladas



En este proyecto proponemos analizar dos nuevas variables en las secuencias producidas por los alumnos: el número de rachas y la longitud de la racha más larga. Para aclarar el lenguaje, llamaremos racha a una secuencia de resultados iguales, de modo que, si después de una cara aparece una cruz (o viceversa) la racha tiene longitud 1. Para clarificar la idea de racha volvemos al ejemplo inicial y coloreamos las rachas que aparecen. Vemos que en la secuencia simulada, la racha más larga es de longitud 3 (3 caras) y que el número de rachas es 12, mientras que en la secuencia real hay una racha de 5 cruces y el número de rachas es 11.

C	C	+	C	+	+	+	C	C	+	C	+	C	+	+	C	C	C	+	+
+	C	+	C	+	+	C	C	+	C	C	C	+	+	+	+	+	C	+	+

Para motivar el estudio de estas variables, el profesor puede preguntar si el resultado obtenido arriba, donde aparecen 5 cruces seguidas, parece razonable. Probablemente algún alumno sugiera que la moneda utilizada no está bien construida y se plantee el estudio de las rachas en las secuencias.

El profesor explicará cómo identificar las rachas y sugerirá a los alumnos que busquen cuál es la racha más larga en cada una de sus dos secuencias, así como que cuenten el número de rachas, procediendo de nuevo al estudio y comparación de estas variables en las dos secuencias, tal y como se ha hecho con el número de caras y finalizando con una discusión sobre sus diferencias y si nuestras intuiciones sobre las rachas son o no correctas.

El profesor puede usar una hoja de registro como la que reproducimos a continuación (Figura 6) donde cada alumno anota sus resultados. Luego la hoja se fotocopia y se reparte a los chicos. Si hay poco tiempo, la clase puede dividirse en grupos para que cada uno de ellos se encargue de analizar una de las variables y posteriormente, una vez disponibles los gráficos se realiza la discusión conjunta.

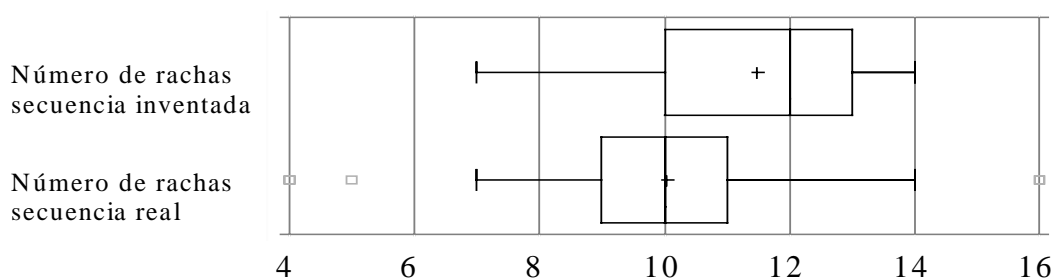
Tabla 2. Hoja de recogida de datos de la clase

Secuencia simulada			Secuencia real		
N. caras	N. rachas	Racha mayor	N. caras	N. rachas	Racha mayor
10	14	4	11	9	4
12	9	4	11	16	2
11	12	4	11	16	2
10	9	4	8	9	4
11	11	3	7	11	4
9	13	3	8	10	5
10	12	3	9	9	4
11	14	3	11	4	7
9	13	3	10	12	3
10	8	5	9	9	5
10	12	3	9	10	5
10	12	3	9	10	5
7	10	6	9	10	5
10	11	3	14	11	5
10	13	4	7	7	5
10	11	3	10	10	3
10	12	4	9	12	3
12	10	4	10	11	4
11	12	4	11	14	3
10	13	3	13	12	4
9	7	3	11	5	4
10	13	3	8	11	5
10	11	4	8	10	7
9	14	3	11	11	4

10	7	2	12	4	4
12	13	3	9	10	5
11	14	3	8	8	5

Con alumnos mayores, puede ampliarse el tipo de gráficos y resúmenes estadísticos utilizables para comparar las distribuciones. Podríamos, por ejemplo, calcular las medianas y cuartiles de las diferentes variables y construir gráficos de cajas paralelos para cada par de variables a comparar. En la Figura 7 mostramos los gráficos de caja de la longitud de la racha mayor en las dos secuencias, donde se observa cómo la media, mediana y cuartiles de la variable es menor en la secuencia real. Asimismo, el 50 % central de valores está por debajo, lo que nos indica que esperamos demasiadas rachas en una secuencia aleatoria. La menor dispersión nos indica que en esto somos menos variables de lo que ocurre en la realidad.

Figura 6. Gráficos de cajas paralelos



Algunas dificultades y errores previsibles

Los alumnos podrían tener dificultades en la realización de los gráficos, construyendo, por ejemplo, unas escalas no homogéneas u omitiendo las escalas o etiquetas que identifiquen claramente el propósito del gráfico. Es importante concienciar a los alumnos de que un gráfico mal construido proporciona una información engañosa. Una actividad complementaria podría ser buscar ejemplos en la prensa de tablas estadísticas o gráficos que presenten errores de construcción o que induzcan a obtener conclusiones equivocadas y posteriormente elaborar una lista de los principales tipos de errores detectados.

Al calcular la media a partir de la tabla de frecuencias, los alumnos podría omitir el ponderar los valores de la variables por las frecuencias, ya que los alumnos tienen con frecuencia dificultad en el cálculo de medias ponderadas. Pueden plantearseles problemas como el siguiente, para hacerles ver la necesidad de ponderación:

Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

Los alumnos tienen a veces dificultades en comprender la idea de mediana; sugerimos el cálculo de la mediana a partir del conjunto de datos ordenados y pasar a los algoritmos de cálculo sólo cuando el alumno ha comprendido bien el significado del concepto.

Análisis del contenido estadístico

Mientras que en los problemas y ejercicios “tradicionales” nos concentramos cada vez en un sólo concepto, propiedad o capacidad, en un proyecto se suelen trabajar bastantes contenidos. Nosotros hemos presentado aquí una posible secuenciación del proyecto, que, por su carácter abierto, podría haber tenido una resolución diferente por algunos de los alumnos. Además, aquí hemos presentado sólo un resumen del posible trabajo, ya que se podrían repetir los cálculos o gráficos con otras variables.

Sin embargo, es interesante analizar los contenidos que los alumnos trabajan implícita o implícitamente desarrollando el trabajo en la forma descrita, que son los siguientes:

1. *Aplicaciones de la estadística:* Diseño de un experimento; análisis de datos experimentales;

- comparación de datos experimentales con patrones teóricos.
2. *Conceptos y propiedades:* Aleatoriedad: experimento aleatorio; secuencia de resultados aleatorios, sucesos equiprobables, independencia de ensayos, rachas; variable estadística discreta, frecuencia absoluta; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias; posición central, moda, media, mediana; dispersión: rango, casos centrales, 50% de casos centrales.
 3. *Notaciones y representaciones:* Palabras como frecuencia, media, mediana, moda, recorrido, etc. Símbolos como \bar{x} , Me, Mo; tablas de frecuencia; gráficos de puntos, barras, barras adosados, sectores, cajas.
 4. *Técnicas y procedimientos:* Diseño de un experimento; generación de hipótesis y conjeturas; recogida y registro de datos experimentales; elaboración de tablas de frecuencias; recuento y cálculo de frecuencia, elaboración de gráficos de puntos, diagramas de barras, diagramas de barras adosados y gráficos de sectores; Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos; elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en un experimento; uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico.
 5. *Actitudes:* Reflexión sobre las propias intuiciones incorrectas en relación a los experimentos aleatorios; valoración de la utilidad de la estadística para analizar datos obtenidos mediante experimentación; valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos.

Además, el razonamiento estadístico es una componente esencial del desarrollo del proyecto. Este tipo de razonamiento, incluye según (Wild & Pfannkuch, 1999) cinco componentes fundamentales:

- Reconocer la necesidad de los datos: La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.
- Transnumeración: Los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que “captura” las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.
- Percepción de la variabilidad. La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variabilidad que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variabilidad no explicada. El razonamiento estadístico comienza al percibir la variabilidad de la situación y permite adoptar estrategias en cada paso de la investigación. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones, hallar causas y aprender del contexto. Se buscan y caracterizan los patrones en los datos para comprenderlos.
- Razonamiento con modelos estadísticos. Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos.
- Integración de la estadística y el contexto: Es también un componente esencial del razonamiento estadístico.

¿Por qué una Estadística Basada en Proyectos?

Una vez presentado y analizado un proyecto, desarrollaremos las principales razones que aconsejan su inclusión en las clases de estadística. La primera es que, como señalan Anderson y Loynes (1987), la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística. La historia de la

estadística muestra también como ésta recibe ideas y aportes desde áreas muy diversas, donde, al tratar de resolver problemas diversos (transmisión de caracteres hereditarios, medida de la inteligencia, etc.) se han creado conceptos y métodos estadísticos de uso general (correlación, análisis factorial).

Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como preparar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado). Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos. Al trabajar con proyectos se coloca a los alumnos en la posición de tener que pensar en preguntas como las siguientes (Graham, 1987):

- ¿Cuál es mi problema?
- ¿Necesito datos? ¿Cuáles?
- ¿Cómo puedo obtenerlos?
- ¿Qué significa este resultado en la práctica?

Los proyectos estadísticos aumentan la motivación de los estudiantes. No hay nada que haga más odiosa la estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno calcular la media o ajustar una recta de regresión a un conjunto de números. No hay que olvidar que la estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto. La principal característica de un curso basado en proyectos es que el énfasis se da a las tareas, que, al menos aproximadamente, deben ser realistas. Como sugiere Holmes (1997) si los estudiantes trabajan la estadística por medio de proyectos se consiguen varios puntos positivos:

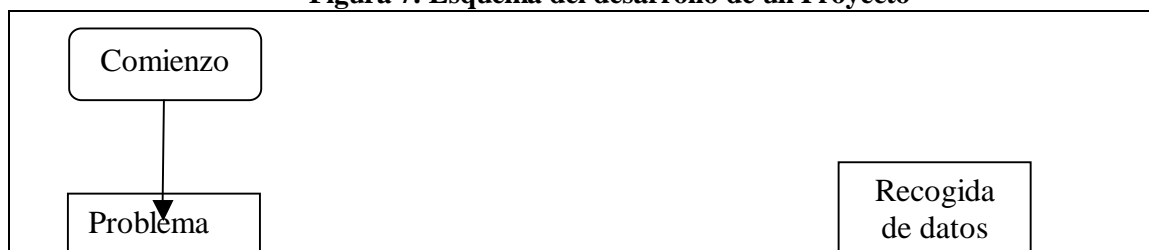
- Los proyectos permiten contextualizar la estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y tienen que ser interpretados.
- Los proyectos refuerzan el interés, sobre todo si es el alumno el que elige el tema. El alumno *quiere* resolver el problema, no es impuesto por el profesor.
- Se aprende mejor qué son los datos reales, y se introducen ideas que no aparecen con los “datos inventados por el profesor”: precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo.
- Se muestra que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

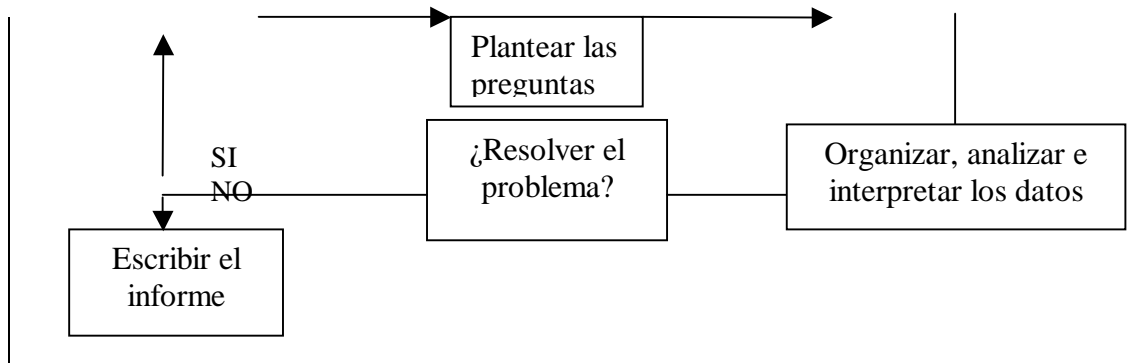
¿Cómo Elegir y Trabajar con un Proyecto?

Los proyectos se conciben como verdaderas investigaciones, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Deben escogerse con cuidado, ser realistas (incluso cuando sean versiones simplificadas de un problema dado) abiertos y apropiados al nivel del alumno.

Se comienza planteando un problema práctico y se usa luego la estadística para resolverlo. El razonamiento estadístico es una herramienta de resolución de problemas y no un fin en sí mismo. La Figura 7 contiene el esquema de la forma de trabajo en la que vemos que la parte puramente “matemática” de la estadística (la reducción, análisis e interpretación de los datos) es sólo una de las fases, y aún la interpretación ha de hacerse en función del contexto del problema planteado.

Figura 7. Esquema del desarrollo de un Proyecto





La fase de planteamiento de preguntas es una de las más difíciles. Los alumnos rara vez comienzan con un problema claramente formulado. Generalmente podrían comenzar sin preguntas claramente definidas y el papel del profesor es ayudarles a pasar de un tema general (deportes) a una pregunta que pueda contestarse (en la pasada temporada, ¿los equipos de fútbol que jugaron en su propio campo, lo hicieron mejor que los que jugaron en campo contrario?). Nolan y Speed (2002) sugieren que en el comienzo el profesor no debe centrarse en la terminología estadística, sino proporcionar estrategias generales que puedan generalizarse a otros datos y contextos. Una lista de puntos a tener en cuenta al plantear las preguntas de investigación es la siguiente:

- ¿Qué quieres probar?
- ¿Qué tienes que medir /observar /preguntar?
- ¿Qué datos necesitas? ¿Como encontrarás tus datos? ¿Qué harás con ellos?
- ¿Crees que puedes hacerlo? ¿Encontrarás problemas? ¿Cuáles?
- ¿Podrás contestar tu pregunta? ¿Para qué te servirán los resultados?

El trabajo con proyectos en la clase de estadística plantea el problema de la gestión de la clase, de modo que se oriente a los alumnos hacia el aprendizaje de conceptos y gráficos, la ejercitación de las técnicas de cálculo y la mejora en sus capacidades de argumentación, formulación de conjeturas y creatividad.

Aunque la estadística se suele enseñar separada de la probabilidad, durante la enseñanza media, nosotros creemos que esta separación es artificial, puesto que, detrás de cualquier estudio estadístico hay una componente aleatoria. Por ello hemos de tratar de relacionar estos dos campos cuando sea posible, y en particular, en los proyectos.

Datos, sus tipos, fuentes de datos

Hemos de animar a los alumnos a ser creativos. No todos los datos serán dados por el profesor. Para completar el proyecto el alumno necesita recoger datos, que, pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediante diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas (Tabla 3).

Tabla 3. Tipos de datos en los Proyectos

Procedencia de los datos	Anuarios estadísticos, Encuestas, Experimento realizado en la clase, Internet, Prensa, Simulación
Técnica de recogida de datos	Observación, Encuesta, Medida
Naturaleza de la escala de medida	Nominal, Ordinal, Intervalo, Razón
Variables estadísticas incluidas	Cualitativa, Cuantitativa discreta, pocos valores, Cuantitativa discreta, necesidad de agrupar, continua

Consideramos importante que, a lo largo de la educación secundaria el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de datos estadísticos. Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos. La red Internet proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados, bien a partir de servidores estadísticos específicos donde

los profesores de estadística han puesto sus datos al servicio de la enseñanza, bien recurriendo a organismos oficiales como el INE (Instituto Nacional de Estadística), Eurostat, Unesco u otros. En la Tabla 4 mostramos algunos de estos servidores.

Por ejemplo en Connor, Davies y Bradley (2002) se sugieren diversas formas de usar los datos disponibles en el servidor Census at School para trabajar en educación secundaria. En este proyecto participaron niños de 7 a 16 años quienes contribuyeron a recoger información para formar una base de datos nacional sobre los niños en las escuelas que luego pudiera usarse para trabajar en las clases de estadística. El servidor es accesible a las escuelas y contiene materiales didácticos, así como resúmenes y datos que pueden usarse en una variedad de asignaturas, enfatizando así el uso de la Internet y la estadística.

Otra fuente de datos es la revista Journal of Statistical Education que contiene una sección fija sobre datos y proyectos. En su servidor pueden encontrarse artículos que describen estos datos y como usarlos en la elaboración de proyectos y actividades prácticas. Las direcciones de éstos y otros servidores útiles para encontrar conjuntos de datos se presenta en la Tabla 4.

Tabla 4. Algunas fuentes de datos en Internet

Journal of Statistical Education	http://www2.ncsu.edu/ncsu/pams/stat/info/jse/homepage.html
The Chance Database	http://www.geom.umn.edu/docs/education/chance/
The Data and Story Library	http://lib.stat.cmu.edu/DASL/
Census at School Project	http://www.censusatchool.ntu.ac.uk

En otras ocasiones los datos son recogidos por los alumnos mediante la realización de una encuesta o a través de un experimento. La encuesta requerirá la elaboración de un cuestionario, fijando los objetivos del mismo, eligiendo las variables explicativas y redactando las preguntas que permitan obtener la información deseada de una forma clara y concisa. Si se pretende extender los resultados más allá de la muestra, la selección de una muestra representativa plantea problemas de tipo teórico y práctico, relacionados con la población objetivo y alcanzada, el marco de muestro, los métodos de selección, la administración del cuestionario y los problemas de no respuesta.

La información que queremos recoger puede corresponder a diversos niveles que se corresponden con diferentes técnicas de obtención de datos: información consciente y conocida (encuesta), información desconocida, pero que puede deducirse de la observación e información no consciente ni observable (medida). Finalmente es importante considerar la naturaleza de las escalas de medida y tipo de variable estadística, puesto que de ellas depende el método de análisis de datos que se puede aplicar. La elección del conjunto de datos es crítica, pues dependiendo del tipo de datos la gama de técnicas estadísticas será más o menos amplia, ya que no todas las técnicas son aplicables a cualquier tipo de dato.

Calculadoras y ordenadores

Cuando sea posible, los alumnos pueden usar ordenadores para llevar a cabo sus proyectos, no sólo para el análisis de los datos, sino también para elaborar sus informes. Los procesadores de texto (como WORD) son hoy compatibles con los programas estadísticos. El proyecto es así un pretexto para aprender estas herramientas que son hoy día esenciales. Es por ello que en el caso concreto de la estadística, los ordenadores son, con mucho, preferible a las calculadoras, cuando estén disponibles. Es un hecho de que un número creciente de alumnos cuenta en su casa o en la de algún amigo o familiar con ordenador personal.

Respecto a los programas estadísticos (software estadístico) existe hoy día una gran variedad, desde programas profesionales, como SPSS o Statgraphics, las hojas de cálculo como Excel o programas específicos para la enseñanza, algunos de los cuales están disponibles en Internet. Tanto la localización de estos programas como de los datos para los proyectos supone un uso didáctico de la Internet que también justifica el empleo de los ordenadores. Hemos incluido una lista de algunos de estos recursos en la Tabla 5.

Si no es posible recurrir a los ordenadores, las calculadoras, en especial las gráficas pueden sustituirlos. El volumen de datos en muchos proyectos (como los presentados como ejemplo)

hace posible el trabajo con calculadora. Tanto en este caso, como en el del uso del ordenador, se requiere la codificación de los datos en forma numérica. Es importante que el profesor resalte la diferencia entre el código y el valor de la variable. El hecho de, por ejemplo, poder calcular la media de los códigos numéricos asignados a los valores de una variable cualitativa (como el sexo) no indica que tenga sentido el valor obtenido.

Tabla 5. Algunos programas de cálculo y exploración estadística en Internet

Recursos Educativos para Estadística Descriptiva	http://www.ucv.cl/web/estadistica/
Gráficos Interactivos	http://nces.ed.gov/nceskids/Graphing/
Curso de Inferencia para Bachillerato	http://www.ibad-laspalmas.com/cei_archivos/cei.htm
Gasp: The Globally Accessible Statistical Procedures,	http://www.stat.sc.edu/rsrch/gasp/
Statiscope	http://www.df.lth.se/~mikaalb/statiscope/statiscope-enu.shtml
Java Applets for Visualization of Statistical Concepts	http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm
Elementary Statistical Java Applets and Tools	http://www.stat.uiuc.edu/~stat100/cuwu/
Rice Virtual Lab in Statistics	http://www.ruf.rice.edu/~lane/rvls.html
STEPS - STatistical Education through Problem Solving	http://www.stats.gla.ac.uk/steps/home.html
WebStat	http://www.stat.sc.edu/webstat/
Vista - The Visual Statistical System	http://forrest.psych.unc.edu/research/index.html
Berry Zielman Statistical Page	http://huizen.dds.nl/~berrie/

Escritura del informe

Es importante que los alumnos preparen un informe de la investigación llevada a cabo de una forma clara y lógica. Los apartados que podría tener este informe, corresponden a las fases de la investigación: Problema, datos, análisis e interpretación. El informe puede irse realizando según se avanza el trabajo, ayudará a los alumnos a pensar, planificar y llevar a cabo el proyecto, y proporciona un resumen del trabajo realizado. Refuerza, además, el proceso de razonamiento estadístico al tener que relatar para otra persona sus decisiones, acciones e interpretaciones.

Evaluación de los Proyectos

Un punto que sin duda preocupa, tanto a alumnos como a profesores, es la evaluación. En NCTM (1993) se concibe la evaluación como un proceso dinámico y continuo de producción de información sobre el progreso de los alumnos hacia los objetivos de aprendizaje. El principal propósito es mejorar el aprendizaje de los alumnos.

Es necesario reconocer la complejidad de la función evaluadora, debido a que ésta debe atender a las múltiples facetas del conocimiento estadístico (comprensión conceptual y procedimental, actitudes). Precisamos todo un sistema para recoger datos sobre el trabajo y rendimiento del alumno y no es suficiente evaluarlo a partir de las respuestas breves dadas a preguntas rutinarias en una única evaluación (o examen). Por el contrario, en un proyecto se reflejan bien los diversos aspectos del conocimiento matemático, que se deben tener en cuenta en la planificación de la instrucción y en su correspondiente evaluación según los estándares del NCTM, algunos de los cuales incluimos a continuación:

- *Comprensión conceptual:* Dar nombre, verbalizar y definir conceptos; identificar y generar ejemplos válidos y no válidos; utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar conceptos; pasar de un modo de representación a otro; reconocer los diversos significados e interpretaciones de los conceptos; identificar propiedades de un concepto determinado y reconocer las condiciones que determinan un concepto en particular; comparar y contrastar conceptos.
- *Conocimiento procedimental:* Reconocer cuándo es adecuado un procedimiento; explicar las razones para los distintos pasos de un procedimiento; llevar a cabo un procedimiento de forma fiable y eficaz; verificar el resultado de un procedimiento empíricamente o analíticamente; reconocer procedimientos correctos e incorrectos; reconocer la naturaleza y el papel que cumplen los procedimientos dentro de las matemáticas.
- *Resolución de problemas:* Formular y resolver problemas; aplicar diversas estrategias para resolver problemas; comprobar e interpretar resultados; generalizar soluciones.
- *Formulación y comunicación matemática:* Expresar ideas matemáticas en forma hablada, escrita o mediante representaciones visuales; interpretar y juzgar ideas matemáticas, presentadas de forma escrita, oral o visual; utilizar el vocabulario matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones
- *Razonamiento matemático:* Utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas; utilizar el razonamiento deductivo para verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos válidos; analizar situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes;
- *Actitud o disposición hacia las matemáticas:* Confianza en el uso de las matemáticas para resolver problemas, comunicar ideas y razonar; flexibilidad al explorar ideas matemáticas y probar métodos alternativos para la resolución de problemas; deseo de continuar hasta el final con una tarea matemática; interés, curiosidad e inventiva al hacer matemáticas; inclinación a revisar y reflexionar sobre su propio pensamiento y su actuación; valorar la aplicación de las matemáticas a situaciones que surjan de otras materias y de la experiencia diaria; reconocer el papel que cumplen las matemáticas en nuestra cultura, y el valor que tienen como herramienta y como lenguaje.

La evaluación del proyecto debe llevarse a cabo en varias etapas (Starkings, 1997), para proporcionar a los estudiantes ayuda en su ejecución. Esta autora sugiere también que la evaluación de los proyectos, y evaluación individual de cada estudiante participante, debe tener en cuenta el interés del proyecto, su completitud, la corrección de las técnicas estadísticas e interpretación, la claridad del informe, así como la integración del estudiante en el equipo, su esfuerzo individual y su contribución al trabajo colectivo.

Puesto que los estudiantes valoran aquello sobre lo que los examinamos, debemos examinarlos sobre las habilidades y conocimientos que para nosotros son más importantes. Una buena evaluación debe asegurar que el estudiante aprende y no sólo que aprueba.

Proyecto Final de una estudiante: Diversidad Étnica en la Escuela

Queremos finalizar analizando uno de los proyectos presentados por nuestros alumnos en una asignatura de libre configuración de Análisis de Datos y su Didáctica, que se oferta en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada y está dirigida a alumnos de primeros cursos de universidad. Es parte de un trabajo más amplio realizado por un grupo de alumnas de la Licenciatura de Psicología para una asignatura de su especialidad. Una de ellas, que había elegido como libre configuración nuestra asignatura, actuó como coordinadora del grupo, y realizó el análisis de los datos y su interpretación. Asimismo coordinó la redacción y organización del informe, que incluía una parte teórica y una parte experimental, que es la que resumimos a continuación.

El problema y las preguntas planteadas

El proyecto (Diversidad Étnica en la Escuela) surgió desde la asignatura de Psicología de la Educación, donde se pedía a los alumnos la elaboración de un estudio de campo sobre algún

tema relacionado con la educación. Este grupo concreto de alumnas se propuso estudiar la diversidad étnica en la escuela y dentro de este tema, el estudio de la integración de la etnia gitana en las aulas ordinarias.

En primer lugar, las alumnas llevaron a cabo una búsqueda bibliográfica, para ampliar sus conocimientos de la problemática. Entre otros usaron los libros de Jové (1998), Fernández Enguita (1996) y San Román (1986). Como indican las alumnas en la introducción del informe que prepararon sobre su proyecto:

“Según la ley, todos los niños tienen el derecho y el deber de asistir a la escuela durante la edad de la escolarización obligatoria. Esta escolarización se lleva a cabo en una determinada escuela, que tiene una cultura que muchas veces no coincide con la de algunos niños y niñas que asisten a ella: Ni el lenguaje, ni los valores, significados o intereses implícitos en la cultura académica conectan con las preocupaciones o expectativas de los alumnos, particularmente con los de aquellos que provienen de un medio social desfavorecido”.

El objetivo planteado por las alumnas en su estudio era acercarse a la realidad de la convivencia entre payos y gitanos en la escuela. Para ello trataron de analizar si entre estos dos colectivos se daban una serie de choques culturales, que decidieron agrupar en diferentes aspectos, descritos en los términos siguientes:

1. *“Individualismo frente a colectivismo: En contraposición a los valores de la mayoría paya, que fomenta el individualismo y la competitividad, para el pueblo gitano la comunidad y el colectivismo tienen una gran importancia.*
2. *Reafirmación cultural: El pueblo gitano se identifica como “gitano” para diferenciarse del “payo” como manera de construir y mantener la propia identidad.*
3. *Adquisición de hábitos y educación familiar: Debido a las condiciones en las que vive el pueblo gitano, en ocasiones le resulta difícil mantener unos hábitos de salud, así como fomentar la educación de sus hijos.*
4. *Ámbito personal frente a ámbito profesional: las relaciones personales y el cuidado de la familia estarían antes que tener un trabajo fijo y cualificado, para el colectivo gitano”.*

Los datos, su recogida e instrumentos

Una vez desarrollada la parte teórica del trabajo, las alumnas procedieron a la elaboración de un cuestionario con el que recoger sus datos. Éste constaba de 25 ítems, que clasificaron según 7 categorías, que definen las variables dependientes del estudio:

1. Prejuicio: ítems 4, 6, 12, 14 y 19.
2. Relaciones con el profesor: ítems 1 y 9
3. Relaciones con los compañeros: ítems 2,10,17 y 25.
4. Individualismo-Colectivismo: ítems 5 y 13
5. Reafirmación cultural: ítems 3,18 y 22.
6. Adquisición de hábitos y educación familiar: ítems 8,16 y 23.
7. Ámbito personal-ámbito profesional: ítems 7,15,20 y 24.

Los ítems son afirmaciones que se presentan a los sujetos, quienes deben mostrar su grado de acuerdo con ellas, puntuando cada afirmación con un número que varía desde -2 (nunca, no estoy de acuerdo) a +2 (siempre, estoy de acuerdo), con una respuesta 0 que significa la indiferencia. De los 25 ítems se eliminaron dos, una vez pasado el cuestionario, ya que presentaban algunos problemas de comprensión por los sujetos de la muestra. Además se tuvieron que invertir las puntuaciones de algunas de las preguntas, ya que las alumnas tuvieron cuidado en incluir enunciados tanto positivos como negativos para evitar el problema de la aquiescencia (sujetos que siempre responden en forma positiva).

Como ejemplos, en la Tabla 6 mostramos los enunciados de los ítems que recogen las preguntas correspondientes a la variable “Relaciones con los compañeros”. Hacemos notar que cada ítem tiene dos enunciados posibles, ya que se usaron dos cuestionarios diferentes. Mientras a los niños payos se les preguntaba siempre con relación a su visión de la otra etnia (Cuando salimos al recreo jugamos con niños de otras etnias), las preguntas se personalizaban en el caso de los niños gitanos, quienes, habitualmente eran tan sólo uno o dos casos en cada aula encuestada (Cuando salimos al recreo juegan conmigo).

Tabla 6. Enunciado de los ítems sobre “Relaciones con los compañeros”

-
2. Cuando mis compañeros hacen un grupo para alguna actividad cuentan conmigo/ Cuando hacemos grupos para una actividad contamos con niños de otras etnias.
10. Cuando salimos al recreo juegan conmigo/ Cuando salimos al recreo jugamos con niños de otras etnias
17. Los compañeros me ayudan cuando tengo que realizar alguna tarea difícil o que no entiendo/ Ayudo a los niños de otras etnias en tareas difíciles que no entienden
25. Mis compañeros de clase me llaman para quedar fuera del colegio/ Llamo a los compañeros de otras etnias para quedar fuera de clase.
-

El estudio se realizó en tres centros educativos, de las ciudades de Sevilla, Guadix, y Granada. Las alumnas visitaron personalmente los centros, recabaron permiso de la dirección para pasar el cuestionario y realizaron ellas mismas la recogida de datos.

En total, los alumnos que respondieron al cuestionario fueron 98, aunque no todos los casos fueron considerados válidos, ya que algunos estaban incompletos y presentaban respuestas contradictorias y fueron eliminados del conjunto de datos. Los alumnos de la muestra pertenecían a los niveles de primaria (1º y 5º curso) y secundaria (1º y 2º ESO). De los 84 alumnos que consideraron finalmente, 5 eran de etnia gitana y el resto, payos. Aunque la muestra de niños gitanos es muy reducida, eran todos los que había en los grupos participantes. Independientemente de la posible generalizabilidad de las conclusiones, vemos positivo el hecho de que en su proyecto estas alumnas llevaron a cabo las diferentes etapas de una investigación educativa, donde la estadística es sólo una parte del proceso de investigación.

La forma de administrar el cuestionario fue independiente para los alumnos de mayor edad, ya que los chicos respondieron a los cuestionarios cada uno de forma individual. Para los niños más pequeños se les leían las preguntas (a modo de entrevista semiestructurada) para que respondieran directamente al administrador del cuestionario y éste convertía la respuesta en puntuación. Es decir, las alumnas también se introdujeron a la técnica de entrevista y en los dos casos tuvieron gran cuidado en la comprensión de las preguntas por parte de los sujetos.

Análisis de datos: técnicas usadas

Como hemos dicho, aunque el proyecto se llevó a cabo por un equipo de cinco alumnas, fue una de ellas la que se encargó del estudio estadístico, que presentó como proyecto para la evaluación final en nuestra asignatura, que está basada en el uso de ordenadores, y donde, además de trabajar con proyectos propuestos por el profesor a lo largo del curso, se introduce a los alumnos al uso de paquetes de estadístico, como complemento de la asignatura. La alumna usó el programa SPSS para el análisis de los resultados.

Recogidos los cuestionarios, se codificaron los datos y se grabaron en una tabla, que presenta en las columnas los ítems, separados según las categorías que mencionamos anteriormente. En las filas se incluyeron los sujetos, añadiendo variables que indiquen su nivel educativo, curso y etnia. Se designó a los sujetos de etnia 1 *integradores*, ya que son mayoría en la clase (payos) y etnia 2 *integrados* (gitanos en el estudio).

Las variables independientes consideradas por las alumnas fueron:

- Etnia: gitana o paya;
- Nivel educativo: primaria o secundaria;
- curso: 1º y 5º de primaria, 1º y 2º de ESO.

Las variables dependientes fueron:

- Respuesta en cada ítem;
- Totales en cada una de las 7 variables que hemos descrito con anterioridad.

En lo que sigue y a modo de ejemplo, presentamos el análisis realizado en la variable “Relaciones con los compañeros”. Análisis similares se presentaron para cada una de las otras seis variables consideradas. La extensión total del informe fue de 44 páginas, más anexos. La estructuración del mismo fue correcta, desde el punto de vista metodológico, incluyendo los

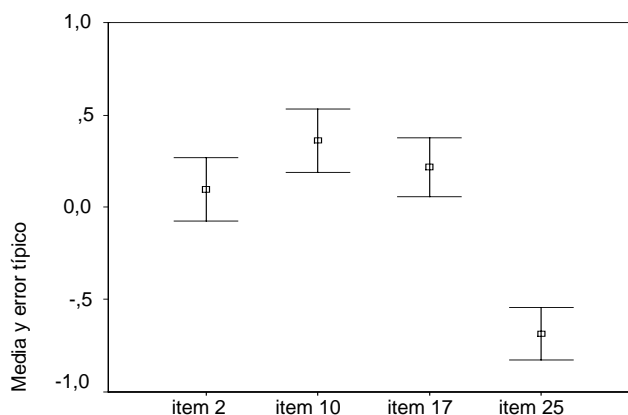
apartados de planteamiento del problema, objetivos, datos, instrumentos y métodos, análisis y discusión, conclusiones y referencias.

Respecto al análisis estadístico, en primer lugar se realizó un estudio con la muestra completa donde se elaboraron:

- Tablas comparativas de porcentajes de respuestas para cada ítem por curso, nivel educativo y etnia, con objeto de analizar la actitud global de la muestra hacia la integración, así como en los diferentes aspectos de la integración.
- Para cada una de las siete variables dependientes se elaboraron representaciones gráficas de la media y error típico en cada uno de los ítems que la definen (ver, como ejemplo, la figura 8).
- Histograma de la puntuación total en la categoría. Las alumnas definieron variables auxiliares, y, por medio de la opción de transformación de datos realizaron automáticamente, tanto la recodificación de las preguntas formuladas negativamente, como el cálculo de puntuaciones parciales, es decir, suma de las puntuaciones en los ítems correspondientes a una misma variable dependiente. Analizan a continuación el histograma de la variable obtenida (ver, como ejemplo, la figura 9).

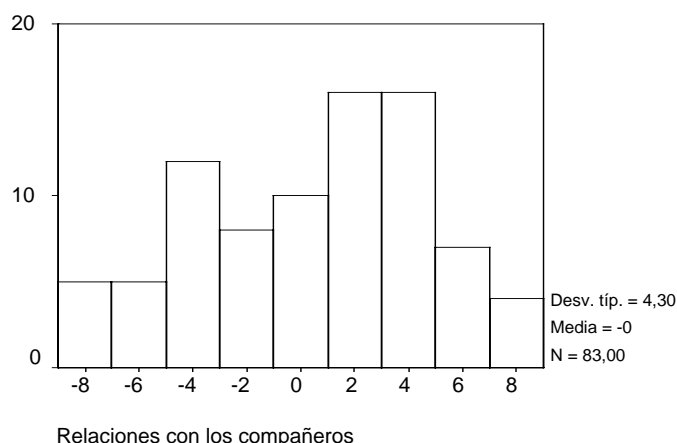
Las alumnas utilizan estas gráficas para hallar respuestas a las preguntas que se plantearon. Por ejemplo, respecto a la figura 8 concluyen que *“Las puntuaciones medias de los sujetos en estos cuatro ítems se sitúan entre -0’7 y 0’25. Los ítems 2, 10 y 1, que se refieren a la relación con los compañeros en el contexto escolar, son más positivos, mientras que el ítem 25 se refiere a la relación con los compañeros fuera de clase, tiene puntuación negativa. Parece que los niños interactúan más con niños de otras etnias en el contexto del aula que fuera de ella”*.

Figura 8. Relaciones con los compañeros: media y error típico



Respecto a la figura 9 sugieren: *“Para la variable Relación con los compañeros, la media se sitúa en 0 y la desviación típica es de 4’30. Estos datos indican que las relaciones con los compañeros son variables”*.

Figura 9. Relaciones con los compañeros: histograma de la puntuación total

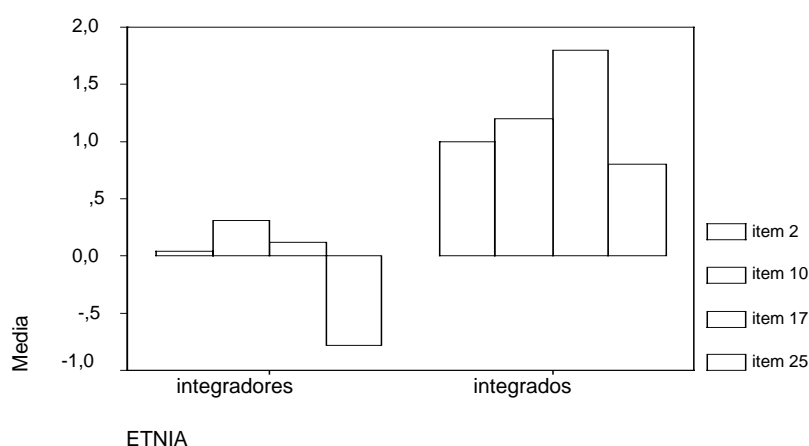


Una vez analizadas globalmente, en la misma forma anterior las otras seis categorías de variables dependientes, las alumnas realizan un análisis comparativo de sus resultados, para analizar el efecto de cada una de las variables independientes: etnia, nivel educativo. Producen para cada una de ellas tablas comparativas de media y desviación típica para cada ítem (véase tabla 7) y representación gráfica de las puntuaciones medias en cada ítem (véase figura 10).

Tabla 7. Relaciones con los compañeros: Medias y desviaciones típicas por etnias

	Payos		Gitanos	
	Media	Desv. típ.	Media	Desv. típ.
2- Cuentan conmigo para grupos/ cuento con...	0,12	1,56	1,00	1,22
10- En el recreo juegan conmigo/ juego con...	,28	1,58	1,20	1,30
17- Los compañeros me ayudan/ ayudo a...	,12	1,43	1,80	,45
25- Me llaman/ llamo para quedar fuera...	-,80	1,21	,80	1,79

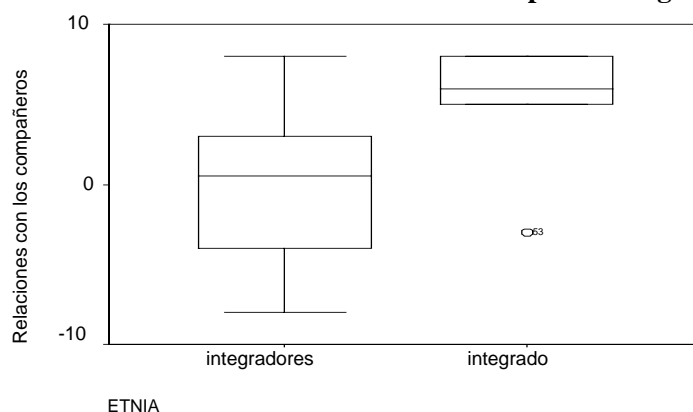
Figura 10. Relaciones con los compañeros: Puntuaciones medias según etnias



Presentan de esta forma sus conclusiones: “En cuanto a las relaciones con sus compañeros, los chicos integradores cuentan poco con sus compañeros de otras etnias para hacer grupos o jugar en el recreo, menos aún para salir fuera de clase. Sin embargo, los integrados no lo sienten así. Esto lo podemos ver en las puntuaciones positivas en los ítems y la puntuación

positiva global en esta variable para los niños gitanos. Por contra en sus compañeros las puntuaciones medias tienden a cero e incluso es negativa en un ítem. De todos modos el gráfico de la caja indica que hay bastante variabilidad en el comportamiento de los niños payos respecto a sus compañeros. Hay también un caso atípico entre los niños gitanos, que no se siente integrado ”.

Figura 11. Puntuación total en relación con los compañeros según la etnia



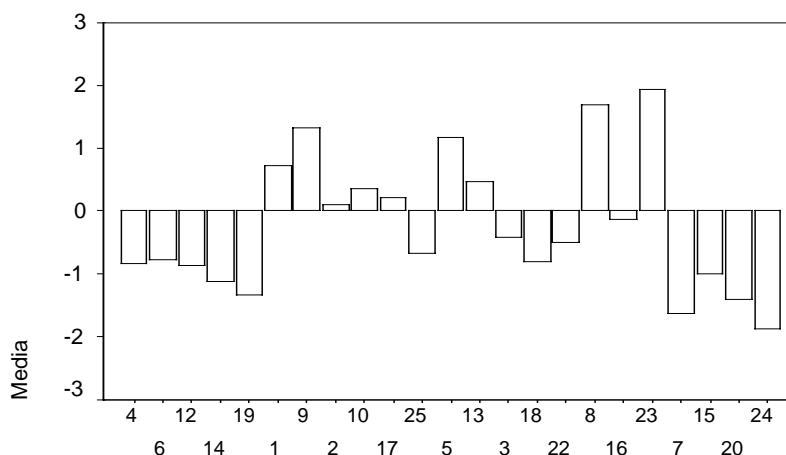
Análisis semejantes se realizaron para estudiar el efecto de las otras variables independientes. Finalizado el estudio global y de las variables independientes, se hizo un estudio comparado de los resultados entre niños payos y gitanos, para cada uno de los cursos participantes, presentando tablas comparativas de media y desviación típica para cada ítem (como ejemplo, presentamos la tabla 8, que se ha reducido sólo a los ítems de relaciones con los alumnos, aunque en el estudio original se presentan todos los ítems) y representación gráfica de las puntuaciones medias en cada ítem (como ejemplo presentamos la figura 12). Ambas fueron comentadas con detalle.

Tabla 8. Porcentajes para los alumnos de Quinto de primaria

	-2	-1	0	1	2
	Nunca	Poco	A veces	Bastante	Siempre
Payos					
2- Cuento con los niños gitanos para formar grupos...	12,5	12,5	18,8	25,0	31,3
10- En el recreo juego con los niños gitanos...	6,3		25,0	31,3	37,5
17- Ayudo a los niños gitanos	6,3		25,0	37,5	31,3
25- Llamo para quedar fuera...	37,5	25,0	25,0	6,3	6,3
Gitanos					
2- Cuentan conmigo para grupos..				50,0	50,0
10- En el recreo juegan conmigo..					100,0
17- Los compañeros me ayudan..					100,0
25- Me llaman para quedar fuera...			50,0		50,0

Puesto que en la figura 12 los ítems correspondientes a una misma variable aparecen juntos, es útil para ver en conjunto qué aspectos de la integración son negativos (para esta gráfica los prejuicios, y ámbito personal- profesional. Puesto que las alumnas presentan una gráfica similar para cada curso, es posible ver la evolución de las diferentes variables con la edad.

Figura 12. Media de las puntuaciones de los alumnos de Quinto de Primaria



Conclusiones obtenidas

Aparte de los comentarios de las diferentes tablas y gráficas a lo largo del documento, las alumnas presentan finalmente una sección de conclusiones, con una extensión de casi tres páginas. Reproducimos aquí algunas de las que nos han parecido más interesantes, que muestra cómo este grupo de alumnas han obtenido algunas respuestas a las preguntas planteadas, completando así el ciclo de investigación.

“Según los resultados obtenidos se pueden sacar algunas conclusiones:

- *Parece que los niños ven que sus profesores tratan por igual a todos los niños, sean de la etnia que sean. Aunque si separamos a los niños por etnia, los integrados sienten que sus profesores prestan más atención a los niños que son de otra etnia, mientras que los integradores no lo perciben así.*
- *Por otro lado, los alumnos de Primaria piensan que sus profesores tienen más prejuicios que lo que observan los alumnos de Secundaria. En este resultado hay que tener en cuenta que el profesor era diferente para ambos niveles educativos.*
- *Las relaciones con los compañeros son buenas, aunque los niños interactúan más en el contexto del aula con niños de otras etnias que fuera de ella. Los chicos integradores cuentan poco con sus compañeros de otras etnias para hacer grupos o jugar en el recreo, menos aún para salir fuera de clase. Sin embargo, los integrados no lo sienten así. Es posible que los chicos integrados tengan su grupo de amigos y aunque no interaccionen con todos sus compañeros de clase, no se sientan mal adaptados.*
- *En general, parecen preferir trabajar en actividades conjuntas, tanto integrados como integradores, aunque los chicos de Primaria resulten ser un poco más individualistas.*
- *Los niños no son conscientes de las diferencias culturales con sus compañeros, Además, los chicos integrados se muestran algo más tolerantes que sus compañeros integradores y piensan que la escuela no tiene en cuenta las características de su etnia.*
- *Las familias valoran que los niños vayan a la escuela y les apoyan, pero en general, ayudan poco a los niños en las tareas escolares. Los sujetos integrados más apoyo familiar para ir a la escuela y en las tareas escolares que sus compañeros integradores. Puede que la importancia de la familia en la etnia gitana se canalice en un mayor apoyo en las tareas escolares por parte de los padres y hermanos mayores de los alumnos gitanos.*
- *Los chicos de este estudio parecen considerar importante ir a la escuela y no suelen perder clase. Los integradores dan más importancia a la escuela, tal vez porque en sus casas den más importancia a estos aspectos. Aún así, las diferencias no son muy acusadas”.*

Objetivos de aprendizaje que se reflejan en el proyecto

Es claro, del breve resumen presentado que la alumna que realizó el análisis de datos y coordinó este proyecto ha mostrado *comprensión conceptual* de muchos conceptos estadísticos

incluidos en nuestra asignatura, tales como los de población y muestra, unidad estadística, variable y sus tipos, frecuencias y porcentajes, distribución de frecuencias, promedio, media, desviación típica, error típico, mediana y valores centras, valor atípico, asociación entre variables.

Del proyecto se deduce también su *conocimiento procedimental*, tanto en la elaboración de tablas y gráficos diversos (barras simples, barras adosadas, histogramas, caja, medias), como en el manejo de los programas de cálculo necesarios para producirlos. Esto incluye también la codificación, grabación y depuración de los datos, la recodificación de variables y cálculo de nuevas variables (puntuaciones parciales), así como la selección de casos para el análisis (para llevar a cabo los análisis por curso).

La alumna, además ha mostrado *conocimientos estratégicos* al haber podido identificar las técnicas pertinentes a diversos tipos de cuestiones, interpretando los resultados en función de las preguntas de la investigación, que han sido planteadas por las mismas alumnas. Con frecuencia en la enseñanza de *resolución de problemas* nos centramos en promover el desarrollo de estrategias entre los alumnos para resolver problemas abiertos. En este caso (y en general en el trabajo con proyectos) los problemas los plantean los mismos alumnos y esta es una habilidad interesante, ya que, con frecuencia es más difícil plantear un problema que llegar a resolverlo.

En el informe escrito las alumnas han debido desarrollar su capacidad *de formulación y comunicación* matemática. Los términos, tablas y gráficas usadas para expresar ideas matemáticas han sido correcta y significativamente empleadas en el contexto de un problema.

Las alumnas han mostrado su *razonamiento matemático*, al emplear los elementos anteriores para formular conjeturas y apoyar sus conclusiones. En particular las alumnas han usado *razonamiento inductivo* al hacer generalizaciones de los datos obtenidos a la conducta de otros posibles alumnos más allá de la muestra dada. Las alumnas han usado *razonamiento deductivo* cuando extraen consecuencias, por ejemplo de una gráfica o valor estadístico, sobre el comportamiento de la distribución de una variable.

Vemos que, a partir de este u otros proyectos similares podemos identificar los diferentes componentes de la evaluación sugeridos en NCTM (1993). Además, podemos también valorar los siguientes objetivos de aprendizaje, que según Anderson y Loynes (1987) se consiguen mediante los proyectos:

- Trabajar en equipo y trabajar dentro de unos plazos de tiempo establecidos.
- Comunicarse clara y efectivamente oralmente y por escrito, lo que se consigue tanto en la producción del informe escrito, como en la presentación oral a sus compañeros.
- Determinar los fines de una investigación, ser capaz de contextualizarla. Las alumnas contextualizaron sus preguntas iniciales a unos niveles y centros escolares dados y a la relación payo-gitano.
- Concienciarse de la necesidad en situaciones reales de obtener una respuesta, aunque sea imperfecta. Por medio del cuestionario, las alumnas son capaces de obtener algunas conclusiones, que por supuesto, no agotan la problemática.
- Traducir los fines generales a objetivos específicos realistas, decidiendo las variables y factores relevantes. Del constructo inicial “diversidad étnica en la escuela”, pasaron a “problemática de la integración de la etnia gitana” que aún es demasiado ambiciosa para un estudio hecho por alumnos. No obstante las alumnas fueron capaces de definir las 7 variables dependientes que podrían de algún modo “medir” esta integración y elaborar un instrumento (aunque imperfecto, eficaz) para poder recabar alguna información sobre el problema planteado.
- Organizar eficientemente la recogida de datos (buscar centros y recabar permiso, recoger los datos por sí mismas, usando entrevista, cuando la edad de los niños hacía dudoso que contestasen correctamente) reconocer las situaciones en que los datos podrían estar sesgados (se desecharon varios casos que no estaban completos o parecían poco fiables), saber establecer controles efectivos sobre la validez de los datos.
- Reconocer las técnicas apropiadas al problema. Aprender a utilizar una técnica. Analizar los datos, interpretar y utilizar los resultados del análisis.
- Leer e interpretar críticamente material, tanto estadístico, como en el tema objeto del

- proyecto. Como hemos visto, las alumnas localizaron y usaron bibliografía sobre la integración.
- Reconocer las limitaciones de una investigación. Reconocer lo que la estadística puede y no puede hacer. Las alumnas reconocen las limitaciones de su investigación en sus conclusiones.

Conclusiones

El ejemplo mostrado es sólo uno entre otros desarrollados por nuestros alumnos en los últimos años sobre las áreas más diversas: indicadores de medio ambiente en el mundo, comparación de las ganancias /pérdidas en bolsa a lo largo de un mes de cuatro modelos de inversión de una misma cantidad de dinero, estudio de los intereses de la juventud de Maracena (pueblo de Granada), valoración de los participantes sobre unas Jornadas de la LOGSE, existencia de discriminación educativa respecto a sexo en la escuela infantil, estudio hidrológico de ríos de Granada, comparación del umbral de percepción en la piel en diferentes condiciones experimentales, etc. La mayor parte de estos proyectos podrían haberse llevado a cabo por chicos de Bachillerato y versiones simplificadas de los mismos serían adecuados para la Educación Secundaria Obligatoria, así como otros proyectos que sugerimos en Batanero (2001).

Hemos analizado cómo los proyectos están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa, en concordancia con las recomendaciones recientes sobre enseñanza de la estadística, presentando, tanto un ejemplo propuesto por el profesor, como otro elegido y llevado a cabo por una alumna, como parte de un trabajo en grupo. Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos, que podrían también conectarse con otras áreas curriculares. Con ello aumentaríamos su interés por la materia.

Como sugieren Murray y Gal (2002) la comprensión, interpretación y reacción frente a la información estadística no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas y una postura crítica que se apoya en un conjunto de creencias y actitudes. Todas estas capacidades se incentivan en el trabajo con proyectos.

Cobb y Hodge (2002) sugieren también que el trabajo en grupos y la perspectiva socio cultural en la clase de estadística centra la atención de los estudiantes en lo que supone la estadística como una parte importante de su aprendizaje. Focaliza su propia identificación como posibles productores de estadísticas con relación a sus propios intereses y problemas.

Finalmente Nolan y Speed (2002) resaltan la importancia de desarrollar la capacidad discursiva de los estudiantes, como medio de ampliar sus habilidades de pensamiento crítico. En la producción de su informe el estudiante debe situar el análisis de sus datos dentro de un argumento coherente y convincente que apoye sus hipótesis. La comunicación de ideas a partir de tablas y gráficos es especialmente importante en el razonamiento estadístico.

Referencias

- Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics*. Nueva York: Wiley.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística (disponible en <http://www.ugr.es/local/batanero>).
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2000). *Análisis de datos y su didáctica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.
- Cobb, P. y Hodge, L. (2002). Learning, identity, and statistical data analysis. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education (CD Rom).
- Connor, D., Davies, N. y Payne, B. (2002). Web-based project and key skill work. *Teaching Statistics*, 24(2), 62-65.
- Fernández Enguita, J. (1996). *Escuela y etnicidad: el caso del pueblo gitano*. Granada: Universidad de Granada

- Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school*. Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.
- Hawkins, A. (1991). Student's project work and the UK applied statistics competition. En Vere-Jones, D. (editor) (1991). *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 209-213). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 153-164). Voorburg: IOS Press.
- Jové, G. (1998). *Diversidad cultural en los centros educativos: el vitae desde una perspectiva intercultural*. Madrid: Cultura y Educación.
- Murray, S., & Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education(CD Rom).
- N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA; N.C.T.M. <http://standards.nctm.org/>
- Nolan, D., & Speed, T.P. (1999). Teaching statistics theory through applications. *American Statistician*, 53, 370-375.
- San Román, T. (1986). *Entre la marginación y el racismo: reflexión sobre la vida de los gitanos*. Madrid: Alianza.
- Starkings, S. (1997). Assessing students' projects. En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 139-152). Voorburg: IOS Press.
- Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.