# SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD CONDICIONADA E INDEPENDENCIA PARA ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

**Ana Isabel Megías Pérez**

**Trabajo Fin de Máster**

**Máster en Didáctica de la Matemática**

**2017**

**Facultad de Ciencias de la Educación**

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

**Tutoras:**

**Dra. Carmen Batanero Bernabeu**

**M Magdalena Gea**

RESUMEN

En este trabajo analizamos la forma en que los estudiantes de Bachillerato definen la probabilidad condicional e independencia y los ejemplos que proponen de ellas, así como su resolución de un problema relacionado con la probabilidad condicional El trabajo se fundamenta con el estudio de las orientaciones curriculares sobre el tema, el marco teórico (enfoque ontosemiótico) y el estudio de las investigaciones previas que nos informa de las dificultades y errores de los estudiantes. Las respuestas de 52 estudiantes de Bachillerato a un cuestionario se analizan y comparan con las investigaciones previas. Se finaliza este trabajo con posibles líneas futuras y aportaciones de este trabajo, así como las conclusiones extraídas de éste.

ABSTRACT

In this paper we analyse the way in which high school students define conditional probability and independence and the examples they propose of these concepts, as well as their resolution of a problem related to conditional probability. The work is based on the study of curricular guidelines for the subject, the theoretical framework (ontosemiotic approach) and the study of previous research that informs us of the students' difficulties and errors. The responses by 52 high school students to a questionnaire are analyzed and compared with previous research. This work concludes with possible future research topics and contributions of this work, as well as with the conclusions drawn from it.

**SIGNIFICADO DE PROBABILIDAD CONDICIONADA E INDEPENDENCIA PARA ESTUDIANTES DE BACHILLERATO**

# INTRODUCCIÓN

En este trabajo analizamos la forma en que los estudiantes de Bachillerato definen la probabilidad condicional e independencia y los ejemplos que proponen de ellas, así como su resolución de un problema relacionado con la probabilidad condicional.

Hemos elegido estos conceptos por constituir, según Heitele (1975) ideas estocásticas fundamentales, debido a su papel en el desarrollo del cálculo de probabilidades, a su carácter contra intuitivo y, paradójicamente, a la posibilidad de ser enseñadas a estudiantes de diversas edades, variando el grado de formalización.

Como veremos en el estudio curricular incluido en el Capítulo 1, estos conceptos se introducen desde el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria y su estudio se va profundizando progresivamente, aunque no siempre de una forma explícita y dándose poca importancia a su definición, que se supone sencilla. Su comprensión es necesaria para la de otros contenidos estadísticos; por ejemplo, los de correlación y regresión, el muestreo y la inferencia (Contreras, 2011). Sin embargo, como se analiza en el Capítulo 2, son muchos los errores de comprensión de este concepto.

Las anteriores razones y mi interés personal como profesora de matemáticas me decidieron realizar este estudio, para analizar el significado que los estudiantes otorgan a estos conceptos y cómo los diferencian de otros, así como los ejemplos que proponen de los mismos y la forma en que los aplican.

La parte principal del estudio realizado en esta Memoria Fin de Máster consiste en el análisis de las respuestas escritas a un cuestionario de una muestra de estudiantes de Bachillerato, cuyos resultados se presentan en el Capítulo 3 de esta memoria. Dicho estudio de evaluación se completa con dos capítulos de tipo teórico:

- En el primero de ellos comenzamos con la justificación del interés del trabajo, tanto desde el punto de vista de la estadística, como para la formación del estudiante. Seguidamente se analizan los contenidos relacionados con estos temas en las orientaciones curriculares y se incluye la descripción del marco teórico utilizado. Finalizamos el primer capítulo con la exposición de los objetivos y las hipótesis de la investigación.
- En el segundo capítulo se describen los antecedentes del trabajo. Se comienza por exponer los trabajos relacionados con la comprensión intuitiva de la probabilidad condicional e independencia. A continuación se sigue con los que analizan la comprensión de la diferencia entre dependencia, condicionamiento y relación causa y efecto, la falacia del eje temporal y de conjunción, situaciones diacrónicas y

sincrónicas, junto con otros sesgos de razonamiento- Se completa con investigaciones centradas en la comprensión de la independencia, la definición de probabilidad condicional y se hace balance de todas estas investigaciones extrayendo conclusiones.

Se recogen al final de la Memoria las conclusiones generales de la investigación y la lista de referencias citadas en el trabajo.

# CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se dedica a contextualizar el problema de investigación. Para ello vamos a justificar el tema elegido, estudiando la importancia de la probabilidad condicional, tanto en la propia estadística, como en la formación del estudiante.

Seguidamente analizamos los contenidos relacionados con la probabilidad condicional e independencia en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Para ello trabajaremos con los documentos del Ministerio de Educación y la Junta de Andalucía, que nos ayudarán a describir los contenidos relativos a la probabilidad y probabilidad condicional que se encuentran en el currículo.

Analizaremos a continuación el marco teórico usado, que es el enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática; en particular trabajaremos las ideas de significado institucional y personal de un objeto matemático, objetos matemáticos y sus facetas, función semiótica y conflicto semiótico. Finalmente, expondremos los objetivos e hipótesis de este trabajo de investigación.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

En la actualidad la enseñanza de la probabilidad comienza, de acuerdo a las directrices curriculares, desde la educación primaria y continúa, prácticamente en todos los cursos en la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Sin embargo, debido a falta de tiempo, la probabilidad y la estadística son de los pocos temas que no suelen verse durante el curso escolar (Batanero, Ortiz, Roa y Serrano, 2013). Quizás esta sea una de las razones por la que algunos autores, como Gal (2005), sugieren que la probabilidad es la rama de las matemáticas la menos comprendida; sin embargo, no es por eso menos importante. Tal es su importancia, que la mayoría de las carreras universitarias (medicina, psicología, periodismo,…) contienen como mínimo una asignatura relacionada con la estadística y probabilidad. En lo que sigue desarrollamos estas ideas.

### 1.2.1 IMPORTANCIA PARA EL ESTUDIANTE

En primer lugar, la probabilidad es importante para la formación personal del estudiante, por diversos motivos. En la actualidad, autores como Gal (2005) reclaman la alfabetización probabilística de los estudiantes, es decir el desarrollo de sus conocimientos, competencias y actitudes para desenvolverse frente al azar.

No son pocas las situaciones de la vida cotidiana en que encontramos fenómenos aleatorios o debemos tomar decisiones en las que hay presente incertidumbre, y con frecuencia se toman decisiones aleatorias, sin haber razonado y calculado probabilidades antes, para poder decidir la mejor opción (Batanero, Contreras y Díaz, 2012). También en los periódicos, Internet u otros medios de comunicación aparecen noticias sobre encuestas u otras informaciones de probabilidad, que un estudiante que no tenga conocimientos de probabilidad difícilmente comprenderá.

Es por todo ello bueno tener una base en esta parte de las matemáticas, porque nos dota de un razonamiento critico por lo que se podrá abordar las mencionadas situaciones. Además, la probabilidad se debe utilizar en prácticamente todas las profesiones, por lo que es fundamental que el estudiante tenga conocimientos previos a la etapa universitaria, o en caso de que no quiera seguir estudios universitarios, en su etapa profesional. Por ejemplo, en medicina, sabiendo que una madre es portadora de una enfermedad X, nos puede interesar la probabilidad de que su bebé también lo sea. Ejemplos similares encontramos en el pronóstico del tiempo, el estudio de las cotizaciones en la bolsa o la evolución del empleo o la producción. En otras palabras, la importancia de la probabilidad se debe a que nos proporciona medios para predecir o estimar situaciones inciertas.

Finalmente, desde un punto de vista social, son muchos los ejemplos de actividades en los cuáles la probabilidad está presente, empezando por los cuentos, así como en los juegos de azar, como la lotería o incluso en juegos infantiles como la oca o el parchís.

### 1.2.2 IMPORTANCIA EN EL MÉTODO ESTADÍSTICO

Las anteriores consideraciones pueden extenderse en particular a las ideas de independencia y probabilidad condicional, porque estas dos ideas se emplean frecuentemente, tanto en la toma de decisiones personales y profesionales, como en la inferencia. La probabilidad condicional y la independencia son dos de los conceptos más importantes para poder entender la estadística. Conforme recopilamos más información sobre sucesos aleatorios, se mejora la probabilidad y por tanto nuestra creencia; ello nos permite aplicar el concepto de probabilidad condicional.

Díaz (2004) afirma que la probabilidad condicional forma parte de muchos conceptos relacionados con inferencia. Veamos unos cuantos ejemplos:

a. En la metodología del contraste de hipótesis de Fisher, la probabilidad condicional aparece cuando se define el valor-p, el nivel de significación, la distribución muestral del estadístico, la región crítica y en la aplicación de la lógica de contraste.
b. En el contraste de hipótesis en la metodología de Neymann y Pearson, aparece en las definiciones de los errores de tipo I y II y en la región de aceptación, así como en el concepto de potencia.
c. En la inferencia Bayesiana, la probabilidad condicional aparece en las definiciones de la probabilidad a posteriori y las de verosimilitud así como en el teorema de Bayes.
d. En la metodología de intervalos de confianza podemos encontrarla en la construcción del intervalo y en el concepto de nivel de confianza.
e. En el estudio de la correlación y regresión y modelos lineales, también está presente, pues todos ellos se definen por medio de la probabilidad condicional. La independencia aparece como contrapunto a la idea de correlación en estos estudios.

Por otro lado, de acuerdo a Batanero y Borovcnik (2016), la idea de independencia es un requisito indispensable para comprender la probabilidad, desde el punto de vista frecuencial, pues en dicho punto de vista la probabilidad se estima a partir de la frecuencia relativa en ensayos que han de ser independientes unos de otros.

Además, al elegir una muestra aleatoria, se supone que los elementos de cada muestra son independientes unos de otros, para poder aplicar métodos de inferencia; por ejemplo, para aplicar el teorema central del límite y determinar la distribución de la media o la proporción muestral.

En consecuencia, la comprensión deficiente de estos conceptos, por ejemplo, no saber diferenciar probabilidad simple de la condicional o no comprender razonamientos basados en la lógica condicional han causado malas interpretaciones de los conceptos anteriores (Díaz, 2004; 2007, Vallecillos, 1994). Es por ello importante asegurar su comprensión por parte de los estudiantes para prepararles para el estudio de los temas citados.

## 1.3 ORIENTACIONES CURRICULARES

Como hemos indicado, un cambio importante que se ha producido en el currículo de educación primaria en la última década es la incorporación de contenidos de probabilidad desde el primer ciclo (por ejemplo, en NCTM, 2000 o MEC, 2006). La probabilidad condicional e independencia aparecen actualmente en las orientaciones curriculares de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Si analizamos el Real Decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico, MECD (2015), podemos observar los contenidos de estadística y probabilidad que deben darse en estos cursos, que pueden variar de acuerdo a la orientación de la enseñanza, académica o aplicada. En la Educación Secundaria Obligatoria existen unos bloques relacionados con la Estadística y la probabilidad: Bloque 5.

Veamos algunos de los contenidos que están incluidos en estos bloques en función del curso (MECD, 2015, p.381-422). En la Tabla 1.1 se presentan los contenidos de Educación Secundaria Obligatoria, donde hemos marcado con cursiva los temas que se relacionan con la probabilidad condicional o independencia. Observamos que se comienza desde primer curso con la probabilidad, tanto en su enfoque clásico como frecuencial y es en el cuarto curso cuando se incluye el estudio de la probabilidad condicional, compuesta y la independencia. En tercer curso, enseñanzas aplicadas no hay ningún contenido que trate la probabilidad, a diferencia del orientado a las enseñanzas académicas, donde aparecen temas de muestreo y de combinatoria. Puesto que la combinatoria se relaciona con el muestreo, indirectamente también con la probabilidad condicional e independencia.

En relación al currículo autonómico, podemos observar en la Consejería de educación de la Junta de Andalucía (2016) (p. 189-211) se citan contenidos relacionados con este bloque, como ejemplo, en 3ºESO de aplicadas debe darse el diagrama de caja y bigotes o en 3ºESO de académicas se debe aprender a interpretar de forma conjunta la media y la desviación típica, así como contenidos trasversales que pueden usarse para trabajar este tema y que son los siguientes:

Tabla 1.1. Contenidos de estadística y probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria

| | |
|---|---|
| 1º y 2º ESO | Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.<br>Fenómenos deterministas y aleatorios.<br>Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y *diseño de experiencias para su comprobación.*<br>*Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.*<br>Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.<br>Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos.<br>Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos |
| 3º ESO, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas | Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, *muestra.* Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas.<br>*Métodos de selección de una muestra estadística.* Representatividad de una muestra.<br>Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.<br>Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. *Diagramas de árbol sencillos.* Permutaciones, factorial de un número.<br>Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. |
| 4º ESO, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas | *Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.*<br>Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.<br>*Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes.*<br>*Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.*<br>*Probabilidad condicionada.*<br>Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística. |
| 4º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas | Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.<br>Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.<br>*Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes*. Diagrama en árbol. |

- El uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las calculadoras y el software específico deben convertirse en herramientas habituales para la construcción del pensamiento matemático.
- El uso de materiales cotidianos como revistas y artículos de prensa, facilitan el estudio de tablas y gráficas estadísticas.

- Para todos los bloques, hay que destacar la importancia del uso de juegos matemáticos como cartas, dominós, bingos, juegos de mesa, ruletas y dados.

Tabla 2.2 Contenidos de la probabilidad en Bachillerato

| | |
|---|---|
| 1º Bachillerato, Matemáticas I | *Distribuciones condicionadas.*<br>*Independencia de variables estadísticas. Estudio de la dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube de puntos.*<br>*Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.*<br>*Regresión lineal. Estimación. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.* |
| 1ºBachillerato, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales | *Distribuciones condicionadas.*<br>*Medias y desviaciones típicas marginales y condicionadas.*<br>*Independencia de variables estadísticas.*<br>*Dependencia de dos variables estadísticas. Representación gráfica: Nube d puntos.*<br>*Dependencia lineal de dos variables estadísticas. Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.*<br>*Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace ya partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov.*<br>*Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.*<br>Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.<br>*Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.*<br>*Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.* |
| 2º Bachillerato, Matemáticas II | Sucesos. *Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.* Axiomática de Kolmogorov.<br>*Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.*<br>*Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.*<br>Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica.<br>*Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades.*<br>Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.<br>*Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.* |
| 2º Bachillerato, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales: . | Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. *Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.*<br>*Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.*<br>*Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.* |

Centrémonos de nuevo en los contenidos de probabilidad, ahora para la enseñanza en Bachillerato hemos incluido un esquema en la Tabla 1.2 en la que vemos la amplitud de contenidos relacionados con la probabilidad condicional e independencia o que se basan en ella, que son prácticamente todos los que aparecen en los dos cursos de Bachillerato. Es por ello importante asegurar la comprensión de estos conceptos básicos por parte de los estudiantes.

## 1.4 MARCO TEÓRICO

En este apartado vamos describir algunos elementos de nuestro marco teórico (enfoque ontosemiótico); en particular vamos a trabajar sobre los significados institucional y personal que poseen los objetos matemática, así como sobre los tipos diferenciados de objetos matemáticos y la función semiótica con los conflictos semióticos relacionados.

### 1.4.1 SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO. SIGNIFICADO PERSONAL E INSTITUCIONAL

La existencia de los objetos matemáticos se debe al conjunto de prácticas de la actividad matemática al tratar de resolver problemas, bien de la propia matemática, o bien de aplicación de la misma. Dichos objetos se expresan mediantes notaciones o símbolos y pueden verse como entidades culturales que aparecen debido a los usos que las personas e instituciones hacen de ellos. Por ejemplo, el objeto *probabilidad condicional* existe porque culturalmente lo nombramos y le asociamos una serie de propiedades, que han surgido al resolver diferentes problemas. Estos objetos van cambiando conforme pasa el tiempo en la actividad de resolución de problemas, tanto históricamente, pues han ido evolucionando, como en la comprensión del estudiante, que va ampliando su comprensión del mismo (Godino, 2002; 2003).

Para empezar a definir qué es realmente un objeto matemático, debemos primero explicar qué es una práctica matemática. Se definen estas prácticas matemáticas como las actuaciones o expresiones que hace un individuo o que se realizan o llevan a cabo dentro de una institución para poder resolver un problema matemático, exponer su solución y que permita generalizarlo a otros problemas o contextos. Por ejemplo, al considerar la probabilidad simple, una práctica común es listar todos los elementos del espacio muestral (casos posibles) e identificar los que favorecen a un suceso (casos favorables) y determinar la probabilidad como cociente entre el número de casos favorables y posibles. Se llamarán prácticas institucionales a aquellas que son realizadas por un grupo de personas que están interesadas en resolver el mismo problema; por ejemplo, en la institución matemática o en la institución escolar.

Una vez se ha definido la práctica matemática, ya podemos definir objeto matemático, o más bien el significado del mismo, el cual es el conjunto de prácticas asociadas a la resolución de problemas prototípicos de dicho objeto. Así el significado de la probabilidad condicional sería el conjunto de prácticas relacionadas con este concepto.

Veamos en qué se divide el significado institucional de un objeto matemático (Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007); esta división es interesante para definir con claridad los objetivos de una investigación:

a. *Referencial:* es aquel sistema de prácticas que considera el investigador o profesor para elaborar una investigación o una programación. Para realizarlo se apoya en fuentes necesarios (libros de texto, experiencias propias, orientaciones curriculares,…). Mediante este estudio se obtiene un significado global matemático, su origen, desarrollo, etc. Si nos centramos en el significado de probabilidad, el referencial es la unión de los distintos significados (axiomático, clásico, subjetivo,…).
b. *Pretendido:* es el sistema de prácticas que se encuentra en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje que se realiza sobre cierto objeto matemático o el que se quiere investigar en una investigación. Por ejemplo, en nuestro caso podría ser el fijado en las orientaciones curriculares.
c. *Implementado:* es el sistema de prácticas que el profesor ha usado con el estudiante para el estudio del objeto matemático y es fundamental para el diseño de las evaluaciones. Puede variar en cada aula, dependiendo de la programación del profesor.
d. *Evaluado:* es el sistema de prácticas seleccionado por el propio profesor mediante una serie de tareas o pautas de observaciones que le ayudarán a evaluar el significado personal del alumno sobre el objeto matemático estudiado, o el significado que evalúa un investigador dentro de su trabajo. Este es el significado que nos interesa en nuestro trabajo, donde nos centramos en las definiciones y ejemplos que proponen los estudiantes.

En cuanto al significado personal de un objeto matemático podemos distinguir tres tipos distintos:

- *Global:* es el sistema de prácticas que el propio estudiante es capaz de llevar a cabo respecto a un determinado objeto matemático. Generalmente no lo podemos observar totalmente, al ser muy extenso.
- *Declarado:* es el sistema de prácticas que un estudiante pone de manifiesto en una evaluación. Es el que analizaremos en nuestro estudio.
- *Logrado:* sistema de prácticas que el alumno hubiera puesto de manifiesto, consideradas correctas por la institución. Es decir, la parte correcta del significado declarado.

### 1.4.2 TIPOS DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Como hemos indicado el significado de un objeto matemático es el conjunto de prácticas relacionadas con el objeto. En estas prácticas intervienen otros objetos que son necesarios para este trabajo matemático, según Godino, Batanero y Font (2007), y estos son:

a. *Situaciones-problemas:* la resolución de los problemas da lugar a las prácticas matemáticas correspondientes. Para el caso de la probabilidad, los problemas pueden referirse a previsión de la esperanza de natalidad o mortandad, por ejemplo.
b. Lenguaje: son las palabras, símbolos o representaciones gráficas o tabulares que se usan para poder operar con los datos del problema y expresar su solución. En nuestro estudio podremos observar el tipo de representaciones que usa el estudiante para dar su definición; por ejemplo, si usa fórmulas, símbolos o algún tipo de gráfico.
c. *Conceptos:* son los objetos matemáticos que se usan implícita o explícitamente al resolver una actividad matemática y es posible definirlo. Nos interesamos concretamente en este trabajo por los conceptos de probabilidad condicional e independencia, pero también el estudiante los puede confundir con los de probabilidad simple y compuesta o con la dependencia.
d. *Proposiciones o propiedades:* son objetos que se encargan de relacionar los conceptos y regulan las prácticas que realiza el estudiante. Nos interesa ver las propiedades que se asignan a los conceptos estudiados.

e. *Procedimientos:* son algoritmos y técnicas de cálculo que se aplican en la resolución de problemas. Propondremos un problema y veremos los procedimientos usados por el estudiante.
f. *Argumentos:* objetos que sirven para justificar las soluciones de los problemas o las propiedades usadas en su resolución. Igualmente analizaremos estos argumentos.

### 1.4.3 FUNCIÓN SEMIÓTICA Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Se va a trabajar con un último concepto teórico conocido como función semiótica (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), la cual sirve para resaltar aquellos procesos de interpretación que se utilizan en el desarrollo de la actividad matemática, dentro de los cuales pueden aparecer conflictos de interpretación entre los alumnos y el profesor.

La función semiótica es toda correspondencia entre un antecedente y un consecuente establecida por una persona o institución. En matemáticas esta correspondencia suele estar implícita, aunque es posible que se incluyan instrucciones para la interpretación de los recursos. Por ejemplo, escribimos $P(A|B)$ y nos referimos a una probabilidad condicional, donde B es la condición y A es el suceso cuya probabilidad se calcula. Independientemente de si existen o no esas instrucciones, es posible que el estudiante que está usando ese recurso no entienda cómo funciona o no sepa interpretar de forma adecuada los resultados que se producen. Si estas interpretaciones no son las que el profesor espera, por ejemplo, si el estudiante supone que A es la condición, entonces nos encontramos frente a un conflicto semiótico.

El antecedente o expresión y la consecuente o significado de una función semiótica no son siempre conceptos, sino puede ser cualquiera de los objetos matemáticos vistas anteriormente o incluso teorías o sistemas conceptuales. Esto explica las dificultades de interpretación de las matemáticas que puedan encontrar los estudiantes.

## 1.5 OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL TRABAJO

Teniendo en cuenta lo expuesto en las secciones anteriores, pasamos a detallar los objetivos de nuestro trabajo, que van a ser los siguientes:

Objetivo 1. Analizar la forma en que los objetos matemático ‘’probabilidad condicionada’’ e “independencia” se presentan en el currículo de Educación Secundaria

Obligatoria y Bachillerato. Para lograrlo se ha realizado el análisis curricular contenido en este capítulo. El fin es comenzar la construcción de un significado institucional que sirva de base a nuestro trabajo, así como a posteriores propuestas de enseñanza o de evaluación del tema.

Objetivo 2. Obtener una primera visión de la investigación en psicología y educación relacionada con la probabilidad condicionada. Para ello en el segundo capítulo se presentará un resumen de los trabajos relacionados con el tema y que se han realizado con anterioridad al nuestro.

Objetivo 3. Realizar un estudio exploratorio de evaluación. Para ello se construye un cuestionario corto y se analizan las respuestas que han dado los alumnos al cuestionario. Más concretamente, trataremos de identificar las dificultades que tienen los alumnos acerca de la definición de probabilidad simple y condicionada y de sucesos dependientes e independientes y qué tipo de ejemplos proponen. Asimismo se les propondrá un problema corto para estudiar las estrategias de resolución y las representaciones que proponen.

Podemos también formular algunas hipótesis (entendidas como expectativas, más que como hipótesis estadísticas) sobre lo que se espera encontrar en el trabajo.

Hipótesis 1: Se espera encontrar en el currículo numerosos contenidos que se relacionan de algún modo con las ideas de probabilidad condicional e independencia. Esta hipótesis ya se confirma en el estudio curricular, aunque la discutiremos con más detalle en el capítulo de conclusiones.

Hipótesis 2: La investigación previa indica muchas dificultades con las ideas de probabilidad condicional e independencia. Nos basamos en lo expresado en los trabajos de síntesis que nos sirven para construir los antecedentes y la analizamos en el Capítulo 2.

Hipótesis 3. Esperamos que una parte de los estudiantes de la muestra den definiciones imprecisas o incorrectas de la probabilidad condicional e independencia. Esta hipótesis se sustenta en las investigaciones previas, aunque han sido realizadas con otro tipo de estudiantes.

Hipótesis 4. Esperamos que la mayoría de ejemplos proporcionados por los estudiantes sean sobre juegos de azar. Esta conjetura se debe a que este contexto es el más frecuente en los libros de texto.

# CAPÍTULO 2. INVESTIGACIONES PREVIAS

## 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a analizar las investigaciones que describen las dificultades de los estudiantes con las definiciones de probabilidad condicional e independencia y aquellas que analizan los errores que suelen tener los estudiantes con estos conceptos. Resumimos para ello los artículos de Díaz, Batanero y Contreras (2010) y Díaz y de la Fuente (2005), completados con resúmenes de los trabajos de síntesis incluidos en Contreras (2009) y Díaz (2007). También se tienen en cuenta algunos trabajos posteriores a estos artículos.

Se divide este capítulo en los siguientes apartados: En primer lugar se analizan las investigaciones que tratan de evaluar la comprensión intuitiva de la probabilidad condicional e independencia, seguido de las que estudian la comprensión de la diferencia entre dependencia, condicionamiento y relación de causa y efecto. También se describen los estudios que trabajan en los errores comunes que se tienen sobre estos conceptos, por lo que se tratarán la falacia del eje temporal, situaciones diacrónicas y sincrónicas así como otros sesgos de razonamiento. Se trabajará sobre la comprensión de la probabilidad condicional y de la independencia. Finalmente se extraerán todas las conclusiones que se han podido obtener de los anteriores apartados de este capítulo.

## 2.2 COMPRENSIÓN INTUITIVA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA.

Los conceptos de probabilidad condicional e independencia son aparentemente muy sencillos, pero, tanto en la historia de la probabilidad, como en la resolución de problemas por parte de los estudiantes se han descrito numerosas dificultades (Borovcnik, 2012; Huerta y Arnau, 2017),

Dependiendo del grado de formalización, encontramos varias definiciones de la probabilidad condicional. Si la definimos de manera intuitiva, la probabilidad condicional $P(A|B)$ de un suceso $A$ dado otro suceso $B$ es la probabilidad del suceso $A$, cuando se da información sobre el suceso $B$. Una definición más formal se puede dar utilizando la expresión $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, siempre que $P(B) > 0$. De hecho, se puede demostrar que esta última definición cumple los axiomas de la probabilidad (ver, por ejemplo, Feller, 1957).

La independencia está ligada a la probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si y sólo si la probabilidad de uno de ellos no cambia si se condiciona por el otro; es decir, dos sucesos $A$ y $B$ son independientes si y solo si $P(A|B) = P(A)$ y $P(B|A) = P(B)$, o lo que es lo mismo, $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$. Veamos que si usamos la fórmula de la probabilidad condicionada, suponiendo que $A$ es independiente a $B$, estas definiciones son equivalentes:

$$P(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = P(A)$$

A pesar de que matemáticamente la comprensión de estas definiciones parece intuitiva y la obtención de la probabilidad condicional no quiere cálculos complicados, desde el punto de vista psicológico y didáctico son difíciles, sobre todo si se aplica a la resolución de problemas, donde muchas investigaciones, por ejemplo, las de Contreras (2011), Huerta y Arnau (2017) y Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo (2011) han mostrado el gran número de errores de los estudiantes.

Maury (1985) realiza una de las primeras investigaciones para analizar la comprensión intuitiva de la probabilidad condicional con una muestra de 374 estudiantes preuniversitarios y de Bachillerato. Al analizar las respuestas a un problema sobre probabilidad condicional, sólo el 25% de los estudiantes de su muestra encontró la solución correcta, frente a un 60% que pudo resolver un problema de probabilidad simple. Sin embargo, Maury afirma que en su trabajo la dificultad del problema no estuvo relacionada con la probabilidad condicional, sino con el hecho de que los dos sucesos del espacio muestral considerado no fuesen equiprobables. En otro problema de independencia el 70% de los chicos lo resuelven correctamente; la autora piensa que es debido a que pidió a los estudiantes listar en primer lugar todos los elementos del espacio muestral y esto les sirvió de ayuda en la resolución del problema.

Sin embargo, otros autores obtienen resultados diferentes. Para hacernos una idea de lo intuitiva que puede ser la probabilidad condicional, citamos a Totohasina (1992), quien hace un estudio con 67 alumnos de edades preuniversitarias que habían estudiado probabilidad pero no probabilidad condicionada. En su estudio pidió a los alumnos que resolviesen un problema de probabilidad total y otro de Bayes. El 60% de los estudiantes contestó correctamente a los problemas, muchos ayudados por representaciones con diagrama en árbol o tablas de doble entrada. Otros estudiantes confundieron la probabilidad conjunta con la probabilidad condicional.

## 2.3 COMPRENSIÓN DE LA DIFERENCIA ENTRE DEPENDENCIA, CONDICIONAMIENTO Y RELACIÓN DE CAUSA Y EFECTO

Una relación de causa y efecto es muy frecuente en la vida diaria y por ello los estudiantes extienden indebidamente este tipo de relación a otras situaciones (Díaz, 2004). Esta autora indica que si se da una relación causal, esto implica que los sucesos tratados son dependientes, pues si un suceso $A$ es la causa de otro, $B$, entonces, cuando ocurre $A$ también ocurre $B$, por lo que $P(B|A) = 1$. Por ejemplo, sabemos que el agua hierve a 100 grados; si llamamos al suceso $A$ estar el agua a 100ºC y al suceso $B$ que el agua hierva, entonces $P(B|A) = 1$.

Sin embargo, dos sucesos pueden ser dependientes sin que uno de ellos sea la causa del otro. Por ejemplo, supongamos que vamos de viaje en avión. Tomemos como suceso $A$ tener un accidente de avión en el viaje y $B$ morir en el transcurso del viaje. Es claro que $B$ está condicionado a $A$, sin embargo $A$ puede no ser la causa de $B$, porque puedes sobrevivir al accidente y después morir una vez te has bajado del avión por causas ajenas de él, como atropellado por un taxi. Que exista relación condicional implica que la relación causal puede ocurrir, pero no está asegurada.

Según Pollatsek, Well, Konold. y Hardiman (1987), dependiendo del contexto, la persona que realiza un ejercicio de probabilidad condicional $P(A|B)$ entre dos sucesos $A$ y $B$ percibe dos relaciones muy distintas entre el suceso $A$ y el suceso $B$. Estos investigadores proponen a sus estudiantes el siguiente problema:

> *¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable? a) Que una mujer tenga cáncer de mama si su madre tuvo cáncer de pecho. b) Que una madre haya tenido cáncer de pecho si su hija lo tiene. c) Los dos sucesos son igual de probables.*

Pueden ocurrir dos situaciones:

a. Si se entiende por el contexto que $B$ es causa de $A$, en ese caso el problema descrito en la parte a) describe una relación causal, por lo que el suceso $A$ es que la hija tenga cáncer de pecho y $B$ que la madre tenga también lo haya tenido, siendo $A$ efecto y $B$ la causa.

b. Si se entiende por contexto que $A$ depende de $B$, en este caso estamos frente a una relación diagnóstica. El suceso $A$ es que la madre haya tenido el cáncer de pecho y el suceso $B$ es que la hija lo tenga. Dada una mujer con cáncer, se desean conocer los antecedentes familiares.

*A* pesar de que ambos enunciados matemáticamente se resuelven del mismo modo, los estudiantes resuelven más fácilmente los problemas que implican relaciones causales que aquellos que implican relaciones diagnósticas.

### 2.3.1 LA FALACIA DE LA CONDICIONAL TRANSPUESTA

Existen varios errores comunes en cuanto a lo referido con la probabilidad condicional. Por ejemplo, asumir que $P(A|B) = P(B|A)$ es algo muy común para quien no conoce la probabilidad. Falk (1986) denominó a esta confusión *falacia de la condicional transpuesta*, pues los estudiantes asumen la propiedad conmutativa en la probabilidad condicional (Contreras, 2011). La propiedad conmutativa aparece en muchas operaciones aritméticas, como la suma o el producto y los alumnos la extienden indebidamente a la probabilidad condicional, donde no se aplica.

Por ejemplo se puede pensar que hay la misma probabilidad de tener una prueba médica positiva cuando se tiene cáncer, que tener cáncer cuando la prueba médica es positiva, aunque esta segunda probabilidad es mucho menor que la primera (Borovcnik, 2012).

Vallecillos (1994) encontró esta misma confusión en una amplia muestra de estudiantes universitarios, al interpretar el nivel de significación $\alpha$ en los contrastes de hipótesis. Dicho nivel de significación es la probabilidad condicional de obtener un resultado estadísticamente significativo cuando la hipótesis nula *Ho* es cierta, pero se interpreta como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta, cuando se ha obtenido un resultado estadísticamente significativo. Este error también se mostró en muchos estudiantes en la investigación de Díaz (2007).

## 2.4 LA FALACIA DEL EJE TEMPORAL

Consiste en la dificultad que tiene para algunos estudiantes calcular probabilidades condicionales cuando la condición que se pone ocurre después del suceso cuya probabilidad se calcula. Sin embargo, esta situación aparece al aplica el Teorema de Bayes, que, como sabemos, tiene el siguiente enunciado:

Sea $\{A_1, A_2, \dots A_i, \dots A_n\}$ un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea *B* un suceso cualquiera del que se conocen todas las probabilidades condicionadas $\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_i)$. Entonces, la probabilidad $\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_i)\mathrm{P}(A_i)}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$, donde $P(A_i)$ son las probabilidades a priori,

$P(B|A_i)$ es la probabilidad de $B$ en la hipótesis $A_i$, y por último, $P(A_i|B)$ son las probabilidades a posteriori.

Si tuviésemos solo dos sucesos, $A$ y $B$, y conociésemos $P(A)$, la cual es no nula, $P(B)$ y $P(A|B)$, podríamos ver el Teorema de Bayes de la siguiente manera:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

En la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes hay algunos tipos de errores identificados por Gras y Totohasina (1995) en una muestra 75 estudiantes de 17 y 18 años, que son los siguientes:

1. Interpretar la probabilidad condicional $P(A|B)$ como una relación temporal, donde el suceso $B$ siempre precede al suceso $A$. Aparece en el 63% de estudiantes de esta investigación. Sin embargo, se puede condicionar una probabilidad por un suceso que ocurre posteriormente: por ejemplo, en las pruebas de paternidad calculamos la probabilidad de que una persona sea padre de un hijo, dado el resultado de la prueba, donde ésta se realiza mucho después de haber nacido el hijo.
2. Interpretar $P(A|B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso $B$ es la causa y el suceso $A$ es la consecuencia (28% de estudiantes); es decir, no se consideran las probabilidades diagnósticas.
3. Interpretar $P(A|B)$ como la proporción *Card* $(A \cap B)$*/Card(B*), que solo es correcta si tenemos un espacio muestral finito equiprobable. Otro error es suponer que $P(A|B)$ es la proporción *Card(A)/Card(B)*, lo cual es falso siempre.

Estos autores piensan que las dos primeras situaciones erróneas son de tipo cognitivo, sin embargo la última relacionada con el cardinal es debida a una mala enseñanza.

Particularmente, como se ha indicado un error muy común es suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional tiene que preceder temporalmente al condicionado, conocido como falacia del eje temporal. Este error fue trabajado por Falk (1986); veamos uno de sus ejemplos.

> Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento.
>
> a. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar?
>
> b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar?

Las dos preguntas son matemáticamente equivalentes, pero no se ven de esta manera. Resulta muy curioso que en la investigación de Falk la primera pregunta fuese respondida sin dificultad, pero muchos estudiantes no pudieron responder correctamente la segunda pregunta. En esta se da incluso la respuesta de ½, teniendo en cuenta únicamente la composición inicial de la urna sin utilizar el dato del resultado posterior Otros estudiantes indican que no se puede calcular esta probabilidad. Resultados similares fueron obtenidos por Contreras (2011) en una muestra de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, lo que da idea de la extensión de esta falacia,

## 2.5 SITUACIONES DIACRÓNICAS Y SINCRÓNICAS

Otro error común es no relacionar el experimento compuesto con experimentos simples simultáneos, sino suponer que en un experimento compuesto, todos los experimentos simples han de ir uno detrás del otro. En un experimento compuesto se distinguen dos situaciones, las diacrónicas y las sincrónicas.

a. *La situación diacrónica* consiste en la realización de varios experimentos seguidos en el tiempo, diferenciándose cada uno del anterior. Pongamos un ejemplo, donde la separación en el tiempo se ve claramente; cada experimento es una extracción de la urna:

   > En un cuenco hay 4 caramelos de limón y dos de naranja. Cogemos uno de limón y nos lo comemos. Volvemos a coger otro caramelo, esta vez al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo caramelo sea de limón nuevamente?

b. La situación sincrónica trata de una serie de experimentos que no suceden uno detrás de otro, sino que ocurren al mismo tiempo. Veámoslo mejor en un ejemplo, donde hay dos experimentos simultáneos: a) ver el color de la aceituna y b) mirar si tiene hueso.

   > Tenemos un cuenco con 20 aceitunas verdes con y 10 sin hueso, 15 aceitunas negras con hueso y 10 sin hueso. Si cogemos una aceituna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra y tenga hueso?

Lo importante del cálculo de probabilidades condicionadas es cambiar el espacio muestral al suceso condicionante. Sin embargo, en las situaciones sincrónicas los estudiantes a veces no perciben el experimento compuesto. Algunos autores como Totohasina (1992) indican que se puede ayudar a diferenciar los experimentos simples en el experimento compuesto con la ayuda del diagrama en árbol.

## 2.6 LA FALACIA DE LA CONJUNCIÓN

Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) indican que los enunciados que usan la conjunción "y" pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional, como ocurrió en su investigación donde la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento.

Un error relacionado es la *falacia de la conjunción* (Tversky y Kahneman, 1982) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión, cuando uno de ellos es muy probable. Sin embargo, puesto que la probabilidad de la intersección se obtiene multiplicando dos probabilidades, que son números menores o iguales a la unidad, el resultado de esta multiplicación nunca puede ser mayor que la de uno de los factores.

Díaz (2007) evalúa de la falacia de la conjunción en su cuestionario indicando que el problema de la falacia de la conjunción se dio en forma similar en todos los grupos de estudiantes. Esta falacia también aparece en el trabajo de Contreras (2011) con futuros profesores.

## 2.7 OTROS SESGOS DE RAZONAMIENTO

Otro tipo de dificultad que tienen los estudiantes se debe a cómo se ha enunciado el problema y que el contexto del que resuelven les sea conocido; por ejemplo, la confusión entre probabilidad condicional y conjunta aparece sobre todo en el contexto médico (Huerta y Arnau, 2017; Huerta et al., 2011).

Por otro lado es importante el formato en que se dan los datos. Pollatesk et al, (1987) proponen el mismo problema a un grupo de alumnos, con la diferencia que uno era enunciado con probabilidades y otro con porcentajes y concluyen que los estudiantes respondieron más correctamente al problema con los datos dados en porcentajes. En relación con este punto Gigerenzer (1994) realiza una investigación sobre un grupo de estudiantes en la que se debe usar el Teorema de Bayes, pero los datos los propone en forma de frecuencias absolutas, y con esos términos, el porcentaje de respuestas favorables es mayor que si los datos estuviesen dados en forma probabilidades o incluso de porcentajes. Este autor sostiene que cuando la información la obtenemos en términos frecuenciales, el cálculo de probabilidades es más sencillo y más claro, porque en la vida diaria contamos los sucesos con frecuencia y no con fracciones (probabilidad) o porcentajes. En el mismo sentido, Lonjedo y Huerta (2005) clasifican los problemas de probabilidad condicional atendiendo a diferentes variables: tipos de datos (probabilidad, frecuencias absolutas, razón o una combinación de los anteriores. Sus resultados indican que la resolución de los problemas no depende de recordar las fórmulas, sino de interpretar bien los datos del enunciado.

Otros errores se cometen debido a la mala comprensión del Teorema de Bayes, debido a que no distinguen cuál es la secuencia de los sucesos, provocando confusión entre probabilidad condicional y conjunta, o invierten el condicionado y el condicionante. Díaz y de la Fuente (2006) propusieron una serie de problemas en que hay que aplicar el teorema de Bayes a estudiantes de Psicología, antes y después de la enseñanza de la probabilidad condicional. Su estudio se basa en otro de Tversky y Kahneman (1982) que estudian la denominada *falacia de las tasa base*. Denominan de este modo a ignorar la probabilidad a priori del suceso en la población en problemas que involucran el teorema de Bayes, es decir, a tratar los problemas de Bayes como problemas de probabilidad simple o compuesta. Estas autoras describen los siguientes pasos que se requieren para resolver los problemas de Bayes:

a. Identificar los datos del problema: Se han de identificar las probabilidades simples y compuestas en el enunciado,
b. Construir una representación adecuada: El segundo paso es construir un diagrama de árbol adecuado para representar el experimento y la partición de la población. Esta representación debe servir al estudiante para reconocer el conjunto de sucesos posibles.
c. Identificar la probabilidad condicional por la que se pregunta: Es necesario identificar la probabilidad que se pide en el problema, que es una probabilidad inversa.
d. Calcular el denominador de la fórmula de Bayes usando la fórmula de la probabilidad total.
e. Calcular la probabilidad inversa, aplicando el teorema de Bayes.

## 2.8 COMPRENSIÓN DE LA INDEPENDENCIA

Se han realizado varias investigaciones en alumnos sobre la comprensión de la independencia, que no resulta tampoco un concepto sencillo de aplicar, aunque, como hemos visto la definición matemática no revista dificultad. Así en la investigación de Sánchez (1996) con 88 profesores en activo de matemáticas en secundaria observó muchas dificultades. Una de ellas es confundir sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes. El autor pregunta a los sujetos si, al sacar una carta de una baraja ordinaria, los sucesos “ser reina” y “ser una carta de corazones” son o no independientes. Sólo 39 profesores dieron una respuesta correcta al problema planteado, mientras el resto dice que no son independientes pues existe la reina de corazones; sólo cuatro profesores utilizaron la regla del producto para justificar su solución. Otro error encontrado por este autor es pensar que para que dos sucesos sean independientes tienen que pertenecer a experimentos aleatorios diferentes, aunque esto no es necesario en general.

En un trabajo más reciente, D’Amelio (2004) propone un problema sobre probabilidad e independencia en una clase de estadística de una carrera de humanidades, ya que se había observado que, a pesar de aprobar los exámenes, se detectaban errores con estos dos conceptos. Los errores más comunes que se extraen de esta investigación son la confusión del uso de la regla de la multiplicación con la regla de la adición para probar la independencia. Los estudiantes usan la siguiente fórmula errónea: $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$, en la que usa la unión en vez de la intersección, para probar la independencia; igualmente relacionan sucesos mutuamente excluyentes con independientes.

Esta autora realiza un estudio sobre la historia y la epistemología en relación a la independencia estocástica, y se apoya en el estudio hecho por Steinbring (1986), quien afirma que la dificultad en la comprensión de la independencia se encuentra en entender a la vez la definición matemática y las representaciones intuitivas, las cuales nos ayudan a comprender si los sucesos son independientes entre sí.

También cita a Von Mises (1964) que da ejemplos de situaciones que en matemáticamente los sucesos son dependientes pero que las personas no consideran dependientes, pues se perciben como sucesos que no tienen influencia mutua; un ejemplo de ello son las situaciones en las que se aplica la falacia temporal. Por otro lado Feller (1983) expone que, en general, nuestra intuición sobre si dos sucesos son o no independientes es correcta, pero existen situaciones en las que para saber si dos sucesos son independientes o no hay que usar la fórmula matemática de la independencia.

Otro estudio reciente sobre la independencia es el de Kataoka, Hernandez y Borim (2010), que contaba con 34 alumnos de máster y 22 estudiantes de universidades de Brasil y 27 estudiantes de institutos de México. Las preguntas fueron las mismas para todos; entre ellas en una se pedía que se explicase el significado de un suceso independiente. También se dieron ejemplos de sucesos que consistían en lanzar dados, en los que el estudiante tenía que decidir si eran o no independientes. En general las respuestas fueron que eran independientes porque lo único que se hacía era lanzar el dado. Las respuestas se clasificaron en correctas, incorrectas, imprecisas, correctas, pero informales y correctas con justificación matemática. Las conclusiones extraídas de este trabajo dejan ver que no se entiende el concepto de independencia correctamente, incluso en personas con estudios relacionados con probabilidad e independencia de sucesos. Los errores frecuentes que se detectaron es usar solo la definición de independencia asociada a los experimentos sucesivos, o no saber la diferencia entre independencia e incompatibilidad. Resultados muy simulares fueron obtenidos en las investigaciones de Cordani y Wechsler (2006) y Tari y Diblasi (2006).

## 2.9 COMPRENSIÓN DE LA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Algunos trabajos han preguntado directamente a los estudiantes que den la definición de la probabilidad condicional. Es el caso de Díaz (2007), quien hace esta pregunta a una muestra de 600 estudiantes de psicología, que han explicar en sus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional. Aunque la mayoría de los alumnos define correctamente las dos probabilidades o al menos una, la tercera parte de los alumnos no da respuesta o tiene errores en una o las dos definiciones.

En una investigación realizada en el contexto de formación de futuros profesores (Batanero, Cañadas, Contreras y Díaz, 2013) se estudia las respuestas dadas por una muestra de 196 estudiantes de Matemáticas y del Máster de formación de Profesorado de diversas universidades española a un cuestionario de comprensión de la probabilidad condicional. Una de las preguntas pide definir los conceptos de probabilidad condicional y probabilidad simple. Las respuestas se clasifican diferenciando entre definiciones correctas, incorrectas e imprecisas.

Consideran que las definiciones aportadas por los sujetos del estudio son correctas si siguen las condiciones especificadas por Leikin y Winicki-Landman (2001): las definiciones dan nombre a los conceptos y establecen sus condiciones necesarias y suficientes; deben incluir un número mínimo de tales condiciones y se basan en otros conceptos previamente definidos. Sólo 15,8 % de los participantes define correctamente las dos probabilidades simple y condicional. Estas definiciones correctas son las que son completas y pueden darse ya sea a través del uso correcto de la fórmula

(4,1%) o verbalmente (11,7%). Si desglosamos, el 20% de los estudiantes de matemáticas contestó correctamente frente un 11,8% que lo hizo de los estudiantes de Máster.

Entre las definiciones incorrectas los autores encuentran errores en las fórmulas, al definir la probabilidad condicional mediante su fórmula, intercambiar la definición de probabilidad condicional y simple o conjunta o definir uno de estos conceptos incluyendo el propio concepto en la definición. El porcentaje de alumnos con errores formales es del 5,6%, por confusión de conceptos 3,1% y por errores en fórmulas 1%, Desglosando, un 11,6% es perteneciente a los estudiantes de matemáticas y un 24,7 % a los de Máster.

Consideran que las definiciones son imprecisas si se añade más condiciones de las requeridas al definir el concepto, si se asume que un suceso es dependiente del otro al definir la probabilidad condicional, o usa un ejemplo correcto en vez de dar la definición. El porcentaje de error en este apartado es del 3,1%, siendo un 4,2% el porcentaje de estudiantes de matemáticas que lo han cometido y un 2,0% de Máster.

Si define bien solo la probabilidad condicional hacen otra clasificación, dependiendo de si olvida definir la probabilidad simple, pero define la condicional de forma verbal, sin fórmulas (2,0%), no define la probabilidad simple pero la condicional sí lo hace, pero con fórmulas (2,0%) o por último, definen bien la probabilidad condicional pero la simple la definen apoyándose en el concepto de independencia (2,0%), dando un total del 6,0%. En este bloque tenemos a un 4,2% de los estudiantes de matemáticas y un 8% de los de Máster.

Si no define ninguna de las probabilidades de forma correcta la clasificación se divide en seis grupos según el error cometido: suponer que el suceso condicionante ocurre antes del condicionado, es decir, muestran la falacia del eje temporal (17,3%), suponer que el suceso condicionante es dependiente (25%), usar fórmulas incorrectas para definir alguna de las probabilidades (4,6%), definir dando las diferencias entre las probabilidades pero de forma imprecisa (5,1%), dar ejemplos en vez de definición o no distinguir bien entre sí la probabilidad simple o condicional o confundir alguna de ellas con la conjunta (4,6%). En este bloque tenemos un total del 56,7%, más de la mitad, donde, si hacemos distinciones, el 60% de los estudiantes de matemáticas cometieron ese error frente a un 53,3% de los alumnos del Máster. Por último, un 8,7% dejó las preguntas en blanco.

Con este trabajo se concluye que definir correctamente la probabilidad condicional no es fácil incluso para futuros profesores, por lo que deberían reforzarse estos conceptos en las distintas carreras y en el propio Máster de profesorado.

## 2.10 CONCLUSIONES SOBRE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS

Entender la probabilidad condicional y la independencia no es una tarea sencilla, incluso para las personas que estudian temas relacionados con ello. Hay que reforzar no solo a los alumnos, de cada curso correspondiente, sino a los propios profesores, ya que se ha detectado un continuo error en esta parte de la matemática, y se cree que debido a estas inseguridades estos temas no suelen darse en la etapa de ESO con profundidad así como en Bachillerato.

La mayoría de las investigaciones se lleva a cabo con estudiantes universitarios, aunque la probabilidad condicional y la independencia se estudian actualmente en la educación secundaria y el Bachillerato. En concreto, ninguna de las investigaciones que hemos encontrado con estudiantes de estos niveles se interesa por ver si los estudiantes comprenden las definiciones de los conceptos. Es claro que si no comprenden estas definiciones o la diferencia con otros conceptos difícilmente podrán resolver con éxito los problemas.

Esta carencia nos lleva a realizar un estudio de evaluación con estudiantes de Bachillerato donde tratamos de ver su grado de comprensión de estas definiciones, lo que haremos pidiéndoles tanto que nos describan la diferencia de estos conceptos con otros relacionados, como que nos proporcionen ejemplos de los mismos. Se complementa el estudio con la resolución de un problema. Los resultados de este estudio se exponen en el Capítulo 3.

# CAPÍTULO 3. ESTUDIO DE EVALUACIÓN

## 3.1 INTRODUCCIÓN

En este tercer capítulo se describe el estudio de evaluación realizado con grupos de estudiantes de Bachillerato de distintos centros. Por tanto, en las siguientes secciones presentaremos el cuestionario que se entregó a los sujetos, y cuyas respuestas permitirán analizar su comprensión intuitiva de los conceptos de probabilidad, probabilidad condicional e independencia, conocer los ejemplos que de cada uno de estos conceptos proporcionan, así como los recursos que utilizan al resolver un problema en que intervienen dichos conceptos.

Se introducirá la muestra elegida y su contexto y se realizará un análisis detallado del cuestionario de evaluación, Por último, analizaremos las respuestas de los estudiantes en cada una de las preguntas propuestas, relacionándolas con las investigaciones previas. Finalmente se expondrán las propias conclusiones extraídas de este estudio.

## 3.2 CUESTIONARIO UTILIZADO

El cuestionario propuesto está formado por un total de seis preguntas, dos de ellas teóricas y tres de respuesta abierta. La primera pregunta pide al estudiante explicar con sus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicionada. Pretendemos con esta pregunta que el estudiante defina cada uno de estos conceptos, indicando sus diferencias. Esta pregunta fue tomada de la investigación de Batanero, Contreras, Díaz y Cañadas (2013). Siguiendo a estos autores, se evaluarán como correctas las respuestas donde el sujeto, o bien da una definición correcta, estableciendo sus condiciones necesarias y suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001) o pone un ejemplo adecuado de cada una de las probabilidades. También se tomarán como correctas las respuestas que indican las diferencias entre los conceptos o ejemplos en que se vean claramente las diferencias.

La segunda pregunta pide explicar son sus propias palabras las diferencias que se observan entre sucesos independientes y dependientes. Esta pregunta es de elaboración propia e con ella tratamos que el estudiante defina cada uno de estos conceptos. Al igual que en la anterior se tomarán como correctas las definiciones que dan las condiciones necesarias y suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001) o ponen ejemplos adecuados, indican las diferencias entre los conceptos o mostrando claramente las diferencias.

En las preguntas 3, 4 y 5 se pide exponer dos ejemplos que se encuentren en la vida real o diaria en las que se use la probabilidad simple, otros dos en la que se use la probabilidad condicionada, dos sucesos independientes y dos dependientes. Con ellas tratamos de valorar la fenomenología que los estudiantes asocian a cada uno de estos conceptos y específicamente ver si son capaces de citar aplicaciones más allá de los juegos de azar.

La sexta y última pregunta está orientada a la aplicación de los conceptos anteriores en una situación práctica y se solicita que se resuelva el siguiente problema:

> **Problema**: Una urna A contiene 4 bolas blancas y 2 negras y otra urna B contiene 1 blanca y 3 negras. Se extrae una bola al azar de la urna A y se introduce en la B. Después se extrae de la urna B una bola al azar.
>
> a. Calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.
> b. En el supuesto de que la bola extraída de la urna B ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna A también fue blanca

Una de las formas más sencillas de resolver el primer apartado de este problema es mediante diagrama de árbol presentado en la Figura 3.1, donde se visualizan las posibilidades que se pueden realizar en las diferentes extracciones. Podemos observar que la probabilidad de sacar blanca de la urna A es $\frac{4}{6}$, por lo que al meter una bola blanca en la urna B, esta pasa a tener dos bolas blancas y 3 negras. En consecuencia, la probabilidad de sacar una bola blanca es de $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ de sacar una bola negra.

Sin embargo, si de la urna A extraemos una bola negra, esa probabilidad es de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Al introducir la bola negra en la urna B, tendremos una bola blanca y 4 negras, por lo que hay una probabilidad de $\frac{1}{5}$ de sacar una bola blanca de la urna B y una probabilidad de $\frac{4}{5}$ de sacar una bola negra.

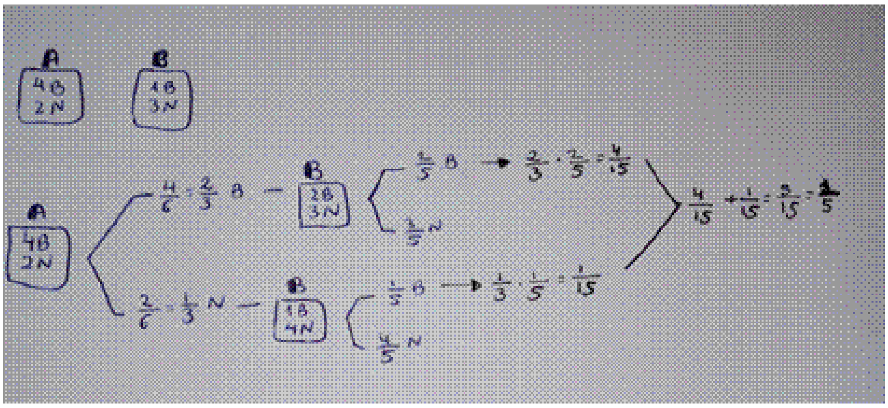



Figura 3.1. Solución del problema mediante diagrama en árbol

Recordemos que si queremos calcular la probabilidad de un suceso elemental en un experimento compuesto como es el de este problema, esta probabilidad se calcula multiplicando las probabilidades que se encuentran en las ramas del diagrama de árbol que llevan hasta dicho suceso. Es por eso que la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna B, habiendo sacado blanca de la urna A, puede calcularse de la siguiente manera $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$. La probabilidad de sacar blanca de la urna B habiendo extraído una bola negra de la urna A es $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$. Como en el primer apartado se quiere calcular la probabilidad de extraer bola blanca de la urna B, se sumarían ambas probabilidades, por lo que el resultado es: $\frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Este es el razonamiento que se espera que hagan los estudiantes tras hacer el diagrama de árbol.

Otra forma de razonamiento para realizar este apartado es usando el teorema de la probabilidad total, que indica lo siguiente:

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición sobre el espacio muestral y sea $B$ un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces la probabilidad del suceso $B$ viene dado por la expresión:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

En nuestro problema tenemos dos particiones, $A_1 = sacar\ bola\ blanca\ de\ la\ urna\ A$ y $A_2 = sacar\ bola\ negra\ de\ la\ urna\ A$. Como queremos calcular la probabilidad de sacar bola blanca de la urna B (esto sería nuestro suceso $B$),

$$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(B|A_i)P(A_i) = P(\mathrm{B}|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$$

Sabemos que $P(A_1) = \frac{4}{6}$, $P(A_2) = \frac{2}{6}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_1) = \frac{2}{5}$ y por último $P(B|A_2) = \frac{1}{5}$. Sustituyendo en la fórmula de la probabilidad total tenemos que:

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

El segundo apartado, se puede, en primer lugar, resolver de manera intuitiva, partiendo de la solución hallada en el diagrama en árbol representado en la Figura 1. Sabemos que dentro de dicho diagrama de árbol, el suceso sacar blanca sabiendo que se ha extraído otra bola blanca de la urna A nos sitúa en la primera rama. Sabemos que la probabilidad de sacar bola blanca de la urna B puede ser $\frac{4}{15}$ si se ha extraído bola blanca de la urna A o bien $\frac{1}{15}$ si se ha extraído bola negra de la urna B. En este modo de resolución, el problema se podría ver como un cálculo de probabilidad sencillo, donde la probabilidad de extraer bola blanca de la urna B es $\frac{5}{15}$, y la probabilidad de extraer bola blanca de la urna B habiendo extraído previamente una bola blanca de la urna A, la cual corresponde a una probabilidad de $\frac{4}{15}$. Por tanto el resultado final es $\frac{4}{15} : \frac{5}{15} = \frac{4}{5}$.

Otro modelo de solución es si el  estudiante observa que se pide calcular una probabilidad condicionada, y utiliza directamente su fórmula de cálculo de la siguiente manera:

Sea *C* el suceso sacar blanca en la urna B y sea *D* el suceso sacar blanca en la urna A (no se espera que el  estudiante escriba con detalle esto último). Usando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(D|C) = \frac{\frac{4\cdot 2}{6\cdot 5}}{\frac{4\cdot 2}{6\cdot 5} + \frac{2\cdot 1}{6\cdot 5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

La tercera forma de resolverlo sería usando el Teorema de Bayes, el cual recordemos dice lo siguiente:

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(\mathrm{B}|A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(\mathrm{B}|A_i) \cdot P(A_i)}{\mathrm{P(B)}}$$

En este ejercicio lo que queremos es calcular $P(A_1|B)$, y como hemos calculado en el apartado primero $P(\mathrm{B}|A_i) \cdot P(A_i)$ y $P(B)$ cuando se ha usado el Teorema de la probabilidad total, podemos concluir que: $P(A_1|B) = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}$

## 3.3 MUESTRA Y CONTEXTO UTILIZADO

Ya hemos tratado en el primer capítulo que la población sobre la que se realizaría este trabajo está constituida por los estudiantes de Bachillerato. La muestra está formada por un total de 52 estudiantes de los cuales 21 son de primero de Bachiller y 31 de segundo de Bachillerato, de tres centros distintos de la provincia de Málaga que se encontraban estudiando durante el curso 2016-2017, uno privado y dos públicos. Los públicos son de la localidad de Alhaurín de la Torre, mientras que el privado se encuentra situado en la capital malagueña.

El motivo de elegir estudiantes de Bachillerato era asegurarnos diferentes tipos de respuestas, ya que se han tomado cursos en los que se había dado el tema de probabilidad recientemente y/o en el curso anterior. Las edades de los estudiantes se encuentran entre los 16 y 19 años. Siendo más específicos, 23 estudiantes tienen 16 años, 25 tienen 17 y cuatro tienen mayoría de edad, tres de ellos con 18 años y uno con 19.

La recogida de datos ha sido temporalmente distinta, dependiendo del instituto, ya que queríamos que ese cuestionario se hiciese después de iniciado el tema, y cada profesor encargado de dar la asignatura de Matemáticas se organizó el temario de forma distinta. Sin embargo, todas ellas coinciden en que se hicieron en horario de matemáticas, como una actividad más de la asignatura, por lo que el profesor se encontraba presente.

El cuestionario tomó un periodo de 25-35 minutos, se ha hecho de forma individual en cada uno de los institutos y ha sido el mismo para todos, independientemente del curso. Se agradece la colaboración de los centros que han participado en esta investigación, profesores, directores y estudiantes.

## 3.4 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

El diseño de esta investigación es mixto, ya que se trabaja con análisis estadísticos los datos que se han extraído de las respuestas dadas por los estudiantes a un cuestionario. Sin embargo, la clasificación de sus respuestas se basa en el análisis de contenido que estudia la naturaleza del discurso y que se utiliza para el análisis sistemático de documentos escritos (Porta y Silva, 2003). En nuestro caso, las respuestas de los estudiantes se han clasificado en categorías, mediante varias revisiones y comparación de unas con otras, siguiendo el proceso cíclico típico de la investigación cualitativa (Sandín, 2003). Incorporamos también en nuestro análisis algunos ejemplos de los estudiantes y, en consecuencia, podemos clasificar la metodología de la investigación como mixta.

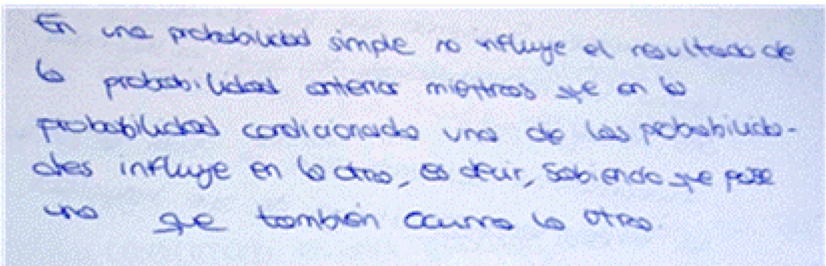
En dichos ejemplos se tendrán en cuenta las respuestas con indicios de sesgos de razonamiento que se repitan en los estudiantes, y nos permitan evaluar mejor su conocimiento. A continuación, se exponen los resultados.

## 3.5 DEFINICIONES

### 3.5.1 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD SIMPLE

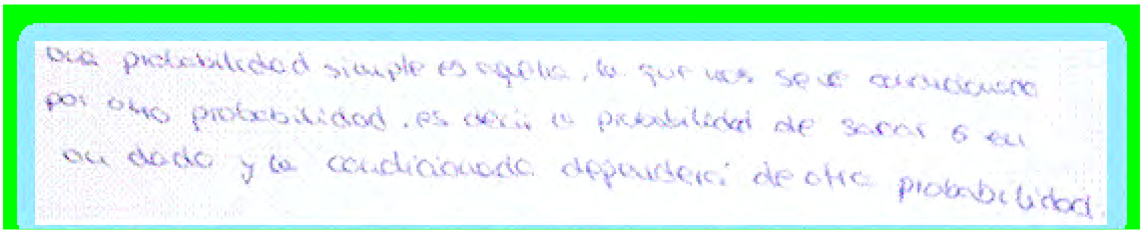
En esta pregunta se analiza la definición dada de probabilidad simple por los estudiantes. Su clasificación será por correcta, incorrecta, correcta pero imprecisa o en blanco.

Para considerarla correcta y según Leikin y Winicki-Landman (2001) la definición ha de establecer las condiciones necesarias y suficientes; deben incluir un número mínimo de tales condiciones y puede incluir otros conceptos previamente definidos. Como ejemplo de definición correcta de probabilidad simple podemos exponer el siguiente caso, donde se incluyen conceptos previos (resultado). Incluye una condición suficiente (que no se haga depender de otro suceso). Sin embargo, el lenguaje utilizado por el estudiante es informal.


En una probabilidad simple no influye el resultado de la probabilidad anterior mientras que en la probabilidad condicionada una de las probabilida-des influye en la otra, es decir, sabiendo que pase una que también ocurra la otra.

La definición es imprecisa cuando cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001) al incluir todas sus condiciones necesarias o suficientes, pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias.

Como ejemplo de definición correcta, pero imprecisa tenemos la siguiente respuesta, donde el estudiante no es capaz de dar la definición sin recurrir al ejemplo; en la investigación de Batanero, Contreras, Díaz y Cañadas (2013) el 4,6% de participantes da un ejemplo en vez de la definición, y en nuestro caso ese porcentaje corresponde al 15,4%:


Una probabilidad simple es aquella, la que no se ve condicionada por otra probabilidad. es decir la probabilidad de sacar 6 en un dado y la condicionada dependería de otra probabilidad

Las respuestas imprecisas se deben a que el estudiante añade la idea de que todos los sucesos tienen la misma probabilidad en todos los casos. Serían los estudiantes que expresan el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992), que consiste en considerar equiprobables todos los resultados de cualquier experimento aleatorio.

La definición sería incorrecta cuando no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes o se confunden conceptos implicados en las mismas. Uno de los fallos ha sido confundir la probabilidad simple con compuesta, al igual que ocurrió en el trabajo de Batanero et al. (2013) o dar ejemplos ajenos al cálculo de la probabilidad simple. En el siguiente ejemplo se confunde la probabilidad con el fenómeno que se estudia:

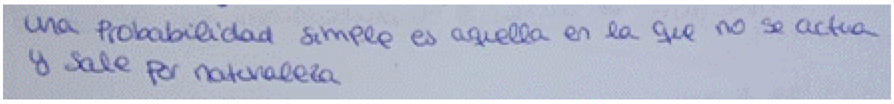

Una probabilidad simple es aquella en la que no se actua y sale por naturaleza

Tabla 3.1. Resultados en la definición de la probabilidad simple

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Correcta | 2 | 21 | 23 |
| Correcta pero imprecisa | 2 | 6 | 8 |
| Incorrecta | 11 | 1 | 12 |
| Blanco | 6 | 3 | 9 |

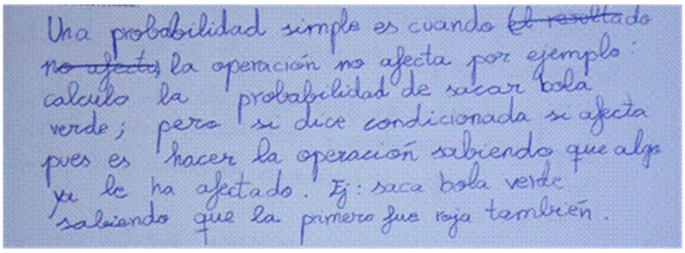
En la Tabla 3.1 se presentan los resultados en este apartado, donde el porcentaje de respuestas correctas es del 44,2%, aproximándose a la mitad de los estudiantes. Por otro lado, en el trabajo de Batanero et al. (2013) el 9,7% da una definición incorrecta de la probabilidad simple, y en nuestra investigación ese porcentaje sube hasta llegar al 23,1%, lo que es lógico al tratarse de estudiantes. Hay que destacar el porcentaje de

17,1% correspondiente a los que han dejado la definición sin contestar la pregunta, frente al 8,7% del trabajo de Batanero et al. (2013). Observamos mucho mejores resultados en el segundo curso.

### 3.5.2 DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONADA

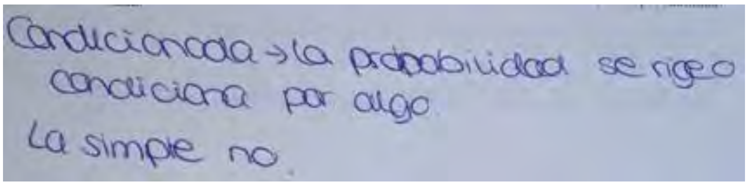
En esta pregunta, en primer lugar hemos analizado si la definición es correcta, correcta pero imprecisa o incorrecta, basándonos en el trabajo de Leikin y Winicki-Landman (2001). Se tendrán en cuenta también las respuestas en blanco.

En el artículo de Batanero (2013) se clasifican las respuestas correctas en dos modalidades: no usa fórmulas y usa fórmulas. En nuestro trabajo tan solo una persona ha dado la definición usando la fórmula de probabilidad condicionada, por lo que no tendremos en cuenta estas dos categorías y nos basaremos en comprobar que las definiciones son correctas según Leikin y Winicki-Landman (2001). Como ejemplo de definición correcta podríamos poner el siguiente ejemplo:



Una probabilidad simple es cuando ~~el resultado no afecta~~ la operación no afecta por ejemplo: calculo la probabilidad de sacar bola verde; pero si dice condicionada si afecta pues es hacer la operación sabiendo que algo ya le ha afectado. Ej: saca bola verde sabiendo que la primero fue roja también.

Cuando la definición cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001) al incluir todas sus condiciones necesarias o suficientes, pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias estamos ante un caso de definición correcta pero imprecisa. Las imprecisiones pueden ser debidas a fallos comunes en el uso del lenguaje o suponer que los sucesos tienen cierta dependencia. En este ejemplo que sigue no aparece la palabra suceso, y no se explica bien, aunque se puede sobreentender que el estudiante tiene cierto conocimiento de lo que quiere decir:



Condicionada → la probabilidad se rige o condiciona por algo
La simple no.

La definición es incorrecta cuando no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001) o se confunden conceptos implicados en las mismas. En el siguiente ejemplo de definición de probabilidad condicionada, vemos que el estudiante ha caído en el error de asumir que el suceso condicionante tiene que ser anterior al condicionado, apareciendo la falacia del eje temporal (Gras y Totohasina, 1995; Tversky y Kahneman, 1982):

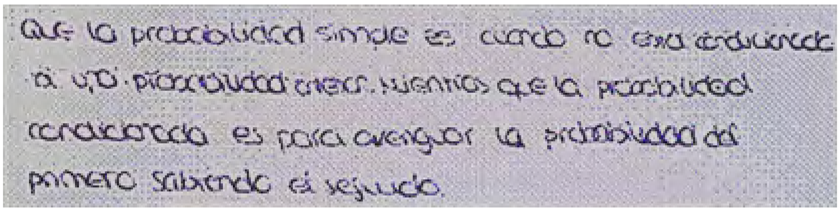

Que la probabilidad simple es cuando no está condicionada a una probabilidad anterior. Mientras que la probabilidad condicionada es para averiguar la probabilidad del primero sabiendo el segundo.

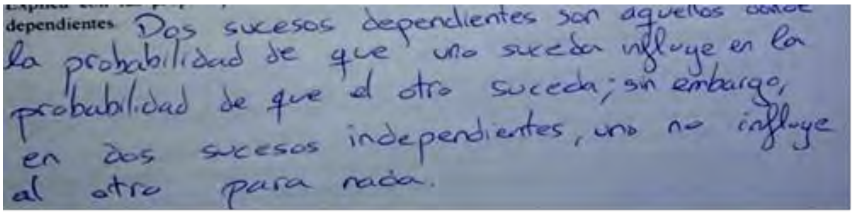
Tabla 3.2. Resultados en la definición de la probabilidad condicionada

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Correctas | 3 | 22 | 25 |
| Correcta pero impreciso | 3 | 3 | 6 |
| Incorrecta | 9 | 4 | 13 |
| Blanco | 6 | 2 | 8 |

En la Tabla 3.2 se muestran los resultados obtenidos en este apartado, donde las definiciones que podemos considerar como correctas son de un 48,1%, rozando la mitad de los estudiantes encuestados. Podemos observar que en el trabajo de Batanero et al. (2013) alrededor del 50% da una definición incorrecta o imprecisa de la probabilidad condicionada. En las definiciones imprecisas en nuestra investigación ese porcentaje baja hasta 36,5%. Por otro lado, el 15,4% ha dejado la pregunta sin contestar y las definiciones correctas. Como en el caso anterior las respuestas mejoran mucho en los estudiantes de segundo curso.

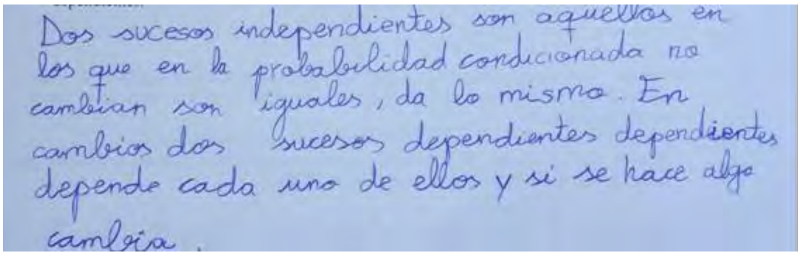
### 3.5.3 DEFINICIÓN DE SUCESO DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE

Como en la pregunta anterior, hemos clasificado las definiciones, dependiendo de las respuestas dadas para las dependientes y para las independientes. Como en los casos anteriores, para considerar la definición correcta y según Leikin y Winicki-Landman (2001) la definición debe incluir las condiciones necesarias y suficientes; y suelen incluir otros conceptos previamente definidos. Veamos un ejemplo que muestra un caso de definición correcta tanto de independencia como de dependencia. El estudiante incluye una condición necesaria y suficiente (que un suceso incluye en la probabilidad del otro); además incluye los conceptos previos de suceso y probabilidad:



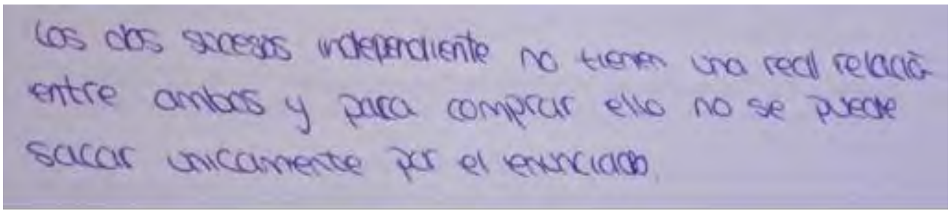
dependientes Dos sucesos dependientes son aquellos donde la probabilidad de que uno suceda influye en la probabilidad de que el otro suceda; sin embargo, en dos sucesos independientes, uno no influye al otro para nada.

La definición es imprecisa cuando cumple las condiciones de Leikin y Winicki-Landman (2001) al incluir todas sus condiciones necesarias o suficientes, pero es confusa o bien añade condiciones no necesarias. Un ejemplo de definición del significado de  dependencia correcto pero impreciso, teniendo en cuenta el vocabulario matemático de estos estudiantes, es el siguiente, aunque el de independencia es correcto:



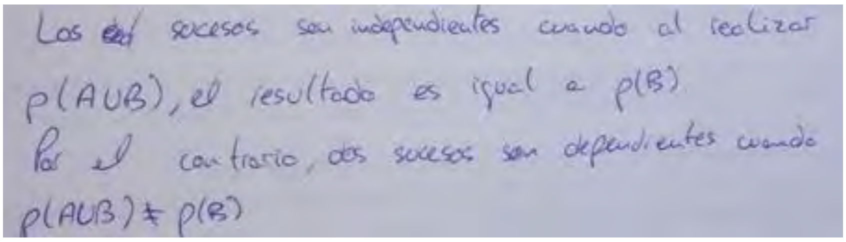
Dos sucesos independientes son aquellos en los que en la probabilidad condicionada no cambian son iguales, da lo mismo. En cambios dos sucesos dependientes dependientes depende cada uno de ellos y si se hace algo cambia.

Un ejemplo de definición correcta pero imprecisa de independencia, es el que sigue. El estudiante indica que los sucesos no tienen relación (lo que es una condición suficiente), pero ha añadido una característica que no es cierta, que es que la dependencia no se deduce del enunciado:



Los dos sucesos independiente no tienen una real relació entre ambos y para comprar ello no se puede sacar unicamente por el enunciado.

La definición sería incorrecta cuando no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna de sus condiciones necesarias o suficientes o se confunden conceptos implicados en las mismas. Un ejemplo de definición incorrecta de dependencia y de independencia, debido a que ha cometido errores a la hora de querer usar la fórmula en la definición se reproduce a continuación. El estudiante indica que la probabilidad de la unión es igual a la probabilidad del suceso; sin embargo, la condición sería que la probabilidad condicionada fuese igual a la probabilidad simple o bien que la probabilidad de la intersección fuese igual al producto de probabilidades:


Los sucesos son independientes cuando al realizar
$p(A \cup B)$, el resultado es igual a $p(B)$
Por el contrario, dos sucesos son dependientes cuando
$p(A \cup B) \neq p(B)$

La Tabla 3.3 refleja los resultados para las respuestas dadas a la definición de sucesos dependientes, donde podemos observar que el 38,5% responde correctamente y el 17,3% lo hace de manera imprecisa. A esto le añadimos el 23,1% que responden incorrectamente y el 21,1% de definiciones en blanco. No tenemos patrón de comparación para esta pregunta con investigaciones previas y observamos de nuevo mejores resultados en segundo curso. Sin embargo, hacemos notar que no hemos encontrado en las definiciones la confusión entre sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes que Sánchez (1996) describe en su investigación. Interpretamos este hecho porque nosotros hemos pedido al estudiante dar la definición, mientras el autor les propuso ejemplos de sucesos independientes y mutuamente excluyentes que sus estudiantes no discriminaron.

Tabla 3.3 Resultados en la definición de suceso dependiente

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Correctas | 4 | 16 | 20 |
| Correcta pero impreciso | 4 | 5 | 9 |
| Incorrecta | 5 | 7 | 12 |
| Blanco | 8 | 3 | 11 |

Tabla 3.4 Resultados en la definición de suceso independiente

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Correctas | 7 | 22 | 29 |
| Correcta pero impreciso | 3 | 3 | 6 |
| Incorrecta | 3 | 4 | 7 |
| Blanco | 8 | 2 | 10 |

La Tabla 3.4 refleja los resultados obtenidos para las definiciones de sucesos independientes. La definición que tiene mayor porcentaje es la de respuestas correctas con un 55,8%. En cuanto a las respuestas correctas pero imprecisas representan el 11,5% y las incorrectas el 13,5% siendo el porcentaje más bajo en el resto de definiciones contestadas de forma incorrecta. Por último, han contestado en blanco un 19,2%. Igual que en los casos anteriores los resultados son mejores en el segundo curso.

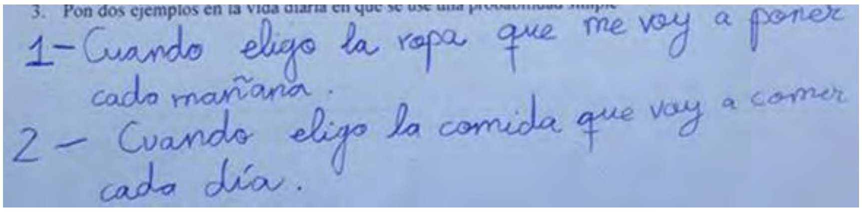
## 3.6 EJEMPLOS

En las preguntas 3 a 5 del cuestionario se pidió a los estudiantes proporcionar ejemplos de los diferentes conceptos, para comprobar si los han comprendido y la fenomenología que les asocian. Hemos clasificado los ejemplos dados en correctos, incorrectos e imprecisos. Además, se ha hecho una clasificación paralela de los ejemplos según si están relacionados con juegos de azar o corresponden a alguno de los contextos considerados en el informe PISA (OECD 2013).

### 3.6.1 EJEMPLOS DE PROBABILIDAD SIMPLE

Podemos ver una clara diferencia entre los estudiantes de primero y de segundo de bachiller a la hora de responder a estas preguntas y dar ejemplos, el grupo de segundo proporciona mayor número de ejemplos para la probabilidad simple. Destacamos que en estos ejemplos, proporcionalmente los estudiantes de primero han puesto ejemplos más relacionados con la vida cotidiana que con juegos de azar.

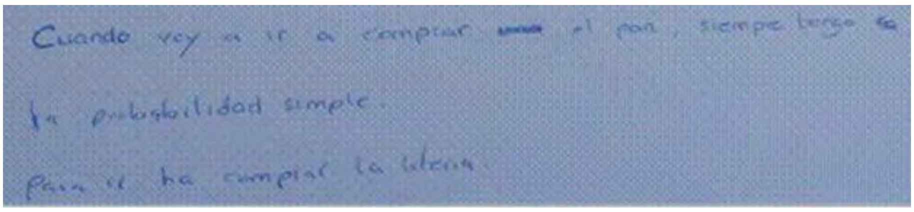
El ejemplo presentado a continuación, que hemos considerado correcto, está relacionado con la vida cotidiana, aunque expresado con poca precisión (entendemos que el estudiante quiere decir probabilidad de elegir una cierta camiseta de entre las que se tiene, o comida de entre las que posibles que hay, recordamos que la corrección no ha sido estricta en ese aspecto ni en la corrección de posibles faltas de ortografía):


3. Pon dos ejemplos en la vida diaria en que se use una probabilidad simple

1- Cuando elijo la ropa que me voy a poner cada mañana.

2 - Cuando elijo la comida que voy a comer cada día.

El siguiente ejemplo se ha puntuado como incorrecto, ya que no se entiende cómo se puede aplicar la probabilidad cuando va a comprar el pan.


Cuando voy a ir a comprar el pan, siempre tengo la probabilidad simple.

Para ir ha comprar la [illegible].

En la Tabla 3.5 podemos ver la recopilación de todos los datos, donde hay casi un 60% de respuestas correctas, 5,7% de correctas pero imprecisas y un 15,3% de responder solo una bien, siendo el porcentaje más alto en cuanto a corrección en esta categoría. En cuanto al porcentaje de ejemplos dados con todo incorrecto tan solo hay un 3,8% y las respuestas en blanco son un 15,3%. Si observamos la Tabla 3.6, 3.7 y 3.8 y la comparamos con la 3.5 podemos observar que es la que tiene un número más elevado de estudiantes que han dado ambos ejemplos correctamente, siendo un total de 31 estudiantes los que lo hicieron.

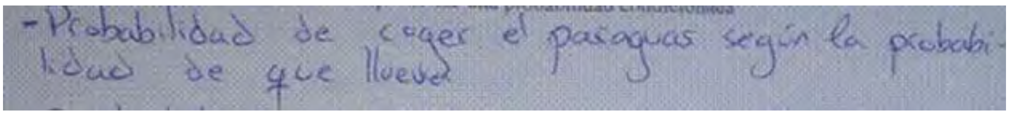
Tabla 3.5. Resultados en los ejemplos de probabilidad simple

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Dos ejemplos correctos | 6 | 25 | 31 |
| Correctos pero imprecisos | 2 | 1 | 3 |
| Un sólo ejemplo correcto o impreciso | 7 | 1 | 8 |
| Dos ejemplos incorrectos | 1 | 1 | 2 |
| Blanco | 5 | 3 | 8 |

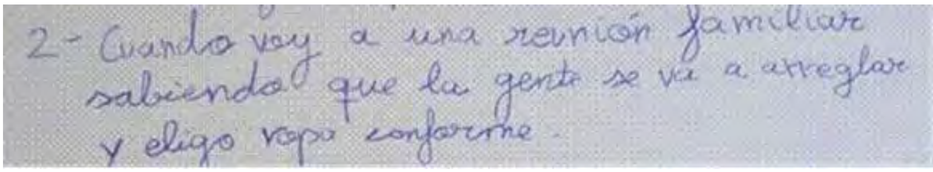
### 3.6.2 EJEMPLOS DE PROBABILIDAD CONDICIONADA

Esta cuestión ha sorprendido por el hecho de ser la pregunta que menos han respondido los estudiantes de ambos cursos, de manera que más de la mitad de los estudiantes de primero han dejado la pregunta en blanco. También se ha producido un cambio, y es que los estudiantes de segundo se han animado más a poner ejemplos no relacionados con juegos de azar.

La forma de evaluar esta pregunta ha sido la misma que para la pregunta anterior de ejemplos de probabilidad simple: correcto, impreciso, uno bien, todo incorrecto y en blanco. El ejemplo siguiente sería un ejemplo correcto, relacionado con la vida cotidiana:

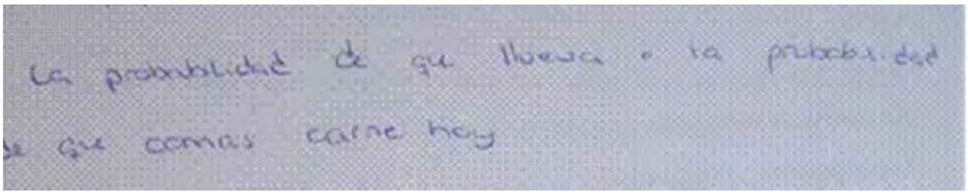



El siguiente es un ejemplo donde es impreciso, ya que no deja claro el uso de la probabilidad condicionada, pero se entiende que el estudiante ha querido referirse a la probabilidad de escoger un tipo de ropa sabiendo cómo van a ir vestidos el resto de sus familiares.



2- Cuando voy a una reunión familiar sabiendo que la gente se va a arreglar y eligo ropa conforme.

En este ejemplo último mostramos un caso donde se ha puntuado como incorrecto, ya que lo que propone el estudiante no es un ejemplo de probabilidad condicionada, sino de probabilidad simple, pues se refiere a un único suceso sin poner ninguna condición:



La probabilidad de que llueva o la probabilidad de que comas carne hoy

En la Tabla 3.6 se puede ver la recopilación de todos los resultados en esta pregunta. Observamos que un 34,6% dan dos ejemplos correctos, pero estos solo pertenecen a estudiantes de segundo de Bachiller, un 3,8% los proporcionan, pero lo hacen de forma imprecisa, un 7% responde solo un ejemplo bien y un 13% responden de forma incorrecta. Finalmente, un 40,8% deja la pregunta en blanco. Se aprecia que ninguno de los estudiantes de primero de Bachillerato supo contestar correctamente a la pregunta, siendo la pregunta de este cuestionario que obtiene más respuestas en blanco por este grupo de estudiantes. Sin embargo, algunos de ellos dieron definiciones correctas o imprecisas de la probabilidad condicional; por tanto, vemos la mayor dificultad de proporcionar ejemplos comparada con la de dar una definición.

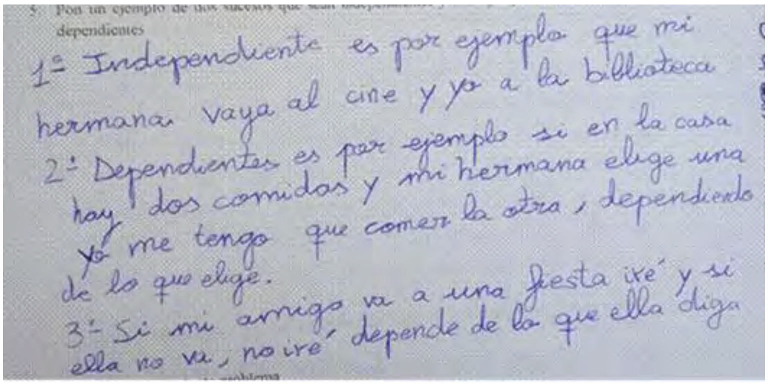
Tabla 3.6. Resultados en los ejemplos de probabilidad condicionada

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Dos ejemplos correctos | 0 | 18 | 18 |
| Correctos pero imprecisos | 1 | 1 | 2 |
| Un sólo ejemplo correcto o impreciso | 1 | 3 | 4 |
| Dos ejemplos incorrectos | 3 | 4 | 7 |
| Blanco | 16 | 5 | 21 |

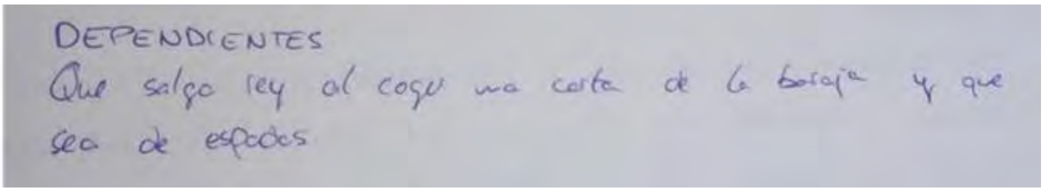
### 3.6.3 EJEMPLOS DE SUCESOS DEPENDIENTES

Hemos clasificado los resultados de la misma forma que en los apartados anteriores. A continuación, analizamos algunas respuestas de los estudiantes.

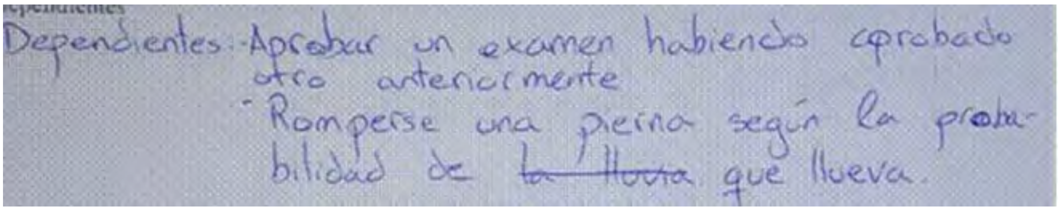
El siguiente estudiante ha respondido con ejemplos correctos de dependencia e independencia, usando un ejemplo de la vida cotidiana, dando sólo uno del primer tipo:


1º Independiente es por ejemplo que mi hermana vaya al cine y yo a la biblioteca
2º Dependientes es por ejemplo si en la casa hay dos comidas y mi hermana elige una yo me tengo que comer la otra, dependiendo de lo que elige.
3º Si mi amigo va a una fiesta iré y si ella no va, no iré depende de lo que ella diga

En el siguiente ejemplo se muestra un estudiante que ha respondido de forma incorrecta pues los sucesos propuestos (ser rey y ser espadas) son independientes, ya que la probabilidad del suceso "rey de espadas" es igual a 1/40 que es el producto de la probabilidad "ser rey (1/4)" y "ser espada (1/10). Este ejemplo es precisamente el utilizado por Sánchez (1996) en su cuestionario y la respuesta de este estudiante indica que confunde independencia y se mutuamente excluyentes:


DEPENDIENTES
Que salga rey al coger una carta de la baraja y que sea de espadas

Este otro estudiante ha respondido de forma incorrecta en el primero de los dos ejemplos dados, ya que generalmente no depende un examen de otro. El segundo ejemplo sería una respuesta correcta pero imprecisa.


Dependientes: Aprobar un examen habiendo aprobado otro anteriormente
- Romperse una pierna según la probabilidad de ~~la lluvia~~ que llueva.

En la Tabla 3.5 muestra un porcentaje de un 26,9% de estudiantes que sugieren dos, ejemplos correctos; los que dan ejemplos correctos pero imprecisos son un 1,9%. El porcentaje de los que dan solo un ejemplo correcto es un 7% y de las repuestas incorrectas son un 11,5%. Podemos apreciar que hay mayoría de respuestas en blanco con un porcentaje del 51,9%, confirmando que es más difícil dar un ejemplo que la definición del concepto. Por otro lado, el número de respuestas en blanco de primero de Bachiller no es el mayor si comparamos con la Tabla 3.6, y lo mismo ocurre con los de segundo de Bachiller.

Tabla 3.7 Resultados en los ejemplos de sucesos dependientes

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Dos ejemplos correctos | 3 | 11 | 14 |
| Correctos pero imprecisos | 0 | 1 | 1 |
| Un sólo ejemplo correcto o impreciso | 2 | 2 | 4 |
| Dos ejemplos incorrectos | 1 | 5 | 6 |
| Blanco | 15 | 12 | 27 |

### 3.6.4 EJEMPLOS DE SUCESOS INDEPENDIENTES

Como en el resto de preguntas anteriores, hemos vuelto a clasificar los resultados en la misma forma: dos ejemplos correctos, correctos pero imprecisos, uno solo bien, todo incorrecto o en blanco. El siguiente ejemplo de un estudiante proporciona dos ejemplos incorrectos El primero de ellos es impreciso porque no indica si el experimento se hace con o sin reemplazamiento; si hubiese sido con reemplazamiento sería independiente, El segundo es correcto:

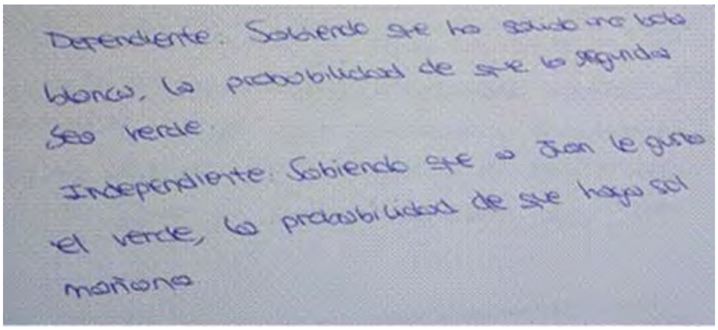



Tabla 3.8 Resultados en los ejemplos de sucesos independientes

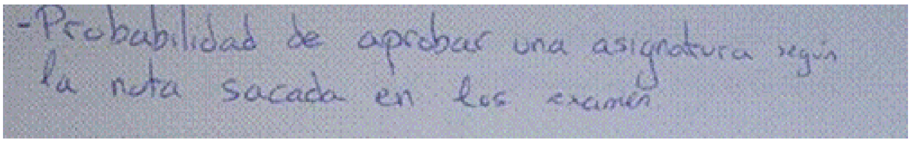
| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Dos ejemplos correctos | 4 | 12 | 16 |
| Correctos pero imprecisos | 0 | 2 | 2 |
| Un sólo ejemplo correcto o impreciso | 1 | 1 | 2 |
| Dos ejemplos incorrectos | 4 | 3 | 7 |
| Blanco | 12 | 13 | 25 |

Observando la Tabla 3.8 podemos afirmar que el porcentaje de ejemplos correctos es del 30,7%, de correctas pero imprecisas es un 3,8%, coincidiendo este porcentaje con el de respuestas en las que tan solo hay un ejemplo correcto. En cuanto a respuestas incorrectas el porcentaje es de 1,4%. Podemos resumir los datos obtenidos a partir de la tabla 3.8, confirmando que los sucesos dependientes e independientes son los que menos se ha respondido, con un total del 48% de respuestas en blanco. Añadimos que los ejemplos de sucesos independientes y los ejemplos de probabilidad condicionada son los que tienen el porcentaje más alto de respuestas incorrectas.

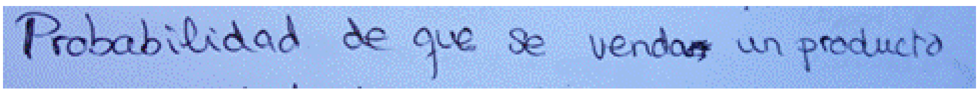
### 3.6.5 CONTEXTOS PROPUESTOS EN LOS EJEMPLOS

Se ha analizado los contextos recogidos en las pruebas de evaluación PISA, organizadas por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) (MCD, 2013, p. 11). En dichas pruebas participan estudiantes de 15 años de 65 países, incluida España; por lo tanto, sería deseable que los contextos sugeridos en PISA también se tengan en cuenta en los ejemplos. Los contextos considerados han sido: personal, profesional, social y científico. Se añade el de juego de azar por su peso en el cálculo de probabilidades. A continuación se presenta cada uno de los contextos junto a un ejemplo extraído de las respuestas.

- *Situación personal:* Son problemas relacionados con las actividades del día a día del propio individuo, su familia y su grupo de iguales. Como ejemplo, podría ser la práctica de deporte, familia, juegos, salud o transporte personal, deportes, o viajes. Así, el siguiente ejemplo se ha clasificado en esta categoría, pues pertenece a la vida personal del estudiante (aprobar una asignatura es algo que le concierne directamente).



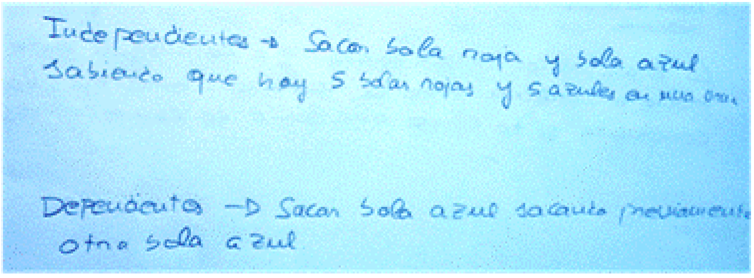

- *Situación profesional:* Son problemas que se centran en el mundo laboral que el estudiante encontrará en el futuro o que conoce por sus padres o maestros. Se trata de problemas sobre medida, control o coste de un proceso de producción o una construcción, sobre diseño en carpintería, arquitectura o jardinería; coste o salario de mano de obra, etc. El ejemplo que reproducimos en lo que sigue pertenece a este contexto, ya que el estudio de mercado y de producción se usa en las empresas para saber si ese producto tendrá o no el éxito que se pretende.




- *Situación Social:* En este caso, se incluyen los problemas que el estudiante podría encontrar en su comunidad más amplia que la familiar (comunidad de vecinos, ayuntamiento o ciudad, su país, etc.). El siguiente ejemplo es uno de los más frecuentes en el contexto social. Cuando una pareja está esperando un hijo, todos quieren saber el género del bebé, y antes de ir a la consulta suelen hacer predicciones sobre el género del niño que se espera..

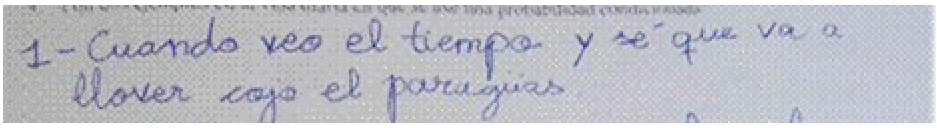

Probabilidad de que sea niña o niño.

- Hemos separado dentro de este contexto los *juegos de azar* como la lotería, los juegos de cartas, experimentos con bolas en urnas, etc., y otros juegos que aparecen en los medios de comunicación. Por un lado, son muy frecuentes en los libros de texto, pues tienen espacios muestrales finitos y permiten aplicar en forma sencilla la probabilidad. Por otro es el contexto en que se originó históricamente el cálculo de probabilidades (Batanero, Henry y Parzys, 2005). Los dos siguientes ejemplos son de sucesos *dependientes e* independientes usando bolas de colores.


Independientes → Sacar bola roja y bola azul sabiendo que hay 5 bolas rojas y 5 azules en una urna

Dependientes → Sacar bola azul sacando previamente otra bola azul

- *Situación Científica:* Los problemas clasificados en la categoría científica están relacionados con la aplicación de las matemáticas en ciencia y tecnología. Algunos problemas relacionados con la ciencia tratan de la meteorología, ecología, medicina, genética, o física. Esta situación es más abstracta que el resto, ya que implica la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema matemático.


1- Cuando veo el tiempo y sé que va a llover cojo el paraguas

En la Tabla 3.9 se muestra el número total de ejemplos propuestos en cada contexto. Como se puede observar, el 34,6% de los ejemplos dados está relacionados con juegos de azar, ocupando el porcentaje más alto de respuestas. El porcentaje de respuestas dadas en el contexto personal es del 27,5% y el más bajo corresponde al contexto profesional, al que le pertenece un porcentaje del 9,1%. Los ejemplos en el contexto social y científico están aproximados, siendo un 15,6% y un 13% respectivamente.

Tabla 3.9: Número total de ejemplos propuestos en cada contexto

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Juegos de azar | 24 | 40 | 64 |
| Personal | 15 | 36 | 51 |
| Profesional | 0 | 17 | 17 |
| Social | 4 | 25 | 29 |
| Científico | 1 | 23 | 24 |

Se puede observar que en ambos cursos los contextos más usados han sido los juegos de azar y personal, mientras que el profesional no ha sido usado por los estudiantes de primero de Bachiller y el científico muy poco. Observamos también una media global de 3,6 ejemplos por estudiante; ello se debe que, aunque se les pidieron en total ocho ejemplos, muchos estudiantes, como hemos visto en las tablas anteriores, dejan en blanco la pregunta por no saber proponer ninguno. Para más detalle, vamos a desglosar estos resultados, en función de si el ejemplo es de probabilidad simple, condicionada o suceso dependiente o independiente. Para ello representamos los datos para cada curso en las figuras 3.2 y 3.3.

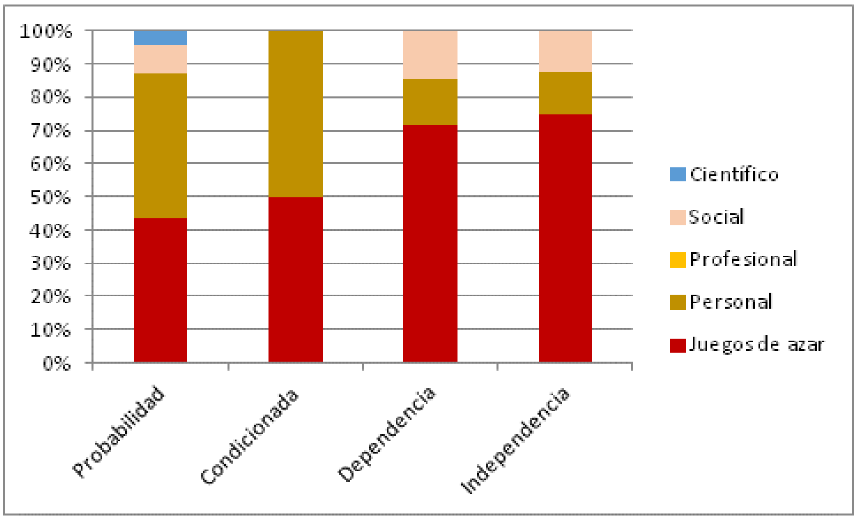



Figura 3.2. Contextos sugeridos por los estudiantes de 1º en sus ejemplos

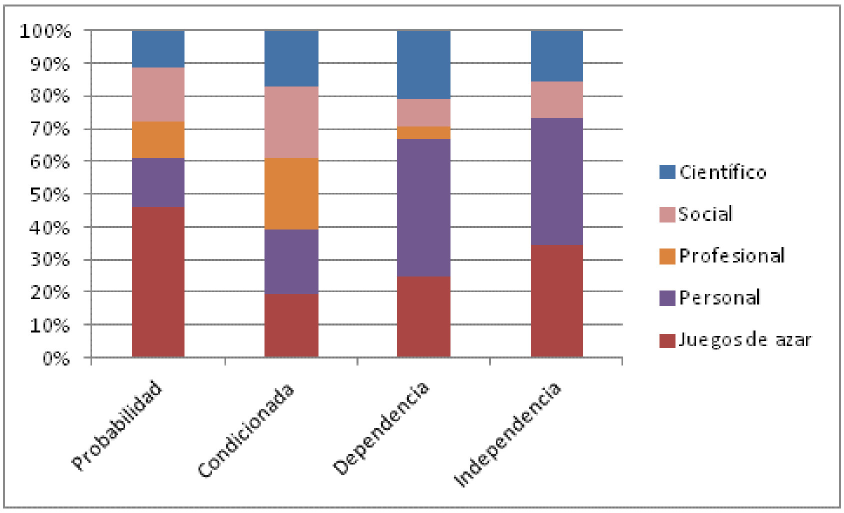


Figura 3.3. Contextos sugeridos por los estudiantes de 2º en sus ejemplos

Observamos que la mayoría de los ejemplos proporcionados por los estudiantes de 1º curso son en el contexto de juegos de azar, especialmente en el caso de sucesos independientes, seguido por el contexto personal que es bastante frecuente para la probabilidad simple y condicionada, constituyendo casi la mitad de los ejemplos. Sin embargo, no han sido capaces de dar muchos ejemplos de dependencia o independencia en su vida personal. El contexto profesional no aparece y apenas el científico o social.

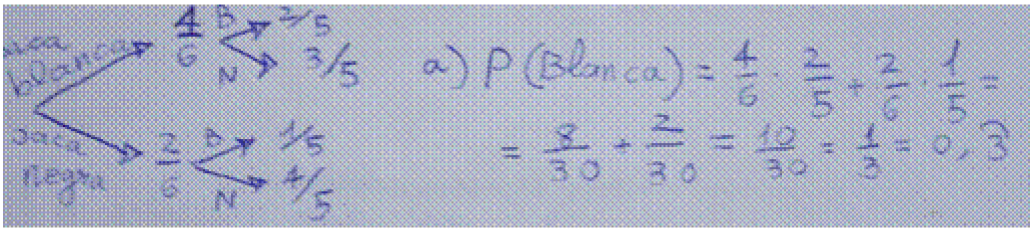
Los estudiantes de 2º curso muestran una mayor variedad en los contextos sugeridos en sus ejemplos, con mucho menor predominio de los juegos de azar. El contexto científico aparece en los cuatro conceptos y el profesional en la probabilidad simple, condicionada y dependencia. Al contrario que los estudiantes de 1º son capaces de sugerir bastantes ejemplos de dependencia o independencia en su vida personal.

## 3.7 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Este problema consta de dos apartados, para los cuales vamos a categorizar las respuestas en cada uno de los en función de las siguientes categorías: solución correcta, error en alguna operación, error en la fórmula, error al interpretar los datos o el enunciado, otros errores y respuesta en blanco.

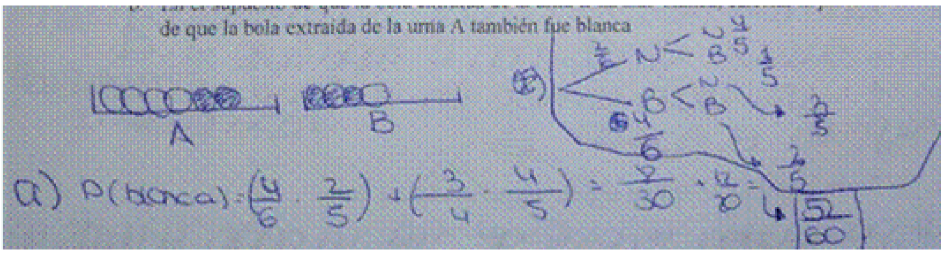
### 3.7.1 RESULTADOS EN EL PRIMER APARTADO

Un ejemplo de *respuesta correcta* se reproduce a continuación, donde podemos observar que el estudiante se ha guiado correctamente del diagrama en árbol para resolver este apartado. El estudiante ha identificado correctamente los datos y la probabilidad pedida aplicando la regla de la probabilidad total (aunque no lo especifica), pues obtiene la probabilidad de obtener una bola blanca en la urna B como la suma de los sucesos excluyentes haber obtenido blanca o negra en la primera extracción, lo que da lugar a diferentes posibles urnas en la segunda.

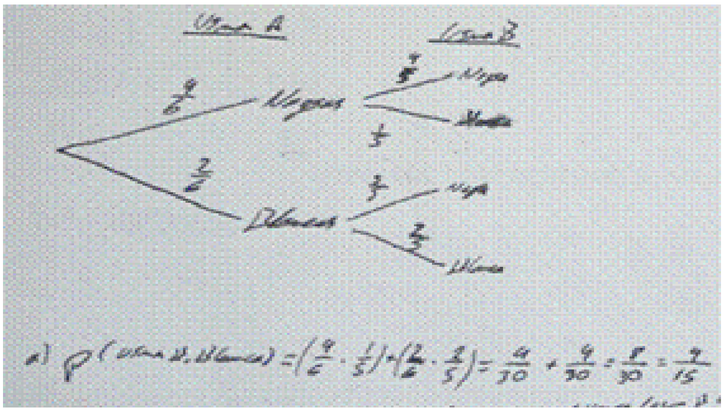


En las respuestas de *error por operación* hemos incluido aquellas en las que el estudiante ha planteado una fórmula correcta para resolver el problema o ha utilizado un diagrama en árbol, que estaba bien construido, pero a la hora de calcular probabilidades se ha cambiado algún número, dando un resultado erróneo. En el siguiente ejemplo, el estudiante comienza correctamente la resolución del problema, planteando, al igual que el ejemplo anterior, las dos posibles urnas que se pueden tener en la segunda extracción, dependiendo de la primera.

Sin embargo, se ha confundido al formar el segundo sumando en la regla de la probabilidad total, ya que no hay error en la identificación de los datos en el diagrama de árbol. Pero los productos que incluye en el segundo sumando no corresponden a las probabilidades del árbol; por ello se confunde en el resultado. Podemos ver que sabe que aplicó la regla de la probabilidad total en el ejercicio:




En los *errores al interpretar* hemos añadido aquellos que construyen un diagrama en árbol incorrecto, aunque según el árbol que han diseñado, las respuestas estarían correctas. Otro error común de interpretación ha sido el de intercambiar la probabilidad de sacar bola blanca en la urna A, con el de sacar bola negra en la urna A. Al no interpretar correctamente el enunciado, los cálculos arrastran errores pero se comprueba que el estudiante sabe responder guiándose por el diagrama. Es el caso del siguiente ejemplo:



Otro error común de interpretación es responder que la probabilidad de sacar blanca es $\frac{1}{4}$, obviando la urna A y teniendo en cuenta sólo la urna B. También hay ejemplos en los que el estudiante ha señalado las probabilidades de blanca o negra en las urnas o ha escrito el diagrama de árbol pero no ha sabido completar el apartado. El siguiente estudiante ha calculado la probabilidad de obtener blanca y negra en cada urna, pero no ha sabido relacionar la urna A con la B, por lo que las probabilidades que ha calculado son las de sacar blanca y negra en cada urna. Este estudiante no llega a deducir la regla de la probabilidad total.

En otras respuestas el estudiante únicamente ha sido capaz de construir el diagrama en árbol y ha dado un error distinto a los descritos. También se incluyen los casos en que el problema está mal resuelto pero no se especifica claramente el proceso seguido.

La Tabla 3.10 muestra las respuestas dadas por los estudiantes en función de las categorías ya mencionadas con anterioridad. Se obtienen sólo un 15,3% de respuestas totalmente correctas, y todas ellas corresponden a respuestas dadas por estudiantes de segundo de bachillerato. Un 7,7% ha tenido errores de operaciones o cálculo. Únicamente un estudiante se ha equivocado en la fórmula, ya que ha usado para responder a este apartado es la regla de Laplace, únicamente, sin usar la regla del producto. El 28,8% ha tenido errores al interpretar el enunciado, y otro 7,7% ha tenido otro tipo de errores. El porcentaje de respuestas en blanco ha sido del 38,4%, y como se puede apreciar, el porcentaje de los estudiantes de segundo de bachillerato que han dejado la respuesta en blanco es del 45,1% mientras que los de primero han sido del

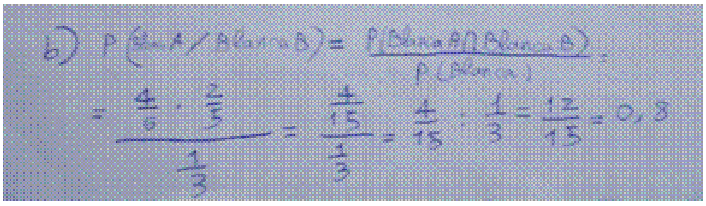
28,5%. Una posible explicación es que los primeros han recurrido más a métodos intuitivos y los segundos tratando de encontrar una fórmula no la han hallado.

Tabla 3.10 Resultados del primer apartado

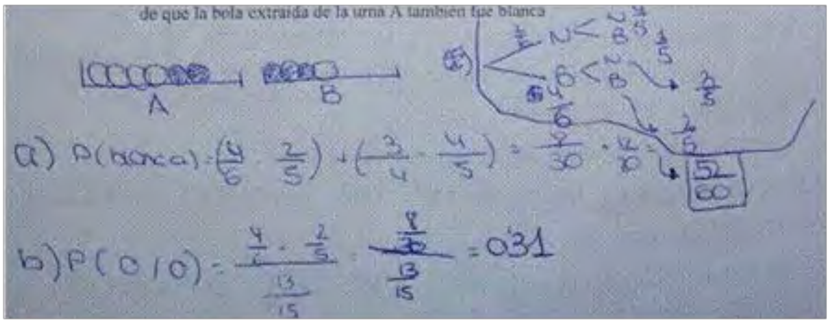
| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Respuesta correcta | 0 | 8 | 8 |
| Error solo en operaciones | 2 | 2 | 4 |
| Error en fórmula | 1 | 0 | 1 |
| Error en la interpretación del enunciado | 10 | 5 | 15 |
| Otros | 2 | 2 | 4 |
| Blanco | 6 | 14 | 20 |

### 3.7.2 RESULTADOS EN EL SEGUNDO APARTADO

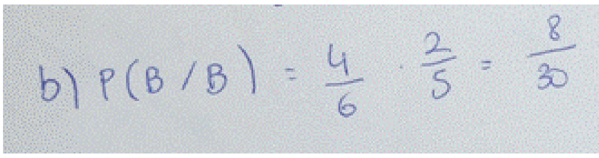
Hay estudiantes que han dado una *respuesta correcta* a este enunciado, como es el caso del siguiente, que identifica que se está pidiendo una probabilidad condicional y aplica correctamente su fórmula, para lo cual ha tenido que identificar correctamente las probabilidades implicadas:



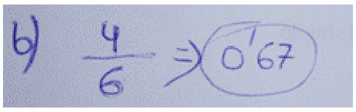
El siguiente ejemplo contiene un *error de operación*, consecuencia de relacionar el apartado primero con el segundo (ya analizamos anteriormente su respuesta al primero). Aunque el estudiante también identifica correctamente la probabilidad condicional y su fórmula, ya que el primer apartado se equivocó en el cálculo de la probabilidad, ese error se arrastra al segundo apartado.




Uno de los errores más encontrados en el apartado b) ha sido *error de fórmula*, ya que, algunos estudiantes identifican la a probabilidad condicionada, pero en vez de aplicar su fórmula aplican la regla del producto. Este es el caso siguiente, en el que el estudiante responde bien al primer apartado pero en el segundo aplica la fórmula de la probabilidad conjunta, a pesar de señalar que reconoce que es una probabilidad condicionada al escribir $P(B|B)$:




El error más frecuente ha sido el *error de interpretación* del enunciado, ya que no todos los estudiantes han entendido el enunciado de este apartado. Por ejemplo, el siguiente ha entendido que le pedían la probabilidad de extraer una bola blanca de la urna A.




Si ya se observó en el primer apartado que los resultados no han sido favorecedores, al corregir el segundo el resultado es peor. Como se muestra en la Tabla 3.11 los únicos en responder de forma correcta han sido los estudiantes de segundo de bachiller. Sin embargo en este caso el porcentaje desciende al 9,6%. Los errores en operaciones también decrecen en un estudiante por lo que su porcentaje es del 5,7%. Los errores en el uso de la fórmula de la probabilidad condicional son del 13,4%, debido siempre a que se han olvidado del denominador. El 17,3% no ha sabido interpretar bien el enunciado y el porcentaje restante, 53,8% corresponde a las respuestas dadas en blanco, la cual nos advierte de que más de la mitad de los estudiantes no ha sabido cómo responder a este apartado. Estos resultados confirman, por tanto los de las investigaciones de Contreras (2011) y Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo (2011).

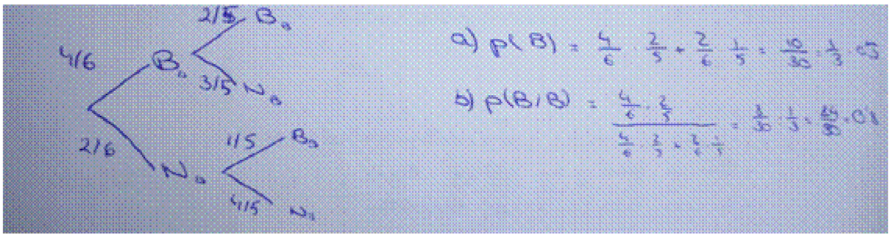
Tabla 3.11 Resultados del segundo apartado

| | 1º Curso | 2º Curso | Total |
|---|---|---|---|
| Respuesta correcta | 0 | 5 | 5 |
| Error solo en operaciones | 1 | 2 | 3 |
| Error en fórmula | 2 | 5 | 7 |
| Error en la interpretación del enunciado | 7 | 2 | 9 |
| Otros | 0 | 0 | 0 |
| Blanco | 11 | 17 | 28 |

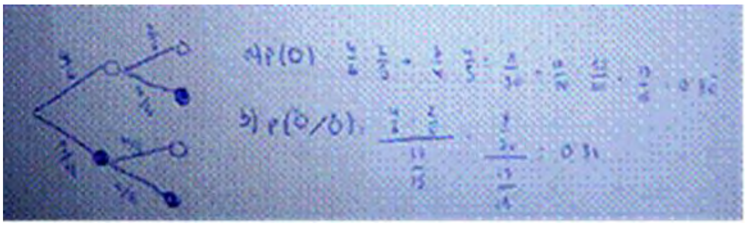
## Estrategias y representaciones empleadas

Los estudiantes se han enfrentado a este problema de varias maneras. Analizaremos en este apartado las tres categorías que hemos encontrado: diagrama de árbol, fórmula y esquema de urnas.

La gran mayoría de los estudiantes ha usado el *diagrama de árbol*, y es que a pesar de que no hayan respondido a un apartado correctamente, no son pocos los estudiantes que han empezado a escribir el diagrama de árbol o incluso lo han planteado correctamente pero no han continuado el ejercicio. El siguiente ejemplo es un buen ejemplo de buena resolución de ambos apartados usando *diagrama de árbol*. El estudiante lo ha construido de forma correcta y los cálculos de probabilidades están bien descritos. En este caso el diagrama ha sido un recurso productivo para el estudiante, como sugiere Fischbein (1975).

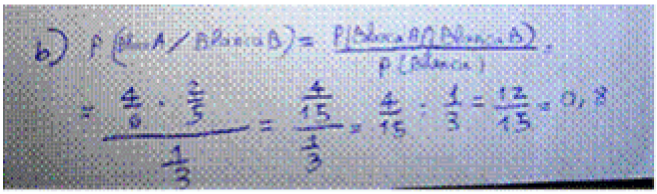


Sin embargo, el siguiente estudiante ha cometido dos errores al realizar la construcción del *diagrama de árbol*. El primero ha sido suponer que la probabilidad de sacar negra de la urna A es $\frac{3}{4}$, cuando de $\frac{2}{6}$; por tanto se trata de un error de identificación de los datos del problema, lo que lleva a un diagrama en árbol incorrecto, error también presente en la investigación de Díaz (2004). El segundo error que ha cometido el estudiante ha sido intercambiar las probabilidades de extraer blanca y negra en la urna B, por lo que el cálculo de probabilidades no ha sido el correcto.

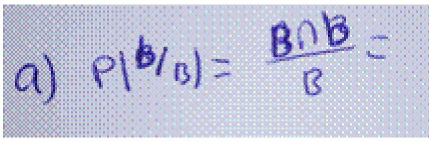


En probabilidad el uso de fórmulas es constante, y en este problema, aunque nos guiemos por diagramas y no se indique, estamos aplicando el producto de probabilidad, regla de Laplace o fórmula de probabilidad condicionada. Veamos algunos ejemplos en los que el estudiante ha querido explicar qué fórmulas ha usado en este problema.

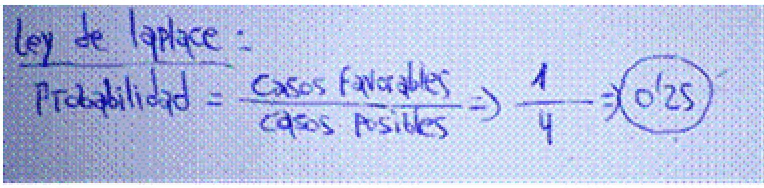
El siguiente ejemplo es de un estudiante que ha presentado la fórmula correcta de la probabilidad condicionada, identificando los datos del problema.



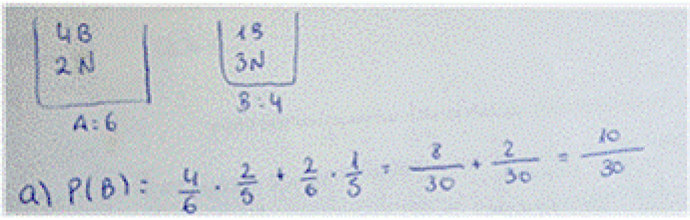

El siguiente estudiante intenta escribir la fórmula de la probabilidad condicionada, pero comete varios errores. El primero ha sido escribirla en el apartado a), donde se pedía la probabilidad total cuando el cálculo de la probabilidad condicionada corresponde al apartado del b). El segundo es que la fracción sólo tiene los sucesos escritos, les falta añadir al numerador y al denominador el símbolo de probabilidad, indicando que se está calculando la probabilidad de la intersección del suceso B con b, y en el denominador indica que se calcula la probabilidad del suceso B, siendo b el suceso sacar bola blanca de la urna B y B sacar bola blanca de la urna A. Por tanto sería un error de notación.



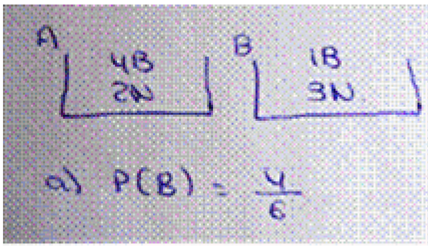

El siguiente estudiante ha querido calcular en el apartado a) la probabilidad de extraer bola blanca de la urna B, sin tener en cuenta la urna A. Para ello ha usado la Regla de Laplace, indicándolo de la siguiente manera, donde la fórmula es correcta, pero no corresponde al enunciado:




El *esquema de urnas* no es más que hacer un pequeño dibujo que representar las urnas indicando las bolas de cada color que hay en cada una y el total en cada una de ellas, bien de forma escrita o bien dibujando círculos rellenos (representando las bolas negras) o sin colorear (representando así las bolas blancas). El siguiente ejemplo muestra un uso correcto del *esquema de urnas,* donde el estudiante se ha guiado únicamente por la representación de ambas urnas, y de forma escrita ha indicado el número de bolas.




Sin embargo, el siguiente estudiante a pesar de usar un esquema de urnas similar, la primera pregunta no la ha respondido correctamente, ya que ha calculado la probabilidad de sacar blanca en la primera urna.

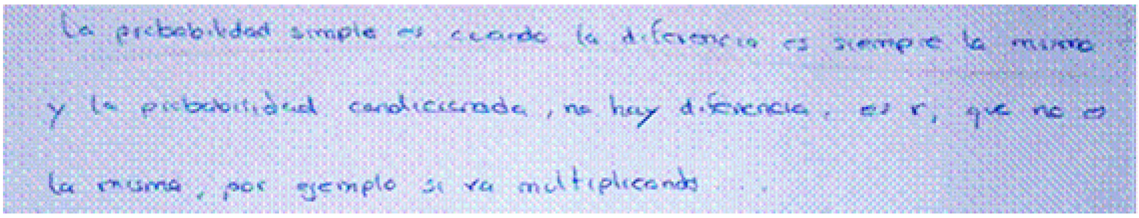



## 3.8 CONFLICTOS SEMIÓTICOS

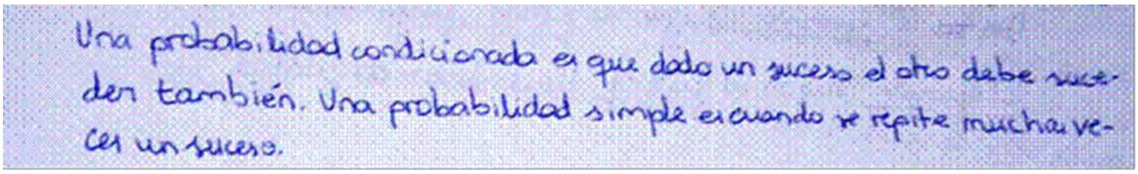
Como se indicó en la sección 1.4, en este estudio nos interesamos por los conflictos semióticos mostrados en las respuestas de los estudiantes, que según Godino (2002), se interpretan como disparidad entre el significado asignado a una expresión matemática por un estudiante respecto al significado institucional Los conflictos semióticos encontrados tras analizar las respuestas tomadas como correctas pero imprecisas e incorrectas, son los siguientes:

- *Suponer que la probabilidad simple implica que los sucesos sean equiprobables*. Pensamos que este conflicto aparece por el énfasis excesivo en ejemplos de probabilidad clásica y podría implicar el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992).
- *Falacia del eje temporal,* descrita por Gras y Totohasina (1995). Es decir, suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional tiene que preceder temporalmente al condicionado.
- *Relacionar probabilidad condicionada con dependencia de sucesos.* Este conflicto puede implicar la confusión entre condicionamiento y causación citada por Díaz y de la Fuente (2005):
- *Confusión de la fórmula asociada a los sucesos independientes A y B, siendo la usada la siguiente:* $P(A \cup B) = P(B) + P(A)$ . Detrás de este conflicto puede haber una confusión entre producto y suma de probabilidades.

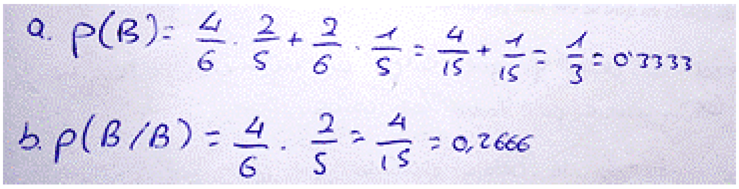
- *No saber diferenciar entre probabilidad simple y condicionada*. Es decir, definir la probabilidad simple como si fuese la condicionada, así como dar ejemplos de probabilidad condicionada cuando se piden los de la probabilidad simple. Ocurre lo mismo en el problema, los estudiantes no son capaces de entender que se pide el cálculo de una probabilidad condicionada en el segundo apartado.
- *No saber distinguir entre probabilidad compuesta y probabilidad simple a la hora de hacer el problema*. Este conflicto aparece en la investigación de Contreras (2011).
- *Confundir los conceptos de probabilidad simple y condicionada con sucesiones geométricas y aritméticas.* No lo hemos encontrado descrito anteriormente.


La probabilidad simple es cuando la diferencia es siempre la misma y la probabilidad condicionada, no hay diferencia, es r, que no es la misma, por ejemplo si va multiplicando ...

- *Suponer que la probabilidad simple implica la repetición de un mismo suceso.* No lo hemos encontrado descrito anteriormente.


Una probabilidad condicionada es que dado un suceso el otro debe suceder también. Una probabilidad simple es cuando se repite muchas veces un suceso.

- *Confusión en la fórmula de la probabilidad condicionada*. En este ejemplo el estudiante ha calculado bien el primer apartado del problema y ha reconocido la probabilidad condicionada en el segundo apartado, sin embargo, no ha dividido entre la *P(B*).


a. $p(B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} = 0'3333$

b. $p(B/B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} = 0{,}2666$

## 3.9 CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO

Como broche final a este tercer capítulo, dedicamos este apartado a presentar las conclusiones extraídas tras el estudio y corrección de las pruebas propuestas a los estudiantes.

Como se observaron en las tablas, la definición correcta más usual ha sido la de suceso independiente y la menos frecuente la de suceso dependiente. La que ha obtenido más respuestas correctas pero imprecisas ha sido la de suceso dependiente y la que menos la de independencia y probabilidad condicionada. El resto de los casos han predominado las respuestas incorrectas o en blanco. Se destaca que solo la definición de suceso independiente tiene un porcentaje mayor al 50% en respuestas correctas, aunque el resto se aproxima. Sería por tanto importante que el profesor organice momentos del proceso didáctico en que se pida al estudiante definir los diferentes conceptos con sus propias palabras para favorecer, por un lado, la comprensión de los conceptos y por otro su capacidad de uso del lenguaje matemático.

En cuanto a los ejemplos propuestos, se destaca el contexto de juegos de azar. Aunque reconocemos la importancia de los mismos en el desarrollo del cálculo de probabilidades (Batanero et al., 2005), y su alta presencia en los libros de texto (Ortiz, 2002), se debe tratar de presentar ejemplos más variados en el aula, para que el estudiante aprecie la aplicabilidad del cálculo de probabilidades.

Hacemos notar también el número de ejemplos propuestos de la vida personal, que superan en los estudiantes de primero de bachillerato a los de segundo de bachillerato. Son menos frecuentes los otros contextos, en particular el profesional. Por otro lado, a pesar de no ser la definición correcta la más frecuente, la probabilidad simple ha sido la que más ejemplos correctos ha obtenido y los ejemplos de sucesos dependientes la que menos. Sería importante mostrar al estudiante ejemplos de este concepto.

El problema propuesto resultó muy difícil, pues solo los estudiantes de segundo de bachillerato han sabido resolverlo. El primer apartado ha obtenido mejores resultados, siendo el más contestado; el porcentaje de respuestas en blanco del primer apartado fue muy alto, sobre todo en el segundo apartado. Una posible causa es que los estudiantes no hayan hecho suficientes problemas de probabilidad con sucesos dependientes y de probabilidad condicionada, ya que no han sabido afrontar el problema, incluso aunque muchos intentan construir un diagrama en árbol.

Resumiendo, las preguntas más difíciles han sido el segundo apartado del problema y los ejemplos de suceso dependiente e independiente y las más sencillas la definición de probabilidad condicionada y simple, y los ejemplos de probabilidad simple. Los resultados de los estudiantes de segundo de bachillerato han sido mejores que los de los estudiantes de primero.

# CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Este último capítulo se dedica a formular las conclusiones obtenidas tras elaborar este Trabajo Fin de Máster, que hemos organizado en varios apartados. En primer lugar se exponen nuestras conclusiones sobre los objetivos y las hipótesis iniciales. Seguidamente analizamos lo que, a nuestro juicio, son las principales aportaciones que hemos realizado.

Para finalizar se hará una exposición de las posibles líneas nuevas de investigación que podrían llevarse a cabo tras la realización de este trabajo, para poder completar los resultados obtenidos.

## 4.2 CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El inicio de este trabajo se debe al interés por analizar el significado personal que los estudiantes de Bachillerato asignan la probabilidad condicionada y la independencia. Entendimos el significado personal en el sentido de Godino, Batanero y Font (2007), como el conjunto de prácticas relacionadas con el objeto que es capaz de realizar el estudiante.

Respecto a trabajo, en el primer capítulo se plantearon una serie de hipótesis y objetivos previos a la construcción del cuestionario. Una vez finalizado nuestro trabajo y analizado la información obtenida, vamos a reflexionar sobre los resultados obtenidos relacionados con los objetivos y las hipótesis presentados en el primer capítulo.

### Conclusiones respecto a los objetivos

Objetivo 1. *Analizar la forma en que los objetos matemático ''probabilidad condicionada'' e "independencia" se presentan en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.*

Para lograr este objetivo, en el Capítulo 1, Sección 1.3 se realizó un estudio de las orientaciones curriculares de estadística y probabilidad en estas etapas educativas, mostrando que la probabilidad condicional e independencia aparecen actualmente en las orientaciones curriculares de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. El análisis nos sirve para comprender mejor cuál es el significado institucional pretendido para cada curso sobre estos temas.

Objetivo 2. *Obtener una primera visión de la investigación en psicología y educación relacionada con la probabilidad condicionada*

Este objetivo se ha cumplido tras analizar las investigaciones previas a este trabajo, las cuales se encuentran en el segundo capítulo de este trabajo, que se clasificaron según diferentes temáticas. Se añaden también los conocimientos obtenidos tras cursar las asignaturas de Fundamento de la educación estadística, Didáctica de la probabilidad y Didáctica de la estadística, pertenecientes al Máster de Didáctica de la Matemática, las cuales daban una visión general de la investigación sobre la didáctica de la estadística y probabilidad, así como las relacionadas con la psicología. Dicho estudio mostró que son pocas las investigaciones realizadas con estudiantes de Bachillerato y ninguna se interesa por las definiciones que construyen los estudiantes o los ejemplos que proporcionan.

Objetivo 3. *Realizar un estudio exploratorio de evaluación.*

Respecto a este objetivo, se ha llevado a cabo en el Capítulo 3, con el estudio de evaluación descrito. Cada ejercicio propuesto en el cuestionario que se resolvió en cursos de primero y segundo de Bachillerato, nos ha servido para confirmar que los estudiantes presentan los mismos errores descritos por Borovcnik (2012), Contreras (2011), Díaz, Batanero y Contreras (2010), Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987), entre otros. En particular se ha encontrado el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), confusión entre probabilidad condicional y compuesta, entre condicionamiento y causación y falacia del eje temporal (Gras y Totohasina, 2005). Además se ha encontrado confusión entre suma y multiplicación de probabilidades y dificultades en la realización del diagrama en árbol. Además se han analizado la corrección de las definiciones dadas y los ejemplos presentados, así como sus contextos.

## Conclusiones sobre las hipótesis

Hipótesis 1: *Se espera encontrar en el currículo numerosos contenidos que se relacionan de algún modo con las ideas de probabilidad condicional e independencia.*

Esta hipótesis se confirma una vez se han analizado los documentos curriculares vigentes para toda España y los concretos de Andalucía. Ambos textos coinciden en una introducción progresiva de las ideas que se deben de tener para una buena comprensión de los conceptos.

Hipótesis 2: *La investigación previa indica muchas dificultades con las ideas de probabilidad condicional e independencia*.

Tras trabajar en el Capítulo 2 sobre las dificultades previamente encontradas sobre probabilidad condicionada e independencia, hemos comprobado que los estudiantes presentan una gran diversa variedad de dificultades en estos conceptos.

Las investigaciones previas revelan dificultades en la comprensión de problemas, algo que hemos podido corroborar con nuestro cuestionario, debido al porcentaje de respuestas correctas tan bajo, 15,3%, que hemos encontrado tras la corrección del problema propuesto, a pesar de que aproximadamente la mitad de los estudiantes han sabido dar una buena definición de la probabilidad condicionada.

De las investigaciones previas se han encontrado similitudes en los errores encontrados, como se indicó en el Capítulo 3. Entre ellas están la falacia del eje temporal, relacionar probabilidad condicionada con la dependencia de sucesos, así como no saber distinguir entre probabilidad compuesta y simple, o simple y condicional, ya comentado.

Hipótesis 3. *Esperamos que una parte de los estudiantes de la muestra den definiciones imprecisas o incorrectas de la probabilidad condicional e independencia.*

Esta hipótesis es cierta solo en parte pues un 48,1% de los estudiantes ha sabido definir correctamente la probabilidad condicionada, y tan solo un 11,5% lo hace de forma imprecisa;  un 25% lo hace de forma incorrecta.

En cuanto a las definiciones de sucesos dependientes e independientes, los sucesos independientes han sido contestados correctamente por un 55,8%, mientras que las respuestas correctas pero imprecisas e incorrectas tienen un total del 25%. Podemos afirmar que más de la mitad de los estudiantes ha sabido dar una buena definición, y que no se ha tenido un porcentaje alto en las respuestas incorrectas e imprecisas.

Sin embargo en la definición de suceso dependiente los resultados obtenidos son completamente distintos, bajando el nivel de respuestas correctas a un 38,5% y un 40,4% lo hace de manera imprecisa o incorrecta y el resto no responde.

Por tanto podemos concluir que los estudiantes en general han dado una buena respuesta  de probabilidad condicionada y suceso independiente, pero no de suceso dependiente.

*Hipótesis 4. Esperamos que la mayoría de ejemplos proporcionados por los estudiantes sean sobre juegos de azar.*

Tras analizar los tipos de ejemplos dados por los estudiantes en el cuestionario, hemos podido corroborar esta hipótesis. Los contextos clasificados fueron juegos de azar, personal, profesional, social y científico, y tanto en los ejemplos dados por los estudiantes de primero de Bachillerato como los de segundo, el contexto más usado en los ejemplos ha sido el de juegos de azar. El orden viene seguido después por el personal (con una diferencia del 7,1%), social, científico y profesional.

## 4.3 PRINCIPALES APORTACIONES DEL TRABAJO

En este trabajo podemos considerar varios tipos de aportaciones: En primer lugar, como se ha indicado, apenas hay estudios sobre la comprensión de la probabilidad condicionada e independencia con estudiantes de Bachillerato, por lo que aportamos una primera información en este punto.

Junto con ello, el análisis de las definiciones que son capaces de dar sobre los cuatro conceptos considerados (probabilidad simple, condicional, sucesos dependientes e independientes) y los ejemplos que pueden presentar son puntos originales en el trabajo.

Tanto las definiciones como ejemplos constituyen parte de las prácticas que los estudiantes pueden realizar a propósito de la probabilidad condicional e independencia. Añadido a esto las soluciones obtenidas al problema y las representaciones utilizadas (diagrama en árbol, fórmulas o esquemas de urna) nos informan de una parte del significado personal de los estudiantes.

Una última aportación es la lista de conflictos semióticos encontrados que confirma los de otras investigaciones.

## 4.4 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Este trabajo se ha centrado en los conceptos de probabilidad simple y condicionada únicamente para estudiantes de Bachillerato, debido a que en estos cursos es donde el estudiante ha podido trabajar sobre estos conceptos en mayor profundidad. Como en toda investigación, encontramos limitaciones que también permiten definir líneas futuras de trabajo.

Por ejemplo, en tercero de secundaria se estudia la probabilidad simple y los diagramas de árbol y en cuarto aparece la probabilidad condicionada, así como los conceptos de sucesos dependientes e independientes, por lo que se podría proponer un cuestionario similar, cambiando el nivel del problema para ambos cursos para simplificarlo, en tercero para saber qué posible idea se hacen de lo que son los sucesos dependientes e independientes y en cuarto para comprobar si han comprendido o no estos conceptos.

Aparte de evaluar el conocimiento del estudiante también serviría para evaluar las clases de probabilidad del profesor. Si gran parte de los estudiantes no han entendido estas ideas, habría que trabajar sobre cómo podrían mejorar los estudiantes estas nociones, guiados por el profesor. Actividades nuevas o usar aprendizaje por proyectos podrían servir para que afiancen estas concepciones nuevas.

Las peores respuestas ha obtenido ha sido el problema, por lo que otra posible línea de investigación podría ser centrarse en la comprensión de problemas de probabilidades usando diagramas de árbol o urnas, con la finalidad de poder mejorar estos resultados. También formaría parte de esta investigación analizar hasta qué punto los estudiantes reconocen cuándo se formulan preguntas relacionadas con probabilidad condicionada, ya que a pesar de saber explicar qué es una probabilidad condicionada, no han sabido dar buenos ejemplos y no han sabido reconocer la condición en el segundo apartado del problema.

Por otra parte, los adolescentes siempre quieren saber dónde va a poder usar la información que recibe, estos conceptos para qué van a servirle, qué utilidad tienen. Tras la corrección de los ejemplos se ha observado que más de la mitad de ellos eran sobre juegos de azar, por lo que sería bueno poder trabajar con los estudiantes la teoría sin tocar el tema del azar. Quizás sería interesante diseñar una unidad didáctica con ejemplos distintos a los que se acostumbran a trabajar en el aula, excluyendo los juegos de azar, y después de exponer el tema en clase de esta manera, pasar el cuestionario y ver cómo responden a las preguntas y observar si hay o no cambios en los ejemplos.

# REFERENCIAS

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar.* Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemátic1as Thales. CD-ROM.

Batanero, C. y Borovcnik. M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero C., Cañadas, G., Contreras, J. y Díaz, C. (2013) Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet 12*(2). Online: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Revistadigital.pdf.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 15-37). New York: Springer

Batanero, C., Ortiz, J. Roa, R. y Serrano, L (2013). La statistique dans le curriculum espagnol. *Statistique et Enseignement 4*(1), 89-106.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 5-27.

Borin, C., Kataoka, Y. y Trevethan, H. (2010) Independence of events: an analysis of knowledge level in different groups of students. En K. Makar (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics.* Ljubljana, Slovenia: International Statistical Institute. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Consejería de Educación Junta de Andalucía (2016). *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.* Sevilla: Autor.

Contreras J. (2009) *Recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad condicionada.* Trabajo de investigación tutelado. Universidad de Granada

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Universidad de Granada.

Cordani, L. K. y Wechsler, S. (2006). Teaching independence and exchangeability. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Brasil): International Association for Statistics Education. Online: https://iase-web.org/documents/papers/icots7/3I1_CORD.pdf

D'Amelio, A. (2004). *Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades.* En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 138-144). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Díaz, C. (2007). Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en Psicología. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *26*(2), 149-162.

Díaz C. y de la Fuente I., (2005) Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon, 59*, 245-260.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar.* [CD ROM]. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Feller, W. (1957). *An introduction to probability theory and its applications.* New York: Wiley.

Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy. En G. A.

Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning.

(pp. 39-63). New York: Springer

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22 (*2 y 3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Online: www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49-95.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Feller, W. (1957). An Introduction to Probability Theory and its Applications (Volume 1), John Wiley & Sons Inc.

Feller, W. (1983) Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. México, D.F.: Limusa.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Dordrecht: Kluwer.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), Subjective probability (pp. 129-161). Chichester: Wiley

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 187–205.

Huerta, P. H. y Arnau, J. A. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 87-106.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, M. A. y Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 807-817). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.

Kataoka, Hernandez y Borim (2010). Independence of events: analysis of knowledge level in different groups of students. National Autonomous University of Mexico, Mexico Bandeirante University of São Paulo, Brazil, Federal University of Lavras, Brazil Online: http://iase-web.org/

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568.

Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development, 3*, 62-73.

Lonjedo, M. A. y Huerta M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 203-212). Córdoba: SEIEM.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 283-301

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deportes (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

OCDE (2013). PISA 2012 *Assessment and analytical framework: Mathematics, readings, science, problem solving and financial literacy*. París: OECD.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes, 40,* 255- 269.

Porta, L. y Silva, M. (2003). La investigación cualitativa: el análisis de contenido en la investigación educativa. *Red Nacional Argentina de Documentación e información Educativa*. Recuperado el 25 de noviembre de 2014 de: http://www.uccor.edu.ar/paginas/REDUC/porta.pdf.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México: Cinvestav.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: Mc Graw Hill.

Steinbring, H. (1986) L´independance stochastique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(3), 99-118.

Tari, A. y Diblasi, A. (2006). Analysis of didactic suggested distinguishing disjunctive events and independent events. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Brasil): International Statistical Institute. Online: http://iase-web.org/documents/papers/icots7/C333.pdf

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios,* Tesis doctoral.. Universidad de Granada.

Von Mises, R. (1964). Mathematical Theory of Probability and Statistics, N. York, Academic Press