RELACIÓN ENTRE LOS SIGNIFICADOS CLÁSICO Y FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD: UN ESTUDIO CON FUTUROS PROFESORES

Rafael Eduardo Parraguez Angulo

Trabajo Fin de Máster
Máster en Didáctica de la Matemática
2016

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

Tutoras:
Dra. Carmen Batanero Bernabeu

Dra. Mª Magdalena Gea Serrano

AGRADECIMIENTOS

Desde que fui un estudiante de Licenciatura en educación matemática, y luego, ya como profesional titulado, deseaba y soñaba seguir mis estudios de post grado en el área de la didáctica de la matemática, y más aún, en España, un país en un continente tan lejano. No fue fácil el camino, el estar lejos de mi país, familia, amigos, hacían que esto fuese más difícil. Pero hoy estoy cerrando este ciclo en mi vida, y debo agradecer a muchas personas que de algún modo me apoyaron para concretar este sueño.

En primer lugar, a la Doctora Carmen Batanero Bernabeu, por confiar en mí, guiarme y apoyarme para concretar este trabajo. Muchas gracias profesora, por su ayuda y todo lo que me enseñó en este tiempo aquí en Granada.

A la Doctora María Magdalena Gea Serrano, por sus consejos y ayuda en la corrección de este TFM.

A todos los profesores del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por todos los conocimientos entregados en cada uno de los cursos impartidos.

A mi familia, que a pesar de la distancia, me enviaban sus buenos deseos y apoyo incondicional desde Chile.

A mi amigo Danilo Díaz Levicoy, por ayudarme y aconsejarme en todo este proceso estudiantil.

A mi compañero y amigo Cristian Ferrada, Norma su esposa, Laurita, Joaquín y Mariano sus hijos, por ser mi familia aquí en Granada.

A mis amigos de la vida, aquellos que conocí en este lugar y fueron parte de este proceso, en especial a: Caro, Cami, Ronald, Carito, Nicolás G, Rubén, Federica, Nico Panda, Seba, Valeria, Valeska, Dafne, Magdalena, Lara, Tere, Pauli, Cota, Eli, Simón y Lucy. Gracias por aceptarme y ser mis amigos en este lugar del mundo.

Y por supuesto a Dios porque jamás me ha dejado solo en el caminar de mi vida.

A todos ustedes.

Gracias.

Rafa.

INTRODUCCIÓN

Un cambio importante que se ha producido en el currículo de educación primaria en la última década es la incorporación de contenidos de probabilidad desde el primer ciclo (por ejemplo, en NCTM, 2000 o MEC, 2006). La principal razón que apoya este cambio es que vivimos en un mundo con fuerte presencia del azar, por lo que hemos de preparar a los niños para afrontar dichas situaciones y tomar decisiones correctas. Así, autores como Gal (2005) reclaman la alfabetización probabilística de todos, como conjunto de conocimientos, capacidades y actitudes que permiten al ciudadano desenvolverse frente a los fenómenos aleatorios.

Pero la enseñanza de la probabilidad a los niños no es tarea sencilla. En sus investigaciones, Fischbein (1975) resaltó la fuerza de las intuiciones probabilísticas, y sugirió que dichas intuiciones no se desarrollan correctamente, a menos que la enseñanza sea adecuada.

Será entonces necesario proporcionar una formación adecuada a los futuros profesores que han de impartir estos contenidos. Dicha formación ha de considerar las características específicas de la probabilidad, y ha de englobar su conocimiento matemático, además del conocimiento didáctico sobre la misma.

En este trabajo de iniciación a la investigación, nos hemos interesado por esta problemática y más concretamente, por analizar la forma en que los futuros profesores de educación primaria relacionan los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad y las dificultades que puedan tener en diferenciar dichos significados y ponerlos en relación.

Al ser un trabajo limitado, tanto por el tiempo disponible, como por la extensión fijada para este documento en las directrices para su elaboración, nos limitamos a un estudio exploratorio sobre una muestra pequeña de estudiantes.

La parte principal del estudio consiste en el análisis de las respuestas escritas a una actividad práctica resuelta por una muestra de estudiantes de Magisterio, especialidad de educación primaria. Dicha actividad se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), quienes también la utilizaron en la formación de profesores. Nuestro análisis completa el suyo, puesto que en la experiencia de los autores citados la actividad fue realizada en la pizarra por el profesor, y en su trabajo se describe este proceso de resolución colectiva, junto con las sugerencias esporádicas de alumnos aislados.

En nuestro caso, estudiaremos las respuestas en un pequeño grupo de estudiantes que las resuelven individualmente por escrito y las compararemos con otro grupo que las resuelven trabajando en parejas. Los resultados se presentan en el Capítulo 3 de esta memoria. Dicho estudio de evaluación se completa con dos capítulos de tipo teórico:

- En el primero de ellos comenzamos con la justificación del interés del trabajo, la descripción del marco teórico utilizado, el análisis de los significados clásico y frecuencial de la probabilidad y del currículo de probabilidad español para la educación primaria; finalizando con la exposición de los objetivos y las hipótesis de la investigación.
- En el segundo capítulo se describen los fundamentos que la sustentan. Se comienza por exponer algunos modelos sobre el conocimiento del profesor utilizados en educación estadística y el propio del enfoque ontosemiótico. A continuación, se utiliza este último para clasificar la investigación sobre formación de profesores para enseñar probabilidad. Se finaliza con la descripción de algunas investigaciones sobre experiencia de formación de profesores.

Con todo ello completamos, aunque sea en forma breve y limitada, un proceso completo de investigación, identificando un problema, justificándolo, fundamentándolo, recogiendo y analizando datos y finalmente aportando nuestras conclusiones. Se recogen al final de la Memoria las conclusiones y referencias, junto con una comunicación que sintetiza el trabajo y que ha sido aceptada para presentación en el V EDEPA, que se celebrará en Diciembre de 2016 en Cartago, Costa Rica.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Para comenzar la Memoria, en este capítulo se precisa el problema de investigación abordado y se justifica su interés didáctico. Como hemos indicado, nos interesamos por las dificultades que los futuros profesores de educación primaria presentan al diferenciar y relacionar los significados clásico y frecuencial de la probabilidad.

Comenzamos el capítulo con una descripción del marco teórico utilizado, consistente en algunos elementos del enfoque ontosemiótico propuesto por el profesor Godino y sus colaboradores (Godino, 2002; 2003; Godino y Batanero, 1994: Godino, Batanero y Font, 2007). A continuación se realiza una descripción muy resumida de los significados de la probabilidad abordados en el trabajo, analizando su importancia para la enseñanza y la controversia filosófica relacionada con dichos significados. Seguidamente describimos la forma en que la probabilidad se contempla en el currículo de educación primaria en España, para justificar la necesidad de que lo futuros profesores alcancen una comprensión suficiente de los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad.

Finalmente planteamos los objetivos e hipótesis del trabajo y la forma en que se trata de alcanzar los citados objetivos.

1.2. MARCO TEÓRICO

En este apartado del trabajo de fin de máster, analizamos los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos, elementos del enfoque onto-semiótico sobre el conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Dicho enfoque asume que el conocimiento matemático surge de las prácticas realizadas por personas o en instituciones para resolver problemas de matemáticas (Godino, 2002; 2003; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). En el caso de la probabilidad, puesto que tanto los problemas, como las prácticas asociadas a los enfoques clásico y frecuencial son diferentes, nos permite considerarlos como significados parciales del objeto matemático probabilidad (Batanero y Díaz, 2007).

1.2.1. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Los objetos matemáticos, que, como se ha dicho, surgen del conjunto de prácticas de la actividad matemática, se conciben como símbolos de unidades culturales que nacen de los usos que hacen de los mismos las personas e instituciones y que evolucionan con el paso del tiempo en la actividad de resolución de problemas (Godino, 2002; 2003).

Según Godino y Batanero (1994) las prácticas matemáticas se definen como las actuaciones o expresiones que realiza una persona o se llevan a cabo dentro de una institución para resolver un problema matemático, comunicar la solución y generalizarla a otros problemas o contextos. Estas prácticas pueden ser personales o institucionales. Las prácticas institucionales son las realizadas por un grupo de personas interesadas en resolver una misma situación problemática.

El significado de un objeto matemático sería el conjunto de prácticas asociadas a la resolución de problemas prototípicos de dicho objeto. Por ejemplo, a la pregunta ¿Qué significa probabilidad?, el EOS la responde como el sistema de prácticas utilizado por una persona, o institución, para resolver situaciones problemáticas en donde existe la necesidad de cuantificar la incertidumbre de un suceso y de las que surge el objeto matemático probabilidad. Como se ha descrito anteriormente, históricamente ha sido posible diferenciar varios significados asociados al objeto matemático probabilidad (Batanero y Díaz, 2007) y en nuestro trabajo consideraremos el significado clásico y el frecuencial. En el primer caso, la probabilidad surge de las prácticas realizadas en resolución de problemas relacionados con los juegos de azar, donde los sucesos elementales son equiprobables. En el segundo, del estudio de las frecuencias relativas en series largas de ensayos de un mismo experimento, como por ejemplo, para fijar pólizas de seguros de vidas o estimar la esperanza de vida de una persona.

Según Godino y cols. (Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007) en el significado institucional de un objeto matemático se distinguen, a efectos de llevar a cabo una investigación, los siguientes tipos:

- *Referencial*: es el sistema de prácticas considerado por el profesor o el investigador para la elaboración de una investigación o de una programación de aula. Para determinarlo, se utilizarán las fuentes necesarias, ya sea, libros de texto, orientaciones curriculares, objetivos institucionales y experiencias propias. Con esto se obtiene un significado global del objeto matemático, su origen, evolución, los contextos en los que se utiliza, etc. Para el caso de la probabilidad, el significado referencial sería la unión de los diferentes significados clásico, frecuencial, axiomático, subjetivo, etc. descritos en trabajos de síntesis como Batanero (2005), Batanero y Borovcnik (2016), Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez (2016) o Batanero y Díaz (2007).

- *Pretendido:* es el sistema de prácticas plasmado en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje que se realizará sobre cierto objeto matemático. O bien, el que se pretende investigar en un trabajo de investigación.
- *Implementado:* es el sistema de prácticas efectivamente desarrollado por el profesor en la clase de matemáticas, el que utilizó con el estudiante para el estudio del objeto matemático y será fundamental para el diseño de las evaluaciones que a futuro deberá rendir como parte del proceso de enseñanza – aprendizaje.
- *Evaluado:* es el sistema de prácticas que selecciona el profesor, mediante un conjunto de tareas y/o pautas de observaciones, con el fin de evaluar el significado personal del alumno sobre el objeto matemático estudiado. O bien, el significado que evalúa un investigador dentro de su trabajo.

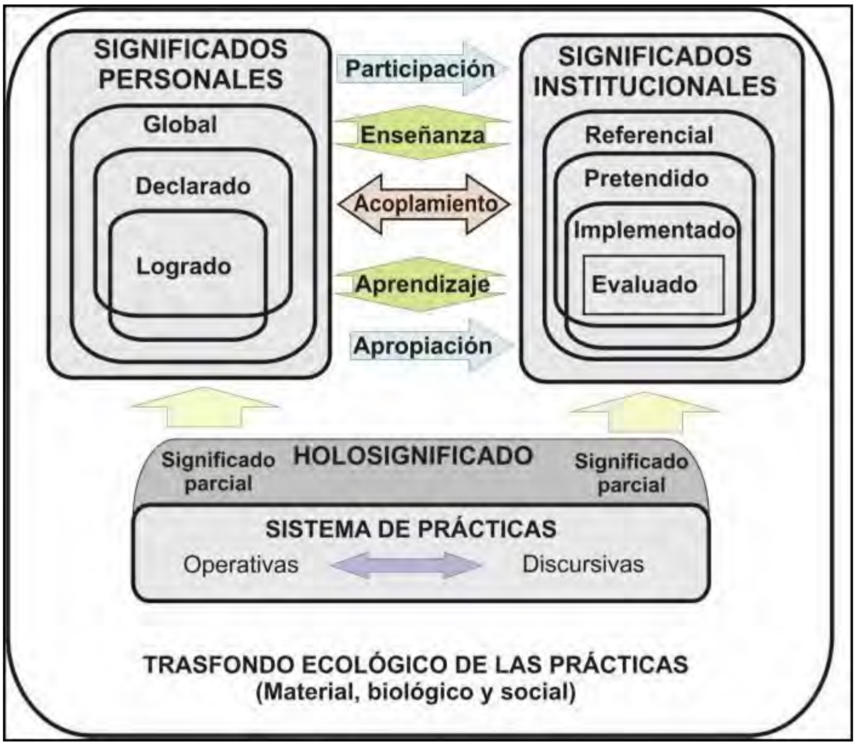


Figura 1.2.1.1. *Tipos de significado* (Godino, 2003, p. 140)

Por otra parte, en el significado personal de un objeto matemático se distinguen los siguientes tipos:

- *Global:* es el sistema de prácticas que un estudiante puede ser capaz de realizar, respecto a un determinado objeto matemático.
- *Declarado:* es el sistema de prácticas que un estudiante pone de manifiesto en una evaluación, como por ejemplo, la propuesta por su profesor.
- *Logrado:* es el sistema de prácticas, que hubiera puesto de manifiesto el estudiante, que se consideran correctas por la institución.

En la Figura 1.2.1.1 se pueden observar los tipos de significado implicados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde, en la enseñanza de un objeto matemático, el estudiante participa en una comunidad de prácticas en el que se apropia del significado institucional. En nuestro estudio consideraremos el significado evaluado en el instrumento utilizado y el significado declarado por el estudiante, diferenciando en este el logrado, del no logrado.

1.2.2. CONFIGURACIONES DE OBJETOS QUE INTERVIENEN EN LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS

En nuestro trabajo también nos interesamos por los diferentes tipos de objetos que, de acuerdo a Godino, Batanero y Font (2007), juegan un papel fundamental en las prácticas realizadas al resolver problemas matemáticos y que son los siguientes:

- *Situaciones-problemas:* como hemos dicho, su resolución lleva a las correspondientes prácticas matemáticas. En el caso de la probabilidad, dichos problemas pueden referirse a la estimación de resultados o apuesta justa en juegos de azar, la previsión de esperanza de vida, de consumo o de cualquier otra variable aleatoria, etc.
- *Lenguajes:* en la resolución de problemas es necesario utilizar palabras, símbolos o representaciones gráficas o tabulares para poder operar con los datos del problema y expresar su solución; estas representaciones también tienen un papel operatorio, ya que, con frecuencia, operamos con ellas.
- *Conceptos:* son los objetos matemáticos que se utilizan implícita o explícitamente en la resolución de una actividad matemática y se pueden definir. Por ejemplo, en nuestro caso, en las actividades propuestas a los futuros profesores pondrán en juego conceptos como aleatoriedad, casos favorables y posibles, probabilidad y frecuencia, o valor esperado, entre otros.
- *Proposiciones o propiedades:* ligan los conceptos y regulan las prácticas que realiza

el estudiante; en nuestro trabajo puede aparecer la proporcionalidad entre probabilidad y casos favorables, la equiprobabilidad de sucesos elementales, la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad o la aditividad de la probabilidad de sucesos disjuntos.

- *Procedimientos:* son los algoritmos y técnicas de cálculo que se aplican en la resolución de problemas. Por ejemplo, las operaciones aritméticas o la construcción del diagrama en árbol.
- *Argumentos:* sirven para justificar las soluciones de los problemas o las propiedades utilizadas en su resolución.

Los anteriores objetos matemáticos están relacionados, entre sí, formando configuraciones de objetos, que pueden ser epistémicas o cognitivas según se refieran a una institución o a una persona.

1.3. LOS SIGNIFICADOS CLÁSICO Y FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD

Una vez expuestas las ideas teóricas que nos sirven de base, en esta sección las utilizamos para analizar los significados clásico y frecuencial de la probabilidad.

El concepto de probabilidad en el transcurso de tiempo ha tenido, y tiene en la actualidad, diversas interpretaciones. Esto lo lleva a ser objeto de debate, en filosofía y estadística, que se centra sobre todo en su naturaleza misma, que se concibe de forma dual, bien como una propiedad objetiva de un suceso o como un grado de creencia personal subjetiva en la verosimilitud del mismo (Batanero, 2005; Hacking, 1995).

Dentro de los diversos significados que se derivan de estas dos visiones, en nuestro trabajo nos centramos únicamente en las definiciones de probabilidad clásica y frecuencial y su papel en el currículo de educación primaria. Cada una de ella involucra, según Batanero (2005) y Batanero y Díaz (2007), diferentes configuraciones de objetos matemáticos, por lo que constituyen significados diferenciados del concepto. El aprendizaje de la probabilidad, según estas autoras, no puede reducirse a uno de los dos significados, sino que ambos han de ser comprendidos por los estudiantes y en nuestro caso, los futuros profesores, quienes deben ponerlos en relación.

Es por ello que en este apartado del Trabajo de Fin de Máster, presentamos las definiciones de probabilidad desde estos dos puntos de vista, analizamos sus características y describimos las controversias producidas por cada una de ellas. Para realizar este análisis, utilizamos y complementamos los trabajos de Batanero (2005;

2013), Batanero y Díaz (2007) y Gómez (2011). Otros significados de la probabilidad que no consideramos en este trabajo se resumen en estos artículos.

1.3.1. SIGNIFICADO CLÁSICO

El punto de partida de la teoría de probabilidad es el estudio de los juegos de azar, que se han practicado desde la antigüedad en todas las culturas, tanto en occidente como en oriente, desde muchos siglos antes de Cristo.

Esta costumbre extendida y la relevancia social de los juegos de azar a lo largo de los siglos contrasta con el hecho de que el concepto de probabilidad sea relativamente reciente, en comparación con otros conceptos matemáticos (Batanero, 2005; 2013; Batanero, Henry y Parzyz, 2005; Batanero et al., 2016). No se han dado razones claras para este desarrollo tan tardío, pues las herramientas matemáticas requeridas, como el álgebra, estaban disponibles. Hacking (1995) sugiere que, ya que en las culturas primitivas se ligaba el azar con creencias o ceremonias religiosas, no se trató de estudiar matemáticamente estos fenómenos, puesto que se suponía que escapaban del control o manipulación humana.

Aunque se encuentran menciones aisladas a los juegos de azar y a la posibilidad de obtener uno u otro resultado en documentos antiguos, la correspondencia entre Pascal y Fermat en la década de 1650, en la cual resolvían problemas de reparto o ganancia esperada en juegos de azar, se considera el primer estudio matemático de la probabilidad, incluso cuando en esta correspondencia todavía no se presenta una definición del concepto.

Otros hitos importantes en la definición clásica de probabilidad se encuentran en los trabajos de Huygens (1657/1998 *De Ratiociniis in Aleae Ludo*) y de Jacques Bernoulli (1713/1987 *Ars Conjectandi)* referidos a la ganancia esperada en un juego, aunque tampoco en ellos se presenta una definición de la probabilidad.

La primera definición formal la entrega de Moivre (1718) en *The Doctrine of Chances*:

> Si constituimos una fracción cuyo numerador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (p. 1).

Observamos que ninguno de los libros que hemos citado hasta este momento fue un tratado de probabilidades en sí mismo. Seguido a esto, Laplace (1814/1995) publica un texto sobre este tema, donde estableció la definición que actualmente conocemos como probabilidad clásica o regla de Laplace. Por tanto, en este momento, ya se considera la probabilidad como un objeto de estudio en sí misma. Para este autor, la probabilidad de un suceso es “como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles” (p. 28). Esta definición, desde su comienzo, no estuvo ajena a la controversia.

Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), se trata de una definición que no ofrece una respuesta a la pregunta de cuál es la naturaleza de la probabilidad; sólo describe un método para calcular las probabilidades de algunos sucesos sencillos; aquellos cuyos elementos pueden considerarse equiprobables (Batanero, 2016). La definición es circular, pues el término “equiprobable” se incluye en la definición de probabilidad; no podemos saber qué queremos decir con la palabra “equiprobable” si la probabilidad no se ha definido. Además, solo se puede aplicar esta definición a experimentos con un número finito de posibilidades; ello se explica porque los problemas de interés en ese momento eran problemas relacionados con los juegos de azar, cuyos espacios muéstrales constan de sucesos equiprobables. Tampoco se puede aplicar cuando no se cumple la equiprobabilidad, por ejemplo, si analizamos la posibilidad de encestar en una canasta de baloncesto.

En la práctica de la estadística esta definición es muy importante, pues se usa en el muestreo aleatorio (donde se eligen todos los elementos con la misma probabilidad) y en el diseño experimental, donde se da la misma probabilidad de pertenecer al grupo experimental o control a los participantes (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

En la escuela la definición clásica ha sido usada habitualmente, porque a los niños les gustan los juegos y de este modo se les interesa por el tema. Pero el rango de aplicaciones que se puede mostrar con este enfoque es muy pequeño, por lo que, según Batanero (2013), los estudiantes pueden considerar a la probabilidad como una rama no importante de las matemáticas, un capítulo de la matemática recreativa. Al contrario de esta creencia, la probabilidad se aplica hoy día en la mayoría de los campos científicos y actividades de la vida social, profesional y política. Por otro lado, de acuerdo a Godino, Batanero y Cañizares (1987), para aplicar este enfoque se requiere cálculo combinatorio, que es complicado para los niños, por lo que sería difícil avanzar con este enfoque en la educación primaria.

1.3.2. SIGNIFICADO FRECUENCIAL

Al tratar de superar los inconvenientes y controversias filosóficas del enfoque clásico, algunos autores definen la probabilidad desde un punto de vista frecuencial. Los estudios sobre tablas de vida en Inglaterra, en que se recopilaron muchos datos sobre edad y causas de muerte, habían hecho observar que la frecuencia relativa de un suceso (por ejemplo, una causa de muerte) se estabiliza a la larga (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). El primero en demostrar que la probabilidad de un suceso se puede estimar con la precisión que se desee, a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del mismo experimento, fue Jacques Bernoulli (1987/1713).

Su demostración de la primera ley de los grandes números fue seguida por un programa de investigación, llevado a cabo por muchos matemáticos, que estudian varios teoremas de límite en probabilidad. La convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica se consideró como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad (Gómez, 2014). Pero hubo que esperar a Von Mises (1952/1928), quien fue el primero en definir la probabilidad en su concepción frecuencial, como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa en un gran número de ensayos.

En esta definición se observan dos características importantes, de acuerdo a Batanero y Díaz (2007). La primera de ellas es que se acepta la posibilidad de la repetición de un experimento en condiciones idénticas e independientes unas de otras, cosa que teóricamente es posible, pero en la práctica es muy difícil. Por ello, la independencia se convierte en un concepto fundamental en probabilidad (Batanero y Borovcnik, 2016). La segunda es que, aunque los resultados aislados son imprevisibles, a mayor repetición se puede observar mayor regularidad en la frecuencia relativa, si el número de ensayos es suficientemente elevado.

La definición frecuencial de la probabilidad aumenta mucho la posibilidad de aplicar el cálculo de probabilidades, pues no se exige la equiprobabilidad de los sucesos elementales. Con ello, la estadística y probabilidad comienzan a aplicarse en todos los campos de las ciencias y ramas de la actividad humana (Godino, Batanero y Cañizares, 1987). Sin embargo, esta definición presenta algunos problemas.

El primero de ellos es que, al partir de la frecuencia relativa no obtenemos un valor exacto de la probabilidad, sino, una estimación de la misma; por tanto, puede variar cada vez que tratamos de estimarla. Segundo, en la mayor parte de los casos es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y hay circunstancias (por ejemplo, en medicina, en inversiones, etc.) donde con seguridad sabemos que las condiciones de una y otra repetición son diferentes. Tercero, es difícil comprender cuál es el número de experimentos que debemos realizar para que el valor de la probabilidad estimado sea válido o considerado bueno (Batanero et al., 2016).

Según estos autores, la ley débil de los grandes números establece que dado $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tan pequeños como queramos, podemos encontrar un valor $n > \frac{pq}{\varepsilon\alpha^2}$, siendo p la probabilidad teórica y $q = 1 - p$, de forma que se verifica que la diferencia entre la frecuencia relativa h_n en n ensayos y la probabilidad cumple que:

$$P(|h_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

Observamos que el teorema anterior solo nos dice que la probabilidad de convergencia es tan grande como queramos, pero no nos da seguridad de la convergencia, incluso en una serie larga de experimentos. La comprensión de este teorema supone una gran complejidad y está fuera del alcance de la educación primaria o incluso secundaria, en las que tenemos que admitir como buena una comprensión parcial.

Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), desde el punto de vista de la enseñanza, el significado frecuencia permite establecer la unión entre la estadística y la probabilidad, pues utiliza el concepto de frecuencia relativa de la estadística aplicándolo en el cálculo de probabilidades. Los niños pueden ver la relación entre los dos temas y su utilidad. Además, gracias a la tecnología es muy sencillo aplicar este enfoque, usando la simulación para repetir un cierto experimento un número grande de veces y observar empíricamente la convergencia. Se soslaya así la dificultad de la ley de los grandes números, sustituyéndola por una aproximación empírica e intuitiva.

Para resumir mejor la diferencia entre los enfoques clásicos y frecuencial de la probabilidad, presentamos la Tabla 1.3.2.1, adaptada de Batanero (2005), considerando los elementos característicos de cada una de estas aproximaciones. Observamos que, además, aparecen conceptos diferentes en cada uno de los dos enfoques, así como propiedades, procedimientos y elementos lingüísticos específicos de cada una de ellas.

Tabla 1.3.2.1. *Configuraciones de objetos matemáticos asociadas a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad* (adaptado de Batanero, 2005, p. 256)

	Significado de la probabilidad	
	Clásica	Frecuencial
Campos de problemas	· Cálculo de apuestas o riesgos en juegos de azar	· Estimación de parámetros en poblaciones.
Algoritmos y procedimientos	· Combinatoria · Proporciones · Análisis a priori de la estructura del experimento	· Registro de datos estadísticos a posteriori · Ajuste de curvas matemáticas · Análisis matemático · Simulación
Elementos lingüísticos	· Triángulo aritmético · Listado de sucesos · Formulas combinatorias · Representaciones gráficas	· Tablas y gráficos estadísticos · Curvas de densidad · Tablas de números aleatorios · Tablas de distribuciones
Definiciones y propiedades	· Cociente de casos · favorables y posibles · Equiprobabilidad · Espacio muestral	· Límite de las frecuencias relativas · Carácter objetivo basado en la evidencia empírica
Algunos conceptos relacionados	· Esperanza · Equitatividad	· Frecuencia relativa · Variabilidad de la frecuencia relativa · Independencia de ensayos · Variable aleatoria · Distribución de probabilidad

El futuro profesor que ha enseñar en la educación primaria con estos dos enfoques, como recomienda el currículo, ha de diferenciarlos claramente y dominar los elementos que caracterizan a cada uno. También debe relacionarlos, comprendiendo las exigencias de cada uno de ellos, así como la diferencia entre estimación a partir de la frecuencia relativa y probabilidad teórica. Esta comprensión es la que tratamos de evaluar en nuestro trabajo. Concretamente, las líneas correspondientes a los conceptos, propiedades y elementos lingüísticos, junto con algunos procedimientos de la Tabla 1.3.2.1, constituyen el significado de referencia en nuestro trabajo, que trataremos de evaluar partiendo de un problema relacionado con un juego de azar y la recogida de datos con dicho juego.

1.4. LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA

Puesto que nos centramos en los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria, es conveniente justificar que el tema evaluado se tiene en cuenta en el currículo de esta etapa educativa.

En la actualidad, nos encontramos con un cambio en la normativa curricular en España, que afecta a la educación primaria, entre otros niveles educativos. En el currículo vigente hasta el curso pasado (MEC, 2006), se incluyeron contenidos explícitos de probabilidad para cada ciclo de formación; y también había menciones en otros bloques, en concordancia con el carácter integrador del currículo. En cada uno de los ciclos, la probabilidad estaba presente con los siguientes contenidos:

- *Primer ciclo:* Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad (MEC 2006, p. 43098).
- *Segundo ciclo:* Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar (MEC 2006, p. 43099).
- *Tercer ciclo*: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso […] Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales (MEC 2006, p. 43101).

Encontramos también en este documento los siguientes criterios de evaluación, relacionados con el tema:

- *Primer y Segundo Ciclo:* Se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible... (MEC, 2006, p. 43098).
- *Tercer Ciclo*: Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Se comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia (MEC, 2006, pp. 43101).

Por tanto, de acuerdo a Gómez (2014), se comenzaba en primer y segundo ciclo con contenidos propios del significado intuitivo de la probabilidad, pasándose a introducir elementos de los significados clásico y frecuencial en el tercer ciclo. Reproducimos de esta autora la Tabla 1.4.1, donde se desglosan los objetos matemáticos propios de cada enfoque que se presentan en el Decreto (MEC 2006).

Posteriormente, según el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se estableció el currículo básico de la educación primaria en España (MECD, 2014), se produce una nueva regulación del currículo. En el caso de matemática, su eje principal es la actividad matemática de identificación y resolución de problemas en contextos de la vida diaria, para que el alumnado pueda, de esta manera, adquirir conocimientos más complejos que le preparen para la educación secundaria obligatoria.

Tabla 1.4.1.*Objetos matemáticos en el currículo de educación primaria* (Gómez, 2014, p. 46)

	Probabilidad	Objeto matemático	1°	2°	3°
Problemas	Clásica	SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar		x	x
	Frecuencial	SPF. Prever tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados		x	x
Conceptos	Clásica	CC1. Juego de azar		x	x
		CC2. Casos favorables; casos posibles		x	x
		CC3. Probabilidad			x
	Frecuencial	CF1. Colectivo (población); atributos	x		
		CF2. Ensayo; ensayos repetidos		x	x
		CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)		x	x
		CF4. Valor estimado de la probabilidad			x
		CF5. Simulación			x
Propiedades	Clásica	PC1. Número de resultados finito y numerable		x	x
		PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales			x
		PC3. C. favorables: resultados que favorecen		x	x
		PC4. C. posibles: todos los resultados		x	x
		PC5. Probabilidad: valor objetivo, calculable		x	x
		PC6. Regla de Laplace			x
	Frecuencial	PF1. Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables	x	x	x
		PF2. Atributos equiprobables o no	x	x	x
		PF3. Probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable			x
		PF4. Simulación: sustitución de un experimento por otro equivalente			x
Procedi-mientos	Clásica	PRC1. Analizar juegos de azar	x	x	x
		PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles		x	x
		PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables		x	x
		PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables			x
		PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional		x	x
		PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples			x
	Frecuencial	PRF1. Enumerar o discriminar atributos	x	x	x
		PRF2. Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos			x
		PRF3. Representar distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica		x	x
		PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimento compuesto)		x	
		PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos			x
		PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación			x
		PRF7. Simular con tecnología un experimento aleatorio			x

Los contenidos de matemáticas están organizados por el currículo en cinco bloques: (1) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; (2) Números; (3) Medida; (4) Geometría y (5) Estadística y probabilidad.

El primer bloque de contenidos se caracteriza por ser transversal, con respecto a los cuatro siguientes, puesto que se espera que esté presente en el desarrollo diario del trabajo del resto. En este bloque, se pretende preparar al alumno para describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones. Se sugiere que en esta etapa se trabaje en la profundización en los problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, formulando preguntas diferentes, utilizando procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones que se obtengan.

Tabla 1.4.2 Contenidos relacionados con Probabilidad, bloque 5 (MECD, 2014, pág. 19392)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
- Carácter aleatorio de algunas experiencias. - Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.	3. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervengan el azar y comprobar dicho resultado. 4. Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. 5. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.	4.1 Identifica situaciones de carácter aleatorio. 4.2 Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados cartas, lotería…). 5.1 Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. 5.2 Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

Estos cinco bloques están integrados por contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes evaluables, que describen lo que se espera que el alumno sea capaz de hacer al finalizar la etapa. En la Tabla 1.4.2 se presentan los correspondientes a la probabilidad, que están incluidos en el 5º bloque (MECD, 2014). Podemos observar, por un lado, que ahora no se especifican contenidos específicos para cada ciclo, por lo que serán las comunidades autónomas quienes los fijen. Por otro lado, observamos un contenido menos detallado para la probabilidad que en el anterior currículo. Sin embargo, este contenido se detalla mucho más en los criterios de evaluación, donde se observa una tendencia preferente al significado frecuencial, basado en la experiencia y toma de datos. Además, en los estándares de aprendizaje evaluables se da un gran peso a la actividad matemática de identificación y resolución de problemas, así como a hacer estimaciones y realizar conjeturas, todo esto llevado al contexto de la vida diaria.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado de nuestra investigación exponemos los objetivos del trabajo, que son los siguientes:

O1. Iniciarme en la investigación didáctica, identificando un tema de interés actual. Este objetivo se ha abordado a partir de los cursos de Máster, tanto los relacionados con la educación estadística, como aquellos que tratan de métodos de investigación y teoría de la educación matemática. La experiencia recogida en los mismos, así como mi experiencia previa en la formación de profesores de educación primaria, me han llevado a interesarme por el tema propuesto y a realizar una investigación exploratoria que se describe en este documento.

O2. Desarrollar una síntesis de las principales investigaciones previas centradas en la formación de profesores para enseñar probabilidad. Para alcanzar este objetivo se ha realizado una búsqueda bibliográfica en revistas de educación matemática y en Google Scholar, identificándose los trabajos que se resumen en el Capítulo 2 de esta Memoria. Esta síntesis me ha permitido comprender los temas abordados en los trabajos previos y relacionarlos con el que actualmente nos ocupa.

O3. Realizar un estudio exploratorio de evaluación de la forma en que los futuros profesores de educación primaria relacionan los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad. Para ello se analizan las respuestas escritas de una muestra de futuros profesores a una actividad práctica, que describe un juego que se puede analizar mediante el significado clásico, y a la vez proporciona información frecuencial sobre los resultados del juego en 100 repeticiones del mismo. Se plantean varias preguntas a los futuros profesores, en las que deben mostrar su conocimiento y puesta en relación de los dos significados.

1.6. HIPÓTESIS

Se finaliza este capítulo exponiendo las hipótesis de investigación de nuestro trabajo. Hacemos notar que entendemos las hipótesis en el sentido de conjeturas sobre lo que se espera encontrar en el estudio, pero no como hipótesis estadísticas formales.

H1. En la actividad de evaluación que se analiza en el Capítulo 3, se espera detectar en una proporción importante de futuros profesores de educación primaria, algunos sesgos de razonamiento en probabilidad, ya descritos por algunos autores en la literatura previa. En concreto, se espera identificar el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), la heurística de representatividad, la creencia en la ley de los pequeños números (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), y finalmente, el error de orden (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1997).

H2. Se espera que los futuros profesores resuelvan los problemas apoyándose en recursos intuitivos, como las tablas o el diagrama en árbol o bien otros esquemas gráficos, más que en el uso de fórmulas de cálculo de probabilidades.

Ambas hipótesis se sustentan en los resultados de investigaciones previas sobre el conocimiento de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria en España (Azcárate, 1995; Serrano, 1996; Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Contreras, 2011; Mohamed, 2012, Gómez, 2014; Rivas y Godino, 2015). Dichos trabajos sugieren debilidades en el desarrollo de pensamiento probabilístico, la preponderancia de aspectos procedimentales y errores por sesgos en la resolución de problemas sencillos.

H3. Finalmente, esperamos mayor número de respuestas correctas en los estudiantes que trabajan en pareja, frente a los que trabajan aisladamente. Nos basamos para ello en nuestra propia experiencia en la formación de profesores y en el hecho de que al trabajar juntos los estudiantes se pueden apoyar en su razonamiento.

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se fundamenta nuestro trabajo de investigación con el marco teórico y el resumen de las investigaciones previas. En primer lugar, incluimos una breve descripción de algunos modelos del conocimiento del profesor que consideramos relevantes, por el uso que han tenido dentro de la educación estadística. Finalizamos esta parte con un resumen del modelo de conocimiento didáctico-matemático propuesto en el EOS.

Continuamos con los principales antecedentes encontrados, referidos a la temática abordada en nuestro trabajo, que se clasifican de acuerdo a los diferentes componentes del conocimiento didáctico-matemático que se han analizado en dichas investigaciones. Clasificamos las investigaciones que estudian la dimensión matemática de dicho conocimiento en dos grupos: a) las que trabajan con futuros profesores de educación primaria, y b) las relacionadas con el conocimiento de profesores de educación primaria en ejercicio. Respecto a la dimensión didáctica, las investigaciones se clasifican según se tenga en cuenta las facetas epistémica, cognitiva, afectiva y mediacional-interaccional.

2.2. ALGUNOS MODELOS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

En nuestra investigación analizamos el conocimiento de probabilidad de futuros profesores y, por tanto, se incluye en los trabajos sobre conocimiento del profesor. Dichos trabajos son en la actualidad muy numerosos, con libros específicos sobre el tema (e.g., Even y Ball, 2009 o Wood, 2008); en educación estadística destacamos el de Batanero, Burrill y Reading (2011).

Por otro lado, en los principales handbooks de investigación en didáctica de la matemática se incluyen capítulos especiales sobre esta temática (e.g., Llinares y Krainer, 2006; Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013). Asimismo, se organizan grupos de trabajo específicos sobre el tema, tanto en congresos nacionales (como en los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) como en los internacionales (por ejemplo, en ICME). En España destacan los trabajos de Lorenzo Blanco, José Carrillo, Pablo Flores y Salvador Llinares.

La preocupación por el tipo de conocimiento requerido para una buena enseñanza de las matemáticas comienza con las investigaciones de Shulman (1986). Este autor describió el "conocimiento pedagógico del contenido" (PCK), como un conocimiento específico del profesor, que es diferente del que tiene cualquier otro profesional. El PCK es necesario para la enseñanza de un tema, pues incluye aspectos como saber manejar recursos instruccionales, identificar las dificultades de los alumnos, proponer explicaciones alternativas cuando una es difícil para el estudiante, identificar buenos ejemplos para cada tema, etc. Se desarrolla a partir de la formación inicial del profesor, sus lecturas de resultados de la investigación educativa y su experiencia profesional.

Shulman (1987) propuso dividir el conocimiento pedagógico del contenido en seis categorías: (a) conocimiento del contenido a enseñar, que sería, en nuestro trabajo, el conocimiento de la probabilidad; (b) conocimiento pedagógico general, que incluye puntos como la gestión en el aula, del tiempo docente, de la disciplina, etc.; (c) conocimiento del currículo sobre el tema que se trate: en nuestro caso, el conocimiento de los materiales didácticos y de las directrices curriculares sobre la probabilidad; (d) conocimientos de sus alumnos y sus características, sus estilo de aprendizaje, sus formas de razonar sobre la probabilidad, sus dificultades y estrategias al resolver problemas relacionados; (e) conocimiento del contexto educativo, el entorno del aula, el funcionamiento de la institución escolar y de la comunidad a la que pertenece la escuela; y (f) conocimiento de los fines y metas educativos sobre cada tema enseñado y sus fundamentos filosóficos e históricos.

Otros modelo importante del conocimiento del profesor es el desarrollado por Ball y colaboradores, quienes lo denominan "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT) o Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Lo describen como "*el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno*" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Está compuesto por dos grandes categorías: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido.

El conocimiento del contenido matemático (en nuestro caso, sobre la misma probabilidad) está dividido en tres componentes:

- El Conocimiento Común del Contenido (CCK), que es el conocimiento de un tema que tiene cualquier alumno o persona; es decir, es el conocimiento que posee una persona con una educación básica y que le permite resolver problemas matemáticos.

En nuestro caso, sería el conocimiento elemental sobre probabilidad, que nosotros interpretamos como el conocimiento de los contenidos de probabilidad que se deben enseñar en la educación primaria.

- El Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), es más amplio que el anterior y específico del profesor. Es el que aplica el profesor de matemática para articular tareas de enseñanza. Incluye un conocimiento de formas alternativas de resolver el mismo problema de probabilidad o de argumentos para probar una cierta propiedad o solución. También saber proponer tareas para el tema dado y saber analizar el contenido matemático de una tarea.
- El último componente es el Conocimiento en el Horizonte Matemático, que es el utilizado para establecer conexiones de un contenido particular con otros temas; en el caso de la probabilidad podría incluir aspectos históricos y filosóficos de la probabilidad, así como las controversias relacionadas.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido (o conocimiento didáctico del contenido) se divide en tres componentes:

- El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), que según Hill, Ball y Schilling (2008, p. 375) es *"el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular"*. Consistiría en conocer los razonamientos, estrategias, dificultades, actitudes, etc. de los estudiantes en relación a la probabilidad.
- El Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), es el conocimiento sobre los procesos de enseñanza y evaluación de un tema, y sobre cómo tratar errores y concepciones erróneas de los estudiantes. Requiere conocer los recursos didácticos, tipos de problemas, modos alternativos de explicar la probabilidad, etc.
- Y el Conocimiento del Currículo se refiere a las características de las directrices curriculares en los diferentes ciclos formativos y le permite al profesor articular sus temas (en este caso, la probabilidad) con los de otras asignaturas o áreas de la matemática.

Este modelo ha sido usado en investigaciones sobre conocimientos de los profesores para enseñar probabilidad en nuestro grupo de investigación, como los de Contreras (2011), Mohamed (2012) y Gómez (2014).

Por otro lado, algunos autores han tratado de hacer sugerencias sobre los componentes del conocimiento que se necesitan para enseñar probabilidad. Entre ellos tenemos a Godino, Batanero y Flores (1999), que hacen énfasis en la competencia de transformar la probabilidad formal para adaptarla a la enseñanza, el conocimiento de las dificultades de los estudiantes y la forma en que razonan y de la metodología de enseñanza. Estos mismos conocimientos son citados por Batanero, Godino y Roa (2004), junto con la capacidad de reflexión epistemológica, la actitud crítica para seleccionar materiales curriculares y para desarrollar instrumentos de evaluación.

2.2.1. MODELO DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN EL EOS

En nuestro trabajo utilizamos las ideas de Godino (2009), quien integra, organiza y extiende los modelos anteriormente citados, en particular, el de Shulman y el de Ball y colaboradores (Ball, y Bass, 2009; Ball, Thames, y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008). El autor, basándose en el marco del enfoque onto-semiótico, propone considerar el *conocimiento didáctico-matemático* del profesor (CDM). En este modelo se incluye, por un lado, el conocimiento matemático sobre el tema, que incluye el conocimiento de los problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos y que engloba el conocimiento común y en el conocimiento en el horizonte del contenido (en el modelo del MKT).

Sobre el conocimiento didáctico propone seis facetas o componentes diferenciadas:

- *Epistémica*: Sería el conocimiento especializado sobre el contenido; en nuestro caso, sobre la probabilidad y los objetos relacionados con ella.
- *Cognitiva:* Conocimiento de las formas de razonar del estudiante en el tema, sus actitudes, desarrollo cognitivo, estrategias de resolución de problemas, sus posibles errores con la materia, etc.
- *Afectiva:* Aspectos afectivos del aprendizaje tales como interés, actitud, creencias sobre el tema, o valoración de su utilidad. Es parte del conocimiento del contenido y el estudiante en el MKT, al igual que la faceta cognitiva.
- *Mediacional:* Implica el uso apropiado de recursos didácticos para facilitar el aprendizaje de un tema.
- *Interaccional*: Saber organizar el discurso en el aula, es decir, la comunicación entre alumnos y profesor así como entre los alumnos. Estas dos facetas cubren el

conocimiento del contenido y la enseñanza en el MKT.

- *Ecológica:* conocimiento de las relaciones del tema con otras materias, el currículo y la vida del estudiante. Es algo más amplio que el conocimiento del currículo en el MKT.

En la Figura 2.2.1.1 podemos observar estas facetas, a las que se añade el conocimiento sobre las normas que rigen el aula. Este modelo se ajusta bien a nuestro trabajo puesto que, tanto en la dimensión matemática como en las diferentes facetas de la dimensión didáctica, se tiene en cuenta el objeto matemático específico; en nuestro caso, la probabilidad.

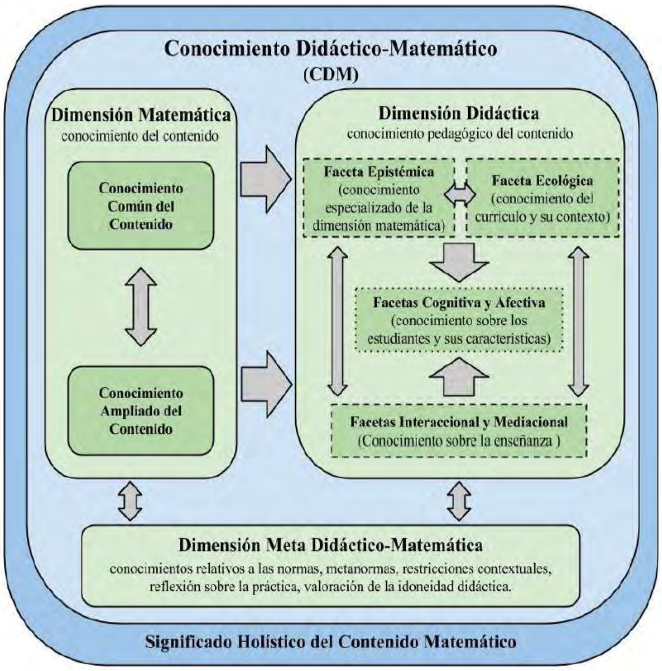


Figura 2.2.1.1. Facetas del conocimiento didáctico-matemático (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 98)

Una vez descritos estos modelos incluimos un resumen de las investigaciones previas relacionadas con la nuestra.

2.3. ANTECEDENTES

Como se ha indicado, la investigación sobre el conocimiento del profesor es muy amplia, por lo que no tratamos de abarcarla toda en nuestro trabajo, que se centra en los conocimientos de probabilidad de los futuros profesores en formación.

Por ello, en las secciones que siguen se realiza una síntesis de la investigación específica sobre este tema, que es mucho más restringida y, además, tenemos únicamente en cuenta los trabajos más cercanos al nuestro. La dividimos en dos apartados: en el primero de ellos estudiamos las investigaciones que, como la nuestra, se centran en la dimensión matemática del conocimiento de la probabilidad, y en el segundo, las que analizan la dimensión didáctica del conocimiento de la probabilidad. Partimos de los trabajos descritos en Batanero, Burrill y Reading (2011) y las síntesis incluidas en las tesis de Contreras (2011), Mohamed (2012) y Gómez (2014), que son los principales antecedentes de nuestra investigación y que completamos con otros trabajos no recogidos en ellas. También lo reorganizamos para tener en cuenta las facetas consideradas en el modelo de conocimiento didáctico-matemático de Godino (2009). Somos conscientes de no abarcar toda la literatura relacionada; la muestra de trabajos analizada es intencional, pero creemos constituye un fundamento suficiente para nuestro trabajo, que, como se dijo anteriormente, es también limitado.

2.3.1. INVESTIGACIONES SOBRE LA DIMENSIÓN MATEMÁTICA DEL CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD

Estos trabajos analizan el conocimiento común y avanzado de la probabilidad en varios colectivos de futuros profesores y profesores en ejercicio. La primera condición para ser un buen profesor es conocer el tema; por ello, varios autores se han interesado por evaluar este conocimiento.

Investigaciones con futuros profesores de educación primaria

Son varias las investigaciones que analizan los conocimientos de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria, todas las cuales indican dificultades en el tema. Estas dificultades son hasta cierto punto razonables, ya que la probabilidad sólo se ha incluido recientemente desde los primeros niveles en el currículo escolar. Por ello, no se consideraba necesario formar a los futuros profesores de educación primaria sobre este tema en las Escuelas de Formación del Profesorado o las Facultades de Educación.

La más antigua de estas investigaciones es realizada por Azcarate (1995), que estudia las respuestas a un cuestionario relativo a las concepciones de aleatoriedad y probabilidad en un grupo de 57 futuros profesores de educación primaria. Su conclusión fue que muy pocos de estos futuros profesores comprendían las características de los fenómenos aleatorios; la mayoría relacionaron la aleatoriedad con causalidad, o no comprendiendo la utilidad de la probabilidad para estudiar los fenómenos aleatorios.

También observó el predomino de esquemas causales y uso de heurísticas o sesgos de razonamiento. Sus estudiantes sólo aplicaron modelos probabilísticos en contextos de juegos de azar y presentaron dificultades en el uso y comprensión de información frecuencial para la cuantificación de probabilidades y en la idea de juego equitativo.

Serrano (1996) plantea a una muestra de 130 futuros profesores un cuestionario para evaluar tres componentes de su conocimiento sobre la probabilidad: las propiedades atribuidas a las secuencias de resultados aleatorios, la interpretación de enunciados de probabilidad frecuencial y el uso de heurísticas en la resolución de problemas probabilísticos sencillos. Encontró una fuerte presencia de la heurística de la representatividad, consistente en juzgar la probabilidad de una muestra sólo por su parecido con la población de donde se ha tomado (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) y del enfoque en el resultado (Konold, 1989); es decir, interpretar un problema de probabilidad en forma no probabilística.

Batanero, Cañizares y Godino (2005) estudian la influencia de actividades de simulación sobre el conocimiento común de la probabilidad. Para ello aplicaron un cuestionario a 132 futuros profesores españoles de educación primaria y posteriormente realizan actividades de simulación, analizando el cambio de sus concepciones. En las respuestas de los participantes al cuestionario propuesto, los autores observaron sesgos en su razonamiento; los principales fueron: a) la heurística de la representatividad (apareció en el 60% de los sujetos); b) la heurística de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en suponer todos los sucesos aleatorios como equiprobables (60% de los estudiantes); y c) el enfoque en el resultado (23% de los estudiantes).

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evaluaron la capacidad de comparar probabilidades en problemas de extracción de bolas de una urna, en una muestra de 102 futuros profesores españoles de educación primaria, comparando sus respuestas con las obtenidas en otro cuestionario aplicado a alumnos de educación primaria. Los resultados de los futuros profesores fueron mejores que los de los niños, pero mostraron errores al aplicar la proporcionalidad en el cálculo de probabilidades; otros participantes en este estudio dieron respuestas correctas con razonamiento inadecuado; por ejemplo, usando comparaciones aditivas para calcular probabilidades.

Contreras (2011) y Contreras, Batanero, Díaz y Fernandes (2011) estudian las respuestas de 183 futuros profesores de educación primaria en tres tareas de cálculo de probabilidades en tablas de contingencia de 2x2. Con las respuestas abiertas obtenidas se realizó un análisis semiótico, en el que se pudo observar que la lectura de estas tablas y el cálculo de probabilidades a partir de ellas no es trivial para los futuros profesores de primaria. Sólo el 66% calculó correctamente las preguntas de probabilidades simples, el 41% las de probabilidad compuesta y el 44% la de probabilidad condicional. Además, aproximadamente el 25% dejó en blanco al menos una pregunta. Los principales errores encontrados fueron: dar probabilidades con valor mayor que uno, confusión entre probabilidad simple y condicional, confusión con probabilidad compuesta con condicionales o viceversa, confusión de probabilidad simple con la de un suceso elemental y suponer independencia en datos que eran dependientes.

Mohamed (2012) aplico un cuestionario a 283 futuros profesores que cursaban la Diplomatura de Magisterio en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla. Dicho cuestionario fue aplicado previamente a niños de 10 a 14 años y sus preguntas fueron extraídas de las investigaciones previas (Green, 1983a, 1983b; Fischbein y Gazit, 1984 y Cañizares, 1997). Las respuestas correctas en los futuros profesores estuvieron entre el 77% y 90% para asignación de probabilidades simples, probabilidad condicionada, estimación frecuencial de la probabilidad en el corto plazo y juego equitativo en un experimento simple. Por otro lado, las tareas con menos porcentaje de éxito fueron las relacionadas con variable aleatoria (12% correctas) y muestreo (sólo 5%). Mientras que los principales errores fueron: confusión entre suceso seguro y posible; falta de razonamiento combinatorio; ideas confusas sobre características de los fenómenos aleatorios, falta de percepción de la independencia y dificultades con el experimento compuesto.

El trabajo más completo sobre el tema es realizado por Gómez (2014). Con base a un estudio detallado del currículo y los libros de texto, así como de los diferentes significados de la probabilidad, construye un cuestionario con una metodología rigurosa. Este cuestionario evalúa el conocimiento común, ampliado (denomina así al conocimiento en el horizonte matemático) y especializado de la probabilidad respecto a los contenidos incluidos en los textos y el currículo de primaria. La aplicación del cuestionario en una muestra de 157 futuros profesores y el análisis detallado de sus respuestas permite caracterizar dichos componentes de su conocimiento. Además, evalúa el conocimiento diferenciado de las aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. Por otro lado, las dificultades encontradas son retomadas en una actividad formativa, basada en el debate de las soluciones y la simulación para desarrollar el conocimiento matemático de la probabilidad en estos futuros profesores.

Los estudiantes de su muestra presentaron un conocimiento común adecuado respecto al enfoque clásico de la probabilidad; por ejemplo, en la enumeración del espacio muestral y el cálculo de probabilidades sencillas. Fue más difícil el enfoque frecuencial, donde muchos estudiantes no perciben la variabilidad de las pequeñas muestras o caen en el sesgo de equiprobabilidad. Hubo también más dificultad en el conocimiento avanzado del contenido, en cualquiera de los enfoques; así, fueron pocos los que pudieron establecer el premio adecuado para convertir un juego no equitativo en equitativo y pocos también los que pudieron resolver problemas de probabilidad compuesta.

Investigaciones con profesores en ejercicio

Este tipo de investigaciones son muy escasas y no se pueden generalizar sus resultados. Uno de los primeros trabajos es el de Sánchez (1996), que analiza la comprensión de la idea de independencia en 88 profesores de secundaria activos en México. Aunque la mayoría sabe definir el concepto, se muestran muchos sesgos al identificar independencia y exclusión entre sucesos, o creer que la independencia se relaciona con experimentación sucesiva.

El trabajo más conocido es el de Begg y Edwards (1999), que aplicaron un cuestionario sobre probabilidad a 22 profesores de educación primaria en activo y 12 en formación. Los resultados mostraron que estos profesores tenían una escasa comprensión de la probabilidad, presentaron dificultad con la idea de aleatoriedad e independencia y relacionaron enunciados probabilísticos como no probabilísticos; además, el 70% de ellos mostro comprensión de sucesos igualmente probables.

En resumen, las investigaciones llevadas a cabo, tanto con profesores en formación como en ejercicio, sugieren que algunos de ellos pueden tener dificultades con la probabilidad. Ninguna de estas investigaciones pide a los participantes relacionar el significado clásico y frecuencial de la probabilidad, que es el tema del presente trabajo.

2.3.2. INVESTIGACIONES SOBRE LA DIMENSIÓN DIDÁCTICA DEL CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD

Respecto a la dimensión didáctica del conocimiento de la probabilidad, a continuación se clasifican las investigaciones encontradas respecto a las diferentes facetas consideradas en nuestro modelo de conocimiento del profesor. No se han encontrado trabajos sobre la faceta ecológica, que sería un aspecto a completar.

Investigaciones sobre la faceta epistémica

En estas investigaciones se analiza la intersección entre conocimiento matemático y didáctico; es decir, sería equivalente al conocimiento especializado del contenido. Encontramos algunas investigaciones, casi todas con futuros profesores de educación primaria.

Contreras (2011), en su trabajo aplicado a 174 futuros profesores de primaria, evaluó el conocimiento especializado del contenido de los mismos. Para ello se les pidió a los futuros profesores que identificaran los objetos matemáticos implícitos en la tarea que habían resuelto previamente y los clasificasen en conceptos, lenguaje, procedimientos, proposiciones y argumentos. Los estudiantes habían realizado con anterioridad ejercicios similares de reconocimiento de objetos matemáticos en otras tareas. Los resultados mostraron que los participantes no lograron identificar todos los objetos matemáticos necesarios que permitieran resolver el problema. En general, se limitaron a identificar los conceptos de azar y probabilidad. Algunas respuestas fueron muy imprecisas, por ejemplo, indicar: "se proponen tres problemas matemáticos". En otros casos se confunde el tipo de objeto, por ejemplo, se da como ejemplo de concepto "interpretar una tabla" que sería un procedimiento; finalmente, algunos estudiantes dan ejemplos de objetos matemáticos que no se requieren en la solución de la tarea, por ejemplo, el cálculo de la media.

Gómez (2014), en su estudio, evalúa el conocimiento especializado de la probabilidad pidiendo a sus estudiantes que den un argumento, que pueda servir para explicar a un alumno las soluciones aportadas en una serie de problemas del cuestionario propuesto. Su resultados sugieren que el conocimiento especializado de la probabilidad fue insuficiente en la muestra analizada, pues sólo en uno de los problemas más de la mitad de la muestra dio un argumento matemáticamente correcto. En general, fue sencillo argumentar la solución de problemas de probabilidad compuesta o juego equitativo. Sin embargo, fue muy difícil dar razonamientos adecuados en problemas sobre muestreo o probabilidad condicional.

En dichos razonamientos se detectaron sesgos, como la representatividad o la equiprobabilidad. Por otro lado, fue más difícil argumentar en los ítems relacionados con el significado frecuencial que en los correspondientes al clásico y subjetivo.

Todas estas investigaciones indican la necesidad de continuar el trabajo. Por un lado, se han centrado en problemas en que se usa un solo enfoque de la probabilidad, mientras que nosotros, en nuestro trabajo, relacionamos el enfoque clásico y frecuencial. Por otro lado, los futuros profesores han completado los cuestionarios en forma aislada; en nuestro estudio, compararemos los resultados en un grupo de estudiantes que resuelven la tarea en forma aislada con otros que trabajan en parejas.

Investigaciones sobre la faceta cognitiva

En este apartado describimos las investigaciones que analizan el conocimiento del profesor sobre la forma en que los estudiantes razonan, piensan y el conocimiento de sus dificultades, estrategias o estilos de aprendizaje.

Entre ellas encontramos la de Carter (2008), que pidió a una muestra de 210 futuros profesores de educación secundaria explicar el razonamiento seguido para llegar a la solución a tres ítems de un estudiante ficticio en una pregunta sobre independencia. Los resultados mostraron que el 18,1% de los profesores participantes dieron una explicación deseable y el 20% aceptable. El 11% dio una respuesta adecuada y 4,3% explicación aceptable a otra pregunta relacionada a la ley de los grandes números. Finalmente, el 20,5% de los profesores participantes fueron capaces de proporcionar una explicación deseable y el 0,5% una respuesta aceptable a una pregunta de probabilidad conjunta.

Mohamed (2012), en su estudio, aplicó a una submuestra de 90 futuros profesores españoles de primaria otro cuestionario. Estos estudiantes, trabajando en grupos de dos o tres, analizaron siete posibles respuestas de niños a cuatro problemas, previamente respondidas por ellos en el cuestionario inicial. Se les pidió separar las respuestas correctas e incorrectas de los niños y explicar las razones para que una respuesta fuese incorrecta. Los resultados mostraron que la mayoría de los grupos de profesores discriminaron bien las respuestas correctas e incorrectas de los niños, pero, la argumentación de las razones que explicaban dicha respuesta mostró bajo conocimiento de la forma en que razonan los niños o las posibles estrategias incorrectas en varios de los grupos. Lo más sencillo fue reconocer las respuestas basadas en la comparación de casos favorables (en vez de comparar fracciones); lo más difícil fue reconocer los errores debidos a razonamiento combinatorio incorrecto.

Gómez (2014) propone a los estudiantes de su muestra, trabajando en parejas, la identificación de respuestas correctas e incorrectas de niños ficticios a 4 de los ítems de su cuestionario (en total debían evaluar 18 respuestas de niños). Los resultados fueron variados, pues alrededor del 60% clasifica como correcta o incorrecta más de la mitad de las respuestas, pero sólo el 15% clasifica 16 o más de las 18. Los argumentos para explicar las respuestas incorrectas fueron mejores que en la investigación de Mohamed (2012). Por ejemplo, generalmente todos los grupos pudieron dar una explicación razonable de los errores en los ítems referidos a la probabilidad frecuencial.

Investigaciones sobre la faceta afectiva

En estas investigaciones se analizan las actitudes, creencias o expectativas de los profesores en relación con la probabilidad o su enseñanza.

Steinbring (1990), en su investigación sobre creencias o actitudes de los profesores hacia la probabilidad, resaltó dos aspectos importantes en relación con las creencias sobre la enseñanza de la probabilidad. Por un lado, los profesores de matemática deben ser conscientes sobre las características inherentes a lo estocástico y crear un ambiente adecuado para integrar el desarrollo del pensamiento estocástico a nivel escolar. Este autor sugiere que, debido a los diferentes significados de probabilidad, su estudio es más complejo que otras partes de la matemática puesto que, los conceptos están interrelacionados con su contexto de aplicación, sobre todo en las actividades interpretativas.

Watson (2001) estudió las respuestas abiertas de un cuestionario referido a la enseñanza de la probabilidad y la estadística en 43 profesores australianos, de los cuales 28 enseñaban en secundaria y 15 en primaria. Los resultados mostraron que los profesores tenían una buena capacidad de observación reflexiva, porque su autovaloración del nivel de confianza para enseñar los principales temas del instrumento fue muy cercana a los desempeños mostrados. El mejor logro se obtuvo en la relación de la enseñanza de la media, luego muestreo y el más bajo, razón de posibilidades. Cabe hacer notar que la confianza fue menor en los profesores de primaria, debido a su menor base matemática que la de los profesores de secundaria.

Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006), en un trabajo aplicado a cinco profesores en ejercicio mediante un cuestionario y entrevistas, analizan las razones de la omisión de la enseñanza de la probabilidad en el colegio. Los resultados obtenidos mostraron que para estos profesores, la probabilidad no tenía suficiente consistencia educativa en la enseñanza obligatoria y era difícil para el estudiante; además, indicaron no conocer metodologías acordes a este tema y falta de fuentes de información y apoyo entre los compañeros.

Un trabajo reciente de Estrada, Batanero, Díaz y Comas (2016) consiste en el desarrollo de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza, teniendo en cuenta específicamente componentes de afecto, valor, dificultad y competencia, tanto hacia la probabilidad, como a su enseñanza. Los primeros resultados de pruebas piloto con futuros profesores de educación primaria indican que la probabilidad es un tema que les interesa, pero les parece difícil y se encuentran poco preparados para su enseñanza.

Investigaciones sobre la faceta mediacional e interaccional

En estos trabajos se tiene en cuenta específicamente los medios didácticos y las interacciones en el aula.

Watson, Callingham y Donne (2008), en una entrevista realizada a 42 profesores australianos de primaria y secundaria, aplicaron un cuestionario con 12 ítems referidos a este conocimiento en relación con la estadística y la probabilidad. Clasificaron a los profesores según nivel de su conocimiento mediante métodos estadísticos. Sus resultados mostraron que: en el nivel alto, con nueve profesores, se caracterizaron por un buen desempeño para trabajar con la matemática involucrada en problemas de razonamiento probabilístico y razonamiento proporcional, y sugerir respuestas correctas e incorrectas para ítems de dificultad moderada, aunque su desempeño no fue bueno con ítems más complejos.

En el nivel medio, con 19 profesores, se caracterizaron por la capacidad de sugerir respuestas correctas e incorrectas para algunos temas y tratar problemas de razonamiento proporcional y probabilístico. En el nivel bajo, con 14 profesores, se caracterizaron porque podían empezar a predecir respuestas de los estudiantes y usar materiales en clases.

Finalmente, Contreras (2011), en su trabajo aplicado a 174 futuros profesores de primaria, evaluó los conocimientos didácticos del contenido en dos preguntas, respecto a dos componentes del MKT de Ball y colaboradores: el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del contenido y la enseñanza. En el conocimiento del contenido y la enseñanza, se pidió a los estudiantes participantes identificar algunas variables que permiten modificar el problema propuesto, para cambiarlo por otro más simple o complejo, o bien, para modificar el contenido. Los participantes lograron identificar entre una y dos variables del problema, lo que les permitió modificar los contenidos y la dificultad de la tarea propuesta.

2.3.3. INVESTIGACIONES SOBRE EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES.

Finalmente describimos algunas investigaciones que combinan la evaluación y la formación de los profesores.

Dugdale (2001) estudió el conocimiento didáctico de un grupo de 16 profesores de educación primaria en formación en Estados Unidos utilizando la simulación por ordenador. Los resultados mostraron las ventajas de enseñar a los profesores a simular un juego conocido con probabilidades alteradas, pues promueve el debate y la comprensión de la probabilidad, contrastando las frecuencias relativas generadas en la simulación por ordenador con las probabilidades teóricas y razonando los resultados.

Batanero, Cañizares y Godino (2005) realizaron algunas actividades de simulación con la muestra de futuros profesores que respondió a su cuestionario. En estas actividades de simulación (con monedas y con la hoja Excel) se trabajaron problemas similares a los propuestos en su cuestionario, variando el tamaño de la muestra, para utilizar muestras pequeñas y grandes. Los autores sugieren que las actividades ayudaron a sus estudiantes a superar los sesgos encontrados en el cuestionario, aunque no en todos los alumnos, puesto que el tiempo disponible fue limitado.

Contreras (2011) analizó una experiencia de formación en una muestra constituida por 79 profesores en formación y 87 en ejercicio, de España, México y Portugal. Aplicó una situación didáctica basada en un juego paradójico, pero sencillo, combinando la simulación de la situación con material manipulativo, la recogida de datos, discusión de los participantes sobre las diferentes estrategias utilizadas y finalmente, la demostración matemática de la estrategia considerada correcta por los participantes. Posteriormente, comparó las estrategias iniciales en el juego con las finales. Los resultados de este estudio demostraron la existencia de sesgos iniciales, como la equiprobabilidad en aproximadamente el 67% de los participantes. Sin embargo, cerca del 50% de los que lo mostraron reconocen y superan dichos sesgos luego de la instrucción impartida.

De hecho, esta misma situación había sido utilizada previamente por Batanero, Godino y Roa (2004) con profesores en formación, estudiantes de la especialidad de estadística. Pero los autores no llegan a analizar en profundidad el cambio de estrategias con la instrucción y su muestra es pequeña. Los autores sugieren que los profesores en formación deben ser capaces de resolver situaciones problemáticas paradójicas y reflexionar sobre su contenido. Esta actividad ayuda en la identificación de dificultades en el aprendizaje de un concepto dado; aún más, los problemas en apariencia deben ser sencillos, con soluciones intuitivas o sorprendentes, para confrontarlos con sus creencias erróneas.

Groth (2008) analiza el trabajo de grupos de profesores en ejercicio, cuando discuten a distancia sobre sus clases. El autor observa que el profesor de probabilidad y estadística debe controlar dos tipos de incertidumbre en su labor educacional: la interacción que se produce entre alumno y profesor, y la incertidumbre propia de la probabilidad y estadística. Este autor sugiere que los profesores deben trabajar en grupos, en donde discutan sobre sus problemas y necesidades, ideas, estrategias de enseñanza, dificultades, concepciones erradas, etc.

En resumen, estas propuestas de formación profesional recomiendan la reflexión, tanto personal como con sus compañeros, sobre las dificultades del aprendizaje y sus propias dificultades con la materia. Batanero y Díaz (2012) proponen que en la formación de futuros profesores deben existir entornos y contextos donde se trabajen problemas significativos relativos a su desarrollo profesional y se reflexione sobre este proceso.

CAPÍTULO 3. ESTUDIO DE EVALUACIÓN CON FUTUROS PROFESORES

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos el estudio de evaluación realizado con una muestra de futuros profesores de educación primaria. En primer lugar, describimos la metodología y la muestra que ha participado en esta investigación, junto al contexto en que se realizó el trabajo. Seguidamente, analizamos las tareas planteadas a los estudiantes, identificando los objetos matemáticos que se evalúan en cada una de ellas. Nos apoyamos para ello en el análisis realizado por Rivas y Godino (2015), quienes usaron la misma tarea en una experiencia de formación de profesores.

En las siguientes secciones se analizan los resultados obtenidos, relacionándolos con los de las investigaciones previas, y finalmente se aportan nuestras conclusiones sobre el estudio.

3.2. METODOLOGÍA

La metodología utilizada es básicamente cualitativa, pues estudiamos sujetos concretos en su particularidad temporal y local (Flick, 2007). El estudio es exploratorio, de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006), pues la intención no es realizar un contraste formal de hipótesis, sino adquirir mayor conocimiento sobre el problema, para plantear en el futuro nuevas investigaciones. Se trataría de una investigación aplicada y el análisis de los datos es descriptivo. A continuación, se describe la muestra y contexto educativo, el instrumento utilizado y el método de análisis de datos.

3.2.1. MUESTRA Y CONTEXTO EDUCATIVO

La muestra estuvo compuesta por 60 estudiantes, de los cuales 20 realizaron la actividad en forma individual y los 40 restantes en parejas. Aunque la muestra es intencional, las características de los estudiantes son similares a las de otros grupos y cursos. El tamaño es suficiente para que los resultados puedan ser generalizables a otros estudiantes de similares características. Los datos se han tratado de forma anónima y se informó a los sujetos de la finalidad principal de la evaluación, que es contribuir a la mejora de la enseñanza y formación de otros futuros profesores. Agradecemos a estos estudiantes y a su profesor su colaboración.

Estos estudiantes cursaban, en la Universidad de Granada, el Grado de Maestro de educación primaria, específicamente el curso “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”, en el curso 2014-2015. Habían cursado el año anterior la asignatura de “Bases matemáticas para la educación primaria”. La recogida de datos se hizo hacia el final del curso, con lo cual, ya habían estudiado la mayor parte de la asignatura de “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. A continuación, resumimos brevemente la formación recibida sobre probabilidad y su didáctica.

Formación en probabilidad

En la guía docente de la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria”, encontramos una breve descripción de los contenidos de probabilidad que deben haber estudiado en el primer curso. Estos contenidos específicos se dividen en teóricos y prácticos. Los contenidos teóricos relacionados con probabilidad son: “Fenómenos y experimentos aleatorios. Sucesos. Probabilidad: asignación subjetiva; estimación frecuencial y asignación clásica (regla de Laplace)” (Departamento de Didáctica de la Matemática, 2014a, p. 3).

Los contenidos del temario práctico referidos a estadística y probabilidad son: “organización de datos; interpretación de información en medios de comunicación; fenómenos relacionados con el azar” (Departamento de Didáctica de la Matemática, 2014a, p. 3).

En las referencias bibliográficas recomendadas al estudiante para el tema probabilidad en este curso (Azcárate y Cardeñoso, 2001; Batanero y Godino, 2004 y Pareja, 2011), hemos encontrado los siguientes contenidos: aleatoriedad, sucesos, espacio muestral, experimentos simples y compuestos, probabilidad, asignación de probabilidades mediante regla de Laplace, estimación frecuencial de la probabilidad, probabilidad conjunta y condicionada. Por ello, los participantes en el estudio deben estar bien preparados para responder a la actividad planteada en nuestra investigación.

En cuanto a los contenidos de la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”, se refieren al conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y el currículo, y conocimiento del contenido y la enseñanza. El temario de esta asignatura se divide en teórico y práctico. Con respecto al temario teórico se indica lo siguiente (Departamento de Didáctica de la Matemática, 2014b, p.3):

1. Matemáticas, cultura y sociedad. La importancia social y cultural de las matemáticas. Las matemáticas en el sistema educativo. Fines de la educación matemática. La resolución de problemas matemáticos.
2. Sentido matemático. Sentido numérico. Sentido de la medida. Sentido espacial y geométrico. Pensamiento estocástico. Características y componentes.
3. Aprendizaje de las matemáticas (aritmética, medida, geometría y estocástica). Expectativas de aprendizaje, etapas de aprendizaje, errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en matemáticas.
4. La enseñanza de las matemáticas (aritmética, medida, geometría y estocástica). El papel del profesor de matemáticas, técnicas y estrategias docentes. Actividades y tareas en matemáticas, el papel de los materiales y recursos. Metodología de enseñanza de las matemáticas basada en la resolución de problemas.

Los contenidos del temario práctico de esta asignatura son:

> Conocimiento matemático en educación primaria; Análisis del currículo de matemáticas en educación primaria; Resolución de problemas en matemáticas y educación matemática; Identificación, organización y clasificación de errores y dificultades en pruebas de escolares de educación primaria; y finalmente, Análisis, selección y diseño de tareas matemáticas, sus variables y conocimientos puestos en juego (Departamento de Didáctica de la Matemática, 2014b, p. 3).

Los alumnos que completaron la experiencia utilizaron los textos de Azcárate y Cardeñoso (2001) y Batanero y Godino (2004). Ambos contienen aspectos curriculares y epistemológicos de la evolución histórica del concepto; importancia del aprendizaje de los cuatro significados de la probabilidad; algunos errores y dificultades en el aprendizaje con respecto al lenguaje, conceptos básicos, razonamiento probabilístico, paso del significado intuitivo a la asignación numérica o destrezas de cálculo de probabilidades con los significados clásico y frecuencial; así como materiales y recursos para su enseñanza.

3.2.2. TAREAS PLANTEADAS

La evaluación se realizó como parte de una actividad práctica de la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. Se dio a los estudiantes la ficha de trabajo mostrada en la Figura 3.2.2.1, que describe una secuencia de enseñanza de la probabilidad por una maestra.

Raquel es maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus estudiantes asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, o 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?

Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más?¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación Raquel recoge en la siguiente tabla los datos de las 10 parejas de estudiantes que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

	Suma de puntos	Recuento	Numero veces	Frecuencia relativa
Gana B	2		2	0,02
	3		9	0,09
	4		12	0,12
	5		20	0,2
Gana A	6		7	0,07
	7		12	0,12
	8		14	0,14
	9		9	0,09
Gana B	10		8	0,08
	11		4	0,04
	12		3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas:

¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B?

¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Figura 3.2.2.1. Ficha de trabajo de los estudiantes

Esta actividad ha sido también utilizada por Rivas y Godino (2015) en una experiencia de formación sobre enseñanza de la probabilidad para la formación inicial de profesorado de educación primaria. En su investigación, los autores proponen un desarrollo de las fases de la ingeniería didáctica fundamentadas en el EOS, y analizan las dimensiones: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. El contexto fue la asignatura del plan de formación de maestros titulada: "Bases matemáticas para la educación primaria", en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Participaron 58 estudiantes, en dos sesiones de clases. El profesor resuelve la tarea colectivamente en la pizarra y pide a los estudiantes ir respondiendo a cada pregunta de la actividad. Como instrumentos de recogida de datos se utilizaron las grabaciones audiovisuales de las sesiones de clase.

En nuestra experiencia, se da a los participantes un cuestionario que deben responder por escrito y que contiene, además de la situación inicial presentada en la Figura 3.2.2.1, las preguntas siguientes:

1. Analiza la Actividad 1 y luego responde: ¿quién tiene ventaja en el juego? y ¿por qué?
2. Compara la probabilidad teórica que has obtenido con los resultados empíricos del juego ¿Será suficiente con hacer 10 tiradas de los dados para obtener conclusiones?
3. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría *A* o *B*?
4. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para poder sacar conclusiones del experimento realizado y responder a las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar *A* la frecuencia relativa de veces que gana *A*?
5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

A continuación, analizamos la solución esperada y el contenido evaluado con estas preguntas.

Análisis del juego desde el significado clásico

1. Analiza la actividad 1. Indica quién tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.

En la primera pregunta se espera que el futuro profesor resuelva matemáticamente el problema, para determinar la probabilidad de ganar de cada jugador y compararlas entre sí. Para llegar a la solución, el futuro profesor podría utilizar algún tipo de esquema como el mostrado en la Tabla 3.2.2.1, basado en la enumeración sistemática del espacio muestral del experimento.

Se observa que no todas las sumas de puntos tienen la misma probabilidad, siendo más probables las sumas intermedias, que justamente corresponden al jugador *A*, y menos probables las extremas.

Puesto que, aplicando el principio de indiferencia, todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad, a partir del esquema dado, el futuro profesor puede observar que, aplicando la regla de la suma al suceso compuesto $B = \{2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$, *B* gana 16 veces de 36, pues los sucesos elementales son incompatibles. Con un razonamiento semejante se deduce que *A* gana 20 veces de 36.

Tabla 3.2.2.1. *Enumeración sistemática para resolver la tarea 1.*

	Suma de puntos	Casos
Gana B	2	11
	3	12, 21
	4	13,22, 31
	5	14, 23,32,41
Gana A	6	15, 24, 33,42,51
	7	16, 24, 33, 43, 52, 61
	8	26, 35, 44, 54,62
	9	36, 45, 54,63
Gana B	10	46, 55, 64
	11	56, 65
	12	66

De igual modo, utilizando la regla de Laplace, como cociente entre casos favorables y posibles, se deducen las probabilidades, que son: *P(A)* = 20/36 = 0,55 y *P(B*) = 16/36 = 0,45. Tiene ventaja *A* en este juego, pues la probabilidad de que gane es mayor.

Otra forma que el estudiante puede utilizar para representar los casos favorables en el lanzamiento de dos dados es mediante una tabla de doble entrada, como la Tabla 3.2.2.2. En la primera fila de dicha tabla se representan los posibles resultados del primer dado, y en la primera columna los resultados del segundo dado. En las celdas de la tabla, se identifican los casos posibles según la suma de puntos al lanzar ambos dados. El resto del razonamiento sería similar al descrito anteriormente.

Tabla 3.2.2.2.*Casos posibles al lanzar dos dados y la suma de puntos*

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

También, en la Tabla 3.2.2.2, podemos observar fácilmente que el experimento aleatorio “lanzar dos dados” está compuesto por 36 posibles sumas, con 11 resultados posibles (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12). Es importante darse cuenta que el orden se debe considerar pues, por ejemplo, podemos obtener (2,1) o (1,2) y ambos nos dan la suma 3, que tiene doble probabilidad que la suma 2 (1,1).Con estos datos, podemos obtener la correspondiente distribución de probabilidad, que presentamos en la Tabla

3.2.2.3. También se podría haber construido un diagrama de barras para representar la distribución de probabilidad (Figura 3.2.2.2).

Tabla 3.2.2.3. *Distribución de probabilidad experimento lanzar dos dados*.

Suma de Puntos	Probabilidad
2	0,028
3	0,056
4	0,083
5	0,111
6	0,139
7	0,167
8	0,139
9	0,111
10	0,083
11	0,056
12	0,028

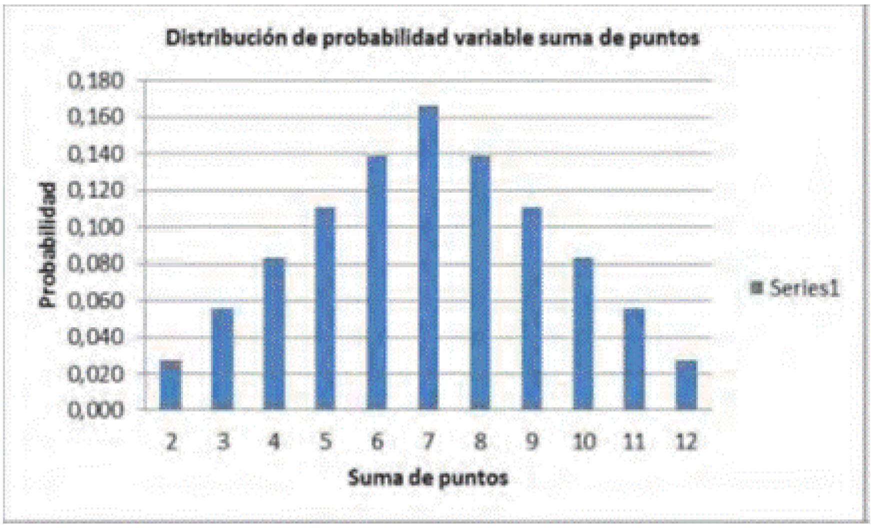


Figura 3.2.2.2. Reproducida de Rivas (2014, p. 162)

Al observar la Tabla 3.2.2.3, el estudiante puede comprobar que en este juego es más conveniente elegir ser el jugador *A*, pues tiene mayor probabilidad de ganar que el *B*. Podemos verlo aplicando la regla de la suma de probabilidades:

$$P(A) = 0{,}139+0{,}167+0{,}139+0{,}111 = 0{,}556$$

Y del mismo modo, se calcula la probabilidad de que gane *B*:

$$P\ (B) = 0{,}028+0{,}056+0{,}083+0{,}111+0{,}083+0{,}056+0{,}028 = 0{,}444.$$

Esta última probabilidad también se podría haber obtenido aplicando la regla de la probabilidad del suceso contrario pues: $P(A) + P(B) = 1$, ya que la unión de los dos sucesos es el suceso seguro. En la Tabla 3.2.2.4 se muestra un análisis semiótico de la solución del juego desde el significado clásico, aunque, dependiendo de la que presente el estudiante, se usarán unos u otros objetos matemáticos. En ella observamos los distintos lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos matemáticos involucrados en esta actividad.

Tabla 3.2.2.4. *Objetos matemáticos implícitos en la solución de la primera pregunta*

Objetos matemáticos involucrados	
Lenguajes	Términos: dado, lanzar, sumar, resultado, ventaja. Tablas y gráficos.
Conceptos	Aleatoriedad, probabilidad, suceso, espacio muestral, casos favorables, casos posibles, suma, variable aleatoria, recorrido, distribución de probabilidad, suceso seguro.
Propiedades	Equiprobabilidad de resultados según la simetría del dado; importancia del orden, regla de Laplace, regla de la suma, regla del suceso complementario.
Procedimientos	Formación del espacio muestral producto, construcción de una tabla o elaboración de un gráfico, traducción de tablas a gráficos o de tablas a probabilidades. uso de las reglas de la suma y el suceso complementario para obtener la probabilidad de ganar *A* o *B*.
Argumentos	Serie de proposiciones que llevan al cálculo de la probabilidad de ganar *A* o *B*.

Sin embargo, los estudiantes pueden cometer diferentes errores al resolver el problema. Uno de ellos es no tener en cuenta el orden de los números en el lanzamiento de cada dado, es decir, considerar dos posibilidades de obtener la misma suma que aparecen en distinto orden como un único suceso, error encontrado por Gómez (2011) y Rivas y Godino (2015). Por ejemplo, las posibilidades (3,1) y (1,3) se contabilizan en los casos favorables a la suma 4 una sola vez, ya que 1+3 es igual que 3+1, en cuyo caso, el espacio muestral quedaría restringido.

Otra dificultad descrita por Rivas y Godino (2015), como hecho didáctico significativo, es que el estudiante se fije sólo en las sumas y las considere equiprobables, sin tener en cuenta todas las combinaciones de valores de los dados que dan como resultado la misma suma, es decir, asumiendo que la suma de puntos 2 (1,1) tiene la misma probabilidad de ocurrencia que la suma de puntos 4 (2,2), (1,3) y (3,1). De este modo, se manifiesta en el participante el sesgo de la equiprobabilidad, al considerar que todos los posibles resultados de sumas en el experimento son equiprobables (Lecoutre, 1992). Rivas y Godino indican que este error permite observar discrepancias entre el significado personal y el significado institucional pretendido.

Finalmente, los autores sugieren que algunos estudiantes pueden razonar de acuerdo al sesgo de representatividad, descrito en Kahneman, Slovic y Tversky (1982), si se concluye en base a los resultados empíricos mostrados en la tabla y obtenidos en el lanzamiento de 100 veces los dos dados. En este caso, los estudiantes no tienen en cuenta la variabilidad de las pequeñas muestras y no comprenden la idea de convergencia, ni siquiera a nivel intuitivo.

Comparación con datos obtenidos en la repetición del experimento

2. Compara la probabilidad teórica que has obtenido con los resultados empíricos del juego en la Actividad 2 ¿Será suficiente con hacer 10 tiradas de los dados para obtener conclusiones?

Para responder a esta pregunta, se espera que el estudiante analice la tabla de datos con los resultados empíricos del experimento y observe que, con los datos recogidos mediante la realización del juego, los resultados son contrarios a lo esperado teóricamente, pues gana *B* con una frecuencia de 58 frente a la frecuencia de 42 veces que gana *A* en los 100 resultados.

Es decir, el estudiante trataría de aplicar el significado frecuencial de la probabilidad para estimar la probabilidad del suceso a partir de la frecuencia relativa. Pero la muestra de datos disponibles todavía es pequeña y la estimación es pobre. Por ello, esperamos que indique que 10 tiradas de dados de cada estudiante son demasiado pocas para observar la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica, y que habría que aumentar el número de tiradas en el experimento.

En la Tabla 3.2.2.5, se muestra un análisis semiótico de la solución, aunque, dependiendo de la solución de cada estudiante participante de nuestra investigación, se usarán unos u otros objetos. En ella observamos: lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos matemáticos involucrados en esta actividad.

Tabla 3.2.2.5. *Objetos matemáticos implícitos en la solución de la segunda pregunta*

Objetos matemáticos involucrados	
Lenguajes	Términos: probabilidad teórica, resultado empírico, comparar, 10 tiradas, convergencia. Tablas y gráficos.
Conceptos	Aleatoriedad, probabilidad, suceso, resultado, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, tamaño de una muestra, convergencia.
Propiedades	Variabilidad del muestreo, diferencia entre frecuencia relativa y probabilidad, efecto del tamaño de la muestra sobre la convergencia, regla de la suma.
Procedimientos	Interpretación de una tabla de frecuencias, traducción de tablas a probabilidades, comparación cálculos de probabilidad teórica con empírica.
Argumentos	Serie de proposiciones que llevan a la estimación de la probabilidad teórica a partir de la frecuencia y a su comparación.

En esta pregunta, los futuros profesores participantes pueden cometer algunos errores. El más probable sería preferir al jugador *B*, pues este, en el juego empírico, obtiene mayor frecuencia de resultados favorables que el A. Este error se presentó en el trabajo de Rivas y Godino (2015), donde se deja en evidencia el uso de la heurística de representatividad descrita en Kahneman et al. (1982). Se muestra una confianza indebida en pequeñas muestras, es decir, lo que se ha denominado *creencia en la ley de los pequeños números.*

Si se produce este error, los estudiantes aceptan como una buena estimación de la probabilidad pedida los resultados del juego empírico, en el que se considera ganador al jugador B con probabilidad 58/100. Además, se confunde la probabilidad teórica (que debe haberse calculado en la pregunta anterior), con la frecuencia relativa, que se calcularía con los resultados empíricos del experimento. Es decir, el estudiante asume que los casos favorables sean los resultados favorables a cada jugador en los posibles 100 lanzamientos.

Estimación del valor esperado mediante el enfoque frecuencial

3. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B?

En la Tabla 3.2.2.3 presentamos la distribución de probabilidad esperada de la variable aleatoria "suma de los valores obtenidos en el lanzamiento de dos dados". La frecuencia esperada de un suceso S en n repeticiones de un experimento viene dada por la expresión: $Fe\ (S) = n * P(S)$. Por tanto, una forma sencilla de calcular la frecuencia esperada sería considerar 1000 experimentos y multiplicar las probabilidades de la Tabla 3.2.2.3 por 1000, obteniendo la Tabla 3.2.2.6.

Tabla 3.2.2.6.*Frecuencia esperada de posibles sumas al lanzar 1000 veces dos dados*.

	Suma de Puntos	Probabilidad	Número esperado
Gana	2	0,028	28
A	3	0,056	56
	4	0,083	83
	5	0,111	111
Gana	6	0,139	139
B	7	0,167	167
	8	0,139	139
	9	0,111	111
Gana	10	0,083	83
A	11	0,056	56
	12	0,028	28

Por otro lado, en el apartado 1 se calcularon las probabilidades teóricas de los sucesos ganar A y ganar B: $P(A)$ = 0,556 y $P(B)$ = 0,444. Por tanto, en 1000 repeticiones, la frecuencia esperada sería que *A* ganaría 556 veces y *B* 444 veces.

Además, si se piensa en lanzar los dos dados 36 veces, teniendo en cuenta los casos favorables para cada suma, se obtendría la Tabla 3.2.2.7. De ella se deduce que esperamos que *A* gane 20 veces de 36 frente a 16 de cada 36 que ganaría *B*, o lo que es igual, 5 veces de 9 frente a 4 veces de 9. En la Tabla 3.2.2.8 se muestra un análisis semiótico de la solución.

Tabla 3.2.2.7. Frecuencia de posibles resultados al lanzar 36 veces dos dados

	Suma de puntos	Frecuencia esperada
Gana B	2	1
	3	2
	4	3
	5	4
Gana A	6	5
	7	6
	8	5
	9	4
Gana B	10	3
	11	2
	12	1

Tabla 3.2.2.8. *Objetos matemáticos implícitos en la solución de la tercera pregunta*

Objetos matemáticos involucrados	
Lenguajes	Términos: muchas tiradas, frecuencias, esperarías, cada una, suma, ganaría *A*, *B*. Tablas.
Conceptos	Aleatoriedad, probabilidad, suceso, espacio muestral, casos favorables, casos posibles, suma, variable aleatoria, distribución de probabilidad, suceso seguro, frecuencia relativa, frecuencia esperada.
Propiedades	Equiprobabilidad de resultados, importancia del orden, simetría del dado, regla de Laplace, regla de la suma, convergencia.
Procedimientos	Formación del espacio muestral producto, construcción de una tabla, cálculo de la frecuencia esperada a partir de tablas.
Argumentos	Serie de proposiciones que llevan al cálculo de la frecuencia esperada.

Para responder a esta pregunta, el estudiante va a considerar los resultados obtenidos en el apartado 1, por lo tanto, los principales errores en los que puede incurrir, son los detallados anteriormente en la pregunta 1.

Comparación de los significados clásico y frecuencial

4. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para poder sacar conclusiones del experimento realizado y responder a las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar A la frecuencia relativa de veces que gana A?

En esta pregunta se pretende que el estudiante reflexione sobre la diferencia que se ha observado entre el valor teórico de la probabilidad y la frecuencia relativa de los datos en 100 repeticiones del experimento. Se espera que el estudiante detecte la gran diferencia y rechace la posibilidad de estimar la probabilidad de ganar *A* mediante la frecuencia relativa. El estudiante debe responder que no serían suficientes los datos de esta tabla. La frecuencia relativa obtenida en el experimento es una estimación mala, en este caso, de la probabilidad. En la Tabla 3.2.2.9, al igual que en las preguntas anteriores, se muestra un análisis semiótico de la solución.

Tabla 3.2.2.9. *Objetos matemáticos implícitos en la solución de la cuarta pregunta*

Objetos matemáticos involucrados	
Lenguajes	Términos: tabla, datos, suficiente, concluir, experimento, probabilidad, ganar *A*, frecuencia relativa. Tabla.
Conceptos	Aleatoriedad, probabilidad, suceso, frecuencia relativa, convergencia, tamaño de la muestra, precisión, datos.
Propiedades	Convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad, variabilidad de la frecuencia relativa en pequeñas muestras.
Procedimientos	Formación del espacio muestral producto, construcción de una tabla o elaboración de un gráfico, traducción de tablas a gráficos o de tablas a probabilidades.
Argumentos	Serie de proposiciones que llegan a comparar la probabilidad teórica y la estimación frecuencial y concluir que la precisión es pequeña.

Un error, que puede cometer el estudiante al responder este apartado, según Rivas (2014), es aceptar comprobaciones empíricas e intuitivas, realizadas mediante una serie pequeña de experimentos, para deducir la convergencia de las frecuencias relativas a las probabilidades. Otro sería no percibir las fluctuaciones inherentes a dicha convergencia, lo que en este caso le llevaría a contestar afirmativamente en este apartado.

Compresión de la idea de simulación

5. Indica qué significa para ti simular un experimento aleatorio.

Como parte de la práctica sobre probabilidad, los estudiantes habían realizado en clase diferentes simulaciones, así como experimentos con material manipulativo como dados, monedas o extracción de bolas en urnas. Las simulaciones también se habían realizado utilizando la hoja Excel y algunos applets disponibles en Internet. En concreto, se habían simulado el nacimiento de niños y niñas, el muestreo por el método de captura-recaptura y la extracción de bolas en urnas.

Intuitivamente, se les había expuesto la diferencia entre experimentación y simulación. En esta pregunta, se espera que el estudiante defina con sus propias palabras lo que entiende por simular un experimento aleatorio. En general, consiste en sustituir un experimento aleatorio por otro isomorfo y más sencillo de realizar y de modo que los resultados del segundo experimento puedan utilizarse para sacar conclusiones del primero (Batanero, 2003). En la ciencia es un método usado para estudiar las relaciones matemáticas y lógicas, necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real, por ejemplo, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos, a través de largos periodos de tiempo.

La simulación tiene, según Fernandes, Batanero, Contreras y Díaz (2009), un papel muy importante en la enseñanza, pues sirve como puente entre la realidad que se quiere estudiar y el modelo matemático (la probabilidad) que se utiliza para su estudio. Por ejemplo, queremos estudiar el sexo en una muestra de 100 recién nacidos; lo que, desde el punto de vista práctico, es difícil de estudiar en la realidad. Pero se puede simular la situación anterior lanzando 100 monedas donde la cara represente, por ejemplo, las niñas, y las cruces los niños. Repitiendo muchas veces el lanzamiento se puede estudiar la distribución más probable del número de niños y niñas en cada 100 nacimientos. Igualmente, se puede simular la situación en un ordenador, usando números aleatorios (0 o 1) o bien algún applet en internet que simule directamente el experimento o bien el lanzamiento de monedas.

En este sentido, la simulación (con monedas reales o en el ordenador) es un puente entre la realidad (los nacimientos reales que no podemos estudiar directamente) y el modelo matemático (en este caso, sería la distribución binomial). El modelo matemático es muy complejo para el estudiante; pero mediante la simulación podemos obtener algunas conclusiones sobre la situación real.

Esperamos que los estudiantes indiquen algunas características de la simulación, pero también podrían no diferenciar entre simulación y experimentación. En la Tabla 3.2.2.10 se muestra un análisis semiótico de la solución.

Tabla 3.2.2.10. *Objetos matemáticos implícitos en la solución de la quinta pregunta*

Objetos matemáticos involucrados	
Lenguaje	Términos: simular, experimento, aleatorio.
Conceptos	Aleatoriedad, experimento aleatorio, probabilidad, suceso, espacio muestral, isomorfismo, resultado, repetición del experimento, frecuencia relativa, estimación frecuencial.

Propiedades	Equivalencia de experimentos, convergencia.
Procedimientos	Sustitución de un experimento por otro, puesta en correspondencia de los sucesos en los dos experimentos, experimentación, recogida y análisis de datos, obtención de conclusiones.
Argumentos	Serie de proposiciones que llevan a la obtención de conclusiones sobre un experimento aleatorio a partir de la simulación.

3.2.3. MÉTODO DE ANÁLISIS DE DATOS

El instrumento de recogida de datos es un cuestionario. Es un instrumento de medición que, mediante las preguntas planteadas, proporciona una estimación de los conocimientos y capacidades de los sujetos, que no son accesibles por simple observación o encuesta (Barbero, 2003).

La metodología empleada para el análisis de los protocolos escritos de los estudiantes es el análisis de contenido, que permite evaluar concepciones y conocimientos del autor mediante el análisis de su discurso escrito, de forma objetiva, sistemática y cuantitativa (Noguero, 2002).

Para realizar el análisis de contenido, el texto se divide en unidades más pequeñas (en nuestro caso, la respuesta a cada apartado del cuestionario). Dichas unidades se clasifican en un número reducido de categorías. Las categorías se determinan mediante un análisis cíclico de las respuestas, comparando unas con otras y con el análisis a priori de las tareas.

Codificados los datos, se realiza un estudio estadístico descriptivo de las frecuencias en cada categoría y pregunta, que sirve para extraer conclusiones. En nuestro caso, también compararemos las frecuencias de las diferentes categorías en los estudiantes que trabajan individualmente para completar el cuestionario y los que lo hacen en parejas. Analizaremos dos variables principales:

- La corrección de la respuesta; para lo cual las clasificamos en correctas, parcialmente correctas e incorrectas. En algunos casos, clasificamos las respuestas incorrectas de acuerdo al tipo de error que aparece en la misma.
- Recursos usados para responder la pregunta, cuando existe variedad en los mismos.

3.3. RESULTADOS

Una vez realizado el análisis a priori de las tareas, que se muestra en las secciones anteriores, procedemos a analizar las soluciones escritas aportadas por los futuros profesores de educación primaria. Se comienza mostrando las respuestas correctas, seguidas de las parcialmente correctas e incorrectas, y dentro de cada una, cuando hay variantes, se vuelven a clasificar a su vez. Finalmente, se presenta una tabla de frecuencias comparando las respuestas de los sujetos que trabajaron en forma individual y los que lo hicieron en parejas.

3.3.1. ANÁLISIS DEL JUEGO DESDE EL SIGNIFICADO CLÁSICO

En primer lugar analizamos las respuestas a la pregunta 1, en que se pide a los estudiantes decidir quién tiene ventaja en el juego y por qué, y determinar la probabilidad teórica. Hemos encontrado las siguientes categorías de respuestas:

R1.Respuesta correcta. Son los estudiantes que han identificado correctamente todos los sucesos del espacio muestral producto obtenido en el lanzamiento de los dos dados, haciendo una enumeración sistemática de todos los casos y teniendo en cuenta el orden. A partir de ello, han identificado correctamente los sucesos correspondientes a las sumas en las que ganan *A* y *B,* y han calculado correctamente las probabilidades correspondientes aplicando la regla de la suma, o bien el sucesos complementario (o las dos propiedades).

En la Figura 3.3.1.1 mostramos un ejemplo, en que el estudiante usa una tabla de doble entrada para identificar todos los sucesos del espacio muestral producto. Además, en el cuerpo de la tabla, introduce una notación para identificar cuáles de ellos tienen la suma a favor de ganar *A* o de ganar *B*. Con dos colores marca los sucesos favorables a *A* y *B*, que expresa mediante un código situado al margen de la tabla. Seguidamente, calcula las posibilidades totales para cada jugador, como cociente de casos favorables y posibles, aplicando la regla de Laplace.

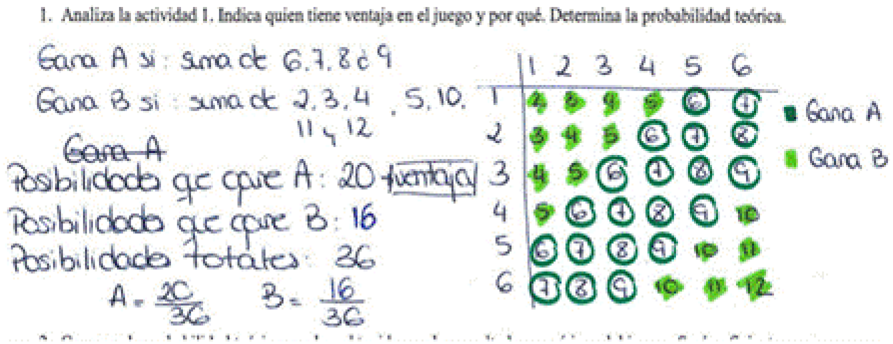
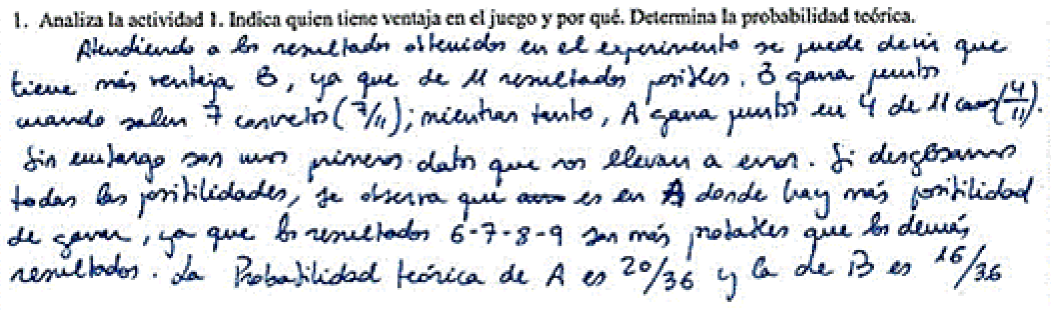


*Figura 3.3.1.1.*Respuesta correcta al apartado 1

R2. Respuesta correcta relacionando el enfoque clásico y frecuencial. Algunos estudiantes dan la respuesta correcta, indicando la probabilidad clásica de ganar el juego los jugadores *A* y *B*, pero también indican que si se tiene en cuenta los datos, aparentemente ganaría *B* y que estos datos llevarían a error. Por tanto, ponen en relación los dos enfoques de la probabilidad.

Como ejemplo, mostramos la respuesta de la Figura 3.3.1.2, en la que un estudiante, en primer lugar, analiza los resultados empíricos del juego, en donde *B* gana. Indica también los casos favorables a cada jugador, teniendo en cuenta sólo los resultados de que salgan una suma del 2 al 12, calculando sus respectivas probabilidades, de *B* (7/11) y *A* (4/11). Además, indica que este resultado lleva a cometer un error, pues en la probabilidad teórica, el que gana el juego es *A* con probabilidad 20/36 sobre *B*, con probabilidad 16/36. Esta última probabilidad está calculada correctamente.

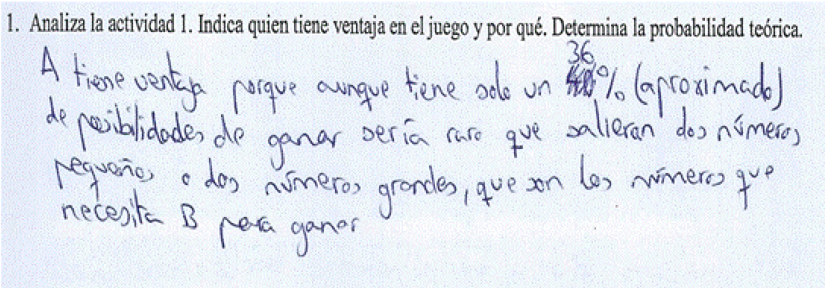

1. Analiza la actividad 1. Indica quien tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.

Atendiendo a los resultados obtenidos en el experimento se puede decir que tiene más ventaja B, ya que de 11 resultados posibles, B gana puntos cuando salen 7 concreto (7/11); mientras tanto, A gana puntos en 4 de 11 casos (4/11). Sin embargo son unos primeros datos que nos llevan a error. Si desglosamos todas las posibilidades, se observa que ~~ahora~~ es en A donde hay más posibilidad de ganar, ya que los resultados 6-7-8-9 son más probables que los demás resultados. La Probabilidad teórica de A es 20/36 y la de B es 16/36

Figura 3.3.1.2. Respuesta correcta relacionando los dos significados al apartado 1

R3. *Parcialmente correcta.* Se considera en esta categoría de respuesta, aquella en que el estudiante identifica que tiene ventaja *A* sobre *B*, considerando que es más probable que al lanzar dos dados la suma de puntos para *A* sea mayor que para *B*. Sin embargo, el argumento verbal, lógico o matemático utilizado no es correcto, presentando algunos errores comunes como el sesgo de equiprobabilidad o el espacio muestral reducido.

Un ejemplo de esta categoría se observa en la Figura 3.3.1.3, donde el estudiante considera que *A* tiene ventaja. Si bien su respuesta es correcta, su argumentación no lo es. Por un lado, comete un error en el cálculo de probabilidades, pues como vimos, la probabilidad de ganar *A* es 0,556. El estudiante considera que los sucesos son equiprobables (presenta el sesgo de equiprobabilidad; Lecoutre, 1992), es decir, considera que todas las sumas tienen igual ocurrencia de salir al lanzar los dos dados. Por ello, deduce que *A* tiene una probabilidad de ocurrencia de 4/11 (un 36% aproximadamente) y *B* de 7/11 (un 64% aproximadamente). Añadió a esto el estudiante que es difícil o raro que salgan dos números pequeños o dos grandes en el lanzamiento de los dados, para que gane *B,* dando ganador al jugador *A*. Es un sesgo de razonamiento que no hemos encontrado descrito en la literatura previa.

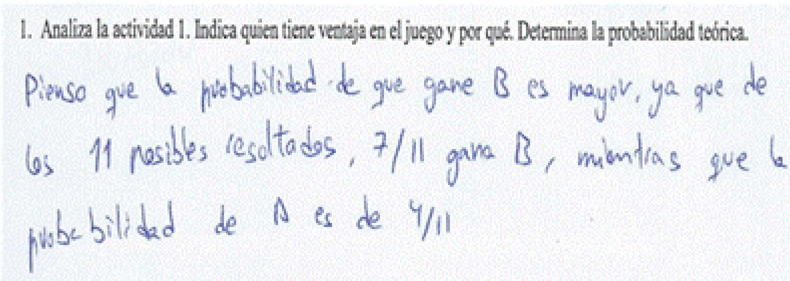

1. Analiza la actividad 1. Indica quien tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.

A tiene ventaja porque aunque tiene solo un ~~40~~ 36% (aproximado) de posibilidades de ganar sería raro que salieran dos números pequeños o dos números grandes, que son los números que necesita B para ganar

Figura 3.3.1.3. Respuesta parcialmente correcta al apartado 1.

R4. *Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes indican que *B* tiene ventaja, pues consideran que todas las posibles sumas de los dos dados tienen igual probabilidad de ocurrencia, es decir, son sucesos equiprobables, mostrando sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). La diferencia con el caso anterior es que también fallan en identificar el que tiene ventaja en el juego.

Como se puede observar en el ejemplo dado en la Figura 3.3.1.4, este estudiante, consideró que las sumas de los valores obtenidos en el lanzamiento de dos dados (del 2 al 12) son sucesos equiprobables. No forma el espacio muestral producto para analizar cuáles sucesos de este espacio conducen a cada posible suma. Es decir, considera todas las sumas con igual probabilidad de ocurrencia, lo que lleva a contestar erróneamente a esta pregunta, considerando que gana *B* con probabilidad 7/11 frente a que gana *A,* que obtiene con probabilidad 4/11.


1. Analiza la actividad 1. Indica quien tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica.

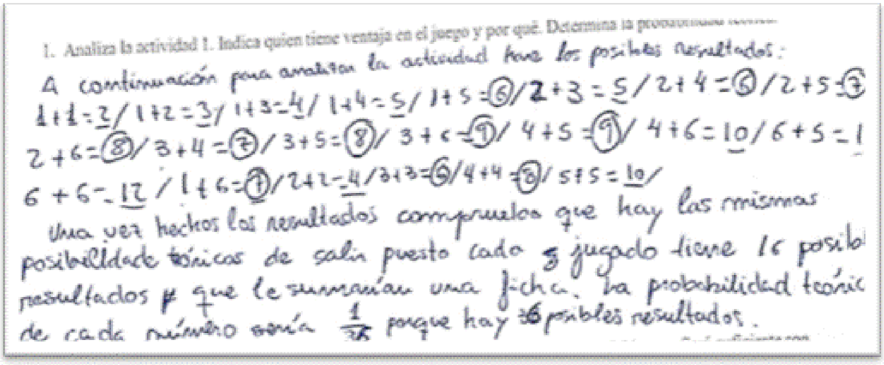
Pienso que la probabilidad de que gane B es mayor, ya que de los 11 posibles resultados, 7/11 gana B, mientras que la probabilidad de A es de 4/11

Figura 3.3.1.4. Respuesta incorrecta por sesgo de equiprobabilidad del apartado 1.

R5. *Incorrecta por espacio muestral reducido.* Algunos estudiantes consideran dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso. Este error, que también aparece con frecuencia en la resolución de problemas combinatorios, fue denominado por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997) como *error de orden.* En el ejemplo que nos ocupa es comprensible, pues la suma tiene la propiedad conmutativa;

pero a pesar de ello, hay que diferenciar los resultados según el orden para el cálculo de probabilidad. Si se comete el error, el espacio muestral queda reducido, lo que lleva a responder de manera incorrecta a esta pregunta.

Como ejemplo de esta categoría, se puede observar en la Figura 3.3.1.5que el estudiante no consideró todos los casos posibles de sumas que se realizan al lanzar dos dados; por ejemplo, solo considero el par (1,2) y no el (2,1), con lo que obtuvo un espacio muestral reducido, llevando a responder de manera errónea este apartado.


1. Analiza la actividad 1. Indica quien tiene ventaja en el juego y por qué. Determina la probabilidad teórica

A continuación para analizar la actividad hare los posibles resultados:
1+1=2/ 1+2=3/ 1+3=4/ 1+4=5/ 1+5=6/ 2+3=5/ 2+4=6/ 2+5=7
2+6=8/ 3+4=7/ 3+5=8/ 3+6=9/ 4+5=9/ 4+6=10/ 6+5=11
6+6=12/ 1+6=7/ 2+2=4/ 3+3=6/ 4+4=8/ 5+5=10/
Una vez hechos los resultados compruebo que hay las mismas posibilidades teóricas de salir puesto cada jugador tiene 16 posibles resultados y que le sumarían una ficha. La probabilidad teórica de cada número sería $\frac{1}{36}$ porque hay 36 posibles resultados.

Figura 3.3.1.5. Respuesta incorrecta por espacio muestral reducido del apartado 1.

En la Tabla 3.3.1.1, se presentan los resultados en el apartado 1. Podemos observar que contestaron correctamente a esta pregunta 43 estudiantes de los 60, pero solo uno de ellos contestó correctamente, relacionando los dos significados de probabilidad. En las respuestas incorrectas, el error detectado con mayor frecuencia fue el sesgo de equiprobabilidad, presente en 12 estudiantes de la muestra. También se puede observar que tres estudiantes contestaron en forma parcialmente correcta, puesto que en su argumento cometieron el error de sesgo de probabilidad. Solo un estudiante respondió incorrectamente a esta pregunta por error del espacio muestral reducido.

Tabla 3.3.1.1.*Respuestas de los estudiantes a la primera tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
R1 Correcta	7	18	43
R2Correcta relacionando los dos significados	1	0	1
R3Parcialmente correcta	1	1	3
R4 Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad	10	1	12
R5 Incorrecta por espacio muestral reducido	1	0	1

Al comparar los resultados de esta pregunta con la experiencia de aula de Rivas y Godino (2015), podemos hacer notar que en ambos trabajos predominan los mismos errores, que son el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido. Los autores no indican la frecuencia en sus estudiantes; en nuestro trabajo, contestaron correctamente a este apartado 43 futuros profesores, que corresponden al 71,6% aproximadamente, el 20% de los participantes manifestó el sesgo de equiprobabilidad, y un estudiante el error de espacio muestral reducido. Finalmente, tres estudiantes que corresponde al 5% de la muestra, contestaron de manera parcialmente correcta a esta pregunta.

Recursos utilizados

También en esta actividad hemos analizado los recursos que han utilizado para hallar la solución de la tarea; generalmente, estos recursos son diferentes tipos de representaciones que les facilitan la enumeración del espacio muestral. Entre las categorías hemos podido identificar los siguientes:

*1. Tabla de doble entrada (TDE).*Las tabla de doble entrada permite construir y visualizar los elementos de un espacio muestral producto (Borovcnik, 2012). En este caso, se representa en una tabla doble las sumas posibles de los valores de los dos dados, en el margen se anota los puntos de cada uno de los dados, ordenados y en el cuerpo de la tabla la suma de los valores presentados en cada fila y columna. Se destaca con colores o rodeando los resultados con una línea los casos en que gana *A* o *B*. Un ejemplo, se presenta en la Figura 3.3.1.6, donde el estudiante encierra las sumas donde gana *A* y el resto, sin encerrar, corresponden a las sumas en que gana *B*. Usa también el color rojo para destacar los resultados favorables a *A*.

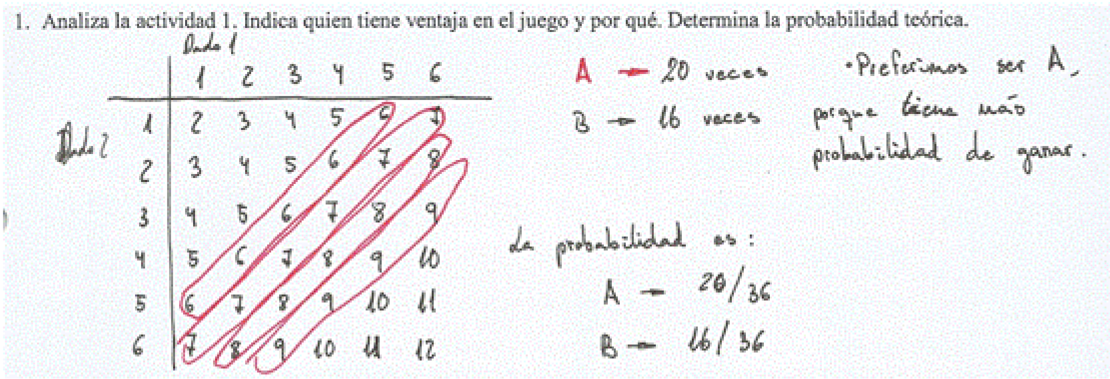


Figura 3.3.1.6. Uso de tabla de doble entrada para responder al apartado 1

*2. Tabla de recuento de resultados (TRR).*Se representa el espacio muestral en una tabla compuesta por dos columnas: En la primera de ella se ordenan las sumas posibles que resultan al lanzar dos dados y en la segunda se incluye o bien los casos favorables a cada suma, o la probabilidad correspondiente. En la Figura 3.3.1.7 observamos este tipo de tabla utilizada para responder el apartado 1.En el ejemplo, la primera columna se corresponde a las sumas de valores obtenidos en el lanzamiento de dos dados (del 2 al 12) y en la segunda columna la respectiva probabilidad para cada una de esas sumas. También vemos que el alumno aplica la regla de la suma para determinar la probabilidad de ganar cada jugador.

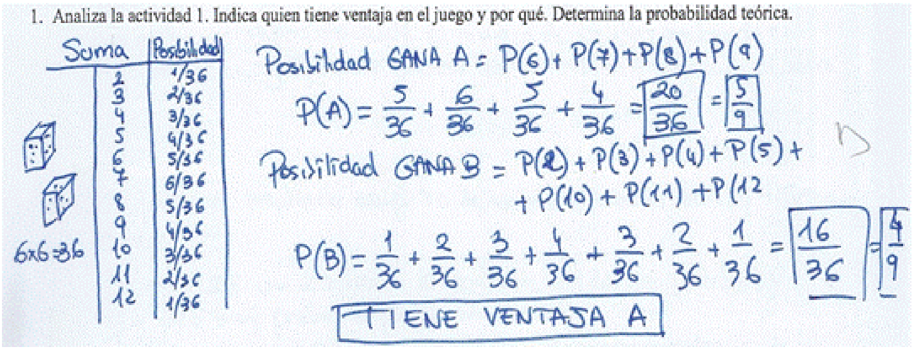


*Figura 3.3.1.7.*Uso de tabla de recuento para responder al apartado 1

3. *Diagrama en árbol (DA).* El diagrama en árbol es otro recurso sugerido por Borovcnik (2012) para facilitar el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. A la vez, Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997) resaltan su interés y utilidad para la enumeración. En este caso, se representan mediante un esquema de árbol todos los casos posibles al lanzar dos dados. Este proceso lo realizan identificando el primer número del dado y luego las 6 posibilidades del segundo. Un ejemplo lo podemos observar en la Figura 3.3.1.8, en el que un estudiante considera esta estrategia para responder al apartado en cuestión. Además, como en otros ejemplos anteriores, se ayuda del color para representar los casos favorables a cada jugador. Finalmente, aplica directamente la regla de Laplace.

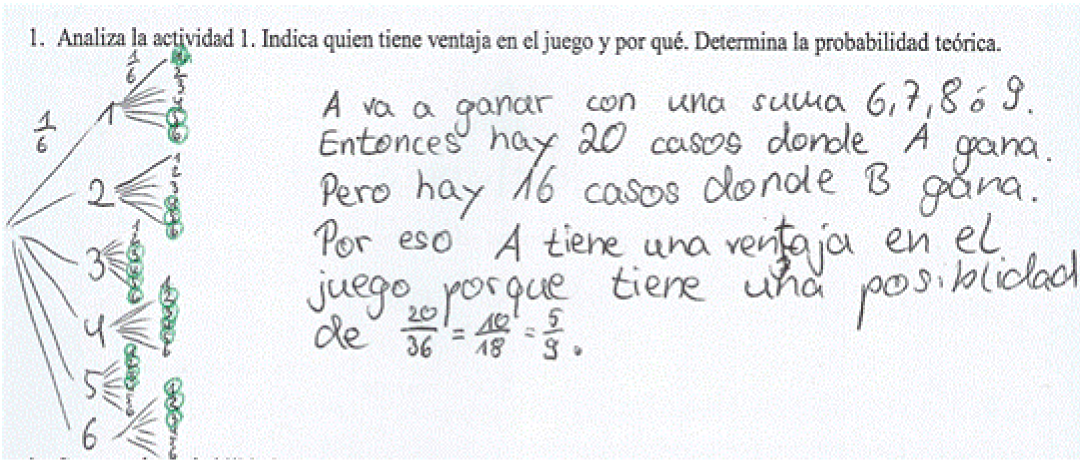


Figura 3.3.1.8. Uso de diagrama de árbol para responder al apartado 1

4. *Lenguaje verbal y simbólico (LVS).*Son los estudiantes que no utilizan tabla o diagrama en árbol. Estos estudiantes responden a la tarea utilizando únicamente lenguaje verbal y algunos símbolos matemáticos para representar la respuesta de esta actividad. Un ejemplo se presenta en la Figura 3.3.1.3, y otro, en la Figura 3.3.1.4; en los dos casos se usa únicamente el lenguaje verbal y algún símbolo.

En la Tabla 3.3.1.2 se pueden observar los recursos que utilizaron los estudiantes para responder al apartado 1. Lo más frecuente en los estudiantes que contestaron individualmente esta tarea fue el lenguaje verbal y simbólico, mientras que en los estudiantes que trabajaron en parejas fue la tabla de doble entrada. La estrategia menos utilizada para responder a esta pregunta fue el diagrama de árbol, utilizado por un solo estudiante de la muestra.

Tabla 3.3.1.2. *Recursos utilizados*

Recurso utilizado	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
TDE Tabla de doble entrada	2	9	20
TRR Tabla de recuento de resultados	6	3	12
DA Diagrama de árbol	1	0	1
LVS Lenguaje verbal y simbólico	11	8	27

Al comparar estos resultados con los obtenidos por Rivas y Godino (2015), vemos que en ambos casos los recursos utilizados fueron: la tabla de doble entrada, diagrama de árbol y lenguaje verbal y simbólico. En nuestro trabajo, además, algunos estudiantes utilizaron la tabla de recuento, no citada por estos autores.

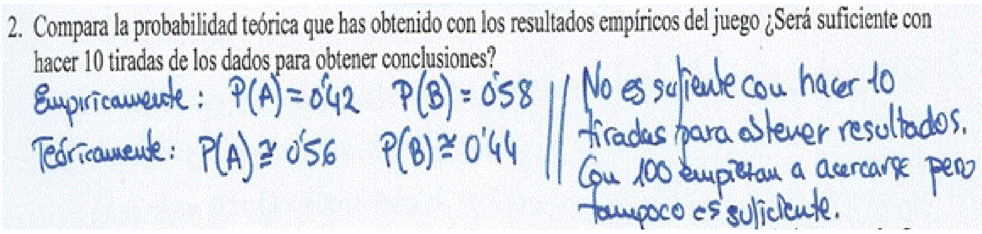
En nuestro estudio, aproximadamente el 33,3% de nuestros estudiantes utilizó el recurso tabla de doble entrada, el 20% la tabla de recuento de resultado, el 45% lenguaje verbal y simbólico y finalmente, el 1,7% aproximado utilizó el diagrama de árbol. Hay que tener en cuenta que todos los que utilizan tabla o diagrama en árbol, además, usan el lenguaje verbal o simbólico, por lo que su actividad matemática es más rica que la del resto de los compañeros.

3.3.2. COMPARACIÓN CON DATOS OBTENIDOS EN LA REPETICIÓN DEL EXPERIMENTO

En esta pregunta, se pide a los futuros profesores comparar la probabilidad teórica con los resultados empíricos obtenidos en el juego. Además, deben responder a la pregunta de si es suficiente con hacer diez tiradas de los dados para obtener conclusiones sobre la probabilidad. Se encontraron las siguientes respuestas:

R1.*Respuesta correcta.* Identifica que las diez tiradas realizadas empíricamente son pocas para observar la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica, y que es necesario aumentar el número de tiradas en el experimento, para que se acerque la frecuencia relativa a la probabilidad teórica, ganando el jugador *A*, y no el *B*. Además, da un razonamiento probabilístico para apoyar la respuesta.

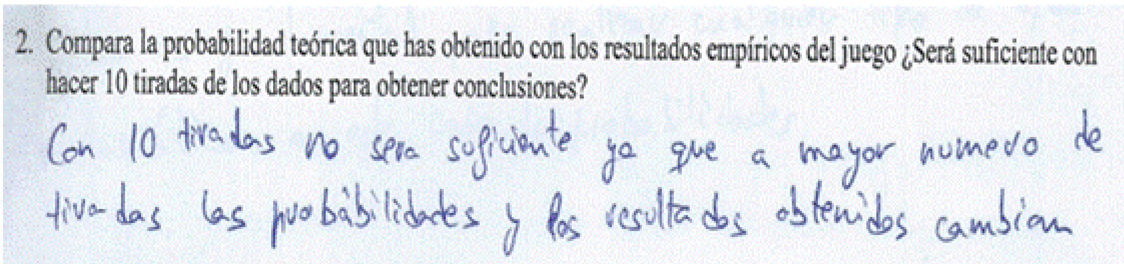
Un ejemplo lo podemos observar en la Figura 3.3.2.1, en que un estudiante comparó la probabilidad teórica, con la estimación empírica de la misma, dada por la frecuencia relativa para los dos jugadores. Observa que no se aproximan, por lo que responde correctamente a este apartado, indicando que 10 lanzamientos no son suficientes; además, indica que con 100 resultados la frecuencia relativa a la probabilidad comienza a acercarse a la probabilidad, pero son todavía pocos.


2. Compara la probabilidad teórica que has obtenido con los resultados empíricos del juego ¿Será suficiente con hacer 10 tiradas de los dados para obtener conclusiones?

Empíricamente: $P(A) = 0'42$ $P(B) = 0'58$ || No es suficiente con hacer 10 tiradas para obtener resultados.
Teóricamente: $P(A) \simeq 0'56$ $P(B) \simeq 0'44$ || Con 100 empiezan a acercarse pero tampoco es suficiente.

*Figura 3.3.2.1.*Respuesta correcta al apartado 2.

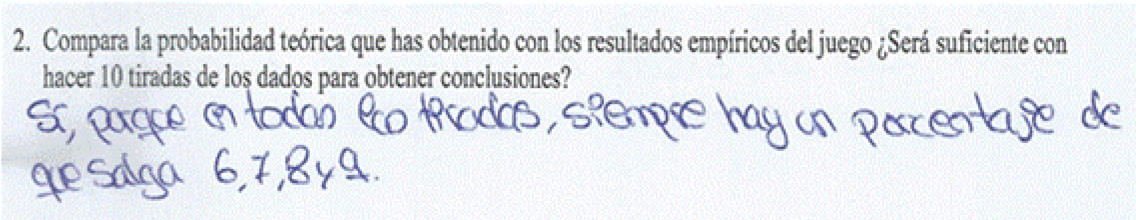
R2. *Parcialmente correcta.* Algunos estudiantes responden en forma parcialmente correcta a esta pregunta, identificando que efectivamente con 10 tiradas, no es suficiente obtener conclusiones, pero su argumentación no es precisa o no utiliza un argumento matemático válido para este apartado. En la Figura 3.3.2.2 vemos un ejemplo de esta categoría, en que el estudiante responde correctamente, pero en su argumento no considera la probabilidad teórica ni la frecuencia relativa obtenida en 10 o en 100 ensayos. Su argumentación es intuitiva, pues indica que a mayor número de tiradas de los dados las probabilidades y los resultados cambian, pero no sugiere que aumentando el número de ensayos mejorará la estimación de la probabilidad.


2. Compara la probabilidad teórica que has obtenido con los resultados empíricos del juego ¿Será suficiente con hacer 10 tiradas de los dados para obtener conclusiones?

Con 10 tiradas no sera suficiente ya que a mayor numero de tira-das las probabilidades y los resultados obtenidos cambian

*Figura 3.3.2.2.*Respuesta parcialmente correcta al apartado 2.

R3. *Respuesta incorrecta por sesgo de equiprobabilidad.* La respuesta de los estudiantes se clasifica en esta categoría cuando consideran que con 10 tiradas de los dados es suficiente para obtener conclusiones. Esta aceptación se hace influida por su respuesta incorrecta a la primera pregunta. Esta respuesta la podemos observar en la Figura 3.3.2.3, donde el estudiante considera que las sumas de los puntos al lanzar los dados son sucesos equiprobables (sesgo de equiprobabilidad). Por ello deduce que todas las posibles sumas tienen la misma posibilidad de salir; consecuentemente, las sumas de puntos del jugador *B* tienen mayor probabilidad de ocurrencia, y considera que la aproximación empírica fue buena, pues confirma su resultado en el primer apartado.


2. Compara la probabilidad teórica que has obtenido con los resultados empíricos del juego ¿Será suficiente con hacer 10 tiradas de los dados para obtener conclusiones?

Si, porque en todas las tiradas, siempre hay un porcentaje de que salga 6,7,8 y 9.

Figura 3.3.2.3. Respuesta incorrecta al apartado 2.

R4. *No contesta la pregunta*. No responde a esta pregunta, aludiendo que no la comprende o, simplemente, no tiene suficiente conocimiento de la materia para responderla.

En la Tabla 3.3.2.1 se presenta la frecuencia de estudiantes que respondió al apartado. Se puede observar que este apartado obtuvo 31 respuestas correctas, algo más de la mitad de la muestra; de ellos, nueve estudiantes que trabajaron en forma individual y 11 parejas. Además, 19estudiantes respondieron en forma parcialmente correcta a la pregunta (siete trabajando individualmente y seis en parejas). Encontramos respuestas incorrectas en nueve estudiantes, tres trabajando individualmente y seis parejas. Y, finalmente, solo un estudiante no respondió a este apartado. En general hay mejor resultado en el trabajo en parejas que en el individual.

Tabla 3.3.2.1. *Respuestas de los estudiantes a la segunda tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
R1 Correcta	9	11	31
R2 Parcialmente correcta	7	6	19
R3 Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad	3	3	9
R4 No responde	1	0	1

Al comparar los resultados obtenidos con los de Rivas y Godino (2015), observamos que algunos errores descritos por ellos no se presentan en nuestros estudiantes en esta pregunta.

Recursos utilizados

A su vez, los recursos utilizados por los futuros profesores en este apartado fueron los siguientes:

1. Comparación de probabilidades (CP). Los estudiantes comparan la probabilidad teórica con la frecuencia empírica, concluyendo que gana el juego *B* (frecuencia empírica) y no *A* (probabilidad teórica). A partir de este resultado, los estudiantes participantes observan que es necesario realizar más tiradas. Estos estudiantes muestran una buena comprensión, tanto del significado clásico, como del significado frecuencial de la probabilidad. Como ejemplo de esta respuesta, podemos observar la Figura 3.3.2.1, antes presentada.

2. Lenguaje verbal y simbólico (LVS). En este caso, los estudiantes, responden a la tarea utilizando lenguaje verbal y algunos símbolos, sin incorporar el cálculo o la comparación de probabilidades. Ejemplo de este tipo de respuesta la observamos en la Figura 3.3.2.2, en la que el estudiante responde a dicho apartado utilizando exclusivamente lenguaje verbal. No obstante, en su razonamiento alude a conceptos como convergencia y variabilidad de resultados en el muestreo.

3. *Sin recurso (SR).* No responde a la pregunta, por lo tanto, no presenta ningún recurso.

Tabla 3.3.2.2. *Recursos utilizados*

Recurso utilizado	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
CP Comparación de probabilidades	7	5	17
LVS Lenguaje verbal y simbólico	12	15	42
SR Sin recurso	1	0	1

En la Tabla 3.3.2.2 observamos los recursos que utilizaron los estudiantes para responder a este apartado. Tanto en los estudiantes que trabajan individualmente, como en los que lo hacen por parejas, se utilizó con mayor frecuencia el lenguaje verbal y simbólico para responder a este apartado; en total, 42 estudiantes se limitan a un razonamiento verbal, sin utilizar el cálculo de probabilidades para dar mayor precisión a la respuesta. Fueron 17 los que utilizaron la comparación de probabilidades, comparando para cada jugador la probabilidad teórica y la aproximación dada por la frecuencia y solo un estudiante no respondió esta pregunta, por lo que no hubo una estrategia presente.

3.3.3. ESTIMACIÓN DEL VALOR ESPERADO MEDIANTE EL ENFOQUE FRECUENCIAL

En esta pregunta se pide a los futuros profesores considerar qué ocurriría si realizáramos muchas tiradas de los dos dados, y se les plantea las siguientes preguntas: ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría *A* o *B*? Se encontraron las siguientes categorías de respuestas a esta actividad:

R1. *Respuesta correcta*. El participante da un valor correcto para la frecuencia esperada de resultados para que gane *A* y *B*, utilizando uno de los dos métodos que expusimos en el análisis a priori de la solución. La frecuencia esperada de cada suma en 36 lanzamientos sería el número de posibilidades que tiene cada una, presentada en la Tabla 3.2.2.7 multiplicada por el número de lanzamientos. La mayoría de los estudiantes utilizó los resultados de la pregunta 1 para responder este apartado.

Observamos este tipo de respuesta en la Figura 3.3.3.1, en que un estudiante considera, a partir de los resultados obtenidos en el apartado 1, la frecuencia relativa con que gana *A* y *B* (deducida del cálculo de la probabilidad). También afirma que la frecuencia esperada es cinco de cada nueve para que gane *A* y la de *B* es cuatro de cada nueve; por tanto, ha usado el cálculo de probabilidades del primer apartado.

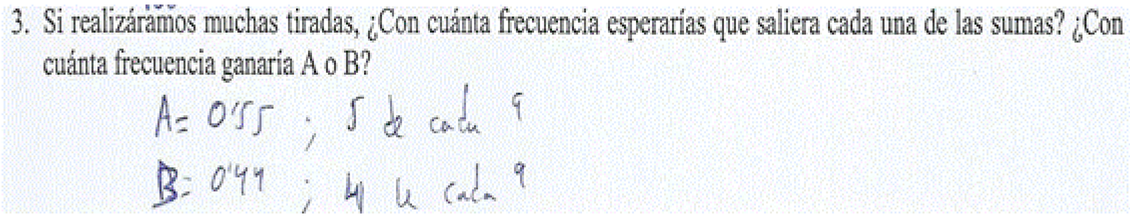


Figura 3.3.3.1. Respuesta correcta al apartado 3.

R2. *Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes consideran que todas las sumas posibles de puntos al lanzar dos dados tienen igual probabilidad de ocurrencia. Es decir, muestran el llamado sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Como la mayoría de los estudiantes consideró la respuesta de la pregunta 1 para responder este apartado, si cometieron este error, lo siguen manteniendo en este apartado.

En la Figura 3.3.3.2 observamos que el estudiante consideró su respuesta de la pregunta 1 para completar este apartado. En dicha respuesta cometió el error de sesgo de probabilidad, que mantiene en la tercera, llevándolo a responder erróneamente.

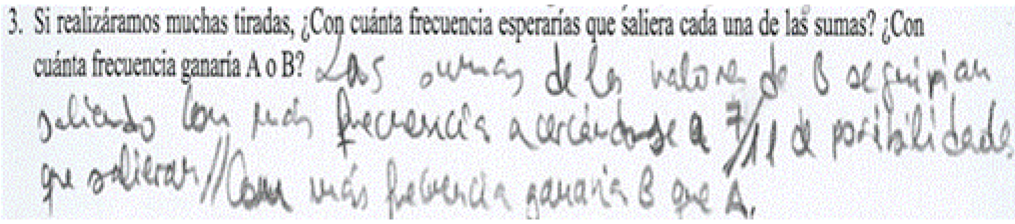

3. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B? Las sumas de los valores de B se seguirían saliendo con más frecuencia acercándose a 7/11 de posibilidades que salieran // Con más frecuencia ganaría B que A.

Figura 3.3.3.2. Respuesta incorrecta por sesgo de equiprobabilidad al apartado 3.

R3. *Incorrecta por espacio muestral reducido.* Algunos estudiantes consideran dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso, con lo que el espacio muestral queda reducido, lo que lleva a responder de manera incorrecta esta pregunta.

En el ejemplo de la Figura 3.3.3.3 podemos observar que, para responder a este apartado, el estudiante utiliza su respuesta de la pregunta 1. En ella solo considera los pares (3,4) y (5,4) y no (4,3) y (4,5). Por otro lado, omite posibles sumas y con esto su espacio muestral queda reducido a sólo 11 posibilidades (cuando sin tener en cuenta el orden deberían ser 21 y 36 teniéndolo en cuenta). El estudiante muestra una falta de capacidad de enumeración sistemática, error típico del razonamiento combinatorio, de acuerdo a Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997).

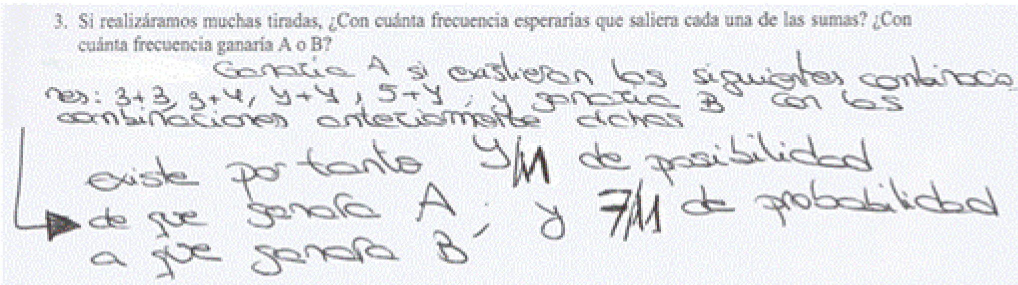

3. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B?
Ganaría A si saliesen las siguientes combinaciones: 3+3, 3+4, 4+4, 5+4 y ganaría B con las combinaciones anteriormente dichas
existe por tanto 4/11 de posibilidad de que ganara A; y 7/11 de probabilidad a que ganara B

Figura 3.3.3.3. Respuesta incorrecta por espacio muestral reducido del apartado 3.

R4. *No contesta la pregunta.* No responde a esta pregunta, aludiendo que no la comprende o, simplemente, no recuerda la forma de resolverla.

En la Tabla 3.3.3.1 se presenta la frecuencia de estudiantes que respondió al apartado 3. Observamos que contestaron correctamente esta pregunta 21estudiantes de los 60, es decir, sólo la tercera parte y no hay respuestas parcialmente correctas, de lo que se deduce que esta pregunta fue difícil. En las preguntas contestadas incorrectamente, el error más frecuente fue el sesgo de equiprobabilidad, presente en diez estudiantes de la muestra y cuatro estudiantes contestaron incorrectamente por espacio muestral reducido. Cabe hacer notar que esta pregunta obtuvo una gran cantidad de estudiantes, 25 de 60, que no la respondieron, aludiendo que no entendían la pregunta o no sabían responderla. Rivas y Godino (2015) no la plantean.

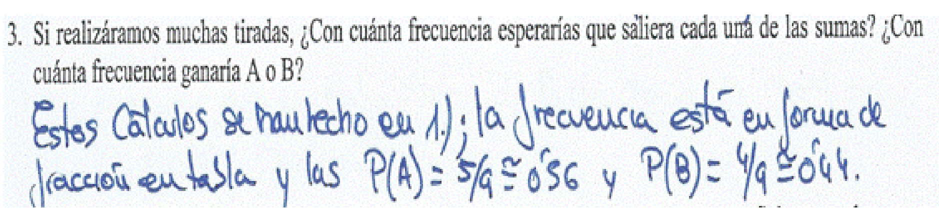
Tabla 3.3.3.1. *Respuestas de los estudiantes a la tercera tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
R1 Correcta	7	7	21
R2 Incorrecta por sesgo de equiprobabilidad	10	0	10
R3Incorrecta por espacio muestral reducido	2	1	4
R4No responde	1	12	25

Recursos utilizados

A su vez, los recursos utilizados por los futuros profesores en este apartado fueron los siguientes:

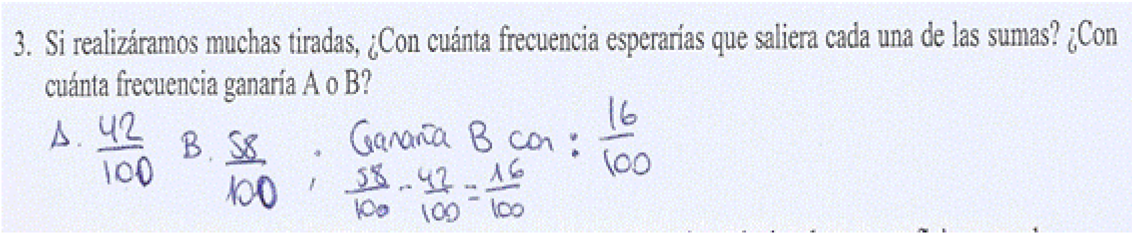
1. Cálculo de probabilidad mediante la regla de Laplace (CPL). Para responder a esta pregunta, algunos estudiantes utilizan los resultados de la pregunta 1 o vuelven a calcular la probabilidad teórica del juego. A partir de ello, llegan a la conclusión de que la frecuencia esperada de resultados para que gane *A* es cinco de cada nueve veces y cuatro de cada nueve veces de que gane *B*, o bien, lo expresan en función de 100 o 1000 lanzamientos. Como ejemplo a esta respuesta podemos observar la Figura 3.3.3.4, en la que un estudiante considera la probabilidad teórica para responder a este apartado calculando la probabilidad como fracción de 9 y transformando a valor esperado en 100 lanzamientos.


3. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B?

Estos Cálculos se han hecho en 1.); la frecuencia está en forma de fracción en tabla y las $P(A) = 5/9 \cong 0'56$ y $P(B) = 4/9 \cong 0'44$.

Figura 3.3.3.4. Uso del cálculo de la probabilidad teórica para responder al apartado 3

2. Estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia relativa (EPF). Las respuestas que consideramos dentro de esta categoría utilizan los resultados de la pregunta 1, donde habían estimado la probabilidad a partir de los datos empíricos o vuelven a estimarla. A partir de este cálculo, llegan a la conclusión de que la frecuencia esperada de resultados para que gane *A* es 21 de cada 50 veces y 29 de cada 50 veces para que gane *B*. Como ejemplo, se observa en la Figura 3.3.3.5 que el estudiante considera la frecuencia relativa de resultados empíricos en el juego para estimar la probabilidad. A partir de esta estimación se responde a este apartado.



3. Si realizáramos muchas tiradas, ¿Con cuánta frecuencia esperarías que saliera cada una de las sumas? ¿Con cuánta frecuencia ganaría A o B?

A. $\frac{42}{100}$ B. $\frac{58}{100}$; Ganaría B con: $\frac{16}{100}$; $\frac{58}{100} - \frac{42}{100} = \frac{16}{100}$

Figura 3.3.3.5. Estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia empírica para responder al apartado 3

3. Lenguaje verbal y simbólico (LVS). En este caso, los estudiantes responden a la tarea utilizando lenguaje verbal y algunos símbolos matemáticos, sin llegar a calcular o a exponer cálculos anteriores de probabilidad. Esta estrategia es ejemplificada en la Figura 3.3.3.2, en la que, aunque parece deducirse que el alumno ha calculado las probabilidades, no las explicita.

4. *Sin recurso (SR).* No responde a la pregunta, por lo tanto, no presenta ningún recurso.

En la Tabla 3.3.3.2 se puede observar el recurso que utilizaron con mayor frecuencia los participantes para responder al apartado 3, que es el cálculo de probabilidad teórica, utilizado por 19 estudiantes (seis trabajando individualmente y seis en parejas). El segundo recurso más utilizado es el lenguaje verbal y simbólico (seis estudiantes trabajando individualmente y dos parejas). La estimación frecuencial de la probabilidad solo la usan estudiantes que trabajan individualmente. Curiosamente, en este apartado es mucho mayor la proporción de parejas que no responde; sólo un alumno aislado la deja en blanco.

Tabla 3.3.3.2. *Recursos utilizados*

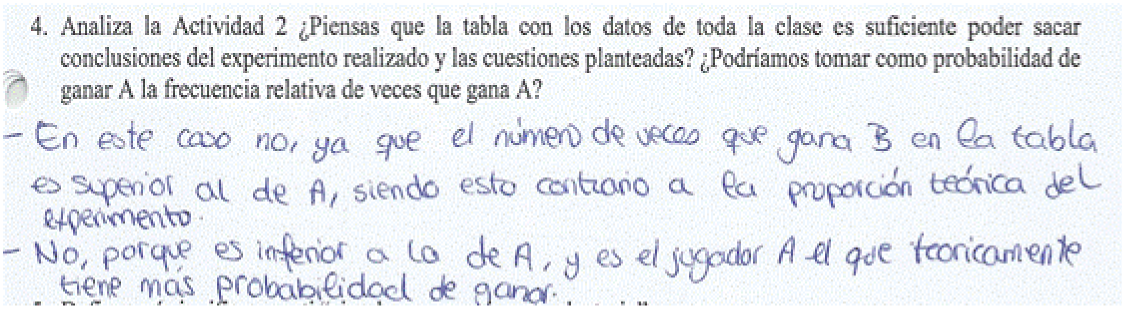
Recurso utilizado	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
LVS Lenguaje verbal y simbólico	6	2	10
CPL Cálculo de probabilidad teórica	7	6	19
EPF Estimación empírica de la probabilidad	6	0	6
SR Sin recurso	1	12	25

3.3.4. COMPARACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS CLÁSICO Y FRECUENCIAL

En esta pregunta, se pide a los futuros profesores analizar la Actividad 2, y en base a dicho análisis, decidir si la tabla con los datos de toda la clase es suficiente para poder sacar conclusiones del experimento realizado y responder a las cuestiones planteadas y si podríamos tomar como probabilidad de ganar *A* la frecuencia relativa de veces que gana *A*. Las respuestas obtenidas fueron clasificadas de acuerdo a las siguientes categorías:

R1. *Respuesta correcta*. El participante responde correctamente a este apartado, al considerar que no es suficiente la tabla con los datos de toda la clase para obtener conclusiones del experimento realizado, porque observa que la frecuencia relativa obtenida en el experimento es una estimación errónea de la probabilidad.

Podemos observar este tipo de respuesta en la Figura 3.3.4.1, en que un estudiante participante indica que los resultados obtenidos en la tabla no son suficientes poder sacar conclusiones del experimento realizado. Expone que el número de veces que gana *B* en dicha tabla es superior al de *A,* con lo que observa que la probabilidad teórica y su estimación empírica no coinciden. Por lo tanto, no se puede considerar aceptable, pues da vencedor del juego a *B* y no *A.*

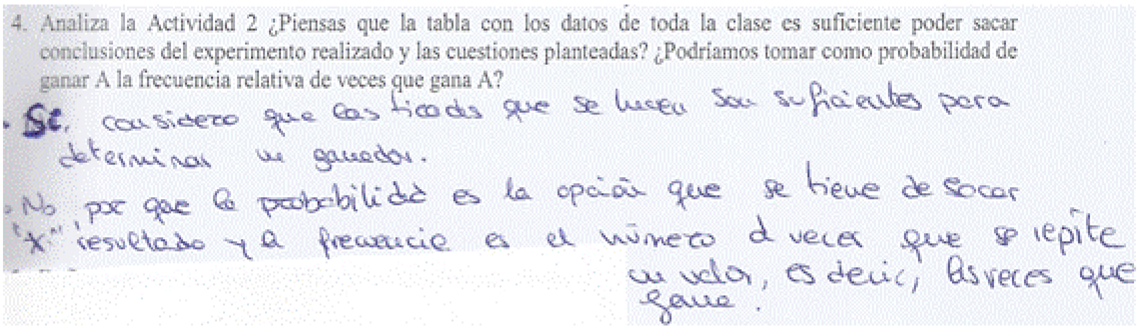

4. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente poder sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar A la frecuencia relativa de veces que gana A?

- En este caso no, ya que el número de veces que gana B en la tabla es superior al de A, siendo esto contrario a la proporción teórica del experimento.
- No, porque es inferior a la de A, y es el jugador A el que teóricamente tiene más probabilidad de ganar.

Figura 3.3.4.1. Respuesta correcta al apartado 4.

R2. *Parcialmente correcta.* Se considera en esta categoría de respuesta, aquella en que el estudiante responde correctamente una de las dos preguntas planteadas en el apartado ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente poder sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas?, o bien, ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar *A* la frecuencia relativa de veces que gana *A*?*,* pero no ambas.

Podemos observar un ejemplo en la Figura 3.3.4.2, en que el estudiante considera que las tiradas de los dados en la tabla son suficientes para determinar un ganador en el juego, en este caso el *B* y no el *A,* lo que lo lleva a contestar erróneamente. Pero, por otro lado, responde correctamente que no se debe considerar la probabilidad de ganar *A*, a la frecuencia relativa pues ésta indica solo las veces que gana *A* y no su probabilidad. Ello supone una contradicción entre las respuestas a las dos partes, de la que el estudiante no es consciente, lo que muestra su poca capacidad argumentativa.


4. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente poder sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar A la frecuencia relativa de veces que gana A?

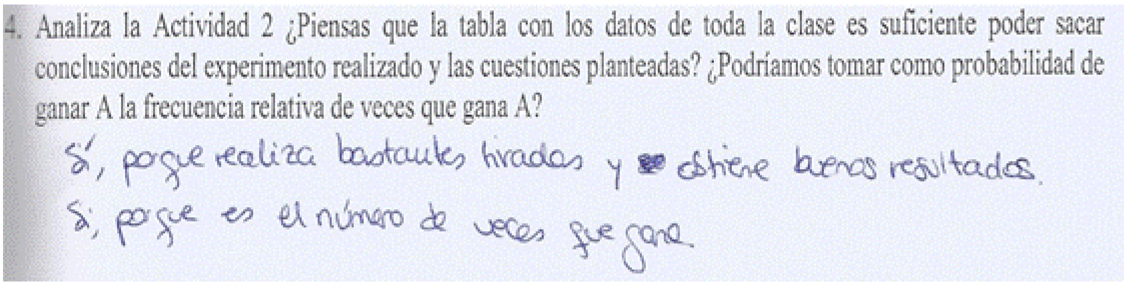
• Sí, considero que las tiradas que se hacen son suficientes para determinar un ganador.

• No, por que la probabilidad es la opción que se tiene de sacar "x" resultado y la frecuencia es el número de veces que se repite un valor, es decir, las veces que gane.

Figura 3.3.4.2. Respuesta parcialmente correcta al apartado 4.

R3. *Respuesta incorrecta.* Serían los estudiantes que responden incorrectamente a ambas preguntas planteadas en este apartado.

Un ejemplo se presenta en la Figura 3.3.4.3, donde el estudiante considera que las dos respuestas deben ser afirmativas. Por un lado, cree que es suficiente sacar conclusiones del experimento realizado, porque se realizaron 100 tiradas. Por otro lado, considera que se puede tomar como probabilidad de ganar *A*, a la frecuencia relativa de veces que gana *A*, calculada a partir de los datos empíricos.


4. Analiza la Actividad 2 ¿Piensas que la tabla con los datos de toda la clase es suficiente poder sacar conclusiones del experimento realizado y las cuestiones planteadas? ¿Podríamos tomar como probabilidad de ganar A la frecuencia relativa de veces que gana A?

Sí, porque realiza bastantes tiradas y obtiene buenos resultados.

Sí, porque es el número de veces que gana.

Figura 3.3.4.3. Respuesta incorrecta al apartado 4.

R4: *No contesta la pregunta.* No responde a esta pregunta, aludiendo que no la comprende o, simplemente, no entiende esta la materia.

En la Tabla 3.3.4.1 se presenta la frecuencia de estudiantes que respondió al apartado 4, según las respuestas descritas anteriormente. Podemos observar que contestaron correctamente a esta pregunta 48 estudiantes de los 60, lo cual muestra una buena comprensión de la relación entre la probabilidad en sentido clásico y su estimación frecuencial. Encontramos respuestas parcialmente correctas de seis estudiantes que, aunque responden bien a una de las preguntas, son inconsistentes en su argumentación. Hay también cinco respuestas incorrectas; finalmente, solo un estudiante no responde a esta pregunta, aludiendo que no sabe la respuesta. Los resultados son mejores que en aquellos que trabajan en parejas.

Tabla 3.3.4.1. *Respuestas de los estudiantes a la cuarta tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
R1 Correcta	8	20	48
R2 Parcialmente correcta	6	0	6
R3Incorrecta	5	0	5
R4 No responde	1	0	1

Recursos utilizados

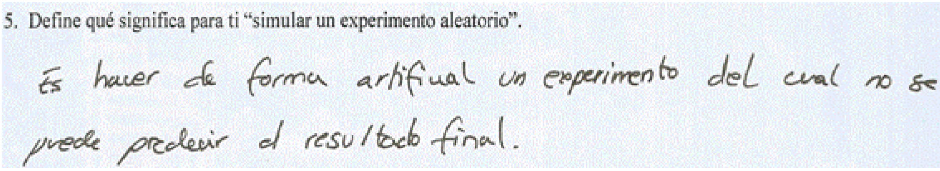
En este caso, el único recurso utilizado por los futuros profesores en este apartado fue *el lenguaje verbal y simbólico (LVS).* Es decir, los estudiantes responden a la tarea utilizando lenguaje verbal y algunos símbolos matemáticos para representar la respuesta de esta pregunta. Podemos observar, como ejemplo a esta pregunta, la Figura 3.3.4.2, en la que el estudiante responde a dicho apartado utilizando lenguaje verbal y simbólico. Todos los estudiantes, menos uno que no responde, lo utilizaron.

3.3.5. COMPRESIÓN DE LA IDEA DE SIMULACIÓN

A la pregunta define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio", encontramos diferentes respuestas, que describimos a continuación. En las dos primeras aparece la idea de sustituir el experimento y en las cuatro últimas los alumnos no son conscientes de dicha sustitución:

R1. *Reproducir artificialmente un experimento aleatorio*. Estos alumnos han captado la esencia de la simulación, que es sustituir un experimento por otro equivalente pero, debido a falta de competencia de comunicación y argumentación, lo describen en forma bastante imprecisa. En sus palabras indican que simular un experimento aleatorio es reproducirlo en forma artificial, para estudiar sus resultados.

Un ejemplo de esta categoría de respuesta se muestra en la Figura 3.3.5.1, donde el estudiante hace alusión a llevar a cabo el experimento aleatorio de forma artificial; es decir, utilizar algún material o la tecnología. Aunque no indica explícitamente que el experimento simulado sea diferente al original, el adjetivo "artificial" nos señala que se ha manipulado el experimento. También se alude a la razón de la simulación, que consiste en que no se puede predecir el resultado final del experimento original.

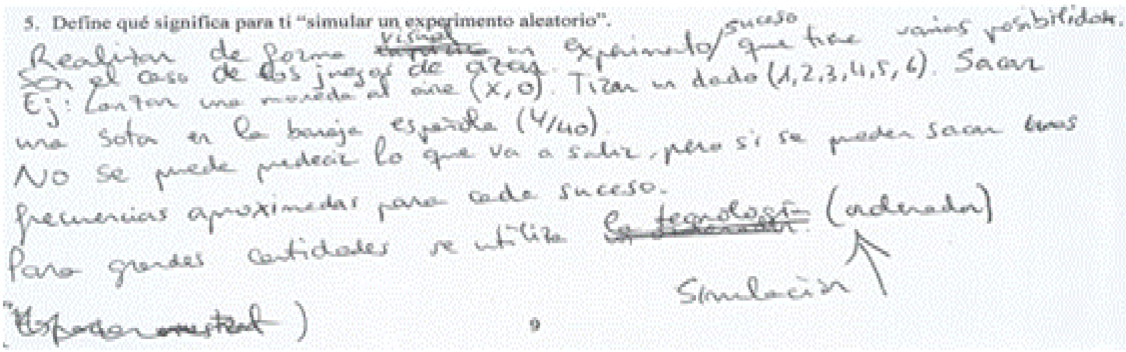

5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

Es hacer de forma artifiual un experimento del cual no se puede predecir el resultado final.

Figura 3.3.5.1. Respuesta reproducir artificialmente un experimento aleatorio.

R2. *Visualizar un experimento aleatorio*. En este caso, el estudiante considera que simular un experimento aleatorio es visualizarlo, utilizando para ello un material concreto (monedas, cartas, dados, etc.), o bien, la tecnología (ordenador). Aunque no indica claramente que se cambia un experimento por otro, el hecho de usar el material o la tecnología en muchos casos implicará esta sustitución.

Un ejemplo de esta categoría se observa en la Figura 3.3.5.2, en la que el estudiante considera que simular un experimento aleatorio es aquel que se realiza de forma visual, apoyado en el material manipulativo si el número de repeticiones es pequeño, o en la tecnología, para un número grande. Señala que existen varias posibilidades, y que este experimento se puede realizar de forma concreta utilizando monedas, lanzando dados, o bien, sacando una carta de una baraja española. También indica que sus resultados no son predecibles, pero sí se pueden obtener frecuencias aproximadas para cada suceso.

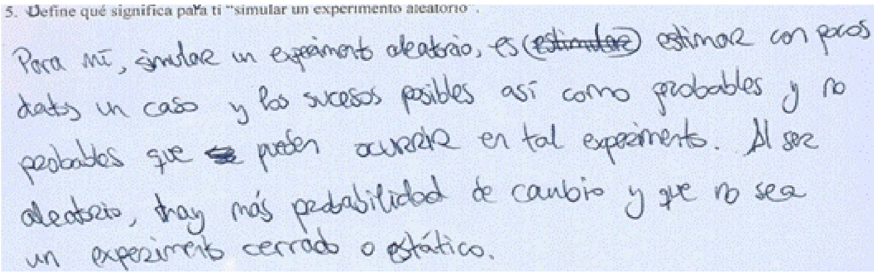

5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

Realizar de forma ~~empírica~~ visual un experimento/suceso que tiene varias posibilidades. Son el caso de los juegos de azar.
Ej: Lanzar una moneda al aire (X,O). Tirar un dado (1,2,3,4,5,6). Sacar una sota en la baraja española (4/40).
No se puede predecir lo que va a salir, pero sí se pueden sacar unas frecuencias aproximadas para cada suceso.
Para grandes cantidades se utiliza ~~la tecnología~~ (ordenador)
Simulación
("~~Experimental~~")

Figura 3.3.5.2. Respuestavisualizaciónde un experimento aleatorio.

R3. *Estimación de las probabilidades en un experimento aleatorio*. En este caso, el estudiante participante considera que simular un experimento aleatorio es reproducirlo para estimar las probabilidades de algunos sucesos de dicho experimento. En esta respuesta ya no hay alusión al cambio de un experimento por otro; por tanto, hay una confusión entre simplemente experimentación y simulación. El alumno asume que siempre que se aplica el enfoque frecuencial de la probabilidad hay una simulación.

Un ejemplo se muestra en la Figura 3.3.5.3, donde el estudiante, considera que simular un experimento aleatorio es simplemente llevarlo a cabo. Un error en su respuesta es que indica que simular permite estimar la probabilidad a partir de pocos datos. Añade otras características no relevantes de la simulación.

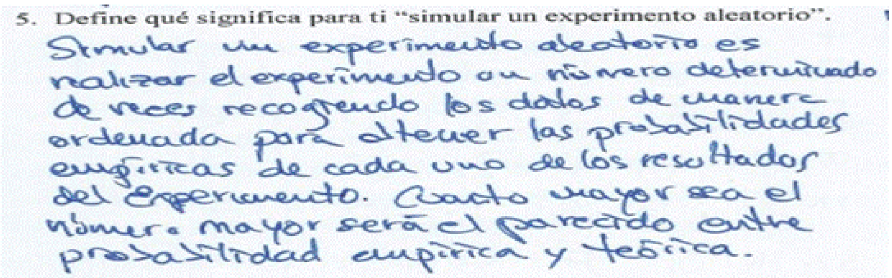

5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

Para mí, simular un experimento aleatorio, es ~~(estimular)~~ estimar con pocos datos un caso y los sucesos posibles así como probables y no probables que ~~se~~ pueden ocurrir en tal experimento. Al ser aleatorio, hay más probabilidad de cambio y que no sea un experimento cerrado o estático.

Figura 3.3.5.3. Respuesta estimación de probabilidades en un experimento aleatorio.

R4. *Repetición de un experimento aleatorio.* Para el estudiante que da esta respuesta, simular un experimento aleatorio consiste en repetir una gran cantidad veces dicho experimento. La finalidad sería recoger datos para estimar la probabilidad de uno o varios sucesos a partir de la frecuencia relativa y la estimación sería tanto mejor cuando mayor sea el número de repeticiones. En esta respuesta no aparece la principal característica de la simulación que es sustituir un experimento por otro, pero al menos se observa una buena comprensión de la aproximación frecuencial a la probabilidad.

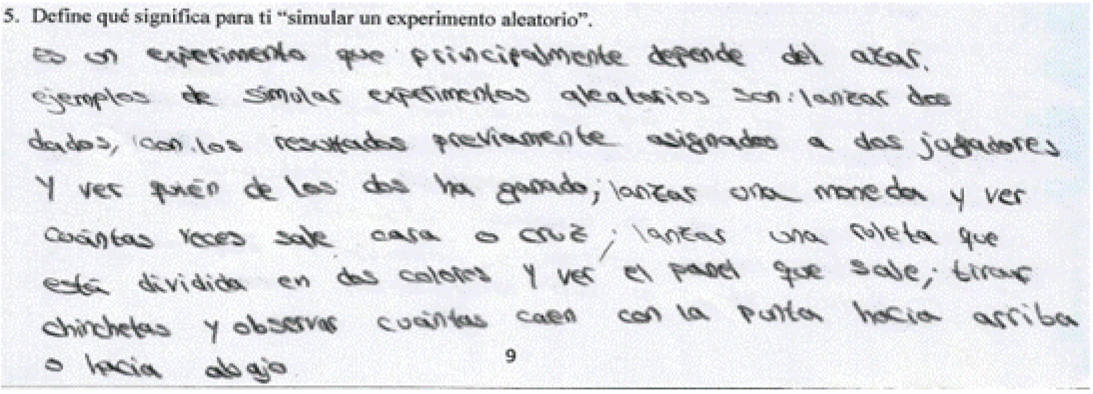
Un ejemplo de esta respuesta se presenta la Figura 3.3.5.4, en la que el estudiante indica con claridad que simular un experimento aleatorio es realizar dicho experimento un número determinado de veces. También alude a la necesidad de recoger, de manera ordenada, los datos para estimar su probabilidad. El alumno llama a la frecuencia "probabilidad empírica del experimento", lo cual es incorrecto. No obstante, sí es consciente de que cuanto más veces se realice dicho experimento, mayor será el parecido entre las probabilidades teóricas y las frecuencias empíricas.


5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

Simular un experimento aleatorio es realizar el experimento un número determinado de veces recogiendo los datos de manera ordenada para obtener las probabilidades empíricas de cada uno de los resultados del experimento. Cuanto mayor sea el número mayor será el parecido entre probabilidad empírica y teórica.

Figura 3.3.5.4. Respuesta repetición de un experimento aleatorio.

R5. *Confusión de simulación y experimento aleatorio*. En este caso, el estudiante participante considera que simular un experimento aleatorio es, solamente, llevarlo a cabo. Un ejemplo se observa en la Figura 3.3.5.5, en la que el estudiante considera que la simulación se refiere a un experimento que depende principalmente del azar. Como ejemplos presenta el lanzamiento de dos dados con los resultados previamente asignados a dos jugadores, para ver quién de los dos ha ganado; lanzar una moneda y ver cuántas veces sale cara o cruz; lanzar una ruleta dividida en dos colores y ver qué color resulta; y, tirar chinchetas y observar cuántas caen con la punta hacia arriba o hacia abajo.


5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

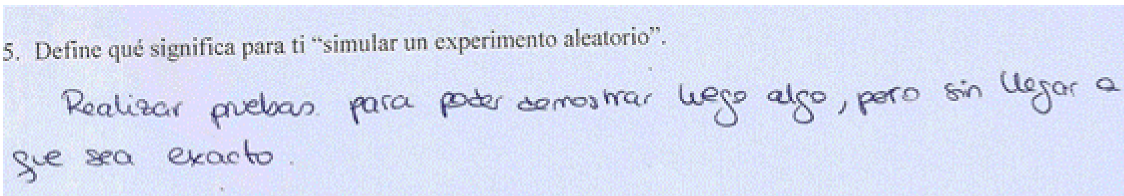
es un experimento que principalmente depende del azar. ejemplos de simular experimentos aleatorios son: lanzar dos dados, con los resultados previamente asignados a dos jugadores y ver quién de los dos ha ganado; lanzar una moneda y ver cuántas veces sale cara o cruz; lanzar una ruleta que está dividida en dos colores y ver el papel que sale; tirar chinchetas y observar cuántas caen con la punta hacia arriba o hacia abajo.

9

Figura 3.3.5.5. Respuesta confusión de simulación y experimento aleatorio.

R6: *Realizar pruebas.* En este caso, el estudiante participante considera que simular un experimento aleatorio es realizar pruebas o ensayos para que, de esta forma, se pueda calcular la probabilidad teórica o la estimación empírica.

Un ejemplo de esta categoría de respuesta lo podemos observar en la Figura 3.3.5.6, en la que un estudiante considera que simular un experimento aleatorio es realizar pruebas para poder demostrar algo, pero sin llegar a que sea exacto.


5. Define qué significa para ti "simular un experimento aleatorio".

Realizar pruebas para poder demostrar luego algo, pero sin llegar a que sea exacto.

Figura 3.3.5.6. Respuesta realizar pruebas de un experimento aleatorio.

R7: *No contesta la pregunta.* No responde a esta pregunta, aludiendo que no la comprende o, simplemente, que no entiende la materia.

En la Tabla 3.3.5.1, se presentan de manera resumida los resultados de esta pregunta. Sólo 13 estudiantes (siete trabajando individualmente y tres en parejas) comprenden el hecho de que en la simulación se sustituye un experimento por otro, mientras el resto confunde experimentación y simulación.

En este apartado, los estudiantes responden a la tarea utilizando lenguaje verbal y algunos símbolos matemáticos para representar la respuesta. Podemos observar como ejemplo a esta pregunta la Figura 3.3.5.3 antes presentada, en la que el estudiante responde a dicho apartado utilizando lenguaje verbal y simbólico. Solo un estudiante no responde y el resto (59) usa este recurso.

Tabla 3.3.5.1. *Respuestas de los estudiantes a la quinta tarea*

Respuesta	Estudiantes	Parejas	Total estudiantes
R1 Reproducir artificialmente un experimento aleatorio	1	2	5
R2 Visualización de un experimento aleatorio	6	1	8
R3 Estimación de probabilidades en un experimento aleatorio	1	1	3
R4 Repetición de un experimento aleatorio	8	10	28
R5 Confunde simulación y experimento aleatorio	1	5	11
R6 Realización de pruebas.	2	1	4
R7 No responde	1	0	1

3.4. CONCLUSIONES

Para finalizar el presente capítulo, se exponen algunas conclusiones sobre los resultados de la evaluación. En primer lugar, compararemos la dificultad relativa de cada una de las preguntas aplicadas en esta actividad a partir de los datos mostrados en la Tabla 3.4.1.

Tabla 3.4.1. Porcentaje de respuestas en cada apartado según su corrección.

	Correcta	Parcialmente Correcta	Incorrecta o no responde
Pregunta 1	73,3	5	21,6
Pregunta 2	51,6	31,6	16,6
Pregunta 3	35	0	65
Pregunta 4	80	10	10
Pregunta 5	21,6	0	78,3

La pregunta más sencilla fue la cuarta (decidir si 10 tiradas es una muestra de tamaño suficiente para obtener conclusiones), seguida de la primera (determinar el ganador en el juego), donde encontramos peores resultados que en la investigación de Gómez (2014), que obtuvo un 90% de respuestas correctas en un problema donde se pidió a los futuros profesores decidir el ganador en un juego basado en el lanzamiento de dos dados. La tercera pregunta, comparar las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad y la última, definir la simulación son las que han resultado más difíciles

Al comparar los resultados con la experiencia en aula de Rivas y Godino (2015), podemos hacer notar que en ambos trabajos predominan los errores de sesgo de equiprobabilidad y espacio muestral reducido en diferentes preguntas. También aparece la heurística de representatividad (Kahneman et al., 1982), con la que los estudiantes responden sin comprender la ley de los grandes números, y se basan en los resultados obtenidos en el juego empírico, a pesar de que a nivel declarativo (cuando se les pregunta) deciden que la muestra es de tamaño pequeño para obtener conclusiones.

De este modo, se confirma la existencia, en los futuros profesores de educación primaria, de la heurística de la representatividad, encontrada en tareas diferentes por Azcárate (1995), Serrano (1996) y Batanero, Cañizares y Godino (2005). Estos últimos indican que sus estudiantes superan en parte estos sesgos mediante actividades de simulación.

Aunque nuestros estudiantes habían llevado a cabo alguna de estas actividades, se realizaron sin interacción personal con el ordenador, que sí hubo en el caso de Batanero et al., (2005). Deducimos que sería necesario un mayor tiempo dedicado a estas actividades y, en lo posible, permitir la interacción de los estudiantes con la tecnología en la realización de las simulaciones.

Por otro lado, la segunda pregunta (comparar las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad), la tercera (valor esperado en una serie de ensayos) y la última (definir la simulación) resultaron difíciles a los estudiantes participantes, principalmente la tercera y la última. Todas ellas están relacionadas con el objetivo principal del estudio que es analizar si los futuros profesores relacionan las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad, que no llegan a poner en relación.

Esto nos plantea una problemática en la formación de los futuros profesores, que se supone han de enseñar la probabilidad bajo estos dos enfoques en la educación primaria. Se necesitaría insistir más sobre este tema, para preparar mejor a los profesores para su futura labor docente.

Con respecto a las estrategias usadas, en los tres primeros apartados la más frecuente fue el lenguaje verbal y simbólico, siendo en los dos últimos apartados la única, estrategia utilizada. En el primer apartado es el único en el que se usa el diagrama en árbol, muy escasamente a pesar de su utilidad, señalada por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997), pues ayuda a visualizar la estructura del espacio muestral en experimentos compuestos, como el que aparece en la actividad propuesta.

Otro recurso algo más usado, pero todavía muy escasamente, es la tabla de doble entrada, recomendada para la resolución de este tipo de problemas por Borovcnik (2012).

En los apartados 2 y 3 se usa el cálculo de probabilidades, pero únicamente por una parte reducida de la muestra, lo que puede explicar la frecuencia de respuestas parcialmente correctas o incorrectas Los alumnos se guiaron en muchos casos por los datos empíricos; ello es debido a que, como hemos mencionado, no llegan a conectar las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad, que era el objetivo de la tarea. No llegan a utilizar alguna idea intuitiva de convergencia, en parte, por haberse guiado por la heurística de la representatividad.

Tabla 3.4.2. Porcentaje de recursos usados en los tres primeros apartados

	Apartado 1	Apartado 2	Apartado 3
Tabla de doble entrada	33,3	0	0
Tabla de recuento	20	0	0
Diagrama en árbol	1,6	0	0
Cálculo de probabilidades	0	28,3	31,6
Estimación empírica de la probabilidad	0	0	10
Lenguaje verbal y simbólico	45	70	16,6
Sin recurso	0	1,6	41,6

La mayor parte de las veces los estudiantes participantes se limitan a utilizar el lenguaje verbal y algunos símbolos sencillos, como las fracciones o el porcentaje, pero sin llegar al cálculo de probabilidades. En consecuencia, la actividad matemática desarrollada en la tarea es incompleta.

En resumen, también sería importante insistir en la formación de los futuros profesores en el uso de estrategias productivas en la resolución de problemas de probabilidad, especialmente el diagrama en árbol y la tabla de doble entrada.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

Como lo hemos expuesto anteriormente, en este trabajo se analiza la forma en que una muestra de futuros profesores de educación primaria relacionan los significados clásico y frecuencial de la probabilidad, y las dificultades que tienen en diferenciar y poner en relación dichos significados.

Para finalizar este Trabajo de Fin de Máster, en este capítulo se presentan las conclusiones respecto a cada uno de los objetivos e hipótesis de investigación planteadas en el capítulo 1, seguido de los posibles puntos para completar este trabajo de investigación.

4.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS E HIPOTESIS

En primer lugar, presentamos las conclusiones obtenidas para cada uno de los objetivos, para ver el grado en que hemos podido cumplirlos.

O1. Iniciarme en la investigación didáctica, identificando un tema de interés actual.

Este objetivo nace por iniciativa personal y mi trabajo diario, específicamente por mi responsabilidad en el desarrollo de cursos de perfeccionamiento para profesores de educación primaria en Chile, dictados por la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. En particular, he impartido el curso "Datos y Probabilidades", donde observé que los profesores presentaban carencias en su conocimiento del contenido probabilidad, y necesitaban actualizar la metodología que empleaban para enseñar dichos temas. Es en esta labor, donde nace mi deseo y curiosidad por conocer y ampliar los modelos de trabajo y de conocimientos que deben desarrollar los profesores.

En base a la interrogante anterior, este objetivo se fue desarrollando en este trabajo de investigación, donde se trata de estudiar la relación entre los significados clásico y frecuencial de la probabilidad que ponen en juego un grupo de futuros profesores de educación primaria, mediante un estudio exploratorio. Es un trabajo de interés actual, pues ayuda a identificar errores que comúnmente cometen los futuros profesores, que podrían ser compartidos por los profesores chilenos que participan en los cursos anteriormente mencionados. Por tanto, la experiencia de este trabajo permite, en futuros cursos, abordar de mejor manera esta temática de estudio, para lograr que los profesores conozcan y desarrollen de forma eficiente su labor en la enseñanza de la probabilidad.

O2. Desarrollar una síntesis de las principales investigaciones previas centradas en la formación de profesores para enseñar probabilidad.

El desarrollo del Máster en didáctica de la matemática, específicamente en los cursos: Fundamentos de la educación estadística, didáctica de la probabilidad y la combinatoria y, didáctica de la estadística, todos de la línea de investigación en educación estadística, me permitieron comenzar a conocer el trabajo previo en este campo. El curso de Teoría de la educación matemática y los cursos metodológicos del máster, me han proporcionado destrezas para desarrollar este trabajo de investigación, específicamente en desarrollar y sintetizar las principales investigaciones previas centradas en la formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad. Por lo tanto, este objetivo se cumplió.

O3. Realizar un estudio exploratorio de evaluación de la forma en que los futuros profesores de educación primaria relacionan los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad.

Con respecto a este objetivo, cada apartado de la actividad planteada a los futuros profesores permitió confirmar que los participantes comparten los mismos errores, al igual que en el trabajo de Rivas y Godino (2015). Todos ellos están relacionados con el objetivo principal del estudio que es analizar si los futuros profesores relacionan las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad, llegando a la conclusión de que son pocos los que llegan a ponerlos en relación.

La pregunta considerada más sencilla por parte de los estudiantes de nuestra muestra fue la referida a la comparación de los significados clásico y frecuencial de la probabilidad, respondida correctamente por el 80% de los participantes, y la más difícil, fue la referida a la estimación del valor esperado mediante el enfoque frecuencial, con el 65% de los participantes.

Con respecto a las hipótesis de investigación, nuestras conclusiones son las siguientes:

H1. En la actividad de evaluación que se analiza en el capítulo 3, se esperaba detectar, en una proporción importante de los futuros profesores de educación primaria, algunos sesgos de razonamiento en probabilidad, ya descritos por algunos autores. En concreto, se esperaba identificar el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), la heurística de representatividad, y la creencia en la ley de los pequeños números (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), y finalmente, el error de orden (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1997).

Efectivamente, en nuestro trabajo se presentaron algunos sesgos descritos anteriormente. El que tuvo una mayor presencia fue el sesgo de equiprobabilidad, donde se considera que los sucesos son equiprobable, es decir, que todas las sumas tienen igual ocurrencia de salir al lanzar los dos dados (Lecoutre, 1992), presentado en los apartados 1, 2 y 3. Fue seguido del error por espacio muestral reducido o considerar dos sumas que aparecen en distinto orden como un único suceso. Este error, que también aparece con frecuencia en la resolución de problemas combinatorios, fue denominado por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997) como error de orden, y está también presente en los apartados antes mencionado. La heurística de representatividad y la creencia en la ley de los pequeños números (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), no fueron puestas en evidencia por nuestros participantes.

H2. Se espera que los futuros profesores resuelvan los problemas apoyándose en recursos intuitivos, como las tablas o el diagrama en árbol o bien otros esquemas gráficos, más que en el uso de fórmulas de cálculo de probabilidades.

También se han analizado las estrategias usadas en los tres primeros apartados, siendo la más frecuente emplear sólo el lenguaje verbal y simbólico. En los dos últimos apartados sólo se usa el lenguaje verbal y simbólico. En el primer apartado es el único que se usa el diagrama en árbol, aunque muy escasamente, a pesar de su utilidad, señalada por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997), pues ayuda a visualizar la estructura del espacio muestral en experimentos compuestos, como el que aparece en la actividad propuesta.

Con los resultados expuestos y descritos en el Capítulo 3, en ambas hipótesis se comprueba que son similares los resultados de investigaciones previas sobre el conocimiento de la probabilidad entre futuros profesores de educación primaria en España (Azcárate, 1995; Serrano, 1996; Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Contreras, 2011; Mohamed, 2012, Gómez, 2014; Rivas y Godino, 2015). También proporcionamos alguna información nueva, en particular, en cuanto al uso de recursos en cada apartado del cuestionario o el hecho de que, de manera individual, los estudiantes parecen comprender los significados clásico y frecuencial, pero no llegan a relacionarlos. Por otro lado, también se muestran dificultades en la comprensión de la idea de simulación, siendo necesario dedicar mayor tiempo con los profesores a su análisis, ya que el uso de la simulación se recomienda en la enseñanza de la probabilidad.

H3. Finalmente, esperábamos mayor número de respuestas correctas en los estudiantes que trabajan en pareja frente a los que trabajan de manera individual. Nos basamos para ello en nuestra propia experiencia en la formación de profesores y en el hecho de que, al trabajar juntos, los estudiantes se pueden apoyar en su razonamiento.

Efectivamente, se obtuvo mejor número de respuestas correctas en los estudiantes que trabajaron en pareja que aquellos que trabajaron individualmente. En el apartado 1, el 13% de los alumnos que trabajó individualmente responde correctamente, mientras que en parejas fue el 30%. En el apartado 2, el 15% que trabajó individualmente y el 18% en parejas. En el apartado 3, tanto los alumnos que trabajaron individualmente como los que trabajaron en parejas respondieron correctamente en un 12% aproximadamente. En el apartado 4, el 13% contestó correctamente trabajando en forma individual, mientras que el 100% de los alumnos que trabajaron en parejas contestó correctamente esta pregunta. Solo en el apartado 5, los alumnos que trabajaron de forma individual obtuvieron un mayor porcentaje de respuestas correctas, el 12% aproximadamente, frente al 5% que trabajó en parejas. Con estos datos, se afirma está hipótesis planteada en el capítulo1.

4.3. POSIBLES PUNTOS PARA COMPLETAR EL TRABAJO

Para completar posibles puntos en este trabajo de investigación, sería necesario ampliar la muestra, para analizar si se replican los resultados, pues, como se ha dicho, la investigación es simplemente exploratoria.

También se podría aplicar este cuestionario en otro curso, específicamente, en un curso posterior al que se aplicó, para contrastar los resultados de esta investigación con los que se obtengan en el nuevo estudio, para verificar si los alumnos que han cursado mayor cantidad de contenidos didáctico-matemáticos comprenden mejor los conceptos probabilísticos presentes en la actividad aplicada en esta investigación.

Otro posible punto para completar este trabajo, es aplicar este cuestionario a alumnos de la carrera de educación básica en Chile, específicamente a los alumnos de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, en el curso "Pensamiento aleatorio II sistema de datos y su tratamiento en el aula". Este curso es impartido en el séptimo semestre a los alumnos que cursan la carrera Pedagogía en educación básica, con mención matemática, y sería interesante contrastar los resultados obtenidos en España, con lo que se obtengan en Chile, con alumnos que están especializándose en matemática en primer y segundo ciclo y, que además, tienen aprobado "Pensamiento aleatorio I sistema de datos y su tratamiento en el aula", lo que implica tener un mayor conocimiento en el área de la probabilidad y estadística.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 591-619). Madrid: Síntesis.

Ball, D. L. y Bass, H. (2009, Marzo). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Alemania. Disponible en: www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. Whatmakes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247- 263.

Batanero, C**.** (2013). Teaching and learning probability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Heidelberg: Springer.

Batanero, C. (2016). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). Prague: European Society for Research in Mathematics Education. Disponible en: hal.archives-ouvertes.fr/hal-01280506/document.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* New York, NY: Springer.

Batanero, C., Cañizares, M. J., y Godino, J.D. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference.* [CD-ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability.*ICME-13.Topical Survey series. New York, NY: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimmensions in mathematics education* (pp. 107-127). New York, NY: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 3*(1), 3-13.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12.* Disponible en: www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York, NY: Springer.

Begg, A. y Edwards, R. (1999, Diciembre). Teachers' ideas about teaching statistics. Trabajo presentado en el *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia.

Bernoulli, J. (1987). *Ars Conjectandi- 4ème partie.* Rouen: IREM.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 5-27.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Contreras J. M., Batanero, C., Díaz, C. y Fernandes, J. A. (2011, Febrero). Prospective teachers'common and specialized knowledge in a probability task. Trabajo presentado en *Seventh Conference of European Research in Mathematics Education, CERME 7*. Rzeszow, Polonia.

Departamento de Didáctica de la Matemática (2014a). *Guía docente de la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria"*. Granada: Autor. Disponible en: grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/estudios.

Departamento de Didáctica de la Matemática (2014b). *Guía docente de la asignatura"Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas"*. Granada: Autor. Disponible en: grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/estudios.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools, 17*(1/2), 173-182.

Estrada, A., Batanero, C., Díaz, C. y Comas, C. (2016, Julio). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. *Trabajo presentado en el International Congress on Mathematical Education,, ICME-13*. Hamburgo, Alemania.

Even. R. y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study.* New York, NY: Springer.

Fernándes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante, XVIII*(1-2), 161-183.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children.* Dordrech: Reidel.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). Nueva York, NY: Springer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, 20,*13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to researchin mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Gómez, E. (2011). *Bases para la definición semántica del conocimiento matemático para enseñar probabilidad del profesor de secundaria*. Trabajo de Fin de Máster. Universidad de Granada.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Green, D. R. (1983a). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Yorkshire: Universidad de Sheffield.

Green, D. R. (1983b). From thumbtacks to inference. *School Science and Mathematics*, *83*(7), 541-551.

Groth, R. E. (2008). Navigating layers of uncertainty in teaching statistics through case discussion. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad: Un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia.* México: Gedisa.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw Hill.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Huygens, C. (1998). *Du calcul dans les jeux de hasard* [The calculus in games of chance].In Œuvrescomplètes, t. 14, La Haye, 1888-1950. (Original work Ratiociniis in Aleae Ludo, published 1657).

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristic and biases*. New York, NY: Cambridge University Press.

Kieran, C., Krainer, K. y Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. En M.A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K.S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 361-392). New York, NY: Springer.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59-98.

Laplace P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilities.* Paris: Jacques Gabay.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568.

LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Rotherdam: Sense Publishers.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* Madrid: Autor.

Mises, R. Von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa-Calpe.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Moivre de, A. (1967). *The doctrine of chances*. New York, NY: Chelsea Publishing

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1997). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación Matemática, 8*(1), 26-39.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Noguero, F. L. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación, 4*, 167-180.

Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y N. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Pareja, (2011). Probabilidad. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 427-450). Madrid: Pirámide.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Rivas, H. y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López-Martín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 339-346). Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 389-404). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance toteaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahia: ISI e IASE. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Shulman, L. S. (1986). Paradigm and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.), *Handbook of research onteaching* (pp. 3-36). New York, NY: Macmillan.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform.*Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: ISI.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 305-337.

Watson, J. M., Callingham, R. A. y Donne, J. M. (2008). Establishing PCK for teaching statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.