COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA ARITMÉTICA EN LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Antonio Jesús Molero del Río

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo Fin de Máster en Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Septiembre 2017

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA ARITMÉTICA EN LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Antonio Jesús Molero del Río

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
Dirigido por Carmen Batanero y Mª Magdalena Gea

Agradecimientos: Este trabajo se financia con el proyecto EDU2016-74848-P.

RESUMEN:

El problema abordado en este trabajo es la evaluación de la comprensión de la media aritmética por parte de los estudiantes de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Para ello se analizan las respuestas de 84 estudiantes a un cuestionario formado por siete ítems de respuesta abierta adaptado de investigaciones previas. Los resultados permiten identificar los objetos matemáticos mejor y peor comprendidos por estos estudiantes, así como clasificar algunos conflictos semióticos detectados en sus respuestas.

ABSTRACT:

The problem considered in this work is the evaluation of first grade secondary students' understanding of arithmetic mean. To achieve this aim we analyze the responses by 84 students to a questionnaire with seven open-ended questions that were adapted from previous research. Results serve to identify the mathematical object that are better and worse understood and classify some semiotic conflicts found in the students' responses.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El problema abordado en este trabajo es la evaluación de la comprensión de la media aritmética por parte de los estudiantes de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. La razón por la cual se ha elegido este tema es su importancia dentro de la estadística y para la formación del estudiante, así como mi interés personal por conocer las dificultades de los estudiantes con este concepto. El trabajo se organiza en cuatro capítulos.

En el primer capítulo planteamos nuestro problema de investigación. Como primer paso, analizamos el papel que juegan las medidas de tendencia central en el currículo actual. Seguidamente, describimos el marco teórico que nos permitirá desarrollar el trabajo. Por último, establecemos los objetivos que pretendemos alcanzar.

En el segundo capítulo realizamos una síntesis de investigaciones previas relacionadas con nuestro trabajo, incluidas en Cobo (2003), Jacobbe y Carvalho (2001) y Mayén (2007). Estas investigaciones se organizan de acuerdo a los tipos de objetos matemáticos que se describen en el marco teórico.

En el tercer capítulo se presentan los resultados del estudio de evaluación realizado con los estudiantes de primer curso de Enseñanza Obligatoria. Comenzamos presentando el cuestionario, incluyendo una descripción de cada uno de los ítems que lo conforman. Describimos la muestra y el contexto educativo utilizados en la investigación así como los resultados obtenidos.

En el último capítulo, presentamos las conclusiones generales que se deducen del estudio realizado, añadiendo posibles vías de investigación futuras.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo describimos el problema que planteamos en nuestro trabajo, que, como se ha indicado, consiste en la evaluación de la comprensión de la media aritmética por parte de los estudiantes del primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En primer lugar, se expone el papel de las medidas de tendencia central en el currículo actual y se destaca su importancia para el estudiante y para el método estadístico. A continuación se describe el marco teórico en el que se apoya el trabajo, que es el enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática (Godino, 2002, 2010; Godino, Batanero y Font, 2007). Finalmente se plantean los objetivos que queremos abarcar, justificando su interés.

1.2. LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Comenzamos presentando el objeto de investigación, las medidas de posición central. Se verá el papel que tienen en el currículo de Secundaria y se destaca su importancia para el estudiante y para el método estadístico.

1.2.1. PAPEL EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

En este apartado se justifica el tema de la investigación por la relevancia que toma el concepto de media aritmética en el currículo de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, en los cuáles aparece a lo largo de varios niveles educativos. Para mostrar esta importancia, analizaremos los documentos curriculares actualmente en vigor relacionados con estos niveles.

Actualmente, el currículo ha estado inmerso en un periodo de actualización de manera escalonada. Entró en vigor la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE; Jefatura del Estado, 2013) como modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 6 de mayo, de Educación (Jefatura del Estado, 2006). Dicha ley se implantó en los cursos de numeración impar tanto de Educación Primaria como de Secundaria en el curso académico 2015/2016 y quedó totalmente implantada en este curso académico 2016/2017. En consecuencia, los estudiantes que forman parte de la muestra que ha participado en este estudio han seguido el currículo anterior (MEC, 2006) durante su Educación Primaria, por lo que también durante su educación en el curso académico 2015/2016.

Como cambio curricular general, la LOMCE incorpora un nuevo elemento curricular: los estándares de aprendizaje. Se establece que (MEC, 2014, p. 19351-19352):

> ”Estándares de aprendizaje evaluables: especificaciones de los criterios de evaluación que permiten definir los resultados de aprendizaje, y que concretan lo que el alumno debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura; deben ser observables, medibles y evaluables y permitir graduar el rendimiento o logro alcanzado. Su diseño debe contribuir y facilitar el diseño de pruebas estandarizadas y comparables”

El cuestionario fue pasado en el mes de mayo, cuando los estudiantes aún no habían estudiado contenidos relacionados con las medidas de posición central. Por tanto, sus conocimientos del tema corresponden con los del currículo de Educación Primaria del curso pasado (que corresponde al currículo LOE).

A continuación comentamos aquellos decretos de enseñanza que involucran a los estudiantes del tercer ciclo de Educación Primaria y los del primer ciclo de Secundaria, tanto en el currículo LOE como el correspondiente a la LOMCE, para justificar la importancia que adquieren las medidas de posición central en los estudiantes de estas edades.

En primer lugar, en la Educación Primaria, y dentro de la normativa de la LOE, encontramos el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006), cuyos contenidos y criterios de evaluación se recogen en la Tabla 1.1. En dicho decreto se recogen específicamente las medidas de posición central, media y moda, siempre aplicadas en situaciones familiares para el estudiante. Aunque en los criterios de evaluación no se citan expresamente las medidas de tendencia central, entendemos que el estudiante ha de usar intuitivamente estas ideas para hacer estimaciones, citadas en dichos criterios.

Tabla 1.1. Contenidos sobre la media en la LOE en el tercer ciclo de Primaria

Contenidos	Criterios de evaluación
Gráficos y parámetros estadísticos: La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares.	7. Realizar, leer e interpretar representaciones graficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada. Además, se comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia.

En segundo lugar, también en la Educación Primaria, y dentro de la normativa de la LOMCE, encontramos el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria (MEC, 2014), cuyos contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje se recogen en la Tabla 1.2. En dicho decreto se recogen específicamente las medidas de posición central, media y moda, que han de estudiarse en forma intuitiva.

Tabla 1.2. Contenidos sobre la media en la LOMCE en el tercer ciclo de Primaria

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Gráficos y parámetros estadísticos: - Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.	2. Realizar, leer e interpretar representaciones graficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.	2.2. Aplica de forma intuitiva a situaciones familiares, las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.

Tampoco en los criterios de evaluación no se citan expresamente las medidas de posición central, en cambio, en los estándares de aprendizaje sí que aparecen de manera explícita su aplicación de forma intuitiva a situaciones que el niño conozca.

En tercer lugar, en la Educación Secundaria, y dentro de la normativa de la LOE, encontramos el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2006), cuyos contenidos y criterios de evaluación se recogen en la Tabla 1.3. En dicho decreto se recogen específicamente las medidas de posición central, media, moda y mediana, desde el primer curso, aunque no se diferencia los contenidos de los dos primeros cursos. A los contenidos de Primaria se añade el estudio de la estimación, cálculo y uso de propiedades para resolver problemas.

En los criterios de evaluación tampoco se citan expresamente, aunque se entiende que el estudiante ha de usarlos de manera intuitiva.

Tabla 1.3. Contenidos sobre la media en la LOE en el primer ciclo de Secundaria

Contenidos	Criterios de evaluación
Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.	6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas.
Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones.	

Por último, en la Educación Secundaria Obligatoria, y dentro de la normativa de la LOMCE, encontramos el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (MEC, 2015), cuyos contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para los dos primeros cursos se recogen en la Tabla 1.4. En dicho decreto se recogen específicamente las medidas de posición central, media, moda y mediana.

En los criterios de evaluación tampoco se citan explícitamente pero si implícitamente cuando se indica que se deben calcular los parámetros estadísticos, aunque se entiende que el estudiante ha de usarlos de manera intuitiva. Sí aparecen de manera mucho más explícita en los estándares de aprendizaje, que incluso recomiendan el uso de la tecnología para su cálculo.

Tabla 1.4. Contenidos sobre la media en la LOMCE en el primer ciclo de Secundaria

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Medidas de tendencia central.	1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.	1.4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo mediano), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas.
	2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada.	2.1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas.

1.2.2. IMPORTANCIA DE SU CONOCIMIENTO PARA EL ESTUDIANTE

En las últimas décadas, la enseñanza de la estadística, de manera progresiva, se ha incorporado al currículo de matemáticas tanto de Educación Primaria como de Secundaria. Además, ha logrado ser una de las disciplinas con más protagonismo en los programas universitarios de diferentes carreras, siendo fundamental a la hora de desarrollar los trabajos finales de carrera. Esto es debido a que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos de estadística.

En el apartado anterior, hemos podido observar de qué forma se introduce la Estadística en el tercer ciclo de Educación Primaria y en el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Se destacan, principalmente, las medidas de posición central (en particular, la media aritmética) que son objeto de nuestro estudio.

Batanero (2001, 2004) indica que la incorporación de la Estadística al currículo escolar se debe, en gran medida, al trabajo desarrollado desde el ISI (International Statistical Institute), una sociedad científica muy prestigiosa. Este organismo, primero mediante su Comité de Educación y desde 1991 por IASE, la International Association for Statistical Education, ha promovido congresos y publicaciones específicas orientadas a la introducción de la estadística en la escuela (Batanero, 2000). Esta autora analiza las razones de la presencia de la Estadística en la enseñanza desde Primaria son numerosas; destacamos, entre otras, las que propone Holmes (1980):

- La Estadística ayuda al desarrollo de la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Por tanto, capacita a la persona para enfrentarse a la sociedad de la información y la toma de decisiones.
- Su estudio fomenta el desarrollo personal del estudiante al desarrollar su razonamiento crítico, en el que las decisiones se basan en la valoración de la evidencia objetiva dada por los datos.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos o datos estadísticos o bien expresiones de probabilidad.

Esta implantación de la enseñanza de la Estadística en los últimos años ha provocado un gran interés en la comunidad investigadora, como veremos en el Capítulo 2 del trabajo; también en el caso de las medidas de tendencia central.

Además de las justificaciones planteadas por Holmes, que son válidas para las medidas de tendencia central, podemos destacar su importancia como aplicación directa a la vida cotidiana. Muchas situaciones de la vida real plantean la media como la medida por excelencia para dar una visión general de una determinada cuestión. La esperanza de vida y la tasa de natalidad o el índice de precios al consumo de un determinado país son algunos ejemplos, así como la renta per cápita. Otro ejemplo presente en las aulas podría ser la calificación final de cada alumno en una determinada asignatura, calculada como promedio de las distintas calificaciones obtenidas durante el curso.

Todas las consideraciones aquí comentadas justifican el interés de nuestro trabajo, ya que el primer paso para el progreso es la detección de las principales dificultades encontradas por los alumnos y, a ser posible, aportar diseños didácticos que ayuden a combatirlas.

1.2.3. IMPORTANCIA EN EL MÉTODO ESTADÍSTICO

Las medidas de tendencia central son esenciales también para la teoría y la práctica de la estadística; por tanto, su comprensión es fundamental para el progreso del estudiante en el tema. En particular el papel de la media en el método estadístico es relevante pues constituye la base para la comprensión de conceptos estadísticos más avanzados. Las aportaciones básicas de la media en este contexto se resumen en Mayén (2009).

En primer lugar, en estadística descriptiva y análisis exploratorio de datos, la media permite resumir una distribución y también comparar diferentes distribuciones de datos. Por otro lado, otros resúmenes estadísticos, como la varianza se definen a través de la media (media de la suma de desviaciones a la media).

Relativo a las familias de distribuciones de probabilidad, la media suele encontrarse como parámetro característico de dichas distribuciones, es decir, en una familia de curvas de densidad, fija la que se vaya a usar en cada aplicación. Este es el caso de la distribución Normal, la Poisson o la Exponencial, entre las más destacadas.

En la inferencia estadística, la media muestral es un estimador muy utilizado de la media de la población. La razón que hace útil el empleo de la la media muestral en la teoría de muestreo en general es el hecho de que presenta muchas de las propiedades deseables para cualquier estimador, como son la insesgadez, la consistencia y la suficiencia. Además, tiene mínima varianza.

Por otro lado, el Teorema Central del Límite proporciona una propiedad interesante para la media muestral: cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la distribución que sigue la media muestral será aproximadamente Normal. También, la media interviene en otros de los teoremas importantes de la inferencia estadística como son las Leyes de los Grandes Números.

Por último, la teoría relativa a la regresión y la correlación, y las numerosas técnicas estadísticas basadas en ella, se basan en estimar la media de una variable a partir de otras variables sobre las que se impone una determinada relación funcional.

Se concluye pues que una comprensión limitada de esta medida de tendencia central dificultará, en gran medida, el progreso adecuado en el estudio de temas estadísticos avanzados.

1.3. MARCO TEÓRICO

Este trabajo se fundamenta en algunos aspectos del enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). Este enfoque considera la matemática desde tres puntos de vistas complementarios: como una actividad de resolución de problemas, un lenguaje simbólico y un sistema conceptual organizado lógicamente. Más aún, la situación-problema y las prácticas que se realizan en su resolución son el primer eslabón que permitirá definir los conceptos, el objeto y el significado (personal e institucional) como resultado de su resolución. Por tanto, el significado de las medidas de tendencia central (media aritmética) sería en este enfoque el resultado del conjunto de prácticas realizadas a la hora de resolver problemas de tendencia central.

1.3.1. SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO. SIGNIFICADO PERSONAL E INSTITUCIONAL

En este enfoque teórico se diferencia entre el significado personal y el significado institucional de un objeto matemático. Como indica Batanero (2000):

> En general los problemas no aparecen de forma aislada, sino que los mismos problemas son compartidos dentro de cada institución, y las soluciones encontradas dependen de los instrumentos y prácticas sociales disponibles (p. 5).

Una institución es un grupo de personas interesadas en un mismo tipo de problemas; por ejemplo, la institución educativa. Teniendo en cuenta que las personas viven en diferentes instituciones, su conocimiento está influenciado por las características del conocimiento y los sistemas de prácticas correspondientes a cada una de esas instituciones. Mientras que los objetos personales se originan de la práctica individual de una persona. Es necesario, por tanto, diferenciar dos dimensiones interdependientes del significado del conocimiento matemático: la dimensión personal (subjetiva, mental) y la dimensión institucional (objetiva, contextual) (Godino y Batanero, 1998).

El significado personal es el resultado del pensamiento y la actividad individual al resolver una determinada clase de problemas. En cambio, el significado institucional es el resultado del diálogo y los convenios dentro de una institución, como puede ser el sistema educativo (Godino, Batanero y Font, 2007).

A grosso modo, el significado personal resulta del conjunto de prácticas que asimila una persona de manera individual y que puede ser diferente al significado institucional, que es el resultado del conjunto de prácticas realizadas y compartidas dentro de una institución sobre un campo de problemas determinado.

1.3.2.TIPOS DE OBJETOS MATEMÁTICOS ASOCIADOS A LA MEDIA ARITMÉTICA

En el conjunto de prácticas matemáticas, tanto personal como institucional, intervienen objetos matemáticos de distinta naturaleza: símbolos, gráficos, textuales, orales,… Además, como desarrollo de esa práctica se originan nuevos objetos de corte estructural como son los tipos de problemas, procedimientos, definiciones, propiedades o argumentos.

Si los objetos provienen de dentro de una institución se les denominará “objetos institucionales” y si surgen de manera individual, “objetos personales”. En Godino, Batanero y Font (2007) se proponen los siguientes tipos de objetos llamados primarios:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos).
- Situaciones-problemas (problemas, aplicaciones extra-matemáticas o matemáticas, ejercicios, etc.).
- Conceptos, dados por su definición o descripción.
- Proposiciones, propiedades o atributos.
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas).
- Razonamientos o argumentos usados para validar y explicar las proposiciones y procedimientos (deductivo, inductivo, etc.).

A continuación, vamos a describir aquellos objetos matemáticos primarios que intervienen de manera notable en nuestro estudio.

1.3.2.1. CAMPOS DE PROBLEMAS

En el marco teórico citado, que también fue utilizado por Cobo (2003), uno de los supuestos que toma como base en su estudio es que las matemáticas constituyen un quehacer humano; los objetos matemáticos surgen de dar respuesta a ciertas situaciones problema de la propia matemática y evolucionan progresivamente.

Entendemos un problema como planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. Un conjunto de problemas formará un campo, campo de problemas, cuando todos ellos compartan soluciones y/o metodologías de resolución similares o relacionadas. En este trabajo se estudia el campo de problemas relacionado con el objeto matemático media, así como las progresivas actividades que surgen del mismo.

Campo de problemas para la media

Describimos a continuación los campos de problemas donde surge la media aritmética, tomando como referencia aquéllos que se contemplan en el estudio de Cobo (2003).

- *(CP1) Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores.* Se usa la media en este caso por sus propiedades de buen estimador (estimador insesgado de mínima varianza). Un ejemplo, tomado de Cobo (2003) se presenta a continuación.

> Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una misma clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6.2, 6.0, 6.0, 6.3, 6.1, 6.23, 6.15 y 6.2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

- *(CP2) Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme.* Algunos ejemplos son obtener la velocidad media durante un viaje, la calificación final de una asignatura evaluada mediante varios exámenes parciales, el salario medio de los empleados de una empresa. Cobo (2003) plantea el siguiente ejemplo, que los niños pueden comprender.

> Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

- *(CP3) Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dado cuya distribución es aproximadamente simétrica.*

> Un alumno ha obtenido en 5 exámenes las siguientes calificaciones: 5, 7, 6, 7 y 9. ¿Qué calificación final resume el rendimiento del alumno en un sólo dato?

- *(CP4) Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica.*

> La altura media de los alumnos de un colegio es 1.40 cm. Si extraemos una muestra aleatoria simple de 5 estudiantes y resulta que la altura de los cuatro primeros es de 1.38 cm, 1.42 cm, 1.60 cm y 1.40 cm, respectivamente, ¿cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

- *(CP5) Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas.* Esta categoría no aparece en el estudio de Cobo (2003), pero fue añadida por Mayén (2009) y que en nuestro cuestionario se plantea uno de similares características. Un ejemplo sería:

> A continuación se muestran las calificaciones de dos grupos distintos que hicieron el mismo examen. ¿A qué grupo se le dio mejor?
> Grupo A: 0 0 2 3 3 3 4 5 6 7 7 7 7 8 9 9 9 10
> Grupo B: 1 1 4 4 4 4 6 6 6 7 7 7 8 8 9 9 9 10

1.3.2.2. LENGUAJE VERBAL, SIMBÓLICO Y GRÁFICO

Partiendo de una situación-problema, según Freudenthal (1991), el siguiente paso sería inventar una simbolización adecuada para representar esa situación problemática así como las soluciones encontradas; permitirá comunicar estas soluciones a otras personas. Según Vergnaud (1982), el lenguaje constituye el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar un concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

En nuestro marco teórico, dicha representación tiene especial importancia ya que establecemos una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado. Distinguimos entre lenguaje verbal, simbólico y gráfico:

- *Lenguaje verbal*. La media suele presentarse con este nombre en la mayoría de los textos, salvo en algunos que también utilizan la palabra promedio como sinónimo de ésta. Es necesario comprobar que el alumno emplee ambos conceptos indistintamente, aunque son palabras que tienen el mismo sentido en el lenguaje ordinario, inclusive.
- *Lenguaje simbólico*. Los símbolos constituyen un elemento característico del lenguaje matemático. Las notaciones más usuales son $\bar{x}$ para la media, x_i para los datos, f_i para las frecuencias relativas, F_i para las frecuencias absolutas y n para referirnos al tamaño total de los datos.
- *Lenguaje gráfico*. En este tipo de lenguaje, destacamos:
  - Conjuntos de datos aislados, presentados sin formato.
  - Tablas de datos, como las tablas de frecuencias y de frecuencias acumuladas, las tablas de datos agrupados en intervalos, entre otras.
  - Diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias y polígonos de frecuencias acumuladas.

- Curvas de distribución.
- Recta numérica con los datos, para reforzar la idea de medida de tendencia central.

1.3.2.3. PROPIEDADES

Aunque el concepto de media es aparentemente simple, se pueden descubrir las siguientes propiedades (Batanero, 2000).

Propiedades numéricas

Las propiedades numéricas de la media son aquellas que se deducen cuando la media se considera como un valor numérico.

- *(N1) La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable en estudio.* La media estará comprendida entre los valores mínimo y máximo que tome dicha variable.
- *(N2) La media no tiene por qué coincidir con ningún valor de los datos.* Incluso, podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado. En ocasiones, la media puede ser un valor que no tenga sentido en el contexto planteado.
- *(N3) En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos.* Esta propiedad diferencia a la media de otras medidas de centralización, como son la mediana o la moda. Además, hay que tener en cuenta los valores nulos cuando aparece.
- *(N4) La media se ve alterada por cualquier cambio en los datos.* Cuando en una distribución algún valor es modificado su media puede cambiar. En el caso de que ese valor sea extremo y poco significativo, suprimirlo conllevará a un valor más significativo de la media.

Propiedades algebraicas

Las propiedades algebraicas de la media son aquéllas que se deducen al considerarla como una operación algebraica sobre el conjunto de datos dado.

- *(A1) El cálculo de la media no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado, puesto que ésta puede tomar un valor distinto a todos sus elementos.* Es la traducción algebraica de la propiedad (N1).

- *(A2) La media no tiene elemento neutro ni simétrico.* Esta propiedad se deduce algebraicamente de la propiedad (N2).
- *(A3) La media no tiene la propiedad asociativa para el caso general.* Si dividimos en partes un conjunto de datos y calculamos sus medias respectivas, no podemos deducir la media del conjunto total de datos.
- *(A4) La media es una operación conmutativa.* Dos ordenaciones distintas del conjunto de datos dan lugar al mismo valor de la media.
- *(A5) La media conserva los cambios de origen y de escala.* Si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos por un mismo valor, la media es también sumada, restada, multiplicada o dividida por esa misma constante. En consecuencia, la media hereda la misma unidad que los datos.
- *(A6) La media de la suma de 2 o más variables es igual a la suma de las medias de dichas variables.* Esta propiedad puede facilitar el cálculo de la media cuando dividimos una población en 2 o más subpoblaciones.
- *(A7) La media siempre existe en datos numéricos y es única.* La media siempre se puede calcular y, además, es única.

Propiedades estadísticas

Las propiedades estadísticas de la media son aquellas que se deducen cuando la media se considera como resumen de los datos. Cobo (2003) indica las siguientes:

- *(E1) La media es un representante del conjunto de datos.* La media proporciona información de todo el conjunto de datos, no de un dato en concreto. Por ello se usa, por ejemplo, para comparar dos conjuntos de datos.
- *(E2) La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de la gravedad.* Esta propiedad se generaliza para datos bivariantes donde el punto con coordenadas las dos medias es el centro de gravedad de la distribución.
- *(E3) En distribuciones simétricas, la media coincide con la mediana y la moda (en distribuciones unimodales).*
- *(E4) La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente a los valores atípicos.* Esta propiedad hace que utilicemos otras medidas de tendencia central, como la mediana o la moda, en aquellas ocasiones en las que aparecen valores atípicos, conocidos como "outliers".

- *(E5) La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es 0. La suma de los valores absolutos de las desviaciones es mínima respecto a la mediana.*
- *(E6) La suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima.*
- *(E7) Para datos agrupados en intervalos, con alguno de ellos abierto, también es preferible la mediana a la media. Existe la moda pero no la media.*
- *(E8) Existen modas tanto para variables cuantitativas como cualitativas.*
- *(E9) En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media.*

1.3.2.4. PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO

Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de prácticas, que llega a convertir en rutinas con el tiempo (Cobo y Batanero, 2004). Existen numerosos procedimientos de cálculo de la media. Estas técnicas surgen según la forma y presentación de los datos. Las detallamos a continuación.

- *(P1) Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados.* Es la técnica más sencilla que deriva de aplicar la definición. La media se calcula sumando todos los datos y dividiendo por el número total de ellos. Por ejemplo:

$$\bar{x} = \frac{8+7+6+7}{4} = 7$$

- *(P2) Cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias.* La media se calcularía como la suma total de los productos entre cada valor de la variable en cuestión y su frecuencia relativa, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i$. Equivalentemente, en términos de frecuencia absoluta sería $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$. Por ejemplo:

i	x_i	F_i	f_i
1	3	6	6/25
2	5	7	7/25
3	8	9	9/25
4	10	3	3/25

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{3\cdot6+5\cdot7+8\cdot9+10\cdot3}{6+7+9+3} = \frac{155}{25} = 6'2$$

El cálculo de la media en este caso puede resultar más complejo ya que interviene la idea de ponderación.

- *(P3) Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clase.* Si partimos de una situación en la que tenemos un gran de número de datos, se recurrirá al cálculo de la media con los datos agrupados en intervalos (e_{i-1}, e_i). Para calcular la media usaremos como datos las marcas de clase, tomadas como el punto medio del intervalo, así como las frecuencias de cada clase f_i. La media entonces se calcula mediante el algoritmo anterior P2, cuyo valor ahora es aproximado.

I_i	Marca de clase x_i	F_i	f_i
[0, 2’5)	1’25	0	0/25
[2’5, 5)	3’75	13	13/25
[5,7’5)	6’25	0	0/25
[7’5, 10)	8’75	12	12/25

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{1'25 \cdot 0 + 3'75 \cdot 13 + 6'25 \cdot 0 + 8'75 \cdot 12}{0+13+0+12} = \frac{153'75}{25} = 6'15$$

- *(P4) Cálculo de la media de manera gráfica.* Cuando trabajamos con variables discretas, conocidos sus valores x_i y sus frecuencias relativas f_i, podemos intuir de manera aproximada el valor de la media aritmética mediante la observación de su representación gráfica, bien el diagrama de barras o bien el histograma.
  Aún más, en el trabajo de Cobo (2003) se especifica cómo se puede calcular de manera exacta la media mediante el cálculo de áreas, teniendo en cuenta de que el área de cada rectángulo de la gráfica es el producto de $x_i \cdot f_i$.
- *(P5) Cálculo de la media mediante calculadora u ordenador.* Para calcular la media mediante herramientas tecnológicas no es necesario conocer ni comprender el algoritmo de la media. Basta con introducir los datos de manera correcta, tanto los valores como las frecuencias. En el caso de la calculadora, sí que será necesario saber el manejo de la memoria de la propia herramienta.
- *(P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media.* En distintos contextos, se tiene la suerte de conocer la media de una distribución y todos sus valores excepto

uno. Para su búsqueda es necesario el uso del algoritmo de la media despejando el valor de la siguiente forma.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i \Rightarrow x_i = n\bar{x} - \sum_{j \neq i}^{n} x_j \cdot f_j$$

Por ejemplo: indica que calificación ha obtenido un alumno en el último examen teniendo en cuenta que sus notas son 8 y 9 y su nota media es 8.

- *(P7) Construir una distribución a partir de una media dada.* En este caso, el objetivo es buscar una distribución cuya media coincida con un valor previamente dado. Para encontrarla es necesaria conocer los distintos procedimientos de cálculo directo de la media. El caso más sencillo, es aquella distribución en la que todos los valores de los datos coinciden con la media dada. Como ejemplo: indica que 3 posibles calificaciones que ha obtenido un alumno en sus 3 exámenes teniendo en cuenta que su nota media es un 7.

1.3.3. FUNCIÓN SEMIÓTICA Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Hjelmslev (1943, p. 55) afirma que hay una función semiótica cuando existe "dependencia entre una clase y sus componentes (una expresión y sus partes o su contenido) y entre los componentes (partes o contenido) entre sí ".

Para Godino, Batanero y Font (2002), las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser representacionales (un objeto que se pone en lugar de otro para un propósito determinado), instrumental (un objeto utiliza otro como instrumento) y estructural (dos o más objetos constituyen un sistema de donde surgen nuevos objetos).

En otras palabras, en la práctica matemática intervienen funciones semióticas con tres componentes: la expresión, el contenido y la regla de correspondencia que interpreta la relación entre expresión y contenido. Cualquier tipo de objetivo matemático antes nombrado puede ser partícipe de una función semiótica tanto en forma de expresión como de contenido.

Generalmente, las funciones semióticas vienen representadas por su expresión, como podría ser, en nuestro caso, la expresión de la media aritmética. A partir de ahí, se debe hacer una interpretación de la expresión, recordando el concepto de media aritmética para poder aplicarla de manera adecuada. Cuando se produce una mala interpretación al relacionar la representación y su objeto hablamos de *conflicto* *semiótico*. En el caso anterior, podemos tener el símbolo que representa la media pero en nuestra mente tener, de manera equivocada, el concepto de mediana, por ejemplo.

1.4. OBJETIVOS DEL TRABAJO

Una vez descrito el marco curricular y teórico, pasamos a comentar los objetivos. Como se ha indicado, este trabajo está dirigido a evaluar algunos conocimientos de estudiantes del primer curso de Secundaria sobre la media aritmética, para aportar información actualizada que se compararía con los antecedentes, especialmente los obtenidos en las tesis doctorales de Cobo (2003) y Mayén (2009). La segunda autora trabajó con estudiantes de mayor edad que los nuestros y en el contexto mexicano; aunque la primera utilizó en su muestras estudiantes de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, los problemas que propuso fueron en general difíciles para ellos. En nuestro estudio se han elegido problemas más sencillos, con el fin de analizar si la dificultad se mantiene.

Como he visto en la normativa vigente, se incluye la media aritmética en el decreto de enseñanzas mínimas de matemáticas para el primer ciclo de ESO, y además, se supone que los estudiantes han adquirido algunos conocimientos elementales al final de la Educación Primaria. Por ello, el objetivo fundamental es *analizar el razonamiento de estos estudiantes con los problemas propuestos para evaluar la dificultad que para ellos pueden tener con el concepto de media aritmética*. Este objetivo se descompone en los siguientes objetivos específicos:

- OE1. Analizar la enseñanza que sobre las medidas de tendencia central (media aritmética) reciben los estudiantes españoles en la Educación Secundaria Obligatoria.

  Este objetivo se cumple con el estudio realizado de los documentos curriculares en este mismo capítulo y nos permite evaluar mejor las posibles causas de los errores que encontremos en sus respuestas.

- OE2. Analizar la dificultad relativa de los problemas de media aritmética, medida en porcentaje de respuestas correctas en los problemas planteados, comparando esta dificultad en función del contenido evaluado.

- OE3. Analizar los posibles errores en las respuestas y relacionarlos con las propiedades de la media que los estudiantes no comprenden.
- OE4. Profundizar en los conflictos semióticos que presentan al resolver problemas relacionados con este promedio.

Estos tres objetivos se abordan en el Capítulo 3, donde analizamos las respuestas a un cuestionario de una muestra de estudiantes de Educación Secundaria sobe conocimientos de la media descritos en el Capítulo 1. Dicho cuestionario nos permitirá conocer y comprender los diferentes problemas que presentan los estudiantes al resolver problemas relacionados con este promedio.

CAPÍTULO 2. INVESTIGACIONES PREVIAS

2.1. INTRODUCCIÓN

Una vez presentado el tema de investigación, en este capítulo se expone una recopilación de antecedentes relacionados con el mismo que hemos realizado partido de las síntesis de este tema que se incluyen en Cobo, (2003), Jacobbe y Carvalho (2011) y Mayén (2007). Las investigaciones que aquí se revisan se han organizado y clasificado en relación a los tipos de objetos matemáticos descritos anteriormente en el marco teórico, es decir, se analizarán investigaciones previas en alumnos de distintas edades sobre la comprensión conceptual de la media así como la de los campos de problemas asociados, la comprensión de las propiedades fundamentales de la media, la comprensión procedimental y capacidad de cálculo y la comprensión del lenguaje.

2.2. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN CONCEPTUAL DE LA MEDIA Y RECONOCIMIENTO DE LOS CAMPOS DE PROBLEMAS

La comprensión conceptual de la media no sólo engloba el conocimiento que tenga el alumnado de su definición sino, sobre todo, la capacidad del mismo para ser capaz de reconocer las situaciones y los problemas cuya solución requiere de este estadístico. En esta sección, resumimos investigaciones previas sobre la comprensión conceptual de la media en dos direcciones: la comprensión de las definiciones y el reconocimiento de problemas.

Comprensión de la definición

La media, aunque constituye uno de los estadísticos más básicos, no siempre es bien comprendida por el alumnado de Educación Secundaria Obligatoria, quien recibe su enseñanza prácticamente por vez primera. Esta deficiencia se acentúa con el paso del tiempo y se ve reflejada incluso en los alumnos universitarios. En cuanto a las investigaciones relacionadas con la comprensión de la definición de media se destacan las siguientes.

Watson y Moritz (1999, 2000) analizan el significado intuitivo dado por alumnos de Educación Primaria y Secundaria al término "promedio". Un gran número de alumnos consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Sin embargo, esta definición se acerca más al concepto de mediana, que sólo coincidirá con la media cuando la distribución sea simétrica. En estas investigaciones, se concluye que la comprensión de los promedios es un proceso evolutivo, que pasa por las seis etapas de desarrollo siguientes:

1. *Pre-promedio*: los estudiantes no llegan a usar la idea de promedio ni en el lenguaje ordinario; no llegan a ver los datos como algo que pueda ser resumido y pueda tener un representante.
2. *Uso coloquial de la media*: el término promedio o media ya se usa en el lenguaje ordinario, interpretándolo como normal o bueno, pero sin llegar a comprender realmente su significado.
3. *Respuesta multi-estructural*: se usan ideas como máximo, mínimo y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, fallando en su uso en situaciones complejas. Existen errores en los algoritmos de cálculo y se confunde la media con moda y mediana por lo que, aún, existen conflictos sobre la correcta comprensión del concepto.
4. *Media como representante*: se asocia la media con su algoritmo de cálculo en situaciones sencillas. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos sin ayuda y, con frecuencia, se prefiere usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.
5. *Aplicación en un contexto complejo*: además de las capacidades de la etapa anterior, el alumno es capaz de invertir el algoritmo de cálculo para hallar el total a partir de la media o calcula medias ponderadas, aunque no ambas tareas. No tiene clara la idea de distribución y raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.
6. *Aplicación en dos o más contextos complejos*: además de las capacidades de la etapa anterior, el alumno es capaz de invertir el algoritmo de cálculo tanto para hallar el total a partir de la media como para el cálculo de medias ponderadas.

Los términos con los que se designan los conceptos matemáticos tienen un significado preciso, pero éste no siempre coincide con el asignado al término usado en el lenguaje coloquial o en que le asignan los estudiantes. Russell y Mokros (1991) dividen en cuatro clases los significados incorrectos atribuidos por alumnos de entre 11 y 14 años a la palabra "media". A continuación se exponen junto con sus principales causas:

1. *Valor modal, valor más frecuente*. Confusión de la media con la moda.
2. *Valor razonable*. Significado coloquial del término media.
3. *Punto medio*. Confusión de la con la mediana o con el centro geométrico.
4. *Algoritmo*. Comprensión de la media como un mero algoritmo de cálculo, sin dotar de un sentido a su definición.

Los autores estiman que, a la hora de enseñar la definición de cualquier concepto matemático, es necesario presentar diferentes ejemplos, contextos y representaciones del mismo para evitar estas confusiones. Konold y Pollatsek (2002) añaden a las cuatro clases anteriores la concepción de la media como *señal en un proceso aleatorio o proceso con ruido* y piensan que es la concepción más útil cuando dos conjuntos de datos son comparados. De hecho, Konold y Pollatsek (2002) sostienen que la idea de media debería presentarse con esta concepción añadida, pues es en esta definición donde cobra verdadero sentido.

Pollatsek, Lima y Well (1981) enfatizan el sesgo que tiene el alumnado univeritario para diferenciar entre medias muestral y poblacional. Los resultados anteriores se repitieron en Tormo (1993), pero con alumnos de entre 12 y 15 años. Mayén (2009) apunta que una de las posibles razones de este hecho sea que las distribuciones y ejemplos que se presentan en los libros quizás insistan mucho en la idea de representatividad de las muestras y dejen a un lado la idea de variabilidad que subyace detrás de ellas.

Finalmente citamos a Strauss y Bichler (1988) investigan, entre otras, el desarrollo evolutivo de la comprensión de la media en alumnos de 8 a 12 años, obteniéndose, como es de esperar, una mejora de la comprensión de acuerdo a la edad.

Reconocimiento de problemas

Comprender la definición de la media no implica que los estudiantes la usen cuando encuentren un problema relacionado con ella, pues a veces no reconocen dichos problemas. En Pollatsek, Lima y Well (1981), un estudio sobre la comprensión de la media llevado a cabo en estudiantes universitarios, se encuentran dificultades para reconocer problemas relacionados con calcular una media aritmética ponderada.

Una de las conclusiones extraídas en Russell y Mokros (1991, 1995) para un grupo de alumnos de entre 10 y 14 años es el hallazgo de una dificultad general notable al resolver aquellas tareas que consistían en construir un conjunto de datos dado un promedio. Se observa que un porcentaje de los alumnos se limitan a dar distribuciones que repiten el mismo valor. En general, los estudios sugieren que los alumnos muestran poca comprensión de la idea de valor típico o representativo de un conjunto de datos. Aquí se incluye como valor típico tanto la media como las demás medidas de tendencia central: moda y mediana. Según Russel y Mokros (1991), el valor típico engloba tres tipos diferentes de capacidades:

- Dado un conjunto de datos, comprender la necesidad de emplear un valor central, y optar por el más adecuado.
- Construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado, que coincide con el punto más dificultoso como se ha expuesto anteriormente.
- Comprender el efecto que tiene un cambio en los datos sobre los promedios.

En una investigación llevada a cabo con alumnos de un curso preuniversitario, Estepa y Batanero (1994) identifican casos de alumnos que basan la comparación de dos conjuntos de datos en valores aislados como los máximos o los mínimos de ambos conjuntos, o bien en la comparación de totales, en lugar de usar las medidas de centralización, tales como la media.

2.3. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LAS PROPIEDADES

Los alumnos suelen asignar a la media propiedades erróneas y/o violar las propiedades características de la misma, como las revisadas en el apartado 1.1.1.4. En concordancia a este apartado, se dividirá el estudio de investigaciones previas sobre la comprensión de las propiedades según las tres categorías de las propiedades de la media descritas en el Capitulo 1.

Propiedades numéricas

Son aquellas propiedades que se refieren al número obtenido al calcular la media. Del estudio de Gattuso y Mary (2003), realizado sobre la media en alumnos de entre 14 y 16 años de Secundaria, puede concluirse que los alumnos en general presentan ciertas deficiencias relacionadas con las propiedades (N3: en el cálculo de la media hay que tener en cuenta todos los valores) y (N4: la media se ve alterada por cualquier cambio en los datos). Sin embargo, algunos estudiantes no comprenden estas propiedades y consideran que quitar el cero del conjunto de datos no tiene efecto sobre el valor de la media. No ocurre lo mismo cuando se les pide incluir el cero como un dato nuevo. Ello posiblemente se debe al hecho de que en la suma un valor cero no tiene efecto.

Propiedades algebraicas

Son aquellas que se refieren a la media considerada como una operación sobre el conjunto de datos. En las propiedades numéricas se ha comentado el procedimiento erróneo que se observa en el alumno en Gattuso y Mary (2003) cuando se eliminaba el elemento nulo en el cálculo de la media. Realmente, se le está asociando al cero la propiedad de elemento neutro, que entra en discordancia con la propiedad (A2: la media no tiene elemento neutro).

Esta práctica errónea de los alumnos de Secundaria ya se detectaba en Pollatsek, Lima y Well (1981) y Mevarech (1983), pero en alumnos universitarios. Mevarech (1983) apunta que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética, constituye un grupo algebraico, por lo que son violadas tanto la propiedad algebraica (A2: la media no tiene elemento neutro) como la (A3: la media no tiene la propiedad asociativa).

Propiedades estadísticas

Son las propiedades que se refieren a la media, considerada como un resumen de los datos. En Pollatsek, Lima y Well (1981), se investiga en alumnos universitarios la noción que tienen sobre el valor esperado de la observación de una variable aleatoria, de la que se conoce su esperanza matemática. Observaron que los estudiantes esperan que la media de la muestra sea idéntica a la de la población por lo que no aprecian la variabilidad aleatoria de la misma. Puede deducirse que se hace un uso, en cierto modo, abusivo de la idea de representatividad de la media muestral, (E1).

En Russell y Mokros (1991), se detecta que los alumnos de entre 11 y 14 años suelen desarrollar la idea de media como un indicador razonable del centro de una distribución, aunque confundiéndola, en ocasiones, con la moda y la mediana, como se vio en la sección 1.2. Batanero, Godino y Navas (1997) también encuentran una confusión generalizada respecto a las posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas en los futuros profesores.

Watson y Moritz (1999) apuntan que la propiedad (E1: la media es un representante de un colectivo) sólo la ponen de manifiesto los estudiantes con conocimientos más avanzados. Años atrás, Mokros y Russell (1995) explican que hasta que los alumnos no conciban el conjunto de datos como una unidad, y no como un agregado de valores, no lograrán comprender correctamente la idea de representante de los datos.

En los trabajos anteriores se exponen los principales errores cometidos por el alumnado referente a las distintas propiedades que presenta la media. Sin embargo, es interesante conocer las diferencias de dificultad existentes entre las tres categorías de propiedades. Strauss y Bichler (1988) es un trabajo que abarca las tres categorías. En cuanto a las propiedades numéricas se investigan principalmente (N1: la media pertenece al rango de la variable en estudio), (N2: la media no tiene por qué coincidir con ningún valor de los datos) y (N3: en el cálculo de la media se tienen en cuenta todos lo s valores de los datos); la propiedad (A2: la media no tiene elemento neutro ni simétrico) para las algebraicas; y, por último, son las propiedades estadísticas (E1: la media es un representante de un colectivo) y (E5: la suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es 0) las revisadas. Los resultados de Strauss y Bichler (1988) indican que las propiedades numéricas suelen comprenderse mejor que las algebraicas y estadísticas. En Cobo (2003, pág. 72) se intuye que esto es debido a que los alumnos analizados, de entre 8 y 12 años de edad, aún no tienen referente de comparación de las propiedades estadísticas con lo que conocen hasta el momento, mientras que para las propiedades numéricas y algebraicas pueden usar sus conocimientos sobre los conjuntos numéricos y sus operaciones.

2.4. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN PROCEDIMENTAL

Uno de los errores más detectados en alumnos sobre los procedimientos de cálculo de la media es aquél que engloba los procedimientos (P2: cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias) y (P3:

cálculo de la media de una variable continua o discretas con datos agrupados), es decir, los relacionados con situaciones en las que debe calcularse una media ponderada. En general, la elección de los pesos correspondientes no es llevada a cabo de manera satisfactoria por los estudiantes. Éstos suelen limitarse a calcular la media simple, (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados). Este es el caso del estudio de Pollatsek, Lima y Well (1981), en el cual se deduce la falta de comprensión de la media ponderada por parte de alumnos universitarios. Este error sigue observándose en investigaciones posteriores en alumnos de todas las edades. Por ejemplo, Li y Shen (1992), que investigan sobre proyectos de estadística realizados por los alumnos, encuentran que los mismos construyen tablas de frecuencia en sus proyectos con el fin de calcular la media a partir de los datos agrupados. Es aquí cuando los alumnos olvidan frecuentemente que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto. Este mismo error se encuentra en Calvalho (2001).

En general, el procedimiento de cálculo (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados) es el que se aplica de manera correcta en la mayoría de las investigaciones. En Cobo (2003) se obtienen los mejores resultados con (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados) en comparación con el resto de procedimientos de cálculo. En otros casos, aunque el alumno sepa usar (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados) y realice los cálculos adecuadamente, éste suele aplicarse de manera sistemática, sin llegar a comprender su significado. Cai (1995) encontró que, mientras la mayoría de los alumnos en torno a los 12 años conocen el algoritmo de cálculo de la media (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados) y lo aplican correctamente, sólo algunos de ellos son capaces de invertir el algoritmo, (P6: inversión del algoritmo del cálculo de la media), para determinar, dado un promedio, un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos. La mayoría simplemente usa el ensayo y error hasta hallar el valor desconocido.

Este mismo resultado, que se muestra también en muchas investigaciones posteriores y en alumnos de otras edades, sugiere una aplicación mecánica del algoritmo de cálculo de la media. En este sentido, Russell y Mokros (1995) interpretan esta falta de comprensión del algoritmo de cómputo de la media como resultado de una enseñanza basada en la mera introducción del algoritmo de cálculo (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados), sin proporcionar un significado intuitivo de la media así como una serie de ejemplos adecuados de aplicación. Esto da lugar a que los alumnos abandonen sus intuiciones sobre la media y sólo la conciban como un algoritmo sencillo de aplicar, aunque totalmente carente de significado.

En Cobo (2003) y en Mayén (2009), por contra, al tratarse de alumnos mayores -de 12 y 16 en Cobo (2003) y de 16-18 años en Mayén (2009)-, observan que la mayoría de ellos sí que eran capaces de invertir el algoritmo de la media.

2.5. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE

En matemáticas, es importante saber asociar los términos matemáticos, la simbología y las representaciones gráficas a los diferentes conceptos y procedimientos representados. Todo ello se engloba en el lenguaje, como vimos en el marco teórico. En esta sección describimos las investigaciones relacionadas con la comprensión del lenguaje relativo a la media.

En general, los alumnos presentan dificultades en la interpretación de gráficos, Carvalho (2001). En Reading y Pegg (1996) se observa que algunos alumnos de entre 12 y 18 años, que son capaces de dar un resumen de datos presentado en forma numérica, (P1: cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados), fracasan cuando los datos se presentan por medio de un gráfico estadístico, (P4: cálculo de la media de manera gráfica). Mayén (2009, pág. 102) apunta que la dificultad encontrada por los alumnos a la hora de interpretar gráficas puede deberse a que en la enseñanza tradicional no se les presta tanta atención como merecen. En este contexto, Curcio (1989), describe tres niveles distintos de comprensión de los gráficos:

I. *Leer los datos*, que comprende la lectura literal del gráfico, sin realizar interpretación ninguna de la información que se obtiene.
II. *Leer dentro de los datos*, que incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.
III. *Leer más allá de los datos*. En este nivel el lector ya está capacitado para realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que se observan de manera implícita en el gráfico.

A esta estratificación, Friel, Curcio y Bright (2001) le suman un nuevo nivel: *leer detrás de los datos*, que consiste en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

2.6. INVESTIGACIONES DE CARÁCTER GENERAL

Además de las investigaciones que se centran en aspectos locales de la comprensión de la media, hemos encontrado otras que tratan de abarcar en un solo trabajo las diferentes propiedades y procedimientos. Entre ellas destacamos las de Cobo (2003) y Mayén (2007) que utilizan nuestro mismo marco teórico y las dos comparten un mismo cuestionario. La diferencia es que la primera realiza su estudio en el contexto español y la segunda en el mexicano.

Cobo (2003) evalúa el aprendizaje de las medidas de posición central en los alumnos de los cursos primero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria, entre ellas la media, construyendo para ello su propio cuestionario, con base a un análisis previo de los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. La muestra estuvo formada por 312 alumnos, la mitad de cada nivel. La autora describe con detalle los resultados en cada uno de los dos grupos y errores más típicos; también lleva a cabo un análisis semiótico de las respuestas de cuatro estudiantes a todos los ítems (dos con buenos resultados y dos con malos, uno de cada grupo) para explicar la diferencia de rendimiento. Concluye el carácter multidimensional de la comprensión de la media –en oposición a las teorías de Watson sobre niveles jerárquicos, pues sus estudios semióticos sirven para ver que algunos alumnos están simultáneamente en más de dos niveles de los descritos por dicha autora.

Mayén (2007) continúa la anterior investigación y se centra en evaluar el significado personal de una amplia muestra de estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato, al finalizar estas etapas educativas asignan a las medidas de tendencia central. Después de realizar un estudio curricular y de libros de texto para comprobar qué objetos matemáticos se introducen en México sobre este tema en los niveles analizados pasa el cuestionario de Cobo (2003) a 518 estudiantes del último curso de Secundaria y de Bachillerato, con lo cual su rango de edad es más alto que el de Cobo. Una de las principales aportaciones es el análisis semiótico que realiza de los ítems relacionados con la mediana. Es sobre la mediana y no sobre la media donde la autora describe y clasifica una lista de conflictos semióticos que encuentran los estudiantes al trabajar con este tema. También compara ítem a ítem sus resultados con los de Cobo.

2.7. CONCLUSIONES SOBRE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS

En esta sección se exponen varias conclusiones extraídas de la revisión de literatura comentada en este capítulo, que servirán para justificar nuestros objetivos y también posteriormente para comentar los resultados del estudio de evaluación.

En general, se observa que alumnos de todas las edades, ya sean de Primaria, de Secundaria, de la Universidad e, incluso, futuros profesores, presentan deficiencias en torno al concepto de media. Sin embargo las edades en que se han realizado estas investigaciones son o bien de alumnos mayores (últimos cursos de ESO, Bachillerato o Universidad) o niños de Educación Primaria En nuestra investigación con alumnos de primer curso Secundaria queremos ver si, por lo general, se obtienen resultados similares.

La comprensión conceptual de la media es muy estudiada, destacando los trabajos de Watson y Moritz (1999), quienes definen niveles, pero, como hemos indicado, estos niveles son discutidos por Cobo. Otro trabajo interesante es el de Russell y Mokros (1991) que estudian simplemente el significado asociado a la palabra media.

En cuanto a la comprensión de las propiedades de la media, se observa que las propiedades estadísticas son las menos estudiadas, salvo (E1), pues, consideramos, engloban conceptos más abstractos que no se adquieren hasta cursos muy superiores.

Respecto a la comprensión de procedimientos, se detecta que el cálculo de medias ponderadas y la inversión del algoritmo de cálculo de la media son tareas normalmente complicadas para los alumnos. Se deduce, además, que el concepto de media se asocia comúnmente al mero resultado de aplicar un procedimiento mecánico, sin comprender su significado real. Por último, en la comprensión del lenguaje, la dificultad más importante aparece a la hora de interpretar gráficos es notoria.

En definitiva, queda mucho por hacer en la enseñanza de la media. Somos nosotros, los profesores, los que debemos tener conciencia de ello y exprimir al máximo nuestras capacidades a la hora de transmitir los conocimientos con el fin de que los resultados mejoren.

Como hemos indicado, la mayoría de trabajos se centran en puntos aislados, salvo el de Cobo (2003) y Mayén (2007). Nosotros, al igual que dichas autoras realizamos una evaluación global incluyendo definición, propiedades, diferentes problemas y procedimientos. La principal diferencia con las autoras citadas – cuyo trabajo está llevado a cabo con mucho mayor detalle y muestras más amplias- es la dificultad del cuestionario. Nosotros hemos cambiado algunos de los ítems que fueron muy difíciles para los alumnos de 1º de la ESO en el estudio de Cobo (en incluso para los mayores en este estudio y el de Mayén) por ítems más sencillos. Nuestro estudio se exploratorio y trata de confirmar si las dificultades citadas por dichas autoras permanecen en estos nuevos ítems.

CAPÍTULO 3. ESTUDIO DE EVALUACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados del estudio de evaluación realizado con los estudiantes de primer curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria, cuyo objetivo fue analizar el razonamiento de estos estudiantes en los problemas propuestos, para evaluar la dificultad que para ellos pueden tener con el concepto de media aritmética. Dicho objetivo principal se describió en el Capítulo 1 y se descompuso en otros parciales que tratamos de analizar en este capítulo

En primer lugar, presentamos el cuestionario elaborado y describimos cada uno de los ítems que lo forman, analizando los objetos matemáticos que se precisan recordar para resolverlos, dentro de los que, respecto a la media, se describieron en nuestro marco teórico (Sección 1.3). Con este análisis describimos el significado institucional evaluado en nuestro trabajo, es decir, la parte del significado institucional que se somete a evaluación (Godino, Batanero y Font, 2007).

En segundo lugar, describiremos el contexto educativo de los alumnos participantes en la investigación, así como la muestra elegida en nuestro estudio. A continuación, presentamos los resultados obtenidos en cada uno de los ítems, comparándolos con los de las investigaciones previas y una síntesis de los resultados. Finalmente se presentan las conclusiones del estudio empírico.

3.2. CUESTIONARIO UTILIZADO

El cuestionario que hemos propuesto a los estudiantes es de construcción propia y consta de ítems de respuesta abierta, pues hemos preferido que el alumno razone sin restricciones respecto al tipo de respuesta prefijada. Estos ítems han sido adaptados de diversas investigaciones y mediante su respuesta tratamos de evaluar la comprensión tanto de la definición de la media, como de diversas propiedades y de los procedimientos de cálculo.

A continuación, enunciamos uno a uno cada ítem del cuestionario destacando los objetos matemáticos requeridos en su solución, sus elementos y características más importantes que los diferencian unos de otros.

Ítem 1. Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases: a. En promedio tardo 10 minutos para ir de mi casa al instituto. b. El número medio de hijos en las familias andaluzas es 1.2

Este ítem ha sido tomado de Watson (2000). Ha sido modificado y adaptado a nuestro contexto; eliminando el formato original de respuesta múltiple, para como se ha dicho, permitir al alumno expresarse en sus propias palabras y comprender mejor sus razonamientos.

La autora sólo propone la primera pregunta referida al número medio de niños en Australia (que nosotros hemos cambiado por Andalucía, tal como también hacen Cobo, 2003 y Mayén, 2007). Hemos añadido una cuestión, la primera, que nos permitirá evaluar más elementos que en el ítem inicial, pues en la segunda pregunta la variable es entera (mientras la media es un número decimal, lo que puede ser difícil de comprender para el estudiante). Pero en la primera usamos una variable que toma valores decimales. Se usan representaciones verbales y numéricas y se requiere un argumento por parte del estudiante. Corresponde al campo de problemas *(CP2) Media como reparto equitativo.*

Tanto en la primera parte como en la segunda del ítem se pide al alumno la definición de media con sus propias palabras. La propiedad fundamental que las diferencia es meramente numérica; en la segunda parte, interviene la propiedad numérica *(N2) La media (...) podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado.* Es decir, la media de números enteros puede no ser un número entero. En la primera parte no interviene esta propiedad.

De manera implícita se incluyen, entre otras, las siguientes propiedades, numéricas: *(N1) La media de un conjunto de datos es siempre un valor perteneciente al rango de la variable en estudio,* algebraicas: *(A1) El cálculo de la media no es una operación interna…,* y estadísticas: *(E1) La media es un representante de un colectivo.*

Ítem 2. La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

De nuevo este ítem es adaptado de otro de Watson (2000) y es más sencillo que el de la autora, quien pedía construir un conjunto de 10 datos (en vez de cuatro). También corresponde al campo de problemas *(CP2) Media como reparto equitativo*, pero no se pide una definición, sino un algoritmo. Se le pide al alumno que escriba una posible distribución para una media dada, que coincide con el procedimiento de cálculo (*P7) Construir una distribución a partir de una media dada.* Su resolución implicaría un conocimiento del procedimiento de cálculo directo de la media y su aplicación inversa. Es el elemento más destacable en este ítem junto a las siguientes propiedades numéricas: *(N1) La media está en el rango de valores* y *(N3) Intervienen todos los valores en el cálculo de la media*. No requiere un argumento. El campo de problemas es (*CP3) Obtener un elemento representativo en distribuciones simétricas.*

Ítem 3. La talla media de cinco jugadores de un equipo de rugby es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

Este ítem, aparentemente sencillo, es de gran complejidad debido a la cantidad de objetos matemáticos que intervienen en su resolución. Con este ítem se pretende evaluar si los estudiantes son capaces de calcular una media ponderada y de invertir el algoritmo de la media.. Son los procedimientos (*P2) Cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias* y (*P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media.* Contiene representaciones verbales y numéricas y no requiere un argumento del estudiante.

Además, destacan las dos siguientes propiedades numéricas: *(N3) En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos* y *(N4) La media se ve alterada por cualquier cambio en los datos.* Implícitamente se usa la propiedad *(A3) La media no tiene la propiedad asociativa.*

Ítem 4. El número de operaciones en un hospital durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43 Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?

Este ítem está adaptado de las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén (2009) que plantearon uno similar, pero usando números decimales, en vez de números enteros. Con este ítem se busca evaluar la comprensión del concepto de media, como mejor estimación de una cantidad desconocida (CP1), en presencia de un valor atípico. Se usan representaciones numéricas y verbales y se pide un argumento. Veremos si los estudiantes usan la media como resumen de los datos y si tienen en cuenta el efecto de los valores atípicos en este tipo de ejercicios. El procedimiento a utilizar debe ser el algoritmo directo de cálculo de la media, en nuestra literatura (*P1) Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados.*

Este ítem contempla las siguientes propiedades, numéricas: *(N3) En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos* y estadísticas: *(E1) La media es un representante de un colectivo* y *(E4) La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente a los valores atípicos.*

Este tipo de cuestiones dan pie a la introducción de otras medidas de centralización, como puede ser la mediana o la moda. Esperamos también como respuestas que sugieran quitar el valor atípico y calcular luego la media.

Ìtem 5. El peso medio de 5 chicas es de 46 kg. ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg, ¿cuál será el peso medio? ¿cuál será el peso medio en gramos?

Este ítem está construido por nosotros y está constituido por tres preguntas: la primera de ellas, permite averiguar si los estudiantes saben pasar de la media al total, es decir, *si saben invertir el algoritmo (P6);* la segunda, interpretar como varía la media cuando sufre un cambio de origen (A5); y, la tercera, de nuevo interpretar la media cuando se modifica la escala (A5). No se pide argumento y las representaciones son verbales y numéricas. El campo de problemas sería obtener un elemento representativo (CP3).

Ìtem 6. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron estos:

María	18	23	22	24	19	25	16
Elena	18	26	18	28	22	17	18

Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

Con este ítem se pretende evaluar la comprensión de la media para comparar dos grupos. Coincide exactamente con el campo de problemas *(CP5) Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas.* Las representaciones son numéricas y verbales y se pide un argumento. A partir de ahí, como la media de ambas jugadoras es igual, buscamos que el estudiante razone con cuál de las dos se quedaría. Veremos si notamos en ellos ciertas ideas intuitivas sobre dispersión. Evidentemente, interviene fundamentalmente el objeto matemático *(P1) Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados* y otras propiedades de la media, como que en la media intervienen todos los valores (N3) o que es un representante de un colectivo (E1).

Ítem 7. Ernesto obtuvo un 8 en el primer examen de la asignatura y un 5 en el segundo examen. Le falta el tercer examen y quiere sacar un notable (7 o más) en la asignatura. ¿Qué nota mínima tiene que sacar en el tercer examen para conseguir el notable?

Con este ítem se busca evaluar la comprensión del algoritmo de la media aritmética en su versión inversa y la definición de la media a partir del algoritmo. Coincide con el proceso de cálculo *(P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media y (P7) Construir una distribución a partir de una media dada.* Se incrementa la complejidad al preguntar por la nota mínima, entran en juego las desigualdades. De todas formas, se espera que el método de resolución sea por ensayo-error.

A continuación, se muestran diferentes tablas que recogen información sobre los objetos matemáticos, descritos en el capítulo 1, que intervienen en cada uno de los ítems propuestos en el cuestionario.

Tabla 3.2.1. Definiciones en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
Definición a partir del algoritmo			x	x	x	x	x
Definición conceptual	x	x	x	x	x	x	

Tabla 3.2.2. Propiedades en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(N1) Valor en el rango	x	x					
(N2) La media no tiene que coincidir con los datos	x						
(N3) Intervienen todos los valores		x	x	x		x	x
(N4) Cambios al cambiar un dato			x				x
(A1) No es una operación interna	x						
(A2) No elemento neutro ni simétrico							
(A3) No asociativa			x				
(A5) Cambios de origen y escala					x		
(E1) Representante de un colectivo	x	x		x		x	
(E2) Centro de gravedad							
(E4) Poco resistente				x			

Tabla 3.2.3. Representaciones y argumento en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
Verbal	x	x	x	x	x	x	x
Numérica	x	x	x	x	x	x	x
Tabla						x	
Requiere argumento	x			x		x	

Tabla 3.2.4. Campos de problemas en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(CP1) Estimar una cantidad desconocida				x			x
(CP2) Realizar un reparto equitativo	x	x					
(CP3) Elemento representativo en distribuciones simétricas		x	x		x		
(CP4) Obtener un valor probable			x				
(CP5) Comparar conjuntos de datos.						x	

Tabla 3.2.5. Algoritmos en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(P1) Media datos aislados				x		x	
(P2) Media ponderada			x				
(P6) Invertir algoritmo media		x	x	x	x		x
(P7) Buscar distribución dada la media		x					x

En consecuencia, con este cuestionario logramos en pocas preguntas evaluar un conjunto amplio de conocimientos y refleja en forma razonable nuestro significado institucional, descrito en el Capítulo 1.

3.3. MUESTRA Y CONTEXTO UTILIZADO

Para la investigación se ha seleccionado un instituto público de Enseñanza Secundaria de un municipio de la provincia de Sevilla, que oferta las modalidades de Bachillerato "Humanidades y Ciencias Sociales" y "Científico Tecnológico". El centro se seleccionó por la participación como profesor de uno de los componentes del equipo investigador y con autorización del equipo de dirección. Por tanto, se ha realizado un estudio exploratorio con una muestra intencional. No pretendemos extender los resultados a una muestra mayor.

Se trata de una zona geográfica de condiciones privilegiadas en cuanto a clima y vegetación, que, desde tiempos pasados ha sido escenario de asentamientos humanos de pueblos diversos. Fomento, desarrollo, proyectos globales, intercomunicación, son los retos a los que se enfrenta en la actualidad.

Esta localidad forma parte del área metropolitana de Sevilla y, por ello, soporta equilibradamente una serie de inconvenientes y tiene otras ventajas. Entre los inconvenientes puede citarse la pérdida de su identidad como pueblo, al igual que ha ocurrido con otras poblaciones cercanas, ya que el aumento de población se ha producido por la llegada de familias del exterior. La localidad ha sobrepasado el umbral de los 40.000 habitantes. Con la llegada del metro, lo que hace que la cercanía a la capital sea mayor, se hizo necesaria la ampliación de zonas habitables y la creación de nuevas infraestructuras. Esta llegada que, en algunas zonas es masiva, ha producido nuevas aglomeraciones humanas, en urbanizaciones que ocupan los espacios que rodean los núcleos urbanos preexistentes. La población de esas urbanizaciones no tiene arraigo previo en las costumbres de los pueblos y adopta las modas de vida generales que se dan en la capital.

Por otra parte, en general, las familias que han hecho de este municipio su residencia en los últimos años pertenecen a un nivel económico medio y medio-alto y habitan en zonas urbanizadas con servicios generales comunes y zonas verdes. Su nivel de estudios ofrece un número importante de bachilleres y de diplomados o licenciados universitarios. Estos grupos emergentes sobrepasan en entidad a los que conforman el casco originario del pueblo.

Centro educativo

En cuanto al centro, con pocos años de vida, está situado en una zona de expansión de la localidad, aunque debido a la crisis del sector inmobiliario, todas las edificaciones de alrededor han quedado paralizadas y la situación actual es bastante deprimente, pues se encuentra rodeado de campo y parcelas semi-urbanizadas, aislado y con unos accesos poco adecuados.

Aunque es un centro de relativa nueva construcción, tuvo problemas de infraestructuras desde el principio y numerosas carencias que poco a poco se van subsanando. El centro se diseñó como un centro de tres líneas y con aulas para ratio de 25 alumnos, excepto para los cursos de Bachillerato que son mayores. Actualmente está absolutamente masificado con grupos de 33 alumnos en ESO y de 40 en algunos grupos de bachillerato. Esta situación produce un importante problema, pues prácticamente resulta imposible meter las mesas en las aulas. A pesar de todo, hay que decir que en el centro reina un buen clima de convivencia en todos los sectores de la comunidad y entre el alumnado.

Muestra

La población sobre la que realizamos el estudio está formada por los estudiantes del primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Para la investigación se han seleccionado los primeros cursos del instituto de Enseñanza Secundaria descrito anteriormente. La muestra final estuvo compuesta por 84 estudiantes de 1º de E.S.O. (12-13 años).

Todos ellos completaron el cuestionario en una de las sesiones de clase de matemáticas colaborando el investigador con su profesor para que respondieran a las tareas con interés y para que la actividad resultase formativa para los estudiantes.

Respecto a los conocimientos previos de los alumnos en el momento de realizar el cuestionario, los estudiantes no habían estudiado todavía ningún contenido de estadística (medidas de tendencia central), por lo que partían de lo aprendido en Educación Primaria. A pesar de que en el currículo de Primaria aparecen contenidos relacionados con las medidas de centralización, como hemos visto en el Capítulo 1, pudimos comprobar que apenas habían sido formados en ese aspecto. Conocían el algoritmo directo de cálculo pero poco más. Y, en cuanto a conocimientos algebraicos presentan bastantes carencias.

Condiciones de recogida de datos

Como se ha indicado, el cuestionario se aplica como una actividad formativa dentro de la asignatura de matemáticas, concretamente, en una sesión de 60 minutos. Al comenzar la sesión les dimos instrucciones claras sobre cómo contestar el cuestionario, se les aclaró la interpretación de cada enunciado y se les pidió su participación en el estudio. También les pedimos no limitarse a dar sólo la respuesta numérica sino también a incluir una explicación lo más detallada posible. Por otra parte, les explicamos que el objetivo de la toma de datos es detectar las posibles dificultades en el tema para mejorar la enseñanza. Los alumnos colaboraron con interés completando las preguntas y proporcionando justificaciones detalladas.

3.4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados serán presentados uno a uno en cada ítem. Hemos diferenciado entres respuestas correctas, incorrectas y no respondidas (se considerarán incorrectas), sin tener en cuenta los procedimientos o argumentos utilizados. Además trataremos de identificar los principales conflictos semióticos identificados en cada ítem, comparando, cuando sea posible con los resultados de Cobo (2003) y Mayén (2009).

Finalmente, compararemos los índices de dificultad de cada ítem, según la idea de Muñiz (1994). El índice de dificultad se entiende como la proporción entre el número de individuos que aciertan el ítem y el número de individuos que han intentado resolverlo. Cuanto mayor sea ese valor significará que el ítem será más fácil para los estudiantes.

3.4.1. RESULTADOS EN EL ÍTEM 1.

Ítem 1. Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:
a. En promedio tardo 10 minutos para ir de mi casa al instituto.
b. El número medio de hijos en las familias andaluzas es 1.2

En el apartado a) hemos considerado correctas las respuestas cuando los estudiantes responden con alguna de las propiedades de la media o reconociendo sus campos de problemas; en ocasiones también se refieren al algoritmo. Por ejemplo, se obtienen respuestas del tipo: "normalmente tardo 10 minutos de mi casa al instituto" donde subyace la propiedad de que la media es un representante de un colectivo (E1) (ver Figura 3.4.1); "suelo tardar 10 minutos de mi casa al instituto", valor probable (CP4); "más o menos tardo 10 minutos de mi casa al instituto", obtener un valor representativo (CP3); "en término medio tardo 10 minutos de mi casa al instituto", realizar un reparto equitativo (CP2); o, "unos días tardo más y otros menos, pero la media es 10 minutos", cálculo del promedio con datos aislados (P1) . La primera de ellas ha sido la más frecuente.

Las respuestas incorrectas se deben a respuestas que valoran si es mucho o poco tiempo lo que tarda de casa al instituto. No explican lo que significa la frase. Uno de ellos sí que confunde la media y valor mínimo "si no hay retrasos tarda 10 minutos" (N1). Subyace en estas respuestas una concepción determinista del problema, y no se hace referencia a la variabilidad de valores en la distribución.

En el apartado b) hemos considerado correctas las respuestas del tipo: "las familias andaluzas suelen tener entre 1 y 2 hijos", donde se interpreta la idea de representante (E1), y "si hacemos la media de los hijos de las familias andaluzas obtenemos 1.2", donde se define la media mediante su algoritmo (P1). También, en alguna ocasión, aparecen términos como "repartir" o "dividir".

La respuesta incorrecta más repetida es "normalmente las familias andaluzas tienen 1.2 hijos", también detectada en Watson (2000), Cobo (2003) y Mayén (2007) (ver Figura 3.4.1). Se trata de un error grave, pues no entienden la propiedad A1 (la media no es una operación interna); además, no tiene sentido pensar en un número de hijos decimal. Otras respuestas incorrectas han sido: "tienen pocos hijos", "suelen tener un hijo", que no hacen referencias al promedio.

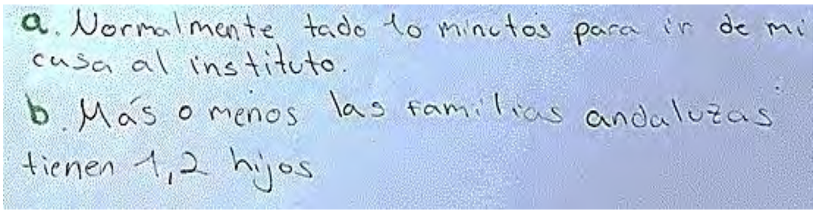

Figura 3.4.1. Ejemplo de respuesta al ítem 1

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.1 en frecuencias y en la Figura 3.4.1 en porcentajes. Observamos, por un lado, que ha sido más sencilla la primera parte en que la media toma un valor en el mismo conjunto numérico que los datos; el porcentaje de respuestas correctas es mucho mayor, aunque en las dos partes se han obtenido buenos resultados. Al comparar con los resultados de la segunda parte con investigaciones previas encontramos que en el trabajo de Cobo el porcentaje de respuestas correctas fue el 69%, pero la mitad de su muestra eran chicos de 4º curso de ESO y en el estudio de Mayén, a pesar de ser mayores que los nuestros obtuvieron el 56%. Por tanto, nuestros resultados han sido razonables en esta segunda parte y mejores en la primera, lo que atribuimos a no haber tenido que interpretar la propiedad *(A1) la media no es una operación interna en el conjunto de datos.*

Tabla 3.4.1. Respuestas al ítem 1

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 1.a	69	6	9
Ítem 1.b	45	21	18

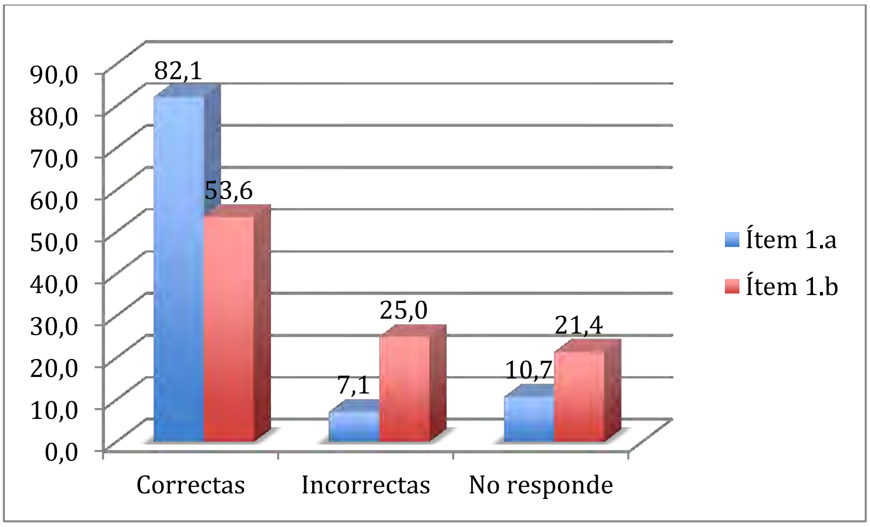

Figura 3.4.1. Porcentajes de tipo de respuestas a las dos partes del ítem 1

3.4.2. RESULTADOS EN EL ÍTEM 2.

Ítem 2. La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

Como anteriormente en la descripción de este ítem, el objeto matemático más importante en este ítem es (*P7) Construir una distribución a partir de una media dada.* El caso más sencillo para resolverlo, como ya hemos visto, es aquella distribución en la que todos los valores de los datos coincide con la medida dada. Como era de esperar, la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente de la siguiente forma: "10 años, 10 años, 10 años y 10 años". Otros muchos indicaron distintas posibilidades igualmente válidas en las que todos los valores de la distribución no coinciden con la media. En este caso, subyace la propiedad de que la media es siempre un valor perteneciente al rango de la variable en estudio (N1). Además, entienden la media como reparto equitativo (CP2). Sin embargo, los estudiantes no llegan a construir un conjunto que tenga alguna variabilidad para un promedio dado, que hubiese sido una respuesta preferible, pero que también se ha encontrado en investigaciones como la de Russell y Mokros (1991).

En contraposición, la mayoría de respuestas incorrectas se pueden encajar en dos categorías, aunque ambas provienen del mismo fallo, confundir el total. La primera de ellas, cuando confunden la media con el total (ver Figura 3.4.2.a) y la segunda, cuando confunden el total con la mitad del total (ver Figura 3.4.2.b). Este error se debe, en parte, a no entender el procedimiento de cálculo *(P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media.*

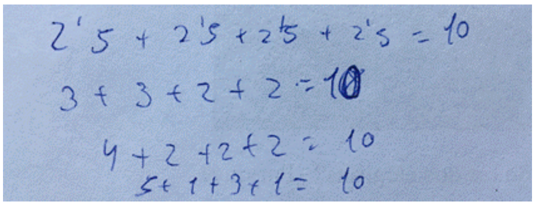

Figura 3.4.2.a. Ejemplo de respuesta incorrecta

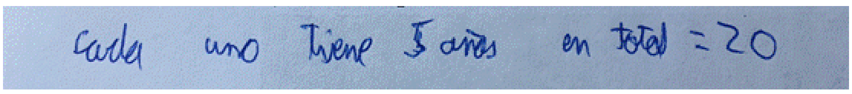

Figura 3.4.2.b. Ejemplo de respuesta incorrecta

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.2 en frecuencias y en la Figura 3.4.2 en porcentajes. Observamos que se trata de la pregunta más contestada por parte de los estudiantes, es decir, sólo 8 no contestaron a la pregunta. Y la mitad de los estudiantes tuvieron correcta la pregunta. Podemos comparar este ítem con un apartado usado por Cobo y Mayén, que dice así: "Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?" Fue tomado de Gatusso (1996). En el trabajo de Cobo el porcentaje de respuestas correctas fue el 67% y en el estudio de Mayén, el 74%. Los resultados parecen razonables teniendo en cuenta los rangos de edad en cada uno de los estudios. Se atribuye ese porcentaje del 50% a una falta de madurez y comprensión a la hora de invertir el algoritmo de la media aritmética.

Tabla 3.4.2. Respuestas al ítem 2

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 2	42	34	8

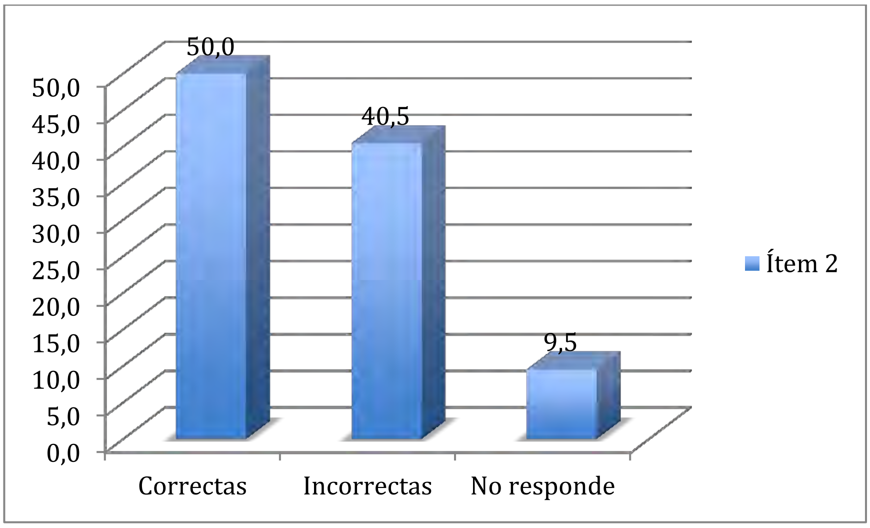

Figura 3.4.2. Porcentajes de tipo de respuestas al ítem 2

3.4.3. RESULTADOS EN EL ÍTEM 3.

Ítem 3. La talla media de cinco jugadores de un equipo de rugby es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

En la descripción del cuestionario, destacamos la complejidad de esta pregunta porque intervenían dos procedimientos de cálculo al mismo tiempo, (*P2) Cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias* y (*P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media.* Es por ello, que solo tres estudiantes han contestado correctamente a este ítem. Como ejemplo, véase la Figura 3.4.3.

En cuanto a las respuestas incorrectas, podemos destacar tres grandes grupos: aquellos estudiantes que por ensayo-error responden con un solo valor equivocado: "1.89 cm", "1.85 cm" o "1.99 cm"; otros, que dan como resultado la división de 175 entre 5; y, otros, que dividen 175 entre 6. Los primeros sí que pueden tener una idea intuitiva de la inversión del algoritmo del cálculo de la media (P6), pero desconocen el procedimiento de cálculo. El resto, no tienen esa idea y optan por aplicar de forma errónea el algoritmo directo de cálculo de la media (P1).

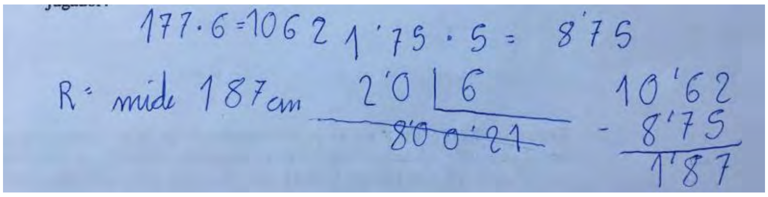

Figura 3.4.3. Ejemplo de respuesta correcta

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.3 en frecuencias y en la Figura 3.4.3 en porcentajes. Nos encontramos con el ítem con menos respuestas correctas de todo el cuestionario, sólo 3. Un total de 81 estudiantes o bien respondieron de manera incorrecta o bien no contestaron al ítem. Achacamos estos números a la ausencia de conocimientos previos sobre los procedimientos de cálculo relacionados con la media aritmética, concretamente la inversión del algoritmo del cálculo de la media (P6). Lo anterior se agrava teniendo en cuenta el bajo nivel académico de los estudiantes en relación a la resolución de ecuaciones de primer grado.

Tabla 3.4.3. Respuestas al ítem 3

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 3	3	59	22

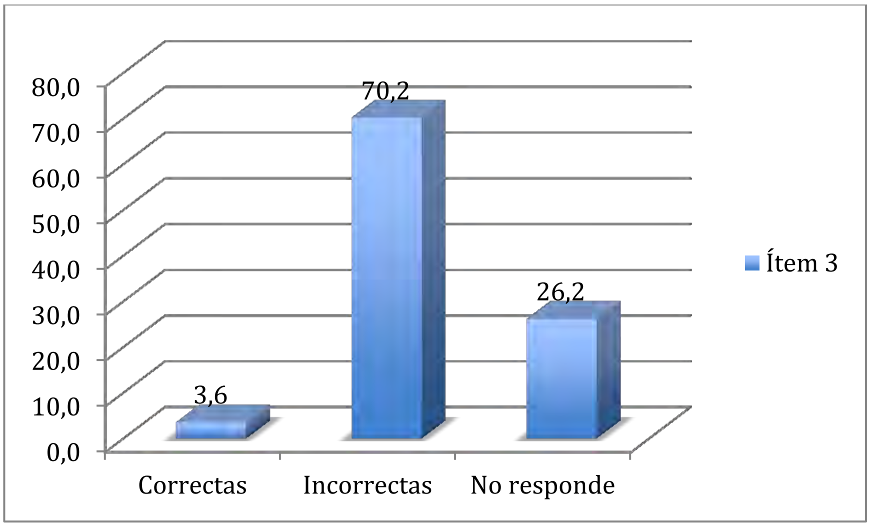

Figura 3.4.3. Porcentajes de tipo de respuestas al ítem 3

3.4.4. RESULTADOS EN EL ÍTEM 4.

Ítem 4. El número de operaciones en un hospital durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6, 43 Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?

Hemos considerado correctas las siguientes respuestas: las más numerosas han sido aquellas en las que han utilizado el algoritmo de cálculo directo de la media (P1), cuya repuestas han sido “8.9 operaciones” o bien “8 operaciones” o “9 operaciones” debido al redondeo; y, las otras que son correctas, son las que hacen un uso intuitivo de la moda (no la conocen) del tipo “5 o 6 operaciones, porque son los números más repetidos” (ver Figura 3.4.4.a y Figura 3.4.4.b).

Las respuestas incorrectas son muy variopintas. Encontramos como respuesta la suma de todas las operaciones, o bien suponer que se sigue la tendencia del último día “44 operaciones, una más que el día anterior”. Es interesante destacar las dos siguientes: la primera, parece que intenta resolver con la mediana de manera intuitiva pero no lo consigue (ver Figura 3.4.4.c) y la segunda, utiliza el rango para obtener el punto medio del intervalo como solución (ver Figura 3.4.4.d) pues asume el centro geométrico del conjunto de datos, una respuesta encontrada por Mayén (2007).

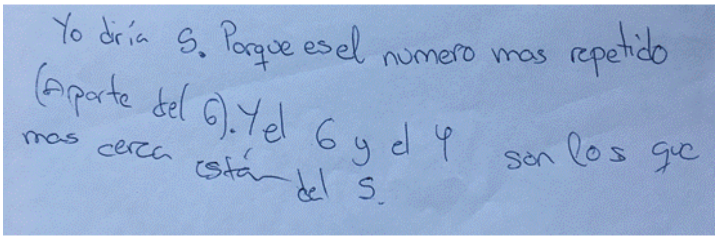

Figura 3.4.4.a Ejemplo de respuesta correcta

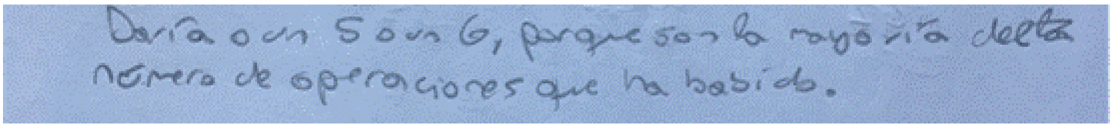

Figura 3.4.4.b Ejemplo de respuesta correcta

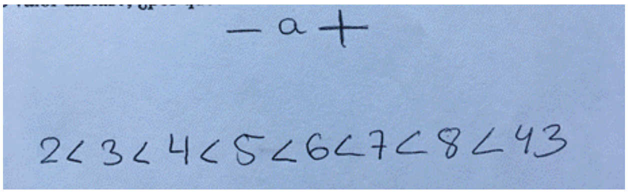

Figura 3.4.4.c Ejemplo de respuesta incorrecta

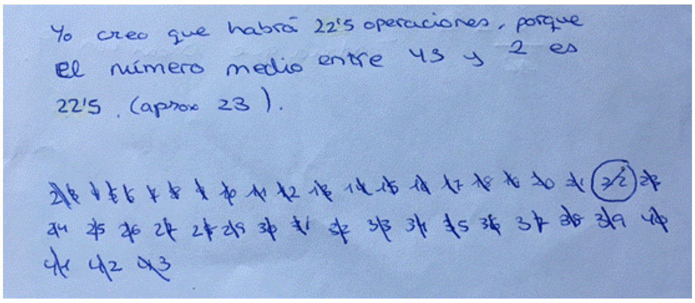

Figura 3.4.4.d Ejemplo de respuesta incorrecta

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.4 en frecuencias y en la Figura 3.4.4 en porcentajes. Los resultados son bastante aceptables al compararlos con los de los trabajos de Cobo y Mayén. Encontramos que en el trabajo de Cobo el porcentaje de respuestas correctas fue el 67% mientras que en el estudio de Mayén obtuvieron un 86%. En nuestro estudio, el porcentaje de respuesta es de 66,7%. Entendemos que ha resultado sencillo para los estudiantes este ítem y, por tanto, más de la mitad de los estudiantes comprenden la idea intuitiva de media como mejor estimación de una cantidad desconocida. Sin embargo, lamentamos que ningún estudiante haya hecho referencia al valor atípico que aparecía en los datos del problema.

Tabla 3.4.4. Respuestas al ítem 4

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 4	56	13	15

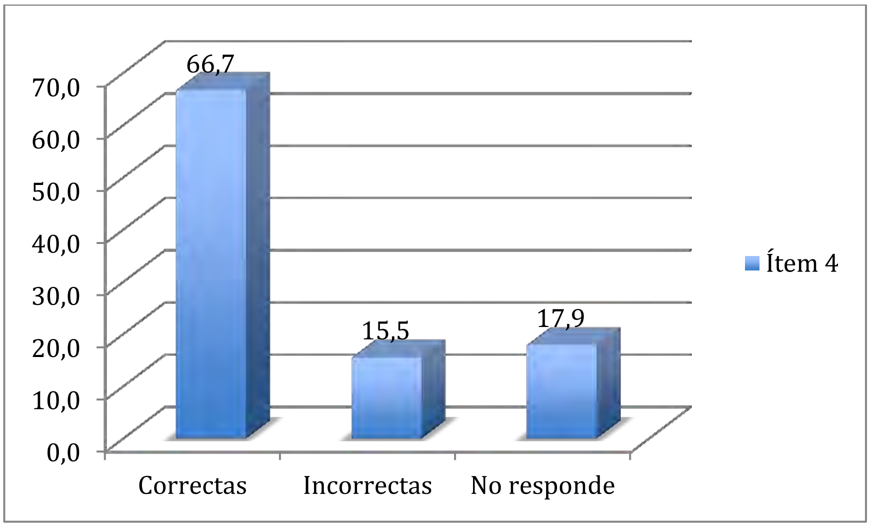

Figura 3.4.4. Porcentajes de tipo de respuestas al ítem 4

3.4.5. RESULTADOS EN EL ÍTEM 5.

Ìtem 5. El peso medio de 5 chicas es de 46 kg. ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg, ¿cuál será el peso medio? ¿cuál será el peso medio en gramos**?**

En el apartado a la única respuesta correcta es “230 kg”. La respuesta incorrecta más repetida es “pesan 46 kg”. Los estudiantes no reconocen que tienen que invertir el algoritmo del cálculo de la media (P6).

En el apartado b la única respuesta correcta es “49 kg”. La respuesta incorrecta más repetida es “pesan 245 kg”. En este caso, sí que utilizan de forma errónea la inversión del algoritmo de la media (P6), se debe a que confunde la media con el total. No son capaces de interpretar como varía la media cuando se modifica la escala (A5).

En el apartado c la única respuesta correcta es “49000 g”. Esta pregunta tiene relación con la anterior. Vemos que se mantiene bastante el número de respuestas correctas. Los fallos en este apartado son debidos a calcular mal el paso de kg. a g. De nuevo no logran interpretar la media cuando, en este caso, se modifica la escala (A5).

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.5 en frecuencias y en la Figura 3.4.5 en porcentajes. Observamos que ha sido más sencilla la primera parte en la que los estudiantes debían pasar de la media al total y más complicada la tercera parte, cuando se tiene que interpretar la media al sufrir un cambio de escala. Los resultados, en este caso, no son muy positivos. Al comparar, por ejemplo, la tercera parte con investigaciones previas encontramos que en el ítem 14 del trabajo de Cobo (2003), donde también interviene la propiedad de cambio de escala (A5) de manera fundamental, el porcentaje de respuestas correctas fue 95,8%.

Tabla 3.4.5. Respuestas al ítem 5

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 5.a	28	31	25
Ítem 5.b	26	29	29
Ítem 5.c	22	26	36

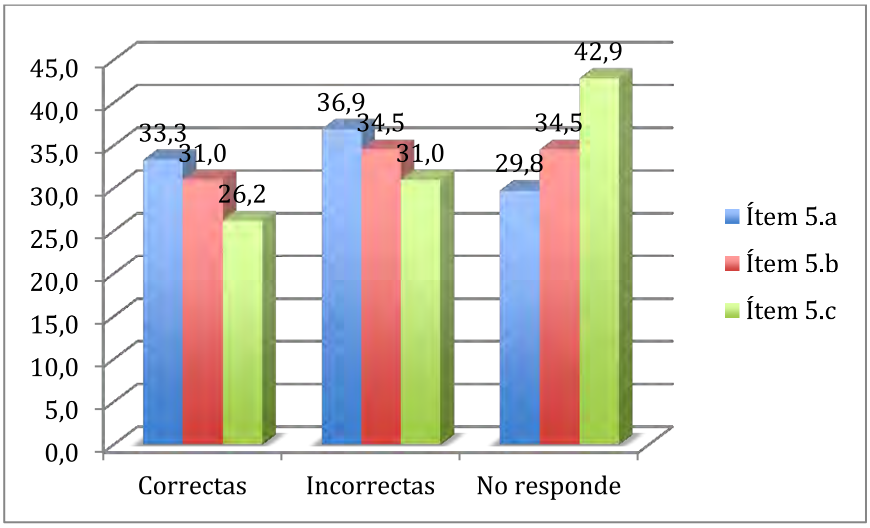

Figura 3.4.5. Porcentajes de tipo de respuestas al ítem 5

3.4.6. RESULTADOS EN EL ÍTEM 6.

Ìtem 6. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron estos:

María	18	23	22	24	19	25	16
Elena	18	26	18	28	22	17	18

Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

Hemos considerado correctas aquellas respuestas en las que: en primer lugar, se han sumado los puntos (147 puntos) de cada una y comprobado que coinciden o bien si se ha calculado la media (21 puntos) y coinciden; y en segundo lugar, como la mayoría han hecho, elegir a cualquiera de las dos, elegir a Elena por conseguir superar a María en más ocasiones (ver Figura 3.4.6.a) o a María por "tener más constancia" (ver Figura 3.4.6.b) o "mantenerse en la media" (ver Figura 3.4.6.c). Aquí vemos esa idea intuitiva de la dispersión.

En cuanto a las incorrectas, destacar que 31 de ellas han sido por error de cálculo al sumar los 7 datos de cada una de ellas, obteniendo valores distintos. Por tanto, el error más significativo se debe a un error en el procedimiento de cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados (P1).

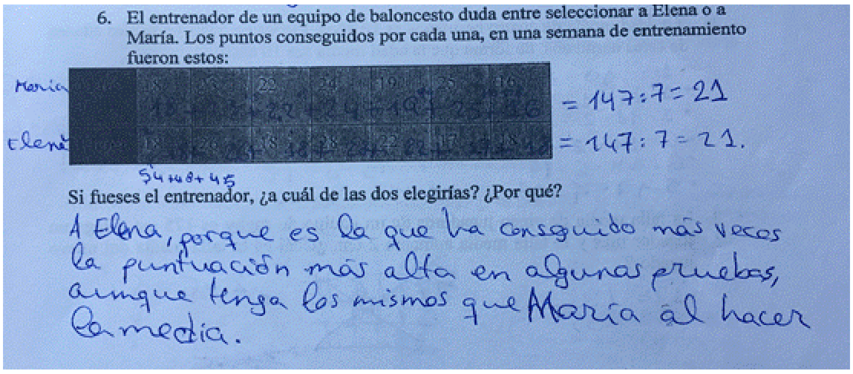

Figura 3.4.6.a Ejemplo de respuesta correcta

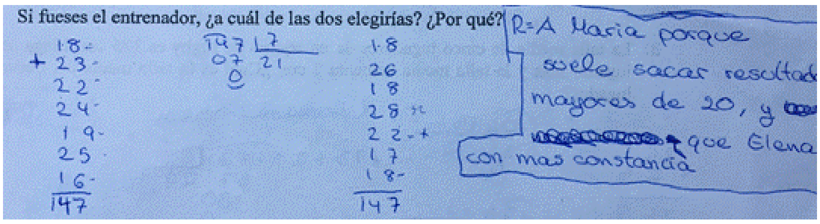

Figura 3.4.6.b Ejemplo de respuesta correcta

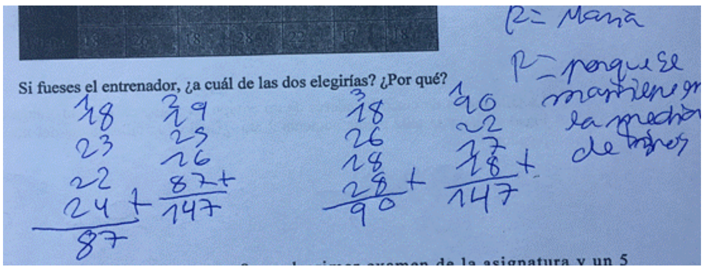

Figura 3.4.6.c Ejemplo de respuesta correcta

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.6 en frecuencias y en la Figura 3.4.6 en porcentajes. Los resultados son aceptables. Se observa que gran parte de los estudiantes comprenden, en este caso, propiedades de la media como que en la media intervienen todos los valores (N5) o que es un representante de un colectivo (E1). Podemos comparar estos resultados con los obtenidos por Mayén en el ítem 6.1 de su estudio, en el cual se utiliza la mediana para comparar dos distribuciones de datos (CP5) pero en el que da por válidas aquellas respuestas en las que utilizan la media para resolver. En su trabajo el porcentaje de respuestas correctas fue del 50% mientras que en nuestro estudio ha sido algo menos, 36,9%. Concuerdan los resultados puesto que existe un evidente desfase de formación en estadística de una muestra a otra.

Tabla 3.4.6. Respuestas al ítem 6

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 6	31	44	9

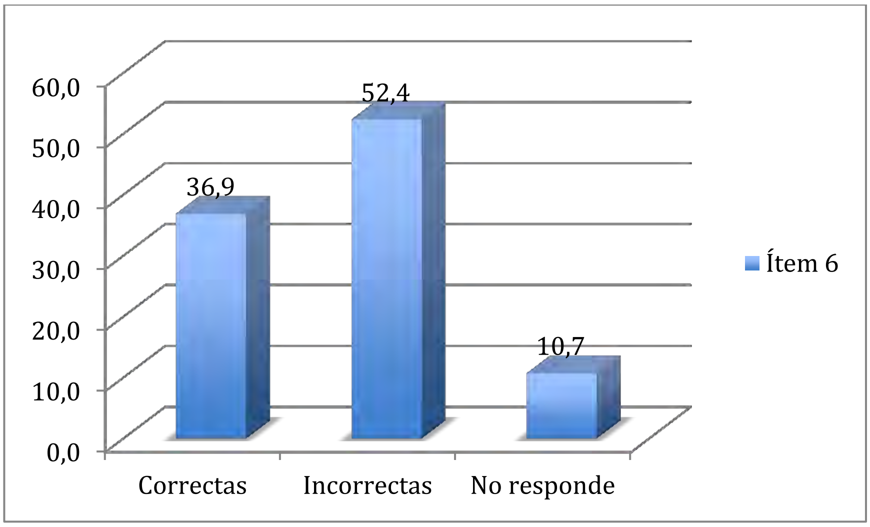

Figura 3.4.6. Porcentajes de tipo de respuestas al ítem 6

3.4.7. RESULTADOS EN EL ÍTEM 7.

Ítem 7. Ernesto obtuvo un 8 en el primer examen de la asignatura y un 5 en el segundo examen. Le falta el tercer examen y quiere sacar un notable (7 o más) en la asignatura. ¿Qué nota mínima tiene que sacar en el tercer examen para conseguir el notable?

La respuesta correcta es que la nota mínima que tiene que sacar en el tercer examen para obtener el notables es 7. Como era de esperar, el método utilizado ha sido el ensayo-error para su resolución. Les resulta cómodo puesto que es un razonamiento que suelen hacer a menudo en la enseñanza para el cálculo de calificaciones. La mayoría no han usado para resolver este ejercicio el correspondiente procedimiento de cálculo *(P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media.*

En cuanto a las respuestas incorrectas que aparecen no muestran ningún patrón a seguir. Por ese motivo, se evidencia una falta de intuición para resolver este problema de la vida cotidiana.

Los resultados se presentan en la Tabla 3.4.7 en frecuencias y en la Figura 3.4.7 en porcentajes. Los resultados son aceptables. Más de la mitad de los estudiantes respondieron correctamente este ítem. Observamos que los estudiantes entienden que para dar respuesta deben buscar una distribución de datos ajustándose a una media dada y conociendo algunos datos pero que no utilizan el algoritmo de cálculo de este parámetro en su sentido inverso.

Tabla 3.4.7. Respuestas al ítem 7

	Correctas	Incorrectas	No responde
Ítem 7	48	23	13

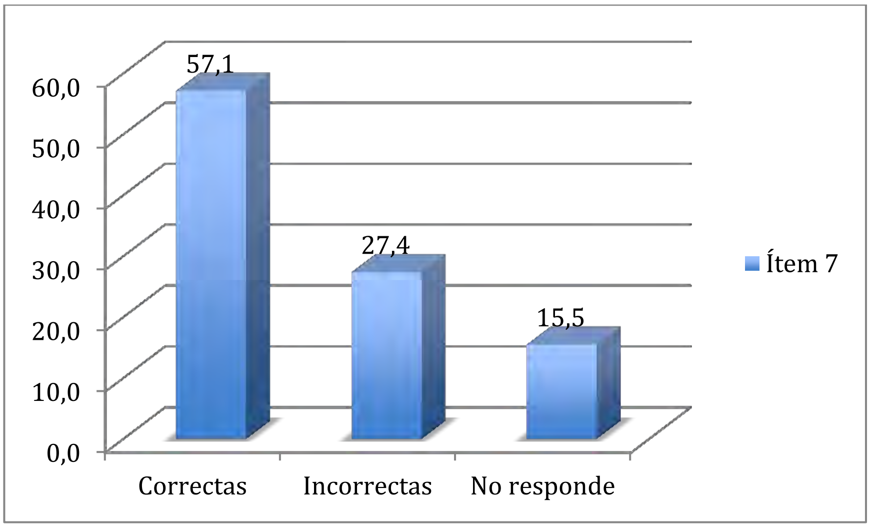

Figura 3.4.7. Porcentajes de tipo de respuestas al ítem 7

3.5. DIFICULTAD COMPARADA DE ÍTEMS

Para comparar los resultados en los diferentes ítems, en la Tabla 4.4.1.1 mostramos la proporción de respuestas correctas para cada ítem, los índices de dificultad de Muñiz (1994), junto con las desviaciones típicas. Estos índices son la proporción de respuestas correctas; por tanto cuanto menor sea su valor la pregunta será más difícil y al contrario.

Tabla 4.4.1.1. Índice de dificultad y desviación típica

Ítem	Media	Desviación típica
1.a	0.82	0.38
1.b	0.54	0.50
2	0.50	0.50
3	0.03	0.17
4	0.67	0.47
5.a	0.33	0.47
5.b	0.31	0.46
5.c	0.26	0.44
6	0.37	0.48
7	0.57	0.50

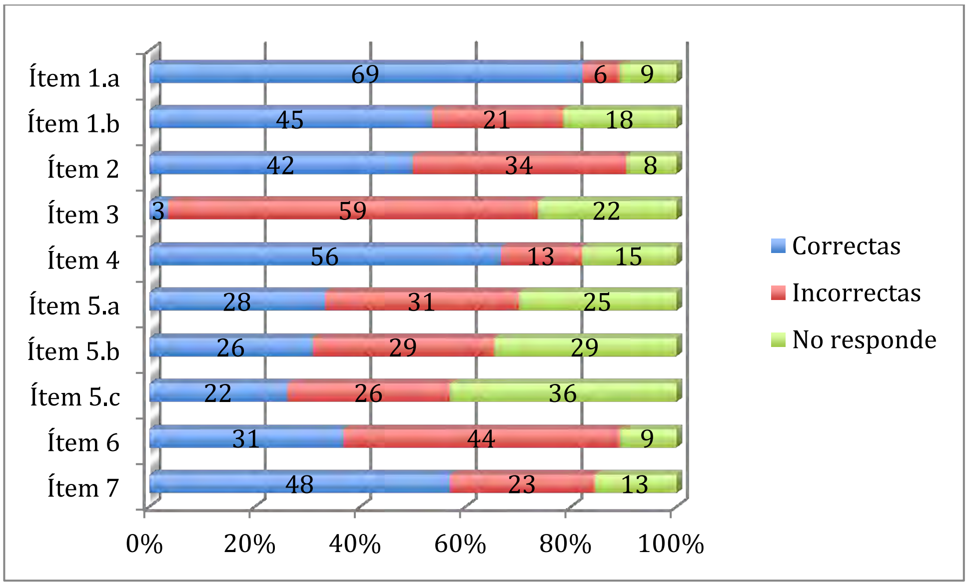

Figura 4.4.1.1. Diagrama de barras apiladas

La Figura 4.4.1.1, que también nos ayuda a comparar los ítems, resume bastante información que hemos obtenido: tanto el número de respuestas correctas, incorrectas y que no responden de cada ítem como el índice de dificultad de la tabla anterior.

Podemos observar que el índice de dificultad fluctúa entre 0.03 en el ítem 3 (inversión del algoritmo del cálculo de una media ponderada) y 0.82 en el ítem 1a (definición de media con sus propias palabras). A continuación, exponemos los ítems ordenados en orden decreciente de dificultad, para indicar los objetos matemáticos asociados a la media que los estudiantes comprenden mejor o peor:

- Ítem 3 (0.03): inversión del algoritmo del cálculo de una media ponderada.
- Ítem 5c (0.26): calcular la media cuando se modifica la escala.
- Ítem 5b (0.31): calcular la media cuando de modifica el origen.
- Ítem 5a (0.33): pasar de la media al total.
- Ítem 6 (0.37): comparar dos distribuciones de datos con variables numéricas utilizando la media.
- Ítem 2 (0.50): construir una distribución a partir de una media dada.
- Ítem 1b (0.54): definir la media con sus propias palabras y comprender que la media no es una operación interna en el conjunto dado de datos.
- Ítem 7 (0.57): inversión del algoritmo de la media y obtener un número para obtener una media dada, cuando se conocen otros dos.
- Ítem 4 (0.67): estimar un valor desconocido utilizando la media.
- Ítem 1a (0.82): definir la media con sus propias palabras cuando la media pertenece al mismo conjunto numérico que los datos.

3.6. CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO

Para finalizar las conclusiones detallamos las principales dificultades observadas en relación a la comprensión de los elementos de significado. Entendemos conflicto semiótico de acuerdo al marco teórico como disparidad entre el significado de un objeto matemático y el que le atribuye el estudiante. Estos conflictos se han identificado en las respuestas incorrectas y parcialmente correctas de los estudiantes a las diferentes respuesta planteadas:

Conflictos relacionados con los problemas: Cuando el estudiante no reconoce un problema que se puede resolver con la ayuda de la media aritmética:

- No toman como solución la media en *(CP1) Estimar una medida a partir de diversas mediciones;* en el ítem 4 dan como solución la suma de todos los valores dados, suponen que la media sigue la tendencia del último dato o asumen como media el centro geométrico del conjunto de datos, una respuesta encontrada por Mayén (2007).
- No utilizan la media para resolver el ítem 6 (CP5: Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas). En lugar de ello realizan comparaciones cualitativas o utilizan sólo algunos datos.

Conflictos relacionados con las definiciones (conceptos): Cuando se confunden diferentes conceptos:

- Se confunde la media con el mínimo en el ítem 1.
- Concepción determinista del problema, suponiendo un tiempo constante en el ítem 1. Es decir no se percibe la aleatoriedad de la situación, por tanto hay una interpretación pobre de la aleatoriedad.

Conflictos relacionados con las representaciones:

- No se ha observado ninguna dificultad en este aspecto.

Conflictos relacionados con los algoritmos: que se aplican incorrectamente o no se saben aplicar:

- No construyen un conjunto que tenga alguna variabilidad para un promedio dado en el ítem 2; también se ha encontrado en investigaciones como la de Russell y Mokros (1991).
- No logran entender el procedimiento de cálculo *(P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media* cuando tienen que calcular el total conocida la media (ítem 2).
- Confusión generalizada cuando intervienen dos procedimientos de cálculo al mismo tiempo. Por ejemplo, (*P2) Cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias* y (*P6) Inversión del algoritmo del cálculo de la media* en el ítem 3.

- No reconocen que tienen que invertir el algoritmo del cálculo de la media (P6) en el ítem 5.

- Errores en el procedimiento de cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados (P1) en el ítem 6.

Conflictos relacionados con las propiedades de la media:

- Se atribuye a la media la propiedad de ser operación interna cuando no la tiene (ítem 1); también descrito en Mayén (2007) y Cobo (2003).
- No son capaces de interpretar como varía la media cuando se modifica la escala o el origen (A5) en el ítem 5.

En resumen, aunque aparentemente la media es un concepto sencillo y los estudiantes deberían haber trabajado con ella en la Educación Primaria, observamos que al comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria se encuentran bastantes conflictos en sus propiedades y algoritmos, falta de reconocimiento de algunos campos de problema e incluso dificultades con su definición. Es importante que el profesor que debe enseñar a estos estudiantes sea consciente de ello, para que pueda organizar acciones educativas dirigidas a superar los mencionados conflictos.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores, se ha presentado un estudio teórico y de evaluación sobre la comprensión de la media aritmética en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Esta investigación es consistente con el marco teórico planteado y se ajusta a la línea de investigaciones previas que siguen Cobo y Mayén.

Este último capítulo se ha reservado para exponer las principales conclusiones, de carácter general, que se deducen del estudio realizado. El capítulo se organiza en tres secciones. En primer lugar, se aportan conclusiones relativas a los objetivos que se plantearon en el estudio, en base a los resultados obtenidos tras el análisis del cuestionario. A continuación, se destacan las principales aportaciones y contribuciones que, consideramos, nuestro trabajo ha proporcionado. Por último, dadas las características del estudio, se plantean posibles vías de investigación futuras.

4.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS

El objetivo fundamental de nuestro estudio definido en el Capítulo 1 era *analizar el razonamiento de estos estudiantes con los problemas propuestos para evaluar la dificultad que para ellos pueden tener con el concepto de media aritmética.*

Es evidente que toda la investigación ha sido diseñada para cumplir este objetivo y consideramos que se ha logrado de forma razonable, puesto que hemos obtenido información detallada sobre la comprensión de los estudiantes de la muestra en las definiciones, problemas, lenguaje, propiedades y procedimientos de cálculo relacionados con la media aritmética. Como este objetivo fue descompuesto en cuatro objetivos específicos, vamos a comentar en detalle cada uno de ellos:

- *OE1. Analizar la enseñanza que sobre las medidas de tendencia central (media aritmética) reciben los estudiantes españoles en la Educación Secundaria Obligatoria.*

Para llevar a cabo este objetivo, presentamos en el Capítulo 1 un estudio detallado sobre las medidas de tendencia central en el currículo actual (LOMCE) comparándolo con el currículo anterior (LOE).

- *OE2. Analizar la dificultad relativa de los problemas de media aritmética, medida en porcentaje de respuestas correctas en los problemas planteados, comparando esta dificultad en función del contenido evaluado.*

Abordamos este objetivo en el Capítulo 3, en el que presentamos los resultados del estudio de evaluación realizado. Para ello, hemos analizado los objetos matemáticos que intervienen en cada uno de los ítems del cuestionario y presentado los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas y los índices de dificultad de cada ítem (Muñíz, 1994).

- *OE3. Analizar los posibles errores en las respuestas y relacionarlos con las propiedades de la media que los estudiantes no comprenden.*

En el Capítulo 3 se contempla este objetivo. Concretamente, en la Sección 3.4, donde se presentan los resultados de cada ítem por separado, se discute sobre los posibles errores debidos a la comprensión de los objetos matemáticos relacionados con la media aritmética, incluidas las propiedades.

- *OE4. Profundizar en los conflictos semióticos que presentan al resolver problemas relacionados con este promedio.*

Es en la Sección 3.6 donde detallamos los principales conflictos semióticos observados en relación a la comprensión de los elementos de significado.

4.3. PRINCIPALES APORTACIONES DEL TRABAJO

El trabajo, de manera general, constituye una amplia fuente de información sobre la comprensión de la media aritmética en los estudiantes de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, complementando investigaciones como las de Cobo (2003) y Mayén (2007), puesto que se han utilizado nuevos ítems de menor dificultad que los utilizados por dichas autoras. A pesar de ello, se sigue encontrando dificultad por parte de los estudiantes; dichas dificultades se han descrito con detalle, incluyendo ejemplos de las respuestas de los estudiantes.

Este trabajo proporciona una guía completa útil para el desarrollo de nuegas investigaciones relacionadas con las medidas de tendencia central. Se detalla con precisión el marco educativo en el que se encuadra esta investigación, que permitirá detectar los conocimientos previos del alumnado en cuestión. Además se describe el marco teórico que se ejemplifica en relación a su aplicación al estudio de la media y los objetos relacionados con ellas.

Otra aportación importante es la clasificación de investigaciones previas en relación a los elementos de significado del Capítulo 2. Puede ser de interés a efectos de investigación pues actualiza otros estados de la cuestión previos al nuestro.

Finalmente, la detección de errores comunes y conflictos semióticos en la muestra puede ser provechosa para la mejora y planificación de la enseñanza de la media aritmética.

4.4 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Tras la revisión del trabajo realizado, se enumeran a continuación posibles nuevas líneas de investigación que lo complementarían.

- En nuestro trabajo evaluamos a alumnos de primer curso de Educación Secundaria. El estudio podría extenderse a alumnos de cursos superiores. Esto nos permitiría comparar las dificultades de la media aritmética observadas en los distintos cursos.
- Comparar ampliar la investigación a otras medidas de tendencia central como la media y la mediana, en la misma línea que Cobo (2003) y Mayén (2007).
- Complementar el estudio con entrevistas particulares a los alumnos para evaluar las dificultades a la hora de expresarse que puede dar lugar a respuestas incorrectas.
- Sería interesante extraer una muestra heterogénea (de distintos centros) y de mayor tamaño, para obtener así conclusiones más generales.
- Incluir ítems en los que se presenten los datos de manera gráfica para estudiar si los alumnos tienen esa mayor dificultad que describen Carvalho (2001) y Reading y Pegg (1996).

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO, 25,* 41-58.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix, 15*(1)*,* 2-13.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, *1*(1), 27–37.

Batanero, C., Cobo, B. y Díaz, C. (2003). Assessing secondary school students' understanding of averages. En M. A. Mariotti (ed.): *Proceedings of the 3d Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria (Italia), Universita di Pisa, Italia. CD ROM

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números 83*(1)*,* 7-18.

Batanero, C, Godino, J. D., y Navas, F. (1997). Some misconceptions about averages in prospective primary teachers. En E. Pehknonen (Ed.), *Proceedings of 21 PME Conference* (v.1, pp. 276). Lahti, Finlandia; PME group.

CAI, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students'unsderstanding of the arithmetic average concept, en Meira, L. (Ed.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol.3, pp. 144-151). Recife, Brasil: Universidade Federal de Pernambuco.

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.* Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cobo, B. y Batanero, C, (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 22*(1), 5-18.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: N.C.T.M.

Estepa. A. y Batanero, C. (1994). Judgments of association in scattter plots: An empirical study of students' strategies and preconceptions. En J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics.* Minnesota, MN: The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer: Dordrecht.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education 32*(2), 124-158.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. En A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. I, pp. 401 408). Valencia: PME group.

Gattuso, L. y Mary, C. (2002). Development of the concept of weighted average among high-school children. En B., Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Hjelmslev, L. (1943). *Proleg.meno s a una teor.a del lenguaje.* Madrid: Gredos.

Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11 -16*. Sloug: Foulsham Educational.

Jacobbe, T. y Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 199-209). New York: Springer.

Jefatura del Estado (2006). *Ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* Madrid: Autor.

Jefatura del Estado (2013). *Ley orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*. Madrid: Autor.

Konold, C. y Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1)*,* 259-289.

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, *14*(1), 2-8.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mevarech, Z.R. (1983). A deep structure model of students'statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3)*,* 415-429.

M.E.C. (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

M.E.C. (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: Autor.

M.E.C. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

M.E.C. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Muñiz. J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 191-204.

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.

Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1991). What's typical?: children's ideas about average. En D. Vere-Jones (eds.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 307-313). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1995). Children's concepts of averages and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 64-80.

Tormo, C. (1993). *Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. *Focus on Learning Problems in Mathematics. 21*(4), 15-39.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning. 2*(1&2), 11-50.