# RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Javier García de Tomás Jiménez-Bravo

**Trabajo Fin de Máster en Didáctica de la Matemática**

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

Dirigido por
Dra. Carmen Batanero Bernabeu y Dr. Pedro Arteaga Cezón

Diciembre 2016

# ÍNDICE GENERAL

# INTRODUCCIÓN

La combinatoria es hoy día una amplia rama de la matemática y base de la matemática discreta, con muchas aplicaciones en la ciencia, la técnica y la optimización. Sin embargo, su enseñanza no se resalta lo suficiente ya que suele aparecer ligada principalmente a la probabilidad.

Diferentes investigaciones, que se reseñan en el Capítulo 2, sugieren que el razonamiento combinatorio no es sencillo para los estudiantes, a pesar de la importancia que tiene este razonamiento como parte del pensamiento formal. Las investigaciones con estudiantes españoles son pocas y dejaron abiertas posibilidades de realizar nuevos trabajos al respecto, lo cual ha hecho que nos interesemos en esta temática.

Más concretamente, en este trabajo analizamos los procesos de resolución de problemas de permutación por parte de alumnos de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria, que aún no han recibido una enseñanza formal del tema. En el currículo seguido hasta ahora por estos estudiantes, la combinatoria apenas aparece, en contraste con lo previsto en la nueva normativa en que se incluyen contenidos de combinatoria desde 1º curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

La finalidad del estudio de evaluación es analizar el razonamiento combinatorio de estos estudiantes, previo a la enseñanza formal, y compararlos con los resultados obtenidos por Navarro- Pelayo (1994) en un estudio similar, completando también la información de dicha autora al analizar con más profundidad los problemas de permutaciones.

Para ello se propone a los estudiantes que forman parte de la muestra un cuestionario sencillo con problemas de permutaciones ordinarias y con repetición, variando también el tipo de elemento a permutar (personas, números y objetos). En total se considerarán seis problemas, combinando las anteriores variables. Tendremos en cuenta también dos tipos de problemas que Navarro- Pelayo (1994) describió como problemas de selección y problemas de combinación. Usaremos siempre un número pequeño de elementos para que el alumno si no sabe o no recuerda la fórmula lo pueda deducir por enumeración.

La Memoria se organiza en la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se comienza describiendo algunos elementos sencillos la Combinatoria y su papel en la matemática y resaltando la importancia de la formación en Combinatoria para el estudiante. Seguidamente se describe el contenido curricular sobre el tema y se finaliza exponiendo los objetivos del trabajo.
- El Capítulo 2 se dedica a presentar los fundamentos del estudio, incluyendo una descripción de elementos del enfoque ontosemiótico y un resumen de las investigaciones previas.
- En el Capítulo 3 se describe un estudio exploratorio del razonamiento combinatorio de una muestra de estudiantes de tres cursos de Educación Secundaria Obligatoria en problemas de permutación con y sin reemplazamiento. Se describe la muestra y el contexto escolar en que se realiza el estudio y se realiza un análisis detallado del cuestionario utilizado. El resto del capítulo se dedica a exponer y discutir los resultados en cada uno de los ítems (considerando la respuesta y la estrategia) y una síntesis donde se comparan los resultados por tipo de problema, tipo de permutación y curso escolar.
- Finalmente se exponen las conclusiones y referencias utilizadas

Consideramos que cumplimos los requisitos de un trabajo fin de Máster, en cuanto se ha identificado un tema de investigación y se ha llevado a cabo una investigación exploratoria con una muestra de tamaño moderado. Hemos organizado la memoria de acuerdo a los requisitos de un trabajo de investigación y aportamos algunos resultados que mejoran nuestro conocimiento sobre la forma que los estudiantes razonan en problemas de permutación.

# CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo, se hace un breve recorrido sobre distintas facetas de la combinatoria y algunos objetos matemáticos que intervienen en la misma. Se comienza con su papel dentro de las Matemáticas, especialmente dentro de la matemática discreta. Después, se realiza también una exposición sobre su importancia en la formación de los alumnos, no sólo como herramienta matemática. Antes de terminar, se repasan los contenidos en los que se ha plasmado su aplicación dentro del nuevo currículo, que se encuentra en pleno proceso de actualización a todos los niveles educativos. Y, por último, y en base a todo lo anterior, su plantean una serie de objetivos que dirigen este trabajo.

## 1.2 COMBINATORIA Y SU PAPEL EN LA MATEMÁTICA

Es difícil dar una definición precisa de la combinatoria y resumir en pocas líneas todas sus aplicaciones. Una descripción de las características e importancia de esta rama de las matemáticas es la que proporcionó James Bernoulli (1713/ 1987) en su libro Ars Conjectandi, que se cita en Batanero, Godino y Navarro- Pelayo (1994, p. 17):

> El arte que procura eliminar esta debilidad y nos enseña a enumerar todos los modos posibles en que un número dado de objetos puede mezclarse y combinarse de manera que estemos seguros de que no hemos omitido ninguno de los posibles debe considerarse de una enorme utilidad y merece nuestra más alta estima y profunda atención. Éste es el objeto de la Combinatoria que no debe ser considerada sólo como una rama de las ciencias matemáticas, pues está relacionada con casi todas las formas de conocimientos útiles en las cuales la mente humana puede emplearse.

También se encuentran otras definiciones más recientes como la recogida en Wilhelmi (2004, p. 13): *"*Brevemente, la combinatoria es el arte de contar sin enumerar directamente todos los casos. Para ello, es preciso aprender técnicas de ordenación, colocación, selección, etc., de objetos*"*.

En el presente trabajo, siguiendo a Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) y a Ribnikov (1988) se entiende la combinatoria, o análisis combinatorio, como la rama de las Matemáticas que estudia los conjuntos discretos finitos y las configuraciones que pueden obtenerse a partir de sus elementos mediante ciertas transformaciones que originan cambios en la estructura (permutaciones de sus elementos) o composición de los mismos (obtención de muestras o subconjuntos). También se consideran las correspondencias entre conjunto discretos, por ejemplo, aplicaciones o biyecciones. Todas estas operaciones y correspondencias se pueden aplicar más de una vez sobre estos conjuntos.

Batanero, Godino y Navarro Pelayo, partiendo de Ribnikov (1988) y Grimaldi (1989) clasifican los diversos tipos de problemas combinatorios como de existencia, recuento, enumeración y optimización, describiéndose ejemplos de cada uno y justificando el papel relevante que la combinatoria desempeña dentro de la matemática discreta. También indican que en la actualidad la combinatoria es un amplio campo de las matemáticas y resaltan la investigación actual sobre combinatoria y sus numerosas aplicaciones en diversas ciencias y en otras ramas de las matemáticas.

Entre ellas, la más importante es la probabilidad, pues la combinatoria ha tenido una gran contribución en su desarrollo. Históricamente, las raíces de la probabilidad han estado ligadas al estudio de los juegos de azar, cuyos problemas se resuelven partiendo de la enumeración del espacio muestral que interviene en el juego (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). El problema de si es más probable obtener un 11 o un 12 a partir de la suma de las puntuaciones de tres dados lanzados a la vez ha sido uno de los más conocidos y todavía en la actualidad se plantea como un reto para los estudiantes. Laplace y Fermat, que contribuyeron al desarrollo de la probabilidad en sus inicios, resolvieron éste y otros problemas, para lo cual se basaron en la enumeración sistemática de probabilidades y el triángulo combinatorio (Godino, Batanero y Cañizares, 1988).

Además, Heitele (1975) incluye la combinatoria entre las ideas estocásticas fundamentales, por su gran relación tanto con el experimento compuesto como con el muestreo. En lo que respecta al experimento compuesto, el espacio muestral se forma enumerando sus elementos y usando ideas combinatorias, así como la regla del producto. Además, las combinaciones y variaciones se definen como muestras no ordenadas u ordenadas de un conjunto finito. Otra aplicación importante de la combinatoria en probabilidad son las distribuciones de probabilidad discreta, como la binomial o la hipergeométrica.

Pero también tiene repercusiones menos conocidas en teoría de números, matrices y determinantes, ciencias de la computación (por ejemplo, en criptografía) teoría de autómatas e inteligencia artificial, investigación operativa (grafos, camino- mínimo), geometría y topología combinatorias y en ciencias como la biología, geología, química, o gestión empresarial, informática e ingeniería (descritas en Grimaldi, 1989).

## 1.3 ELEMENTOS SENCILLOS DE COMBINATORIA

El principal problema combinatorio que se tiene en cuenta en la enseñanza no universitaria es el de recuento, es decir, contar una colección discreta de elementos sin enumerarlos. Este problema se utiliza, bien en el cálculo de probabilidades o en el muestreo. Se trata de encontrar métodos que permitan contar las diferentes posibilidades de dichas configuraciones de forma precisa sin necesidad de explicitarlas.

Entre las principales estrategias para contar dichas configuraciones se encuentran la regla de la suma y la regla del producto (Espinoza, 2011).

La regla de la suma se acomoda al siguiente enunciado: si una determinada situación puede ocurrir de dos formas diferentes, resultando de la primera $m$ maneras posibles y de la segunda $n$ maneras posibles, incompatibles entre sí, entonces existen $m+n$ maneras en las cuales puede ocurrir la situación inicial.

Por otro lado, la regla del producto se enuncia como sigue: si una situación puede ocurrir en dos fases, resultando en la primera $m$ maneras diferentes y, a partir de cada una de ellas, en la segunda fase, otras $n$ maneras diferentes, entonces ambas fases, esto es, la situación completa, puede ocurrir de $m \cdot n$ maneras distintas.

Estas reglas se pueden generalizar para una cantidad finita de situaciones:

- Dadas $k$ formas diferentes, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, en las que se puede dar una determinada situación, que se pueden producir de $x_1, x_2, \dots, x_k$ formas diferentes, entonces existen $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ maneras diferentes en las que pueden ocurrir tal situación, pero no a la vez, ya que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son situaciones incompatibles.
- Dada una situación que ocurra en $k$ fases encadenadas, resultando de la primera $x_1$ maneras diferentes; después, a partir de cada una de las anteriores, $x_2$ maneras diferentes; y así, sucesivamente, hasta la $k$ −ésima fase, que sucede de $x_k$ formas diferentes a partir cada una de las anteriores; entonces, la situación inicial completa puede ocurrir de $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$ maneras diferentes.

*Operaciones combinatorias*

Dando un paso más en las estrategias de recuento, se llega a las operaciones combinatorias básicas, que surge al tratar de el de seleccionar *n* objetos de un conjunto de *m* objetos distintos $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$ considerado dos condiciones: el orden y la repetición de los elementos. De este modo se obtienen las siguientes operaciones:

*Variaciones ordinarias* de *m* elementos, tomados de *n* en *n* son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de tal forma que en cada grupo entren *n* elementos distintos, y dos grupos se diferencian en algún elemento o en el orden. Su número se calcula con la fórmula $V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$.

*Variaciones con repetición* de *m* elementos, tomados de *n* en *n*, a los distintos grupos que se pueden formar con los *m* elementos, de tal manera que en cada grupo haya *n* elementos iguales o distintos y un grupo se diferencia de otro en algún elemento o su orden. Su número viene dado por $VR_{m,n} = m^n$.

Las *combinaciones ordinarias* de *m* elementos tomados de *n* en *n* son los diferentes conjuntos de *n* elementos distintos que se pueden formar con los *m* elementos, de forma que dos grupos se diferencian en algún elemento y no en el orden. Su número es: $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$.

Una *combinación con repetición* de *m* elementos tomados de *n* en *n* son los distintos grupos de *n* elementos iguales o distintos que se pueden formar con los *m* elementos, de forma que dos grupos se diferencien en algún elemento y no en el orden. Para calcular su número se utiliza la siguiente fórmula $CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}$.

*Permutaciones*

En este trabajo nos ocupamos de las *permutaciones*, que pueden ser ordinarias o con repetición. Dado un conjunto de *k* elementos, se entiende por permutación ordinaria a todas las agrupaciones de *k* elementos que se pueden construir a partir del conjunto inicial obedeciendo a dos reglas fundamentales:

- Dentro de cada agrupación no puede haber ningún elemento repetido.
- Dos agrupaciones se consideran distintas cuando, siendo los elementos que las formas iguales, están dispuestos en distinto orden.

Para deducir el número de permutaciones ordinarias que es posible obtener a partir de un conjunto de $k$ elementos se recurre a la regla del producto. En la primera fase de la construcción de una permutación se puede escoger entre $k$ elementos diferentes; por tanto, quedan $k-1$ elementos disponibles en el conjunto inicial, que pueden escogerse en una segunda fase. Del mismo modo, en la tercera fase habrá disponibles $k-2$ elementos y, obrando sucesivamente de esta forma, en la $k-$ésima fase sólo habrá disponible 1 elemento. Por tanto, aplicando la regla del producto, el número total de permutaciones ordinarias para un conjunto de $k$ elementos es:

$$P_k = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

Por otro lado, un conjunto de $k$ elementos, se entiende por permutación con repetición a todas las agrupaciones de $k$ elementos que se pueden construir a partir del conjunto inicial obedeciendo a dos reglas fundamentales:

- El conjunto de $k$ elementos está formado por $m$ elementos iguales entre sí, $n$ elementos iguales entre sí,…, y $t$ elementos iguales entre sí, de forma que se verifica que $m+n+\cdots+t=k$.
- Dos agrupaciones se consideran distintas cuando, siendo los elementos que las formas iguales, están dispuestos en distinto orden.

En este caso, para deducir el número de permutaciones con repetición que es posible obtener a partir de un conjunto de $k$ elementos, se recurre al siguiente razonamiento: sea el número buscado $P_k^{m,n,\ldots,t}$, obsérvese que si los $m$ elementos iguales se sustituyen por $m$ elementos distintos y se realizan todas las permutaciones posibles conservando en sus posiciones los $(k-m)$ elementos restantes, en esta nueva situación, el número total de permutaciones sería el producto $m! \cdot P_k^{m,n,\ldots,t}$. Si, a continuación, se hiciera lo mismo con los $n$ elementos iguales, el número de permutaciones final sería $m! \cdot n! \cdot P_k^{m,n,\ldots,t}$. Continuando el proceso hasta que todos los elementos fueran distintos, al final el número de permutaciones sería igual que si se tratara de permutaciones ordinarias, esto es, $m! \cdot n! \cdot \ldots \cdot t! \cdot P_k^{m,n,\ldots,t} = k!$, luego:

$$P_k^{m,n,\ldots,t} = \frac{k!}{m! \cdot n! \cdot \ldots \cdot t!}$$

*Modelos combinatorios*

Además de las operaciones de permutación con o sin repetición en nuestro trabajo tenemos en cuenta los modelos combinatorios. Las configuraciones combinatorias simples se pueden clasificar básicamente en tres modelos diferentes: selección, colocación y partición, que no son equivalentes entre sí (Dubois, 1984).

El *modelo de selección* enfatiza la idea de muestreo. A partir de un conjunto de $k$ elementos, normalmente distintos entre sí, se realiza la extracción de una muestra de $m$ elementos. Las operaciones combinatorias básicas, es decir, las variaciones, permutaciones y combinaciones, con o sin repetición, se irán dando en la construcción de la muestra en función de que se puedan o no repetir los elementos a extraer y según si orden de extracción de los elementos tiene o no tiene importancia. El modelo de selección es el que se usa habitualmente en la enseñanza para definir las operaciones combinatorias (Navarro-Pelayo, 1994).

En el *modelo de colocación* se trata de colocar una serie de $k$ elementos en $m$ celdas o casillas. Pueden darse multitud de posibilidades según las características de esta distribución: si entre los $k$ elementos hay algunos iguales entre sí; si las casillas son iguales o no lo son; si dentro de cada casillas puede haber varios elementos; en tal caso, si hay que realizar también una ordenación de los elementos en cada casilla; si pueden quedarse casillas vacías o elementos sin colocar; etc. Problemas de colocación diferentes se pueden resolver mediante la misma técnica combinatoria. Así, las variaciones se pueden definir como las distintas formas de colocar $k$ elementos en $n$ casillas. Si los elementos son indistinguibles, se tienen combinaciones. Y, en el caso de que $k = n$, permutaciones. No obstante, también pueden darse ciertos tipos de colocaciones que no se puedan expresar mediante una operación combinatoria básica.

Desde una perspectiva matemática, el modelo de colocación equivale a establecer una aplicación donde el conjunto inicial está formado por los $k$ elementos y el conjunto final por las $m$ celdas o casillas. De esta forma, según cada caso concreto, pueden surgir algunas operaciones combinatorias básicas. Por ejemplo, las variaciones ordinarias se dan para aplicaciones inyectivas, mientras que las permutaciones aparecen cuando la aplicación es una biyección. Sin embargo, a partir de la noción de aplicación, no se pueden definir, al menos de forma directa, las combinaciones ordinarias. Es más, ante un problema con unas características tales que la aplicación resulte ser no inyectiva, la solución no se correspondería con ninguna de las operaciones combinatorias básicas.

Por último, el *modelo de partición* se entiende como una división de un conjunto en varios subconjuntos. Existe una correspondencia biyectiva entre los modelos de colocación y partición, puesto que la partición de un conjunto de $k$ elementos en $n$ subconjuntos es tanto como la colocación de $k$ elementos en $n$ casillas.

*Técnicas sencillas de enumeración*

Además de los contenidos anteriores, para la resolución de problemas sencillos pueden emplearse métodos de enumeración sistemática, es decir, formas de listar todos los elementos de una configuración combinatoria de forma completa. Dichas técnicas se describen en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997) y Roa (2000). Para lograr una enumeración completa son importantes algunas herramientas, como:

- *Fijar una variable*: por ejemplo, se fija el primer elemento y se van variando sistemáticamente el resto. Cuando se termina, se cambia el primer elemento por otro y se repite la técnica.
- *Recursión:* para resolver un problema de orden *n*, como puede ser una permutación de *n* elementos, se comienza resolviendo una de orden *n-1*; para resolver ésta, se resuelve una de orden *n-2*, y así sucesivamente, hasta obtener el factorial de *n*. Por ejemplo:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n(n-1) \cdot P_{n-2} = \cdots = n!$$

- *Diagrama en árbol:* es una representación icónica de la enumeración. Mediante un gráfico, se representan todos los posibles resultados de un determinado problema. Para su construcción, se selecciona uno de los elementos del conjunto como nudo inicial y se traza una rama por cada uno de los elementos restantes que se pueden seleccionar después de él. A continuación, desde el final de cada rama, se trazan tantas ramas como elementos queden por seleccionar del conjunto, y así sucesivamente hasta seleccionarlos todos. Al terminar, se repite el proceso situando otro elemento distinto al primero en el nudo inicial.

  Para un conjunto, por ejemplo, de cuatro elementos, A, B, C, D, el diagrama en árbol completo quedaría como se muestra en la Figura 1.3.1.

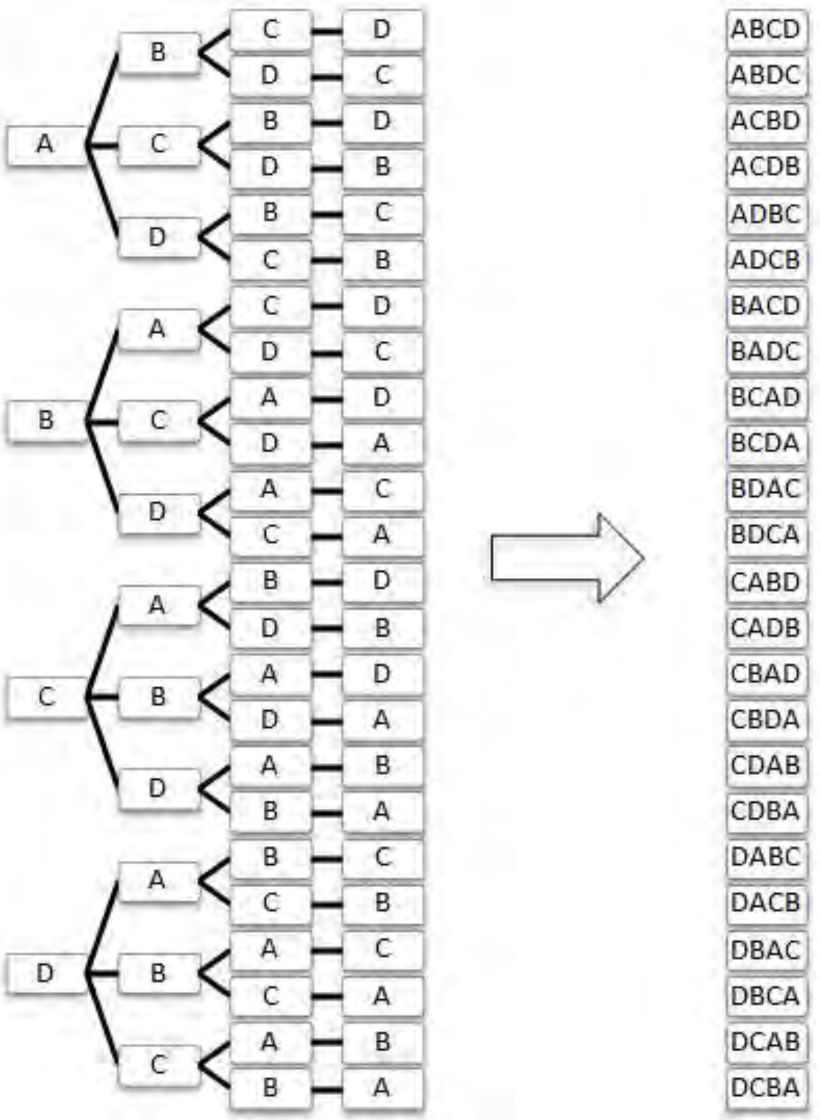


Figura 1.3.1. Diagrama en árbol para un conjunto de cuatro elementos: A, B, C, D

## 1.4 IMPORTANCIA PARA LA FORMACIÓN DEL ALUMNO

Como se ha expuesto, la combinatoria es la base de la matemática discreta y, por tanto, la raíz de muchas otras ramas de la matemática, muy especialmente de la teoría de la probabilidad; pero no sólo es aplicable a las matemáticas, sino también a muchas otras áreas como la biología, economía, informática, música, química, etc. Por todo ello, resulta evidente que tiene un papel fundamental en las matemáticas escolares (Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino, 1997).

Hasta finales de la década de los 60, en muchos países, el contenido de probabilidad de secundaria se cubría exclusivamente mediante la combinatoria y los juegos de azar, puesto que la enseñanza de la probabilidad se basaba en la regla de Laplace: casos favorables dividido de casos posibles. Apenas existía intención de investigar el enfoque frecuencial de la probabilidad o de matematizar el concepto con una aproximación más general. Una escasa capacidad de análisis combinatorio, por tanto, reducía la aplicación del concepto de probabilidad a casos muy sencillos o de fácil enumeración (Piaget e Inhelder, 1951).

Aunque hoy en día se combinan las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad, la combinatoria todavía juega un rol fundamental en la enseñanza (Bishop, Clements, Keitel-Kreidt, Kilpatrick y Laborde, 2012).

Esta importancia de aprender a resolver los problemas combinatorios más elementales en cualquier ámbito, la han llevado a su inclusión dentro de los currículos de matemáticas de los niveles de secundaria, basándose también en propuestas curriculares como las realizadas por Glayman y Varga (1975), Engel (1973), o Engel, Varga y Walser (1976), que han apoyado la enseñanza de la combinatoria y diseñado actividades, juegos y materiales para llevar a cabo esta enseñanza. A partir de la combinatoria es siempre posible proponer situaciones didácticas abiertas basadas en temas de actualidad que sean de interés y motivación para el alumno, como las propuestas por Espinel (1999).

Por su parte, también Kapur (1970) enunció una serie de razones en su tiempo, y que llegan a nuestros días con absoluta actualidad, para justificar la enseñanza de la combinatoria en los centros educativos. Entre ellas, su empleo para ejercitar a los alumnos en la enumeración, el recuento, la elaboración de conjeturas, la generalización, la optimización, etc. Además, el mismo autor indica que por medio de la combinatoria el estudiante puede crear la costumbre de examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor alternativa, contribuyendo así al pensamiento sistémico.

Sin embargo, el papel de la combinatoria ha sido tradicionalmente poco significativo dentro de los contenidos del currículo español. Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) indican que la enseñanza de la combinatoria en los niveles no universitarios está aislada en el currículo de matemáticas en España. Este hecho, junto con la dificultad propia del tema, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y que, cuando se enseña, se base principalmente en el aprendizaje de fórmulas y en la realización de ejercicios estereotipados. Según Roa (2000), en un estudio sobre el razonamiento combinatorio de estudiantes con preparación matemática avanzada, incluso a este nivel los estudiantes encuentran que los problemas combinatorios son difíciles. Es más, según Navarro-Pelayo (1994), el tema de combinatoria es considerado difícil por los propios profesores que lo enseñan.

Todo lo anterior contrasta con las recomendaciones propuestas por los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), de reconocido prestigio y trascendencia internacional, donde se menciona de forma explícita la utilización de la combinatoria en la probabilidad y en otros contenidos matemáticos. Por ejemplo:

- Dentro del Capítulo 3, sobre los estándares para la enseñanza de las Matemáticas durante toda la etapa educativa obligatoria y el bachillerato, se abre un apartado titulado *"¿Dónde está la Matemática Discreta?"*. En él se insiste en que, como una rama muy activa dentro de las matemáticas contemporáneas y de gran aplicación dentro de los negocios y la industria, la matemática discreta debería ser una parte importante dentro currículo de matemáticas y que debería desarrollarse integrada dentro de todas las demás ramas (p. 31).
- Más adelante, para la etapa que va de 3º ESO a 2º Bachillerato, y refiriéndose de forma más específica a la probabilidad, también se indica que los estudiantes deberían aprender a identificar sucesos mutuamente excluyentes, el suceso unión y sucesos condicionales, y a utilizar sus conocimientos sobre combinaciones, permutaciones y técnicas de recuento para calcular las probabilidades asociadas a tales sucesos (p. 331).

## 1.5 LA COMBINATORIA EN EL CURRÍCULO

A pesar de las conclusiones que se han venido extrayendo de las investigaciones realizadas al respecto de las teorías del desarrollo cognitivo y de las razones expuestas por Kapur a favor de la presencia de la Combinatoria en las aulas, al analizar el currículo español se observa que no se ha dado tradicionalmente mucha importancia a este tema (Espinoza, 2011; Millán, 2013; Sriraman y English, 2004).

Actualmente, el currículo está inmerso en un periodo de actualización con la entrada en vigor de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), y que quedará totalmente implantada para el presente curso escolar 2016/2017. Los estudiantes que forman parte de la muestra han seguido el currículo anterior (MEC, 2006a) durante su educación primaria. Aunque la LOMCE se comenzó a implantar el pasado curso en 1º y 3º curso, el cuestionario se pasó en el mes de Febrero, cuando aún no se había estudiado ni probabilidad ni combinatoria. Por tanto, sus únicos conocimientos de combinatoria son los contenidos en el citado currículo de primaria; para el caso de los alumnos de 2 º y 3º curso, también sus conocimientos al respecto son de los años anteriores, donde la normativa vigente es el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006b).

A continuación comentamos estos decretos, junto con los cambios previstos por la LOMCE, donde se otorga mayor importancia a la combinatoria. También añadimos el resumen de los contenidos de Bachillerato que, presumiblemente, cursarán los estudiantes de la muestra.

*Educación Primaria*

A nivel estatal, los contenidos matemáticos para Educación Primaria vienen fijados por el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico en eta etapa (MECD, 2014).

Concretando dentro de los contenidos previstos para el área de matemáticas, puede observarse como en ningún momento se hace mención a la combinatoria de forma explícita. Únicamente se subraya el uso de la multiplicación como técnica de recuento dentro del Bloque 2, relativo a Números. En el Bloque 5, sobre Estadística y Probabilidad, está prevista la iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades de un suceso, en la forma siguiente:

- *Primer Ciclo: Azar y probabilidad:* Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible, pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.
- *Segundo Ciclo: Azar y probabilidad:* Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.
- *Tercer Ciclo: Azar y probabilidad:* Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

Por tanto, en la educación primaria se plantean problemas elementales de probabilidad, en los cuáles se podrían utilizar técnicas sencillas, como la enumeración sistemática, la regla del producto o el diagrama en árbol. En su estudio de libros de texto de educación primaria para este periodo, Gómez (2014) encuentra diagramas en árbol en dos series de libros de texto de tres analizadas para 2º y 3º ciclo y también propuestas de actividades de enumeración en las dos series y en todos los ciclos.

*Educación Secundaria*

Respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2006b) incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, Estadística y probabilidad:

- *Primer Curso:* Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- *Tercer Curso:* Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

Observamos que en estas directrices no hay contenidos formales de combinatoria hasta el tercer curso. No obstante, algunos libros de texto incluyen tareas que pueden considerarse como tales, como se mostró en el estudio de Espinoza (2011). Reproduciendo una de las tablas de este autor, se observa que el número de dichas tareas en los cursos primero y segundo es, de todos modos, muy pequeño.

Tabla 1.5.1. Distribución de tareas combinatorias según editorial y curso (Espinoza, 2011, p.43)

| | Curso | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Colección | Primero | Segundo | Tercero | Cuarto | Total |
| SM | 8 | 7 | 18 | 51 | 84 |
| Anaya | 2 | 5 | 9 | 65 | 81 |
| Santillana | 25 | 0 | 12 | 25 | 62 |
| Total | 35 | 12 | 39 | 141 | 227 |

Un cambio en la normativa viene dado por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (MECD, 2015). Los estudiantes de la muestra seguirán este currículo en el 4º curso por lo que analizamos también el contenido de dicho curso.

Tabla 1.5.2 – Contenidos de combinatoria en la ESO (MECD, 2015), Bloque 5: Estadística y Probabilidad

| Nivel educativo | Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje |
|---|---|---|---|
| 1º y 2º ESO | Tablas y diagramas de árbol sencillos. | | 4.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos.. |
| 3º ESO<br>Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas | Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número. | 4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento. | 4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales. |
| 4º ESO<br>Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas | Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.<br>Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. | 1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.<br>2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias. | 1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.<br>2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.<br>2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia. |
| 4º ESO<br>Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas | Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.<br>Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol. | 3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia. | 3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos. |

La etapa de Educación Secundaria Obligatoria se organiza en materias y comprende dos ciclos: el primero de tres cursos escolares y el segundo de uno. Todos los alumnos deben cursar Matemáticas dentro del bloque de asignaturas troncales en los cursos primero y segundo. También dentro de este bloque, pero como materia de opción, todos los alumnos deberán elegir entre Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas o bien Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas en el tercer curso. Y, finalmente, en cuarto curso, los alumnos deberán escoger entre la opción de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato, que conlleva cursar Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, y la opción de enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional, que conlleva cursar Matemáticas Orientas a las Enseñanzas Aplicadas, sin que sean vinculantes las opciones cursadas en tercer curso.

Comenzando, en primer lugar, por los contenidos de Matemáticas para 1º y 2º ESO, dentro del Bloque 5: Estadística y Probabilidad, se encuentra la construcción de espacios muestrales y cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace para experimentos sencillos, pero asociados a recuentos por enumeración, diagramas de árbol y tablas de contingencia más que a combinatoria.

En el siguiente curso, 3º ESO, dentro de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y como contenidos del Bloque 5: Estadística y Probabilidad, también se incluye la enumeración de todos los sucesos elementales posibles mediantes tablas de contingencia o diagramas de árbol, pero además se contemplan otras técnicas, como el cálculo del factorial de un número natural y su aplicación a las permutaciones.

En esta misma opción, pero en 4º ESO, se completan los contenidos haciendo una introducción a la combinatoria con variaciones, permutaciones y combinaciones. Sin embargo, en la opción de Matemáticas Orientas a las Enseñanzas Aplicadas, únicamente hay una mención al cálculo de probabilidades mediante a regla de Laplace con apoyo de diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos en el último Bloque de 4º ESO. Ninguna alusión en 3º ESO.

*Bachillerato*

Finalmente, analizaremos los contenidos del Bachillerato, que seguirán algunos de los estudiantes de nuestra muestra en el futuro. Viene también regulado por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (MECD, 2015).

Tabla 1.5.3 – Contenidos de combinatoria en el Bachillerato (MECD, 2015)

| Nivel educativo | Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje |
|---|---|---|---|
| Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I<br>Bloque 4: Estadística y Probabilidad | Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. | 3. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales. | 3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. |
| Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II<br>Bloque 4: Estadística y Probabilidad | | 1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad. | 1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.<br>1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. |
| Matemáticas II<br>Bloque 5: Estadística y Probabilidad | Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. | 1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real. | 1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.<br>1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.<br>. |

El Bachillerato abarca dos cursos y se desarrolla en modalidades diferentes. En lo concerniente a matemáticas, se contemplan dos opciones según la modalidad elegida: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, dentro del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, y Matemáticas, dentro del Bachillerato de Ciencias.

Comenzando por Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, tanto en 1º como en 2º curso, la aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades aparece claramente marcada dentro de los contenidos del Bloque 4: Estadística y Probabilidad. Sin embargo, en las Matemáticas del Bachillerato de Ciencias, no es hasta 2º curso cuando se marca la aplicación de la combinatoria para el cálculo de probabilidades como contenido dentro del Bloque 5: Estadística y Probabilidad.

## 1.6 OBJETIVOS DEL TRABAJO

En resumen, los estudiantes de la muestra, que forman parte de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria, no han estudiado combinatoria de manera formal, sino que lo harán en los siguientes cursos, de acuerdo al nuevo currículo; no obstante, algunos habrán tenido contacto con técnicas de enumeración sistemática y con las reglas de la suma y producto en su Educación Primaria o en los cursos anteriores.

El objetivo principal del presente trabajo es analizar el razonamiento actual de estos estudiantes para evaluar la dificultad que para ellos pueden tener las técnicas combinatorias que estudiarán en los siguientes cursos. Este objetivo se descompone en:

- O1. Analizar la dificultad relativa de los problemas de permutación, medida en porcentaje de respuestas correctas, en función del curso escolar y de las variables de tarea: tipo de permutación y modelo implícito del enunciado, ya que se había detectado en trabajos previos su influencia en dicha dificultad.
- O2. Analizar las estrategias que usan los estudiantes para resolver este tipo de problemas. No se espera que los estudiantes usen las operaciones combinatorias, pero se puede estudiar si llegan a dar una fórmula, usando previamente las reglas de la suma y producto; si realizan una enumeración sistemática o no sistemática; si se apoyan en un esquema gráfico, o cualquier otra estrategia.
- O3. Identificar los principales conflictos semióticos latentes en las respuestas y estrategias de los estudiantes. Se verá si se confunde el tipo de elementos y si se tiene en cuenta el orden y la repetición.
- O4. Comparar todos estos resultados con los obtenidos por Navarro-Pelayo (1994). Esta autora utilizó todas las operaciones combinatorias, pero respecto a las permutaciones su estudio es más limitado que el nuestro. Estudiaremos si se mantienen los porcentajes de repuestas correctas o encontramos cambios.

# CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS Y ANTECEDENTES

## 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo exponemos las bases que fundamentan la investigación, constituidas por el marco teórico y los antecedentes de nuestro trabajo.

En primer lugar se describen brevemente los elementos que utilizaremos del enfoque onto-semiótico, y que son los siguientes: las ideas de significados institucionales y personales, la concepción de la evaluación, la clasificación de objetos matemáticos y las ideas de función semiótica y conflicto semiótico.

Siguiendo por los antecedentes, se comienza describiendo las primeras investigaciones, realizadas por Inhelder y Piaget y Fischein. A continuación, se analizan otras investigaciones que han estudiado las variables que determinan la dificultad de los problemas combinatorios, los errores más frecuentes, las estrategias de los estudiantes y el currículo.

## 2.2 MARCO TEÓRICO

Utilizaremos algunas ideas del enfoque onto-semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007), que asume que los objetos matemáticos se originan de las prácticas realizadas durante la resolución de determinados tipos de problemas.

En nuestro trabajo consideramos los problemas combinatorios, prácticas y objetos que se originan de su resolución. Ejemplos de problemas combinatorios, como los de enumeración, existencia o recuento se han citado en el Capítulo 1. El conjunto de prácticas ligadas a la resolución de problemas de los que surge un objeto sería el significado del objeto. El significado de la combinatoria sería, por tanto, el conjunto de prácticas ligadas a la resolución de problemas combinatorios; en nuestro estudio el significado de las permutaciones sería el conjunto de prácticas que se vinculan a la resolución de estos problemas y que tratamos de determinar en nuestro trabajo.

*Significados institucionales y personales*

En el marco teórico, se diferencia entre el *significado institucional* (conjunto de prácticas, que sobre un cierto campo de problemas es compartido dentro de una institución) y el *significado personal* (conjunto de prácticas que adquiere una persona y puede ser diferente al aceptado dentro de la institución). Así diferenciamos el significado de la combinatoria y de las permutaciones en la institución docente y el que le pueda asignar un estudiante en nuestra investigación.

Dentro del significado personal se diferenciará el global (todo lo que el estudiante puede hacer o decir de las permutaciones), el evaluado (el que conseguimos estudiar mediante los problemas planteados) y el logrado (la parte del significado personal declarada en la evaluación y que sea acorde con la matemática).

*Evaluación de la comprensión*

Este trabajo es un estudio de evaluación, por lo que conviene aclarar que, en el enfoque onto-semiótico, la evaluación de la comprensión es el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales.

De acuerdo a Godino (1996), se consideran dos ejes al evaluar la comprensión:

- El primero incluye los componentes del conocimiento que se pretende evaluar, en nuestro caso, el razonamiento de los estudiantes al resolver problemas de permutaciones con y sin repetición. Concretamente se analiza si la respuesta dada es correcta o no y las estrategias aplicadas para resolver el problema.
- El segundo eje, citado por Godino, indica el nivel necesario para considerar que un estudiante alcanza la comprensión; en nuestro estudio será suficiente alcanzar la solución correcta, aunque no se empleen fórmulas combinatorias. También valoraremos el uso de estrategias de enumeración sistemática.

*Clasificación de objetos matemáticos*

En las prácticas matemáticas intervienen diferentes objetos en forma explícita o implícita. Para analizar las prácticas realizadas en la resolución de problema, los objetos matemáticos se clasifican en los siguientes tipos:

- *Situaciones-problemas:* son las aplicaciones extra-matemáticas o matemáticas de las que surge el objeto. En nuestro trabajo nos centramos en problemas combinatorios de permutaciones con y sin repetición en diferentes contextos.

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, tablas, gráficos). Para nuestra investigación, algunos ejemplos son los términos selección, muestra, repetición, el diagrama en árbol o esquemas gráficos, los símbolos matemáticos, letras o tablas usadas para el recuento.
- *Conceptos* (son introducidos mediante definiciones o descripciones). Ejemplos para nuestra investigación serán: permutación, conjunto, elemento, tamaño, muestra, reemplazamiento, orden.
- *Proposiciones* (son los teoremas y propiedades que ligan los conceptos). Por ejemplo, que si se invierte una permutación se llega al conjunto original o que el número de elementos es el mismo en el conjunto original y el permutado.
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, estrategias). Son todas las técnicas usadas en la resolución del problema. En nuestra investigación nos interesamos en particular por las estrategias o formas de abordar el problema por parte del estudiante. Consideraremos como estrategias las citadas en los antecedentes de nuestra investigación y que se describen un poco más adelante.
- *Razonamientos* o argumentos usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, o las soluciones a los problemas. Un ejemplo es la recursión, donde el estudiante reduce el problema a otro más sencillo y usa la solución de este para resolver el problema original. Esto lo hace disminuyendo cada paso una unidad, hasta llegar a una permutación de un solo elemento.

*Función semiótica y conflicto semiótico*

Según Godino (2002), en el trabajo matemático intervienen funciones semióticas o correspondencias con tres componentes: la *expresión* (signo); el *contenido* (significado de tal signo, lo representado) y un *criterio o regla de correspondencia* que sirve para interpretar la relación entre expresión y contenido. Es decir, en el trabajo matemático son necesarios una serie de pasos en los que se hace una interpretación o una representación. Cualquier tipo de objeto (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) puede participar en la función semiótica como expresión o contenido.

Las funciones semióticas, generalmente vienen dadas por su expresión, y los otros dos componentes quedan implícitos. Por ejemplo, en la expresión $V_{m,n}$ el estudiante ha de hacer una interpretación, recordando que se refiere a las variaciones ordinarias de $m$

elementos tomados *n* en *n*; y además recordar que *m* es el tamaño del conjunto inicial y *n* el de la muestra que se quiere tomar. Cuando se produce un desacuerdo entre el significado que ha establecido el autor de la función semiótica y el que hace el interpretante de la misma se habla de *conflicto semiótico*. En el ejemplo, el estudiante podría interpretar que la expresión se refiere a las variaciones con repetición o bien intercambiar el significado de los parámetros *m* y *n*.

## 2.3 ANTECEDENTES

### 2.3.1. DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO

Como se indicó en el Capítulo 1, la combinatoria es uno de los pilares más importantes de la matemática discreta. Tanto los problemas combinatorios, como las técnicas que se requieren para resolverlos tienen profundas implicaciones para el desarrollo de otras ramas la matemática. Pero es que además, según Roa, Navarro-Pelayo y Batanero (2001), más allá del interés matemático, el razonamiento combinatorio es un componente del razonamiento de la persona adulta. Es por ello que se han llevado a cabo varias reflexiones e investigaciones desde otras áreas del conocimiento más relacionadas con la psicología que revelan la notoria influencia del razonamiento combinatorio en el desarrollo del pensamiento formal.

#### Estudios de Piaget e Inhelder

Dentro de los estudios más importantes en este campo, destacan los llevados a cabo por Piaget, que investiga y analiza el desarrollo cognitivo de la capacidad combinatoria en los niños y adolescente, en base a su esquema de etapas, y de su teoría constructivista sobre el aprendizaje.

Piaget e Inhelder (1951) estudian la influencia que tienen los esquemas combinatorios para la formación conceptos como azar y probabilidad. A su vez, establecen una clara relación entre el razonamiento combinatorio y el razonamiento probabilístico, en base al hecho de que si la capacidad de razonamiento combinatorio es limitada, el concepto de probabilidad desde la perspectiva clásica sólo se puede aplicar en casos fáciles de enumeración. Téngase en cuenta que para Piaget, comprender el azar consiste en enumerar todas las posibilidades que pueden ocurrir y, al compararlas con un conjunto más reducido con las posibilidades de interés, surge la idea de probabilidad para estos autores. Por tanto, según Piaget, para comprender la probabilidad se necesita poner en práctica el razonamiento proporcional y el combinatorio.

Además, Piaget e Inhelder (1951) describen el desarrollo psicogenético de las operaciones combinatorias en cada uno de los estadios de desarrollo, en base a sus investigaciones, experimentos, observaciones y entrevistas con niños. Para ello les propone juegos en los que tienen que permutar un número pequeño de objetos, emparejar objetos (por ejemplo, vestir muñecas) y hacer mezclas o zumos. Llegan a las siguientes conclusiones:

- En el caso de los preescolares (periodo preoperatorio), los niños sólo pueden hacer algunas variaciones, permutaciones y variaciones de forma empírica, pero sin seguir un método concreto. Proceden por tanteo y repiten elementos, porque no llevan un control de la enumeración.
- Después, durante el período de las operaciones concretas (7-12 años), los niños llegan a encontrar procedimientos más bien rudimentarios de enumeración como el ensayo- error. Si el número de objetos es pequeño, consiguen formar todos los elementos pedidos, aunque pueden repetir alguno.
- Y más tarde, durante la etapa de las operaciones formales, Piaget e Inhelder afirman que los sujetos adquieren la capacidad de utilizar métodos sistemáticos en todos los formatos de la combinatoria: variaciones, permutaciones y combinaciones, dado un determinado conjunto de elementos. Se enumeran todos los casos sin repetir ninguno.

Por otro lado, según Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento hipotético- deductivo actúa mediante técnicas propias de la combinatoria cuando se aplican sobre un conjunto de posibilidades para examinar y enumerar, hasta alcanzar la solución final. Una vez cubierto el periodo en el que se adquieren las operaciones formales, los estudiantes adolescentes descubren de forma espontánea la enumeración sistemática, luego deberían ser capaces de resolver problemas sencillos de combinatoria, aunque no hubieran recibido ningún tipo de instrucción sobre ella. Para Inhelder y Piaget (1955) la capacidad combinatoria es un componente básico del razonamiento formal, ya que es necesario para la lógica proposicional en los adolescentes.

**Estudios de Fischbein**

También son de una gran relevancia los estudios de Fischbein, orientados a analizar los efectos de la instrucción en niños y adolescentes en lo relativo a intuiciones combinatorias, para lo cual se sirvió de experimentos diseñados por él para enseñarla.

Fischbein (1975) destaca mucho la importancia de los contenidos combinatorios, proponiendo incluso una comparación con los relativos a proporcionalidad y correlación. Se centró fundamentalmente en el efecto de la instrucción para conseguir desarrollar la capacidad combinatoria, y para ello diseñó y organizó experimentos específicos en los que se utilizaban de forma especial los diagramas de árbol y ciertos materiales manipulativos. Fischbein consideraba el diagrama de árbol una herramienta de representación sencilla con la que se podían abordar distintos problemas con más elementos cada vez y, además, construir soluciones a otros problemas similares a partir de la solución de uno inicial. Tenía la hipótesis de que el uso de los métodos de representación propicios podía acelerar el aprendizaje de una determinada estructura conceptual, en este caso, la combinatoria.

Por otro lado, Fischbein (1975) también da mucha importancia a la intuición como componente natural de la inteligencia. Para Fischbein, la intuición es un proceso cognitivo que participa de forma directa en las acciones mentales, e incluso en las prácticas de los sujetos, debido a sus características intrínsecas. Las intuiciones son inmediatas, esto es, no surgen tras un periodo de reflexión, sino que normalmente lo hacen de forma espontánea; tienen un carácter global en la medida en que no desgranan cada caso concreto o lo descomponen en partes, sino que van mucho más allá, viendo la cuestión en conjunto; también tienen la capacidad de extrapolar y muchas veces se usan para hacer predicciones; son tan profundas y personales que el sujeto que las experimenta no necesita una demostración, sino que es como si lo sintiera; y, finalmente, cuando muchas intuiciones se consiguen relacionar entre sí dan lugar a una estructura de razonamiento. Las intuiciones son persistentes y una vez formadas cuesta mucho trabajo cambiarlas.

Fischbein llegó incluso a clasificar las intuiciones en primarias, que eran aquéllas que aparecen sin más de la propia experiencia, y en intuiciones secundarias, que se han formado de una forma algo más artificial, generalmente por la educación recibida en los centros educativos. No obstante, las intuiciones secundarias tienen todas las características propias de una intuición, es decir, no se trata de aceptar contenidos sin más, sino que llega un momento en que se transforman en convicciones, resulta evidente, se cree de forma personal. Por este motivo, para que un contenido se transforme en intuición no suele ser suficiente con una clase magistral, sino que el alumno debe ponerlo en práctica en su día a día a lo largo de su desarrollo intelectual.

Tras todas las investigaciones que Fischbein y sus colaboradores llevaron a cabo, llegaron a dos conclusiones principales:

- La capacidad de resolver problemas de combinatoria no se alcanza de forma espontánea ni siquiera en el nivel de las operaciones formales, luego los estudiantes requieren recibir instrucción para ello. Se pueden formar intuiciones primarias incorrectas si no se educa el razonamiento combinatorio; de ahí el interés de enseñar este tema de una forma simple desde lo antes posible.
- En el periodo de las operaciones concretas ya se puede promover el manejo de la combinatoria, de forma que se motive la aparición de intuiciones secundarias correctas; luego a partir de los 7-8 años se podría trabajar la enumeración con ayuda del diagrama en árbol.

### 2.3.2. ESTRATEGIAS DE ENUMERACIÓN

Aunque la capacidad de enumeración sistemática se supone adquirida al llegar el niño al periodo de las operaciones formales, hay estudios en los que se pone de manifiesto que esta capacidad no siempre se alcanza.

Roa (2000) describe las investigaciones que se centran en las estrategias de enumeración utilizadas por los niños. Entre ellos encontramos a Maury y Fayol (1986), quienes analizan las estrategias de niños de 9-10 años, como sistemáticos y no sistemáticos. Los primeros son generalmente alumnos con buen rendimiento en matemáticas. English (1991) propone a niños de 4-9 años la tarea de combinar faldas y camisas para vestir un muñeco que se diferenciaban en el color. A partir de los 7 años mejoran sus estrategias, lo que no se logra en los más pequeños. En otro trabajo, English (1993) estudia en niños de 7-12 años si la familiarización con problemas manipulativos facilita la resolución de problemas, viendo que los niños adaptan las estrategias que les proporcionan éxito cuando se les aumenta la dificultad de la tarea. Otras investigaciones similares son las de Maury (1986) con niños de 9-10 años, Mendelshon (1981) con alumnos de 9 a 12 años y Scardamalia (1977) con alumnos de 8 a 15 años y adultos.

A continuación presentamos un resumen de las diversas estrategias intuitivas de enumeración identificadas por los autores citados:

1. Selección al azar de los elementos dados o ensayo- error; no se observa ningún intento de búsqueda de un sistema y se repiten elementos.
2. Se usa un procedimiento de tanteo, pero ahora los elementos que previamente han sido seleccionados, no vuelven a utilizarse.
3. Estrategia intermedia. Se busca un procedimiento; por ejemplo, se permutan los elementos de modo cíclico, como ARCE-RCEA-CEAR-EARC.
4. Uso de un "elemento constante" a partir del cual se forman las demás permutaciones, aunque puede ser incompleto: ARCE, AREC, ACRA; pero no se termina.
5. Estrategia completa. Si se forman todas las permutaciones de forma sistemática.

### 2.3.3. ERRORES EN EL RAZONAMIENTO COMBINATORIO

Según Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997), para poder evaluar el razonamiento combinatorio es de especial relevancia el poder identificar con claridad los errores que los alumnos cometen mientras buscan las soluciones.

A continuación, se expone una clasificación de los errores más comunes en problemas combinatorios contemplando los distintos modelos de selección, colocación y partición. Dichos errores han sido identificados en la investigación previa, muchos de ellos en la de Navarro-Pelayo (1994).

*Cambiar el tipo de modelo combinatorio*

Este error consiste en resolver un problema confundiendo el modelo combinatorio que va implícito en él; fue encontrado en Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000).

Como ejemplo, supongamos un conjunto de ocho pares de calcetines de colores y una mesita de noche con dos cajones para guardaros. Antes la pregunta: ¿de cuántas formas podrían distribuirse los calcetines entres los dos cajones de la mesita?, muchas veces puede dar la sensación de que tiene que haber cuatro pares en cada cajón, entendiendo el problema bajo el modelo de partición, cuando en realidad podría quedar un cajón con más calcetines que otro, incluso podría quedar uno de los cajones vacío, entendido bajo el modelo de colocación.

*Error de orden*

Este error fue descrito por Fischbein y Gazit (1988). En esencia, consiste en confundir las variaciones y las combinaciones, especialmente en lo que se refiere al orden de los elementos; es decir, no tener en cuenta el orden en el recuento cuando hay que hacerlo y tenerlo en cuenta cuando no hay que hacerlo.

Por ejemplo, cuando a la hora de elegir una pareja de colores entre un conjunto de cuatro, supóngase amarillo (A), verde (V), rojo (R) y naranja (N), para fabricar lápices de dos colores, se considera que la combinación AV y VA da lugar a dos lápices diferentes, cuando en realidad un lápiz que lleve los colores amarillo y verde en sus extremos es el mismo lápiz, aunque se le dé la vuelta.

*Error de repetición*

Este error es descrito por Navarro-Pelayo (1994) y puede darse en dos formatos: o se repiten los elementos en problemas donde no es posible hacerlo, o no se repiten cuando sí hay que hacerlo.

Como ejemplo del primer caso, dadas las cifras 1, 2, 3, se requiere saber cuántos números diferente pueden formarse con ellas y entre las soluciones aportadas se encuentran algunas como 111, 112, 323, etc.

*Confusión de los objetos*

De nuevo se observa un tipo de error descrito por Navarro-Pelayo (1994) y que puede darse en dos formatos: o se consideran iguales elementos que en realidad son distinguibles, o se consideran indistinguibles elementos que son diferentes.

Para dar un ejemplo, consideremos dos huevos de gallina, color marrón, exactamente iguales, los cuales van a colocarse en una huevera con cuatro huecos. ¿De cuántas formas podrían distribuirse en la huevera? Este tipo de error podría surgir si al hacer el recuento se consideran diferentes los dos huevos.

*Enumeración no sistemática*

También este tipo de error fue descrito por Fischbein y Gazit (1988). En este caso, consiste en resolver los problemas utilizando una enumeración aleatoria, sin aplicar un método concreto, por puro ensayo- error, sin un procedimiento recursivo adecuado y, por ende, alcanzando sólo algunas de las soluciones correctas, pero no todas.

Para ilustrarlo, considérense las palabras que se pueden formar con las letras E, F, T, U y como solución la siguiente secuencia: EFTU, TUFE, TEFU, EUTF, UEFT, FETU, UTFE. Evidentemente faltan muchas, pero al no seguir un método recursivo, es complicado saber el momento en el que ya se han construido todas las palabras posibles.

*Respuesta intuitiva incorrecta*

Se trata, en este caso, de un error en el que la intuición juega un papel fundamental y, en base a ella, se aporta una solución numérica incorrecta que, además, no se justifica desde el punto de vista formal o algebraico. Aparece en Navarro-Pelayo (1994).

Por ejemplo, si cuatro personas optan a ocupar las cuatro primeras posiciones de la lista de un partido político para las próximas elecciones, ¿de cuántas formas podría ordenarse tal lista? Y ante esta pregunta, la solución que se aporta, sin más, es: 16.

*No recordar la fórmula*

A veces también se puede producir errores externos a la interpretación del problema. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando no se recuerda la fórmula de una determinada operación combinatoria, aunque haya sido correctamente reconocida dentro del problema. También ocurrió en Roa (2000).

Para ilustrarlo, considérese el problema de determinar de cuántas formas podría ser el podio de una carrera de tres atletas que optan a ganar el oro, la plata y el bronce en unos Juegos Olímpicos. Pero una vez identificada la situación propia de una permutación sin repetición de tres elementos, no se recuerda la fórmula, y se calcula equivocadamente haciendo, por ejemplo, $P_3 = 3^3 = 27$.

*Confundir los parámetros*

Muy relacionado con el anterior, otro error que aparece en Roa (2000) puede ser el de no recordar el significado de los parámetros que constituyen la fórmula, aunque ésta sí se recuerde tras identificar correctamente la estructura combinatoria del problema.

Considérese la pregunta: ¿cuántas quinielas de una columna habrá que rellenar para asegurar el acierto de los 15 resultados? Aunque se identifique la estructura combinatoria como una variación de tres elementos (1, X, 2) con repetición de orden 15 y se recuerde la fórmula, podría no recordarse qué lugar ocupaba en ella cada uno de los parámetros característicos y calcular equivocadamente: $VR_{15}^{3} = 15^3 = 3375$.

*Error con el diagrama de árbol*

El empleo del diagrama de árbol en la resolución de problemas combinatorios se ha demostrado tremendamente efectivo; sin embargo, su uso no siempre está exento de errores, que pueden ser tanto de construcción como de interpretación.

Como ejemplo, se plantea el problema de elegir el vestuario para asistir a una conferencia. En el armario hay tres camisas, blanca, azul y violeta, y dos pantalones, negro y marrón. Para determinar cuántas posibilidades de elección de un conjunto camisa- pantalón hay se podría construir un diagrama de árbol erróneo, como el de la Figura 2.3.1:

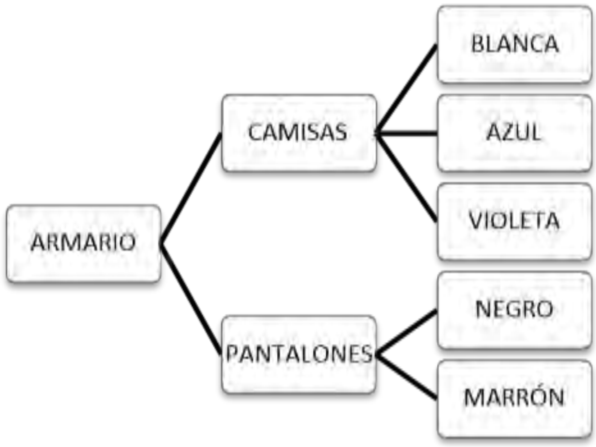


Figura 2.3.1. Diagrama en árbol construido equivocadamente

*Confusión en el tipo de celdas*

Por último, este error está relacionado con el tipo de celdas y también puede darse en dos formatos: o no distinguir celdas que realmente son distinguibles, o distinguir celdas que son iguales y es descrito por Navarro-Pelayo (1994).

Valga como ejemplo el caso de una familia de seis miembros que deciden repartirse las compras de la semana. Un grupo de tres irá a comprar a la carnicería y otro grupo de tres irá a comprar a la frutería. ¿De cuántas formas pueden dividirse? Se incurre en este error cuando se determinan de forma acertada los posibles grupos, pero sin distinguir en cada caso a cuál le corresponde visitar la carnicería y a cuál la frutería, es decir, cuando se consideran iguales las dos celdas, en este caso concreto tiendas; no se distinguen, siendo en realidad dos establecimientos diferentes que venden productos que no tienen nada que ver.

### 2.3.4. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS

Otras investigaciones se centran en estrategias más elaboradas de resolución de problemas más complejos. Para la resolución de los problemas combinatorios resultan de interés, como no podía ser de otra manera, las estrategias generales de resolución de problemas.

En este apartado se analizan algunas de las más habituales y otras específicas de los problemas combinatorios (Roa, 2000; Roa, Batanero, Godino y Cañizares, 1997).

*Fijación de variables*

Según Hadar y Hadass (1981), la fijación de una o algunas de las variables es habitual cuando se pretende consolidar un método coherente para enumerar en los problemas combinatorios. Por ejemplo, para determinar cuántos números diferentes se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, conviene fijar dos de ellas y permutar las restantes. Primero se fijarían 12 y después 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 41, 43. La suma total de las formaciones que resultan sería la solución completa del problema. Obsérvese como en realidad, para fijar las dos primeras cifras, se comienza fijando la primera: el 1 y después el 2, 3, 4.

En este caso, la aplicación correcta de esta estrategia consiste en fijar una o algunas de las variables que intervienen para reducir la dimensión del problema, es decir, para encontrar un problema igual, pero con los parámetros característicos más sencillos y así no modificar la estructura combinatoria. Una vez resueltos, se utilizan para generalizar y encontrar la solución al problema inicial.

La aplicación incorrecta suele darse por varias razones. La más obvia es cuando no se realiza de forma correcta la fijación inicial de variables; pero aun cuando se ha ejecutado este primer caso de manera correcta, pueden realizarse generalizaciones incorrectas o incluso no tener en cuentas los casos ya fijados previamente, sino sólo los que restan por fijar, incurriendo en soluciones erróneas o incompletas.

*Uso de la regla de la suma*

La regla de la suma es especialmente interesante cuando a partir de un problema combinatorio se pueden construir una serie de subconjuntos excluyentes entre sí, cuya unión representa de forma exhaustiva al problema inicial.

Por ejemplo, se podría considerar el caso de que dentro de una clase haya tres candidatos, José, Nerea y David, para ocupar los cargos de delegado, subdelegado y vocal. ¿De cuántas formas diferentes se podrían repartir los cargos? Una posibilidad es la de construir subconjuntos en base a un cargo ya ocupado, por ejemplo, el de delegado. Si José fuera delegado, nos quedaría un subconjunto formado por Nerea y David, del que surgen dos posibilidades de reparto. Igualmente si la delegada fuera Nerea y, del mismo modo, si el delegado fuera David. De cada subconjunto surgen dos posibilidades, luego la suma de todas ellas es la solución del problema inicial.

La aplicación correcta de esta estrategia exige que la división del conjunto inicial se haga adecuadamente en subconjuntos mutuamente excluyentes entre sí, que en cada uno de ellos se respete la estructura combinatoria del inicial y que se consideren todas las posibilidades. La aplicación incorrecta, por el contrario, suele suponer una distribución en subconjuntos que no son completamente excluyentes entre sí, no cubren la totalidad del problema inicial o se resuelven como si tuvieran una estructura combinatoria diferente.

*Uso de la regla del producto*

Finalmente, la regla del producto será necesaria para la resolución de problemas compuestos en los que se hace necesario construir productos cartesianos de conjuntos.

Se toma como ejemplo el problema 2 de Roa (2000): un niño dispone de nueve cartas numeradas con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 junto con otras tres con las figuras sota, caballo y rey. Entonces, ¿de cuántas maneras se pueden alinear cuatro de estas doce cartas de forma que siempre estén presentes las tres figuras? Se trata, por tanto, de permutar las tres cartas con figura y otra con un número, luego por cada número habrá $4! = 24$ posibilidades. Pero como, por otro lado, hay nueve números, aplicando la regla del producto resulta un total de $24 \cdot 9 = 216$ maneras diferentes de alinear las cuatro cartas.

La aplicación correcta de la estrategia se debe hacer sobre un contexto adecuado en que se requiera determinar el número de posibilidades de un producto cartesiano de diferentes conjuntos, cuyos elementos son conocidos. Sin embargo, la aplicación incorrecta supone que el contexto del problema no requiera la regla del producto, no se hayan identificado correctamente los subconjuntos que se multiplican o simplemente no se haya determinado bien el producto cartesiano.

*Traducción del problema en otro más sencillo equivalente*

Un problema puede resultar complicado de abordar por su tamaño, por el número de elementos que entran en juego, por el número de posibilidades que se pueden construir a partir de él, etc., por lo que puede ser útil transformarlo en otro más sencillo, en el que se mantenga la estructura, pero, de alguna forma, se consiga reducir la dimensión.

Como ejemplo, supongamos el problema de encontrar todas las formas en las que se pueden ordenar las letras A, B, C, D y E. A priori, da la sensación de que son demasiadas letras y que el número de ordenaciones es enorme. Podría entonces transformarse en un problema similar, pero más sencillo, por ejemplo considerando sólo las letras A, B, C. Esto permite encontrar un patrón de construcción con más facilidad, como puede ser el de la enumeración sistemática o el diagrama árbol que, posteriormente, se podría generalizar para el problema inicial con cinco letras.

La aplicación correcta de la estrategia deriva, generalmente, en una reducción de la dimensión del problema, manteniendo siempre la misma estructura combinatoria que subyace en el problema inicial. Sin embargo, una aplicación incorrecta de la estrategia conlleva sobre todo una variación en la estructura combinatoria con respecto al problema original. Un cambio en las características de los elementos o en el contexto del problema no tendrían la mayor importancia, pero modificar la estructura intrínseca del problema dará lugar a soluciones incorrectas o incompletas.

*Descomposición de un problema en subproblemas*

En cierto modo, esta estrategia se puede relacionar con la anterior, aunque también en muchos casos se puede aplicar de forma independiente. Básicamente consiste en dividir el problema inicial en subproblemas más sencillos, cuyas soluciones individuales combinadas dan lugar a la solución del problema de cabecera.

Como ejemplo, dada una bolsa con tres bolas de colores naranja, verde y rosa, se quisiera saber de cuántas formas diferentes se puede realizar la extracción de las bolas sin reposición intermedia. Para ello, es más sencillo considerar tres subproblemas menores en los que se cuenta cuántas extracciones se pueden realizar si sólo hay dentro de la bolsa dos bolas; es decir, primero se cuentan las extracciones considerando que la bola naranja está fuera; después se cuentan las extracciones posibles si la verde está fuera; y, por último, se cuentan las extracciones posibles si la rosa está fuera. Finalmente, sumando todas las soluciones particulares, se obtiene la solución general.

La aplicación correcta de esta estrategia supone la descomposición del problema en otros más pequeños, esto es, más sencillos y con los parámetros característicos de menor tamaño. Además, conservan intacta la estructura combinatoria del problema primigenio y cubren completamente entre todos ellos su abanico de soluciones. Por otro lado, la aplicación incorrecta de esta estrategia suele darse cuando el conjunto de los subproblemas no abarca en su totalidad todas las posibilidades del problema original o porque en alguno de ellos se ha modificado la estructura combinatoria.

*Estudio de Roa (2000)*

Finalmente, casi podríamos calificar de preceptiva la necesidad de recoger en este apartado la tesis doctoral sobre razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada de Roa (2000). Tras los resultados alcanzados en la tesis doctoral de Navarro- Pelayo con alumnos de secundaria, surgían cuestionamientos entorno al estudio de qué estrategias favorecen la resolución de los problemas.

Para indagar este punto, esta investigación también analizó las estrategias de resolución, dificultades y errores sobre una serie de problemas sencillos de combinatoria presentados mediante cuestionarios escritos, pero afrontados en este caso por estudiantes de los cursos finales de la antigua Licenciatura en Matemáticas. El autor contribuyó a identificar muchas de las estrategias que hemos descrito en este apartado y comparó el éxito en los problemas en función del tipo de estrategias empleadas.

La conclusión hizo patentes de nuevo las dificultades de los estudiantes en su resolución, a pesar del carácter elemental de los problemas planteados, lo cual se atribuye a las complejas estructuras que subyacen en los procedimientos de resolución de este tipo de problemas y a notorias deficiencias en la enseñanza de la combinatoria, que suele primar el estudio de las fórmulas en detrimento de otros componentes mucho más esenciales del razonamiento combinatorio. Sin embargo mostró la importancia de unas estrategias productivas, pues los estudiantes que usaron la división del problema en partes, la traducción del problema, fijación de variables y la recursión tuvieron mucho mayor éxito. Una conclusión del autor es tratar de cultivar estas capacidades en los estudiantes, pues son útiles no sólo en combinatoria, sino que tienen una aplicabilidad general a la adquisición de destrezas de resolución de problemas.

### 2.3.5. VARIABLES EN LOS PROBLEMAS COMBINATORIOS

Otras investigaciones se centran en identificar variables que afectan a la dificultad de los problemas. Entre ellas se encuentran las de Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997), Fischbein y Gazit (1988) y Navarro-Pelayo (1994). Las variables que se han identificado han sido las siguientes.

*Operación combinatoria*

El tipo de operación combinatoria es uno de los elementos que afectan a la dificultad del problema, según ciertos autores. Por ejemplo Fischbein y Gazit (1988) indican que los problemas más sencillos son los de permutaciones, porque en todas las configuraciones intervienen los mismos elementos, y los más difíciles son los de combinaciones, porque los estudiantes no comprenden la importancia del orden en este tipo de problemas.

Del mismo modo, en Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997), la operación combinatoria más sencilla fue la permutación, seguida por la combinación, variación y permutación con repetición (todas ellas de dificultad parecida); la más difícil la variación con repetición.

*Modelo combinatorio*

A parte de las operaciones combinatorias necesarias para resolver cada problema y de las características de los elementos que las componen, los problemas también pueden clasificarse en función de los modelos combinatorios que se describieron en el Capítulo 1. Esta cuestión condicionó la dificultad de los problemas en las investigaciones de Navarro- Pelayo (1994) y Roa (2000), siendo el más sencillo el modelo de selección y los otros dos modelos más difíciles:

- *Modelo de selección:* en estos problemas se enfatiza la idea de muestreo, que puede ser con reemplazamiento o sin él; sistemático o mediante ensayo- error. El modelo de selección es el que se usa habitualmente en la enseñanza para definir las operaciones combinatorias.
- *Modelo de colocación:* en este caso, son problemas en los que una serie de elementos deben colocarse en celdas o casillas, independientemente de que sean distinguibles o no, tanto los elementos como las celdas. No es equivalente al anterior, pues pueden haber muchas más posibilidades (ver Capítulo 1).

- *Modelo de partición:* es la división de un conjunto en varios subconjuntos. Existe una correspondencia biyectiva entre los modelos de colocación y partición, puesto que la partición de un conjunto de $k$ elementos en $n$ subconjuntos es tanto como la colocación de $k$ elementos en $n$ casillas.

*Naturaleza de los elementos del conjunto*

La dificultad del problema depende del tipo de elemento que se combina, según Fischbein y Gazit (1988). Entre los elementos que aparecen en los problemas se pueden encontrar números o letras (que son los más sencillos), personas (de nivel intermedio) y objetos (los más difíciles). La diferencia de dificultad se debe a que es más sencillo identificar cuándo hay que tener en cuenta el orden en el primer tipo de problema que en los otros dos.

En relación con las variables de los problemas combinatorios, merece una mención especial la tesis doctoral sobre la estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria (Navarro- Pelayo, 1994). El objetivo principal de esta investigación fue el de caracterizar las estrategias utilizadas por dos muestras de estudiantes de secundaria para resolver problemas de combinatoria elemental, así como sus dificultades y errores asociados. Una de las muestras estaba formada por alumnos de secundaria con instrucción previa en contenidos de combinatoria; y la otra muestra, de un tamaño muy similar a la primera, estaba formada por alumnos sin instrucción previa. El estudio fue realizado mediante el uso de cuestionarios con problemas combinatorios sencillos. Como conclusión, resultó que los problemas utilizados para la prueba en el cuestionario fueron, en general, difíciles para los estudiantes que los realizaron, con una media de acierto del 40% para la muestra de alumnos instruidos y el 21% en la de los no instruidos, siendo incluso inferior al 10% en algunos problemas concretos. En todos los problemas los resultados fueron mucho mejores en los alumnos con instrucción, de lo que la autora deduce que esta favorece el razonamiento combinatorio.

Esta autora fue la primera que analizó el efecto del modelo combinatorio sobre la dificultad de los problemas, mostrando la mayor dificultad de los problemas de colocación y partición respecto a los de selección. También analiza los errores más comunes, según la clasificación que mostramos en el siguiente apartado.

### 2.3.6. INVESTIGACIONES SOBRE EL CURRÍCULO

Para terminar el Capítulo, se recopilan otras investigaciones llevadas a cabo desde la Universidad de Granada, que resultan de interés para conocer hasta donde se ha llegado en el análisis de la presencia y alcance de la combinatoria y el razonamiento combinatorio en el currículo español.

Uno de estos trabajos fue realizado por Millán (2013). En esta investigación se comienza sintetizando las ideas principales que han destacado la importancia que tiene para el desarrollo del pensamiento formal la enseñanza de la combinatoria y el trabajo del razonamiento combinatorio, en base a una revisión llevada a cabo sobre distintas investigaciones y trabajos que se han elaborado en la Universidad de Granada al respecto del razonamiento combinatorio. Por otro lado, en una segunda parte, se contrasta lo anterior con las directrices impuestas por el currículo oficial en España para las etapas de Primaria, Secundaria y Bachillerato, así como con las recomendaciones establecidas por la NCTM en sus principios y estándares sobre matemáticas.

Una vez analizado el currículo, también es cierto que forma parte del trabajo de las editoriales el plasmarlo en los libros de texto. Un primer trabajo en esta línea es el de Navarro-Pelayo y Batanero (1991), donde se aborda el libro de texto como una institución, en base a la teoría de los significados institucionales y personales, ya que cada libro suele aportar sus propios métodos y procedimientos para abordar los problemas. Por el mismo motivo, no se analiza exclusivamente la unidad didáctica referida a la combinatoria, que en algunos casos podría ni existir, sino que es objeto de estudio cualquier tarea o actividad en la que se requiera aplicar un determinado contenido combinatorio para su resolución.

Continuando con esta línea, se encuentra otra tesis de máster sobre la combinatoria en los libros de texto de matemáticas en Educación Secundaria en España (Espinoza, 2011). El autor encuentra tareas en los textos seleccionados, en las que los estudiantes deben identificar la operación combinatoria o enumerar todos los casos posibles. Además, la mayoría de las tareas son aplicadas a la probabilidad.

Finalmente, está el trabajo de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1991) donde los autores realizan entrevistas a profesores en ejercicio, quienes indican el interés del tema y los recursos que usan en su enseñanza, aunque lo consideran difícil.

De todo lo expuesto se deduce el interés de continuar con la investigación sobre el razonamiento combinatorio, lo que nos justifica el presente trabajo.

# CAPÍTULO 3. ESTUDIO DE EVALUACIÓN

## 3 INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos los procesos de resolución de una muestra de problemas de permutación, por parte de estudiantes de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Para ello describiremos el contexto en que se lleva a cabo el estudio, la muestra de estudiantes participantes y el cuestionario utilizado.

Los resultados se organizan del modo siguiente: en primer lugar, para cada problema se analiza el porcentaje de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas en cada curso y las estrategias empleadas. Seguidamente se comparan los resultados por curso y tipo de problema. Se finaliza con una discusión de las conclusiones.

## 3.1 CONTEXTO ESCOLAR Y MUESTRA DE ESTUDIANTES

Como ya se adelantaba en la introducción, la población sobre la que se realiza el presente estudio la constituyen los estudiantes de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Dentro de este inmenso grupo, la población específica de la que se van a tomar las muestras, son los estudiantes del Instituto de Educación Secundaria Julián Zarco del municipio Mota del Cuervo, en la provincia de Cuenca. Por tanto, trabajamos con una muestra intencional, realizando un estudio exploratorio; no se pretende extender las conclusiones a una muestra más extensa.

Los conocimientos de combinatoria de estos estudiantes se reducen a estrategias intuitivas de enumeración, utilizadas en el tema de probabilidad en el último curso de educación primaria, pues no han recibido enseñanza formal de combinatoria. No obstante, de acuerdo a Fischbein y Gazit (1988) e Inhelder y Piaget (1955), es de esperar un razonamiento combinatorio intuitivo que les permita resolver problemas cuando el número de elementos es pequeño.

Por razones de localización, se limitará el alcance geográfico a este instituto que recibe estudiantes de hasta tres municipios de los alrededores: Los Hinojosos, El Pedernoso y Santa María de los Llanos, aparte de los propios de Mota del Cuervo.

De esta población se toman tres muestras, una por cada nivel educativo. La primera de ellas la componen 23 estudiantes de 1º ESO con edades comprendidas entre los 12-13 años; la segunda está formada por 28 estudiantes de 2º ESO, con edades entre 13-15 años; y, finalmente, la tercera está compuesta por otros 24 estudiantes de 3º ESO, con un rango de edades entre 14-16. A todos ellos se les aplica el mismo cuestionario, con la finalidad de observar si hay un progreso de su razonamiento combinatorio con la edad. No obstante, la media de edad en cada grupo se puede redondear a 12, 13 y 14 años, respectivamente. Se contó con la colaboración de los profesores y del director del centro, así como de estos estudiantes; a todos ellos agradecemos su colaboración.

## 3.2 CUESTIONARIO UTILIZADO

En nuestra investigación se propone un cuestionario sencillo, formado exclusivamente por problemas relativos a permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición. Se eligió esta operación combinatoria aprovechando que era la única mencionada explícitamente hasta 3º ESO en las nuevas directrices curriculares que se terminarán de implantar este curso (MECD, 2015).

En los problemas propuestos se ha variado el tipo de elemento a permutar (personas, números y objetos), pues ésta fue una variable que Fischein y Gazit (1988) indicaron como influyente en la dificultad de los problemas combinatorios. En total se considerarán seis problemas, combinando las anteriores variables.

Se tendrán en cuenta también dos tipos de problemas que Navarro-Pelayo describió como problemas de selección y problemas de colocación. Usaremos siempre un número pequeño de elementos para que el estudiante, si no sabe o no recuerda la fórmula, lo pueda deducir por enumeración.

En la Tabla 3.2.1, se presenta el diseño del cuestionario y, a continuación, analizamos cada uno de los problemas. Este diseño ha sido conscientemente equilibrado con tres problemas de permutaciones ordinarias y tres de permutaciones con repetición. Hay uno de cada tipo de permutación y cada tipo de elemento (dos de objetos, dos de personas y dos de números). Finalmente, tenemos tres problemas de selección y otros tres de colocación, uno con cada tipo de elemento. Respecto a la combinación tipo de modelo y tipo de permutación varía un poco, pues hay dos de colocación y permutaciones ordinarias y dos de selección y permutaciones con repetición.

Tabla 3.2.1. Diseño del cuestionario

| Elemento a permutar | Colocación | Selección |
|---|---|---|
| Objetos | Problema 2, P | Problema 1 , PR |
| Personas | Problema 6, PR | Problema 4, P |
| Números | Problema 3, P | Problema 5, PR |

**Problema 1**. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul. (Navarro-Pelayo y Roa).

Este ítem se ha tomado de la investigación de Navarro- Pelayo (1994). Fue también utilizado por Roa (2000). Se propone un problema en el contexto de selección, pues se trata de elegir elementos de una población finita (las cuatro fichas de colores iniciales). Los elementos de la población son objetos que se diferencian por el color. Es necesario tener en cuenta el orden, pues vamos anotando los colores según se obtienen y no sería, por ejemplo, lo mismo ARAB que AARB. Como se desea agotar todas las fichas, nos encontramos ante un problema de permutaciones; se trataría de permutaciones con repetición, porque hay dos fichas del mismo color en la caja. Por ello, si en la permutación ARAB, por ejemplo, permutamos entre sí las dos letras A, se obtiene la misma.

El problema se puede resolver de diferentes formas. Puesto que la mayoría de los estudiantes no ha estudiado las fórmulas de las operaciones combinatorias, se espera que lo aborden con estrategias intuitivas de enumeración y utilizando estrategias tales como fijar una variable, dividir el problema en partes, generalizar o recursión (Roa, 2000). Por ejemplo, se puede fijar el color de la primera ficha en la permutación A y, a partir de ella, variar sistemáticamente el color de la segunda, obteniendo: AA, AB, AR.

Una vez obtenidas estas tres permutaciones se continúa en las dos posiciones restantes, teniendo en cuenta las fichas disponibles, en la forma: AABR, AARB, ABAR, ABRA, ARAB, ARBA.

Terminadas de listar las permutaciones que comienzan por la ficha azul, se cambia el color de la primera ficha y se repite la enumeración: BAAR, BARA, BRAA.

Y así hasta obtener todas las posibilidades, eliminando las que se repitan: RAAB, RABA, RBAA. Se obtienen en total 12 permutaciones.

También sería posible formar algún tipo de esquema gráfico que apoye la enumeración; utilizando, por ejemplo, un dibujo de las fichas de colores o una tabla.

El estudiante podría obtener una fórmula, usando las reglas de la suma y el producto. Podría, en primer lugar, fijarse que puede colocar cada una de las cuatro fichas en la primera posición; una vez colocada, le quedan tres fichas; fijada la segunda quedan dos y una para la última posición, en total $N = 4 \cdot 3 \cdot 2$. Pero como las dos fichas azules no se diferencian, las permutaciones se repiten dos a dos; por ello:

$$N = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$$

Con cualquiera de estas estrategias se llegaría a la solución correcta. En el caso de que el estudiante conozca el diagrama en árbol, podría también construir uno similar al mostrado en la Figura 3.2.1.

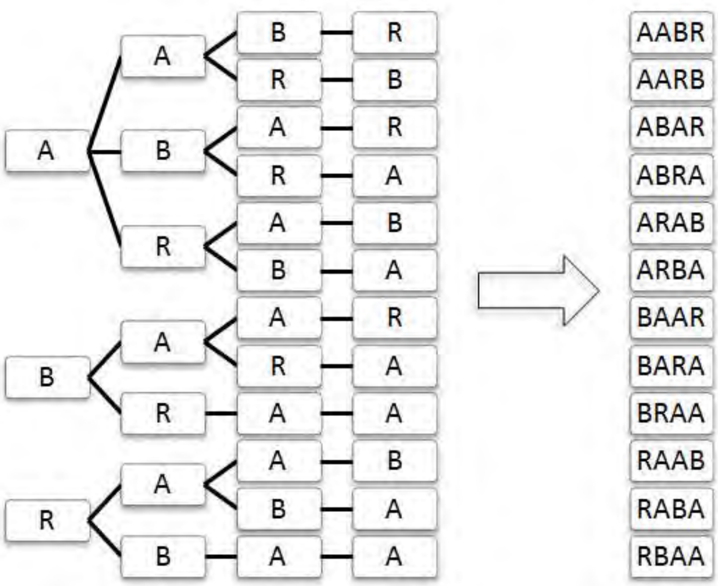


Figura 3.2.1. Diagrama en árbol que representa la solución del Problema 1

En caso de que algún estudiante haya estudiado las permutaciones, recurriendo a la formulación, debe identificar que se trata de un conjunto de cuatro elementos que se van a permutar, entre los que se repite el color azul en dos fichas y aparte hay una ficha blanca y otra roja. Por ello el número total de permutaciones posibles sería:

$$P_{4,2,1,1} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{24}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

**Problema 2.** El garaje de un edificio tiene cuatro plazas numeradas de 1 a 4. En la casa hay cuatro vecinos, Ángel, Beatriz, Carmen y Daniel, que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2, Daniel en el número 3 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz, Carmen y Daniel aparcar sus coches en la cochera?

Este segundo problema se ha enunciado siguiendo el modelo de colocación, puesto que se trata de colocar objetos en casillas, concretamente coches, identificados por sus propietarios, en distintas plazas de garaje. En este caso, tenemos dos conjuntos diferentes: por un lado, un conjunto de coches donde todos los objetos son distintos ya que cada coche es propiedad de un vecino diferente que, en adelante, se pueden identificar mediante sus iniciales, esto es, A para Ángel, B para Beatriz, C para Carmen y D para Daniel. Por otro lado, tenemos un conjunto de plazas de aparcamiento o celdas para colocar los objetos. Además, también las celdas son perfectamente distinguibles mediante numeración del 1 al 4 e inamovibles. Por tanto, todos los vecinos ocuparán alguna plaza y todas las plazas serán ocupadas. En este caso también importa el número de plaza que ocupe cada vecino, pero no habrá repeticiones, luego se trata de un problema de permutaciones sin repetición.

En este problema, los estudiantes podrían recurrir a la regla del producto para encontrar la solución, teniendo en cuenta que, para cada situación concreta, por ejemplo ADCB, la primera letra hace referencia a la plaza 1, la segunda a la 2, la tercera a la 3 y la cuarta a la 4. Es sencillo observar que el primer vecino que llegue a las cocheras dispone de 4 opciones para aparcar, el segundo vecino ya sólo dispondrá de 3, el tercero de 2 y, finalmente, el último no podrá elegir, ya que sólo quedará libre 1 cochera. Por tanto, el número de formas en las que se puede producir el aparcamiento de todos los vecinos, aplicando la regla del producto, es:

$$N = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Si los estudiantes conocen el diagrama de árbol, también podrían utilizarlo para encontrar las soluciones de forma similar al que se ha indicado en el problema anterior y que se ha representado en la Figura 3.2.1. En caso contrario, también podrían recurrir a algún otro esquema gráfico como, por ejemplo, dibujar los huecos de las cocheras con los coches llegando sucesivamente o con las letras representando a los vecinos según van aparcando. En este caso, podrían fijar la primera letra y variar todas las demás para encontrar las opciones posibles. Si comenzaran fijando la A en la primera cochera, resultarían 6 opciones posibles: ABCD – ABDC – ACBD – ACDB – ADBC – ADCB.

Después, como ni las letras ni las cocheras se repiten, únicamente tendrían que multiplicar las 6 opciones resultantes de fijar la letra A por 4, teniendo en cuenta que son cuatro vecinos. Entonces, la solución sería:

$$N = 6 \cdot 4 = 24$$

Con cualquiera de las estrategias anteriores se llegaría a la solución correcta. En caso de que algún estudiante haya estudiado combinatoria e identifique la solución del problema como el número de permutaciones de un conjunto de cuatro elementos sin repetición, también podría utilizar la expresión formal:

$$P_4 = 4! = 24$$

| |
|---|
| **Problema 3.** ¿De cuántas formas diferentes puedo ordenar los números 1, 2, 4, 6 y 8? |

De nuevo, el tercer problema sigue el modelo de colocación. En este caso, se trata de ordenar cinco cifras numéricas en distintas maneras, es decir, podemos considerar dos conjuntos diferentes: a) por un lado, las cifras numéricas; y b) por otro, los lugares en que se colocan, diferenciados por su posición, como si se colocaran en cinco celdas o casillas. Por tanto, los elementos a permutar son números, entre los que no se considera ninguna repetición, ya que las cinco cifras son diferentes entre sí. Además, las posiciones que ocuparán son totalmente distinguibles: primera, segunda, tercera, cuarta y quinta. En cada construcción se utilizan los cinco números, por lo que será importante el orden en el que se dispongan, siendo evidentemente diferente, por ejemplo, 12345 de 54321. Por todo ello, se trata de un problema de permutaciones sin repetición.

Este problema es algo más complejo ya que tal cantidad de cifras numéricas eleva mucho el número de posibilidades. Sería una buena opción intentar resolverlo por recursión, es decir, comenzar por un número inferior de cifras e ir observando lo que pasa según se añaden las demás.

Empezando por la primera cifra, el 1, sólo se podría construir un número: 1. Después, considerando las cifras 1 y 2, ya surgen dos opciones: 12 – 21. Se razona fácilmente observando que la nueva cifra 2 puede ocupar dos lugares: antes del 1 y después del 1.

Para 1, 2 y 3, utilizando los resultados anteriores, ya se pueden encontrar hasta seis posibilidades: 123 – 132 – 312 – 213 – 231 – 321. De nuevo, la clave está en percatarse de que para cada configuración, por ejemplo 12, la nueva cifra 3 puede ocupar tres posiciones diferentes: antes del 1, entre el 1 y el 2 y después del 2. Del mismo modo ocurre para la configuración 21; por tanto, $2 \cdot 3 = 6$ posibilidades.

Siguiendo con este razonamiento, de nuevo las opciones posibles al añadir la cifra 4 se podrían obtener multiplicando las seis posibilidades del caso anterior por las cuatro posiciones que puede ocupar la cifra nueva en cada una de ellas, resultando un total de $6 \cdot 4 = 24$ posibilidades. Finalmente, extendiendo lo anterior para la cifra 5, el número total de posibilidades serían $24 \cdot 5 = 120$.

Si algún alumno fuera conocedor de los diagramas en árbol, también podrían utilizarlo, aunque no sería eficiente construirlo al completo. Como no hay cifras repetidas, lo mejor sería construirlo a partir de una de las cifras, por ejemplo el 1, de forma similar al del Problema 1, obteniendo 24 posibilidades, y multiplicar por 5, puesto que hay cinco cifras de las que se va a obtener el mismo número: $24 \cdot 5 = 120$.

Con cualquiera de las estrategias anteriores se llegaría a la solución correcta. En caso de que algún estudiante haya estudiado combinatoria e identifique la solución del problema como el número de permutaciones de un conjunto de cinco elementos sin repetición, también podría utilizar la fórmula de las permutaciones:

$$P_5 = 5! = 120$$

**Problema 4.** Tres chicos Alicia, Berta y Carlos se ofrecen voluntarios para formar parte de un comité que consta de Presidente, Tesorero, Secretario.
¿De cuántos modos diferentes se podría elegir al Presidente, Tesorero y Secretario de este comité entre los tres chicos?

El cuarto problema sigue el modelo de selección, puesto que a partir del conjunto inicial formado por tres chicos, que en adelante se identifican por sus iniciales, A para Alicia, B para Berta y C para Carlos, se va a ir seleccionando para constituir un comité con tres miembros. En este caso los elementos a permutar son personas y, por ello, no hay repetición. Éste es quizá uno de los problemas donde es más claro que el orden importa, ya que el primer seleccionado ocupará el cargo de Presidente, el segundo el de Tesorero y el último el de Secretario. Finalmente, como se tiene un conjunto de tres candidatos para un total de tres puestos dentro del comité, se seleccionarán todas las personas del conjunto y se cubrirán todos los cargos. Se trata de un problema de permutaciones sin repetición.

Como en los casos anteriores, existen de nuevo varias formas de abordar este problema. Quizá una buena manera sería utilizar parte del diagrama en árbol o, en su defecto, parte de algún tipo de esquema gráfico, que se haya utilizado en el Problema 2, en el que cuatro vecinos iban ocupando sucesivamente cuatro cocheras. Este ejercicio es muy similar puesto que ahora tres candidatos tienen que ir cubriendo tres puestos diferentes de un comité. Es cuestión de observar como estos dos problemas se sustentan sobre una misma estructura.

Alternativamente se podría usar la enumeración sistemática de los elementos. Si para cada configuración, el primer nombre corresponde al Presidente, el segundo al Tesorero y el tercero al Secretario, podría fijar uno de los candidatos, por ejemplo A, y variar sistemáticamente B y C, resultando ABC y ACB. A continuación, repitiendo el proceso fijando B, llegarían a BAC y BCA; y, por último, fijando C se obtiene CAB y CBA, por lo que encontrarían las 6 opciones posibles.

Como siempre, en caso de que algún estudiante haya estudiado combinatoria e identifique la solución del problema como el número de permutaciones de un conjunto de tres elementos sin repetición, también podría utilizar la expresión formal:

$$P_3 = 3! = 6$$

| **Problema 5.** En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7, y 7. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. Sin devolver la bola al bombo sacamos un segundo número y así hasta agotar las cuatro bolas. Por ejemplo, podemos sacar el número 2774. ¿Cuántos números diferentes podemos obtener con este sistema? |
|---|

El quinto problema también sigue el modelo de selección, puesto que a partir del conjunto inicial formado por cuatro bolas se va extrayendo, una a una, para formar un número de cuatro dígitos. En este caso los objetos son números y, como se puede observar, hay una repetición. El orden es importante porque el cambio de posición de una de las cifras da lugar a un número final diferente, como por ejemplo, 2774 y 7247. También en este caso se agotan las cifras ya que se extraen todas las bolas del bombo. En conclusión, se trata de un problema de permutaciones con repetición, donde el número 2 y el 4 sólo están una vez, mientras que el número 7 aparece repetido dos veces, haciendo un total de cuatro números dentro del bombo.

Como en todos los problemas anteriores, este problema se puede resolver mediante diagrama en árbol o enumeración sistemática. De hecho, tiene una especial similitud con el Problema 1, en el que había cuatro fichas de colores, en la que dos de ellos sólo están una vez y un tercero aparece repetido dos veces. El resultado al que llegarían sería de 12 posibilidades.

Aplicando la fórmula, para un conjunto de cuatro elementos que se van a permutar, teniendo en cuenta que el 7 se repite dos veces, el 2 una vez y el 4 una vez, el número total de permutaciones posibles sería:

$$P_{4,2,1,1} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{24}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

**Problema 6.** Tres chicas, Rosa, Ana y Lucía quieren dar clases de piano. El profesor tiene libre los lunes, martes, miércoles y jueves. Rosa y Ana se conforman con una clase a la semana, pero Lucía quiere dar dos clases. ¿De cuántas formas diferentes podría el profesor completar su horario para atender a las chicas?

Finalmente, se cierra el cuestionario con un último problema en el contexto de colocación, pues se trata de colocar los nombres de tres chicas en los huecos del horario del profesor. Los elementos, en este caso, son las propias chicas y hay que tener en cuenta el número de clases que quieren recibir. Las celdas o casillas del horario en este caso son totalmente distinguibles, pues se organizan según los días de la semana. Por ese mismo motivo, el orden de colocación de las chicas importa, puesto que según como se ordenen, tendrán que asistir a las clases en días concretos. También, como puede observarse fácilmente, aunque hay tres chicas, demandan un total de cuatro clases semanales, luego cubrirán por completo los cuatro huecos libres en el horario del profesor de piano. Finalmente, hay una repetición, ya que Lucía quiere asistir a las clases dos veces por semana. Por todo ello, este es un problema de permutaciones con repetición.

Si algún estudiante conoce el diagrama en árbol, podría utilizarlo para resolver este problema de forma similar a los anteriores. Pero también serían útiles, en este caso, otros esquemas gráficos, como una tabla en forma de horario en el que ir enumerando de forma sistemática las posibles opciones para colocar los nombres de las chicas. Para ello, sería conveniente fijar el nombre de una y variar las otras dos. Mediante estos sistemas se podría llegar a la solución del problema.

Finalmente, si algún estudiante tuviese conocimiento de combinatoria, dado un conjunto de cuatro elementos que se van a permutar, teniendo en cuenta que a la semana se repiten dos veces las clases de Lucía, una vez las de Rosa y una vez las de Ana, el número total de permutaciones posibles sería:

$$P_{4,2,1,1} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{24}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

## 3.3 RESULTADOS EN EL PROBLEMA 1

Una vez recogidos los cuestionarios se analizaron las respuestas, estudiando por un lado su corrección y por otro la estrategia utilizada. A continuación se exponen los resultados en cada problema, comenzando por el análisis de las soluciones y siguiendo por el de las estrategias empleadas.

**Problema 1**. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color.
Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas.
¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul. (Navarro-Pelayo y Roa).

### Soluciones

*Solución correcta:* Una solución correcta es aquella en la que se han encontrado las doce posibilidades de extracción de las fichas de colores, con cualquiera de las estrategias mencionadas anteriormente y aplicadas en forma correcta.

Sirva como ejemplo la Figura 3.3.1, en la que el estudiante obtiene la respuesta correcta mediante enumeración completa. Se observa que comienza fijando el color de la primera ficha (azul) hasta que agota todas las posibilidades. La enumeración no es demasiado sistemática, ya que no fija a continuación el color de la segunda bola, pero, a pesar de ello, no se equivoca. Es decir, el estudiante fija un elemento para disminuir el tamaño de la permutación y dividir el problema en tres partes (hallar las permutaciones de los restantes elementos, cuando se fija uno). La estrategia es propia de un desarrollo combinatorio intermedio según Inhelder y Piaget (1955) y apareció también en la investigación de Roa, Batanero y Godino (2003), realizada con estudiantes universitarios.


1 → Azul, azul, blanca, roja
Azul, blanca, azul, roja
Azul, azul, roja, blanca
Azul, blanca, roja, azul
Azul, roja, blanca, azul
Azul, roja, azul, blanca
Roja, azul, azul, blanca
Rojo, azul, blanca, azul.
Rojo, blanco, azul, azul.
blanco, rojo, azul, azul,
blanco, azul, azul, rojo
blanco, azul, rojo, azul

Figura 3.3.1. Ejemplo de solución correcta en el problema 1

*Solución parcialmente correcta:* Consideramos que una solución es parcialmente correcta cuando se han encontrado sólo algunas de las doce posibilidades de extracción de las fichas de colores, pero no todas. En la solución pueden aparecer repetidas algunas de las extracciones posibles, pero no se incluyen extracciones imposibles, es decir, extracciones en las que se hayan considerado un número de fichas o de colores que no se correspondan con los que hay inicialmente en la caja (ver ejemplo en la Figura 3.3.2).

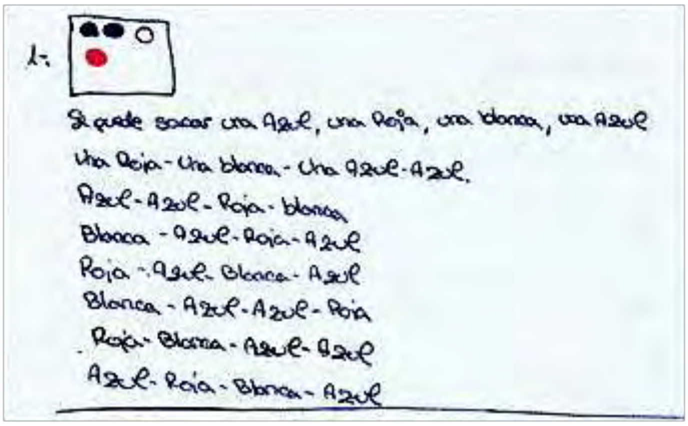
1.
Se puede sacar una Azul, una Roja, una blanca, una Azul
Una Roja - Una blanca - Una Azul - Azul.
Azul - Azul - Roja - blanca
Blanca - Azul - Roja - Azul
Roja - Azul - Blanca - Azul
Blanca - Azul - Azul - Roja
Roja - Blanca - Azul - Azul
Azul - Roja - Blanca - Azul

Figura 3.3.2. Ejemplo de solución parcialmente correcta en el problema 1

En este ejemplo se repite la primera permutación (con la última) y faltan cuatro permutaciones. El fallo se debe a que no hay una enumeración sistemática, sino que la enumeración no es sistemática, sino que se completa mediante ensayo- error. Este tipo de estrategia ha sido descrita, entre otros por Scardamalia (1977) en una investigación con chicos entre 8 y 15 años.

*Solución incorrecta:* una solución incorrecta es aquella en la que se ha incluido alguna extracción imposible, en la que hay más o menos de cuatro fichas, o se han utilizado colores que no estaban dentro de la caja al inicio (Figura 3.3.3). En el siguiente ejemplo se puede notar como en algunas permutaciones se incluyen cinco elementos en lugar de cuatro. Por tanto el estudiante no interpreta correctamente los datos del enunciado.

Figura 3.3.3. Ejemplo de solución incorrecta en el problema 1

En la Tabla 3.3.1 se presenta el porcentaje de soluciones al problema 1, según su corrección. Se observa una mejora muy clara en el número de soluciones correctas y el descenso de las incorrectas y parcialmente correctas al pasar de curso.

Tabla 3.3.1. Porcentaje de soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas en el problema 1

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Correctas | 8,7 | 17,9 | 41,7 |
| Parcialmente correctas | 69,6 | 82,1 | 54,2 |
| Incorrectas | 21,7 | 0,0 | 4,1 |

Los resultados son mucho mejores que los de Navarro-Pelayo (2004) que obtuvo 27,5% de respuestas correctas en chicos de 14 años con instrucción en combinatoria y 16,3% en chicos de 14 años sin instrucción. En nuestro caso sólo tenemos peores resultados en 1º curso, pero los chicos son de menor edad. Navarro Pelayo no considera las respuestas parcialmente correctas. Por otro lado, nos acercamos en el grupo mayor de estudiantes mucho a los resultados de Roa, con estudiantes de último año de la licenciatura de matemáticas, que obtuvo el 44% de soluciones correctas.

**Estrategias de resolución**

Además de estudiar las soluciones, hemos analizados las estrategias seguidas para determinarlas. Se han encontrado las siguientes:

*Esquemas gráficos:* aunque ninguno de los grupos conoce los diagramas de árbol, puede apreciarse entre las soluciones aportadas como algunos estudiantes realizan algún esquema similar, agotando todas las posibilidades que resultan cuando se empieza con un determinado color, después con otro, y así sucesivamente hasta cubrirlas todas. Por ello, suele corresponder a enumeraciones sistemáticas, incluso aunque no sean completas. Para ello se apoyan en esquemas gráficos a los que únicamente les faltan las "ramas" para que se puedan considerar verdaderos diagramas de árbol (Figura 3.3.4).

Figura 3.3.4. Ejemplo de aplicación de un esquema gráfico en el problema 1

*Enumeración sistemática completa:* en algunos casos se ha utilizado la técnica de la enumeración sistemática, entendiendo como tal, fijar un primer color y variar los posibles colores extraídos en segundo lugar; después, con cada una de las posibilidades encontradas de dos colores, variar la extracción del tercer color; y, finalmente, repetir el proceso para la última extracción.

*Enumeración sistemática incompleta:* otras veces en cambio, la enumeración sistemática no se puede considerar completa. Los motivos habituales son que el estudiante no considera todos los casos, empieza por una enumeración sistemática y termina utilizando el ensayo- error, fija sólo la primera extracción, pero no las siguientes, etc. En definitiva, enumeran, pero sin seguir un criterio fijo, un patrón, durante todo el recuento, sino sólo de forma parcial.

*Enumeración no sistemática o ensayo- error:* por último dentro de la enumeración, también se encuentran casos en los que se realiza de forma totalmente aleatoria, sin fijar colores en ningún momento, sin que sea posible encontrar el más mínimo atisbo de regularidad. Suelen dar lugar a repeticiones y a que falten algunas de las posibilidades, lo que redunda en un recuento incompleto.

*Fórmulas:* los grupos a los que se les ha pasado el cuestionario no tienen instrucción en combinatoria y la mayoría desconoce las distintas tipologías y la formulación específica de cada una. Pero algunos vienen de otros centros donde podrían haberla estudiado; o bien han intentado deducirlas y utilizarlas en la resolución de los problemas (Figura 3.3.5). En este ejemplo, aunque no se usa el término apropiado (combinaciones y no permutaciones), se ha aplicado la regla del producto. Como hay cuatro elementos, se supone que cada uno se puede colocar en cada posición, obteniendo la potencia dada. Hay dos errores en esta fórmula; a) no se tiene en cuenta que hay dos bolas indistinguibles; b) tampoco se tiene en cuenta que, fijado un elemento, ya quedan sólo tres para el siguiente factor, en el siguiente dos y al final sólo uno. El error de confundir elementos distinguibles e indistinguibles fue citado por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1997) y Roa, Batanero y Godino (2001).

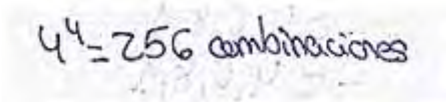


Figura 3.3.5. Ejemplo de aplicación de una fórmula en el problema 1

En la Tabla 3.3.2, se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias observadas. Se ha incluido una fila adicional para almacenar todos aquellos casos en los que los estudiantes aportan un número como solución, pero sin dar ninguna indicación de la estrategia que han utilizado para determinarlo.

Tabla 3.3.2. Porcentaje de estrategias en el problema 1

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Esquema gráfico | 4,3 | 3,6 | 12,5 |
| Enumeración sistemática completa | 8,7 | 7,1 | 20,8 |
| Enumeración sistemática incompleta | 0,0 | 28,6 | 25,0 |
| Enumeración no sistemática o ensayo- error | 69,6 | 57,1 | 33,3 |
| Fórmulas | 8,7 | 3,6 | 8,3 |
| Tablas | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Resultado sin estrategia | 8,7 | 0,0 | 0,0 |

Se observa que la estrategia más frecuente es la enumeración y son pocos los estudiantes que realizan un esquema gráfico (aumentando el número con el curso) o aplican la regla del producto. Además la enumeración es casi siempre no sistemática, basada en ensayo y error, aunque cuando se avanza de curso va aumentando la enumeración sistemática incompleta o completa. En la investigación de Roa (2000) con estudiantes universitarios hubo también un gran porcentaje de enumeración en los problemas de permutación con pocos elementos, aunque menos cuando los elementos crecen o son permutaciones con repetición. En este caso el número de enumeraciones sistemáticas y completas fue mayor, llegando en algún problema al total de estudiantes.

## 3.4 RESULTADOS EN EL PROBLEMA 2

**Problema 2.** El garaje de un edificio tiene cuatro plazas numeradas de 1 a 4. En la casa hay cuatro vecinos: Ángel, Beatriz, Carmen y Daniel que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |

Por ejemplo, Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2, Daniel en el número 3 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz, Carmen y Daniel aparcar sus coches en la cochera?

### Soluciones

*Solución correcta:* una solución correcta es aquella en la que se han encontrado las veinticuatro formas en las que los vecinos pueden ocupar las cocheras. Por ejemplo, en la Figura 3.4.1, se puede observar cómo el estudiante ha aplicado la enumeración sistemática para encontrar las soluciones.

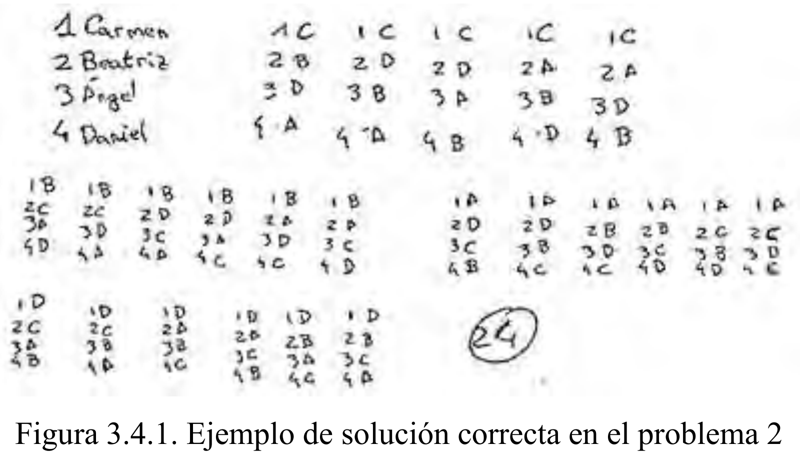


Figura 3.4.1. Ejemplo de solución correcta en el problema 2

Aunque no ha seguido el orden estricto de las letras A, B, C y D, es evidente que ha fijado la primera letra y ha variado la siguiente; sobre las parejas obtenidas ha variado la tercera letra y, por último, con las ternas encontradas ha variado la cuarta letra, logrando determinar todas las soluciones posibles con éxito. Muestra por tanto un razonamiento recursivo al resolver el problema disminuyendo sistemáticamente el número de elementos y luego usando la solución para continuar la tarea (Kapur, 1970).

*Solución parcialmente correcta:* una solución parcialmente correcta es aquella en la que se han encontrado sólo algunas de las veinticuatro posibilidades de colocación de los vehículos, pero no todas. Pueden aparecer repetidas algunas de las colocaciones posibles, pero, a pesar de eso, nunca estarán las veinticuatro soluciones totales.

*Solución incorrecta:* las soluciones incorrectas para este problema, las forman fundamentalmente resultados numéricos erróneos alcanzados tras la aplicación de una fórmula que no se corresponde con el tipo de permutación del problema o aquellas que han sido dadas por estudiantes que no han entendido del todo el enunciado o han elegido un sistema para expresar su solución que hace difícil o imposible identificarla.

Por ejemplo, en la Figura 3.4.2 se puede ver una solución muy difícil de interpretar, en la que no queda clara cuál es la distribución de los coches en cada uno de los casos posibles, ni cuántos hay en total. De hecho, es posible que el estudiante no haya comprendido correctamente el enunciado del problema.

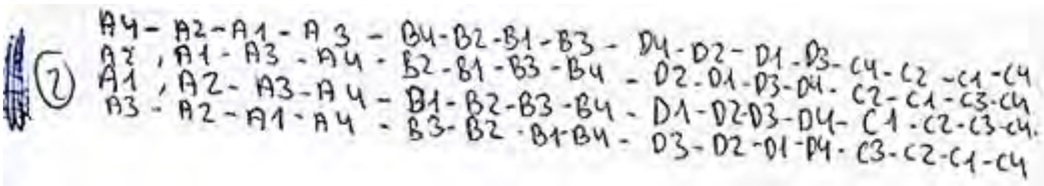


Figura 3.4.2. Ejemplo de solución incorrecta en el problema 2

Tabla 3.4.1. Porcentaje de soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas en el problema 2

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Correctas | 4,3 | 25,0 | 25,0 |
| Parcialmente correctas | 65,3 | 67,9 | 70,8 |
| Incorrectas | 30,4 | 7,1 | 4,2 |

En la Tabla 3.4.1 se presenta el porcentaje de soluciones al problema 2, según su corrección, siendo lo más frecuente la solución parcialmente correcta. La solución correcta sólo se alcanza en el 25% de los estudiantes mayores, mientras que en el trabajo de Roa (2000) la dieron el 75% de los estudiantes universitarios y en el de Navarro-Pelayo, en un enunciado similar, pero con 3 coches y 5 plazas para colocar, el porcentaje de respuestas correctas fue el 3,8% en estudiantes de 12 años sin instrucción y el 41,8% en estudiantes de 14 años con instrucción.

En este problema, el número de soluciones correctas mejora de 1º a 2º ESO, aunque se mantiene entre 2º y 3º ESO. Por otro lado, sí que mejora el número de soluciones parcialmente correctas y desciende el número de incorrectas con el avance de los cursos, lo que podemos relacionar con la mayor edad y maduración de los estudiantes.

**Estrategias de resolución**

Se han encontrado las siguientes:

*Enumeración sistemática completa:* en este problema se pueden encontrar ejemplos en los que se alcanzan las soluciones aplicando una enumeración sistemática completa. Comienzan fijando en la primera plaza de garaje a uno de los vecinos; después; estando ocupada la primera, fijan también la segunda variando los vecinos restantes; a continuación, para cada opción en la que se ocupan las dos primeras plazas, varían la tercera; y, finalmente, para cada situación de tres vecinos, completan con el último.

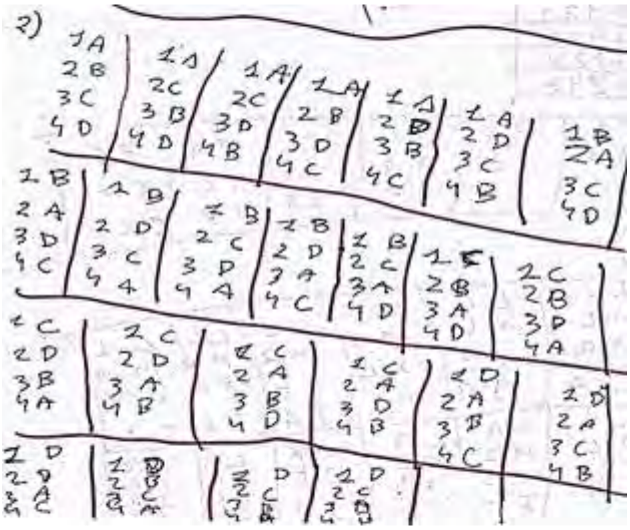

Figura 3.4.3. Ejemplo de aplicación de enumeración sistemática incompleta en el problema 2

*Enumeración sistemática incompleta:* otras veces la enumeración sistemática no es completa del todo. Los motivos habituales son similares a los del problema 1: se empieza por una enumeración sistemática y se termina utilizando el ensayo- error, se fija sólo la primera plaza de aparcamiento y se varían las tres restantes sin criterio alguno, etc. No obstante, en algunas ocasiones consiguen alcanzar todas las permutaciones posibles, como es el caso del ejemplo en la Figura 3.4.3.

*Enumeración no sistemática o ensayo- error:* se encuentran casos en los que la enumeración sin ningún patrón de regularidad, sino rellenando las plazas de garaje de formas diferentes por pura observación. A veces aparecen incluso soluciones repetidas, aunque nunca alcanzan todas las soluciones. Siempre se queda incompleto el recuento.

*Fórmulas:* apenas se encuentran estudiantes que hayan buscado una solución mediante fórmulas en este problema, quizás porque en todos los cursos se trata de estudiantes sin instrucción en combinatoria; no obstante, puede que hayan estudiado algo en otros centros o puede que simplemente hayan intentado deducir una expresión que les permita evitarse el recuento.

En la Tabla 3.4.2, se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias observadas, siendo la más frecuente la enumeración no sistemática o ensayo-error. El resto apenas se usa. La última fila almacena todos aquellos casos en los que los estudiantes aportan un número como solución del problema, pero sin dar ninguna indicación de la estrategia que han utilizado para determinarlo.

Tabla 3.4.2. Porcentaje de estrategias en el problema 2

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Esquema gráfico | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Enumeración sistemática completa | 0,0 | 10,7 | 8,3 |
| Enumeración sistemática incompleta | 4,3 | 17,9 | 25,0 |
| Enumeración no sistemática o ensayo- error | 73,9 | 67,8 | 62,5 |
| Fórmulas | 0,0 | 3,6 | 4,2 |
| Tablas | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Resultado sin estrategia | 21,8 | 0,0 | 0,0 |

## 3.5. RESULTADOS EN EL PROBLEMA 3

**Problema 3.** ¿De cuántas formas diferentes puedo ordenar los números 1, 2, 4, 6 y 8?

### Soluciones

*Solución correcta:* es aquella en la que se han encontrado las ciento veinte formas diferentes en las que se pueden ordenar los números propuestos en el enunciado.

En este caso, quizá sea demasiado prolongado formar todas las ordenaciones diferentes mediante un esquema o una enumeración, por lo que varios de los estudiantes han intentado buscar algún tipo de generalización. Por ejemplo, obsérvese en la Figura 3.5.1, cómo el estudiante ha aplicado la enumeración sistemática para encontrar las soluciones resultantes de fijar el primer número, esto es, veinticuatro, para posteriormente, aprovechando que los números no se repiten, multiplicar por el total de números en lugar de seguir enumerando para cada uno de ellos de forma individual. Esta estrategia muestra un pensamiento recursivo y capacidad de generalización en el estudiante.

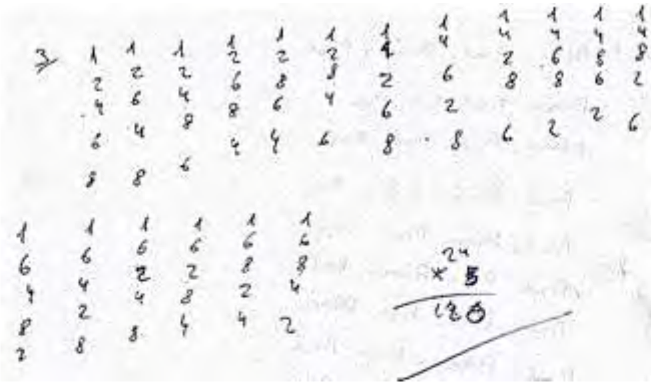

Figura 3.5.1. Ejemplo de solución correcta en el problema 3

*Solución parcialmente correcta:* una solución parcialmente correcta es aquella en la que se han encontrado sólo algunas de las soluciones correctas, pero no todas. Pueden aparecer repetidas algunas de las ordenaciones posibles, pero no ordenaciones imposibles en las que aparezcan más números o menos de los que se proponen en el enunciado u otros diferentes.

*Solución incorrecta:* las soluciones incorrectas para este problema, las forman fundamentalmente resultados numéricos erróneos alcanzados tras la realización de un cálculo incorrecto. Al tratarse de un problema tan largo para resolverlo por enumeración, varios de los estudiantes han optado por algún tipo de generalización, pero muchas veces no lo han hecho de la forma correcta.

Por ejemplo, en la Figura 3.5.2 se observa una enumeración sistemática incompleta, en la que se ha fijado la primera y segunda cifra, pero las cifras finales se han dispuesto desatendiendo el orden correcto. Una vez que concluye todas las ordenaciones posibles tras fijar las dos primeras cifras, también realiza mal el cálculo, ya que multiplica por 5 números, cuando debería haber multiplicado por las 6 ordenaciones que ha obtenido y, a continuación, por las 5 cifras. Evidentemente, también la forma de expresarse es incorrecta, puesto que $4 \cdot 5 \neq 20 \cdot 5 = 100$.

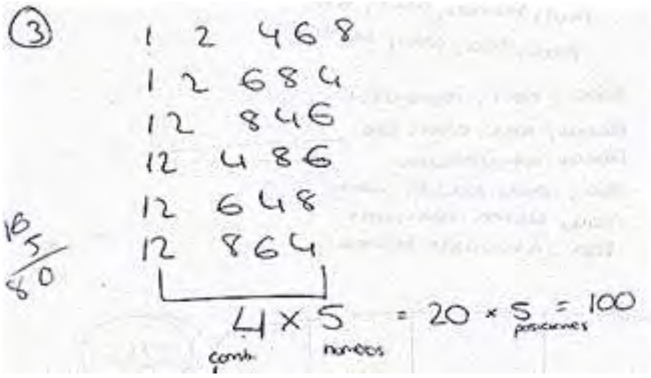

Figura 3.5.2. Ejemplo de solución incorrecta en el problema 3

En la Tabla 3.5.1 se presenta el porcentaje de soluciones al problema 3, según su corrección, siendo lo más común la parcialmente correcta, sin apenas soluciones correctas. Navarro-Pelayo (1994) encontró un 77% de respuestas correctas en los chicos sin instrucción y 77,2% en los que habían tenido instrucción en un problema de ordenación de tres números. No obstante, hay que reconocer que las permutaciones de tres elementos son mucho más sencillas de obtener que las de cinco con ensayo y error.

En este caso, el número de soluciones correctas mejora de 3º ESO, aunque se mantiene entre 1º y 2º ESO. Por otro lado, sí que mejora el número de soluciones parcialmente correctas entre 1º y 2º ESO, para mantenerse en 3º ESO, y desciende el número de soluciones incorrectas con el avance de los cursos, luego también en este problema se puede relacionar este hecho con la mayor edad de los estudiantes. Es más, ante un problema de más complejidad que los dos anteriores, sólo se encuentran soluciones correctas en 3º ESO.

Tabla 3.5.1. Porcentaje de soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas en el problema 3

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Correctas | 0,0 | 0,0 | 8,3 |
| Parcialmente correctas | 60,9 | 75,0 | 75,0 |
| Incorrectas | 39,1 | 25,0 | 16,7 |

**Estrategias de resolución**

Se han encontrado las siguientes:

*Enumeración sistemática completa:* aunque no ha habido ningún estudiante que haya encontrado las ciento veinte soluciones mediante la aplicación de la enumeración sistemática completa, sí es cierto que se ha utilizado como antesala de algún tipo de cálculo, que después sería correcto o incorrecto.

Por ejemplo, en la Figura 3.5.3, se puede observar cómo el estudiante construye mediante una enumeración sistemática completa todas las ordenaciones posibles tras fijar la primera cifra. A partir del número 1, analiza los casos con la segunda cifra; con las posibilidades que obtiene va fijando la tercera, y termina variando la cuarta y la quinta. Una vez encontradas todas las ordenaciones para el número 1, intenta encontrar todas las del problema aplicando la regla del producto, lo cual es correcto, aunque finalmente se equivoca al multiplicar por las 4 cifras que le faltan, en lugar de por las 5 cifras que proponía el problema. Por tanto le ha fallado el razonamiento recursivo.

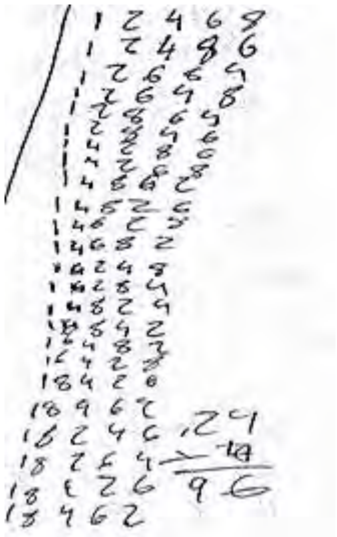

Figura 3.5.3. Ejemplo de aplicación de enumeración sistemática completa en el problema 3

*Enumeración sistemática incompleta:* otras muchas veces la enumeración sistemática no es completa del todo. Los motivos son los habituales: se empieza por una enumeración sistemática y se termina utilizando el ensayo- error, se fija sólo la primera cifra y se varían las restantes sin criterio alguno, etc. Pero en este caso con tantas opciones, nadie consiguió alcanzar la solución correcta aplicando esta estrategia.

*Enumeración no sistemática o ensayo- error:* si las estrategias de enumeración sistemática incompleta han fallado en todos los casos, la enumeración no sistemática lo hace estrepitosamente, porque ni siquiera es posible encontrar un cálculo numérico que tenga sentido tras aplicar el ensayo- error. Son simplemente recuentos aleatorios de algunas de las ordenaciones a las que pueden dar lugar las cinco cifras propuestas, pero en ningún caso se acompaña de cálculos posteriores, ni mucho menos se alcanza la solución final correcta. Habitualmente da la sensación de que el estudiante se detiene porque ya no es capaz de distinguir si ya ha considerado una determinada ordenación de las cifras, cuáles le faltan, ni cuando las habrá construido todas. El uso de esta estrategia en problemas con tantas posibilidades hace difícil saber cuándo has acabado.

Figura 3.5.4. Ejemplo de aplicación de ensayo- error en el problema 3

*Fórmulas:* la mayor parte de las veces se han utilizado como apoyo a algún tipo de enumeración sistemática. No obstante, sólo a los que han intentado deducir una fórmula que les diera la solución de forma directa se les ha catalogado dentro de esta estrategia.

Tabla 3.5.2. Porcentaje de estrategias en el problema 3

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Esquema gráfico | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Enumeración sistemática completa | 4,3 | 0,0 | 4,2 |
| Enumeración sistemática incompleta | 0,0 | 14,3 | 54,2 |
| Enumeración no sistemática o ensayo- error | 60,9 | 60,7 | 33,2 |
| Fórmulas | 0,0 | 0,0 | 4,2 |
| Tablas | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Resultado sin estrategia | 34,8 | 25,0 | 4,2 |

En la Tabla 3.5.2, se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias observadas. Como es costumbre, en la última fila se almacenan todos aquellos casos en los que los estudiantes aportan un número como solución del problema, pero sin dar ninguna indicación de la estrategia que han utilizado para determinarlo. Vemos que la estrategia predominante es la enumeración no sistemática, seguida por la sistemática incompleta que es la más frecuente en 3º curso.

## 3.6. RESULTADOS EN EL PROBLEMA 4

**Problema 4.** Tres chicos Alicia, Berta y Carlos se ofrecen voluntarios para formar parte de un comité que consta de Presidente, Tesorero, Secretario.
¿De cuántos modos diferentes se podría elegir al Presidente, Tesorero y Secretario de este comité entre los tres chicos?

### Soluciones

*Solución correcta:* Se considera correcta la solución en la que se han encontrado las seis formas diferentes de constituir el comité. En cada una de ellas, los distintos cargos tienen que estar asignados a una y sólo una de las personas que se han ofrecido como voluntarios y debe estar expresado de forma clara cuál ocupa Alicia, cuál Berta y cuál Carlos.

*Solución parcialmente correcta:* una solución parcialmente correcta es aquella en la que se han encontrado sólo algunas de las soluciones correctas, pero no todas. A pesar de no ser un problema demasiado extenso, podrían aparecer algunos de los repartos repetidos, pero nunca ordenaciones en las que alguno de los voluntarios ocupase más de un puesto o se dejase alguno de los cargos sin cubrir.

*Solución incorrecta:* las soluciones incorrectas para este problema, las forman aquellas en las que no se ha entendido el objetivo del problema o no se ha expresado con claridad cuál es la distribución de los cargos. Por ejemplo, en la Figura 3.6.1 se observa como el estudiante ha adjudicado los tres puestos a cada uno de los voluntarios, pero no ha llegado a constituir el comité utilizando distintas combinaciones. De hecho, ni siquiera contesta a la pregunta del problema dando como solución un número concreto de soluciones.

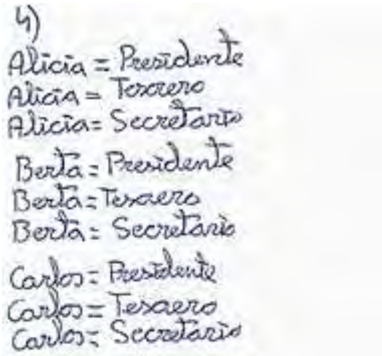


Figura 3.6.1. Ejemplo de solución incorrecta en el problema 4

En la Tabla 3.6.1 se presenta el porcentaje de soluciones al problema 4, según su corrección, siendo la más frecuente correcta o parcialmente correcta. En un ítem similar, donde se dispone de cuatro candidatos para elegir un comité de tres miembros, Navarro-Pelayo (1994) obtiene solo 9,5% de respuestas correctas en los chicos de 14 años sin instrucción y 59,7% en los que tenían instrucción; por tanto relativamente nuestros resultados son mejores.

En este caso, el número de soluciones correctas mejora progresivamente en todos los cursos desde 1º ESO a 3º ESO. Por otro lado, tanto el número de soluciones parcialmente correctas como el número de soluciones incorrectas desciende también con el avance de los cursos, siendo más acusado este último de 1º a 2º ESO que de 2º ESO a 3º ESO; luego una vez más en este problema se puede relacionar este hecho con la mayor edad de los estudiantes. Es más, ante un problema de más complejidad que los dos anteriores, sólo se encuentran soluciones correctas en 3º ESO.

Tabla 3.6.1. Porcentaje de soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas en el problema 4

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Correctas | 8,7 | 39,3 | 62,5 |
| Parcialmente correctas | 60,9 | 46,4 | 25,0 |
| Incorrectas | 30,4 | 14,3 | 12,5 |

**Estrategias de resolución**

Se han encontrado las siguientes:

*Enumeración sistemática completa:* dadas las características de este problema, la enumeración sistemática completa ha sido una de las estrategias más utilizadas. En general, los estudiantes han mantenido fijo el orden de los cargos, esto es, primero el Presidente, segundo el Tesorero y tercero el Secretario, para ir variando las posiciones de las iniciales de los nombres de los voluntarios: A, B, C. Fijando la A, variaban B y C, y después, sobre AB y AC, variaban las inicial restante. Por último, repetían el proceso fijando B inicialmente y después fijando C.

*Enumeración sistemática incompleta:* otras muchas veces la enumeración sistemática no ha sido completa a pesar de la brevedad de la resolución. En la mayoría de los casos se ha debido a una mala elección del sistema de codificación del problema.

Por ejemplo, en la Figura 3.6.2 se observa como el estudiante codifica cada puesto asignado utilizando la inicial del voluntario y la inicial del puesto, lo cual hace que sea muy complicado realizar una enumeración sistemática completa. No obstante, si se analiza la secuencia con detalle, se puede ver cómo en las últimas seis distribuciones para el comité se han ido fijando progresivamente los cargos (primero el de Tesorero, después el de Presidente y, por último, el de Secretario), siguiendo una auténtica enumeración sistemática, dando lógicamente lugar a configuraciones repetidas que ya aparecen entre las cuatro primeras, pero no obstante correctas.

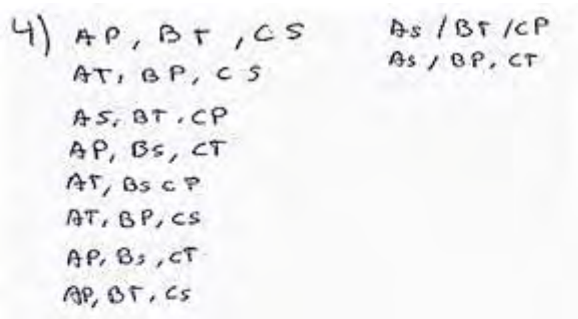


Figura 3.6.2. Ejemplo de enumeración sistemática incompleta en el problema 4

*Enumeración no sistemática o ensayo- error:* también en este ejercicio, a pesar de las pocas permutaciones que se pueden construir, se encuentran casos en los que la enumeración se ha realizado de forma aleatoria, asignando los cargos al azar e intentando no repetir ninguna posibilidad.

*Fórmulas:* son pocos los que han intentado deducir una fórmula para la resolución, probablemente debido al reducido número de permutaciones con las que se puede formar el comité. Aun así, ha habido algunos casos, pero que no han alcanzado soluciones correctas ya que han seguido aplicando razonamientos más propios de los problemas anteriores.

*Tablas:* por primera vez se utilizan tablas, aunque sea como apoyo a algún tipo de enumeración. Aprovechando las dos variables, nombre del voluntario y cargo a ocupar dentro del comité, se han construido distintos tipos de tabla.

En la Figura 3.6.3 se trata de una tabla en desarrollo vertical en la que se han fijado los puestos que constituyen en comité y se han ido variando los nombres de los voluntarios. Como se puede observar, se sigue el criterio de una enumeración sistemática completa.


Figura 3.6.3. Ejemplo del uso de tablas en el problema 4

En la Tabla 3.6.2, se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias observadas. Como es costumbre, en la última fila se almacenan todos aquellos casos en los que los estudiantes aportan un número como solución del problema, pero sin dar ninguna indicación de la estrategia que han utilizado para determinarlo. De nuevo la estrategia que predomina es la enumeración no sistemática, pero en este problema va dando paso la sistemática según se avanza el curso y también aumenta el uso de tablas.

Tabla 3.6.2. Porcentaje de estrategias en el problema 4

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Esquema gráfico | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Enumeración sistemática completa | 0,0 | 21,4 | 29,2 |
| Enumeración sistemática incompleta | 0,0 | 3,6 | 12,5 |
| Enumeración no sistemática o ensayo- error | 52,2 | 42,9 | 12,5 |
| Fórmulas | 0,0 | 0,0 | 12,5 |
| Tablas | 13,0 | 17,9 | 25,0 |
| Resultado sin estrategia | 34,8 | 14,2 | 8,3 |

## 3.7. RESULTADOS EN EL PROBLEMA 5

**Problema 5.** En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7, y 7. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. Sin devolver la bola al bombo sacamos un segundo número y así hasta agotar las cuatro bolas. Por ejemplo, podemos sacar el número 2774. ¿Cuántos números diferentes podemos obtener con este sistema?

### Soluciones

*Solución correcta:* se considera como solución correcta para el problema 6 aquella en la que se han encontrado las doce formas diferentes en las que se pueden ordenar los números propuestos en el enunciado, teniendo en cuenta que la cifra 7 aparece repetida.

En la Figura 3.7.1, se puede observar cómo el estudiante ha aplicado la enumeración sistemática para encontrar las ordenaciones, fijando la primera cifra (aunque no lo ha hecho en el orden natural 2-4-7, sino 2-7-4), después la segunda cifra y, finalmente, variando las dos últimas; obsérvese que sólo construye una permutación cuando las dos últimas cifras se corresponden con el número 7, luego considera la repetición.

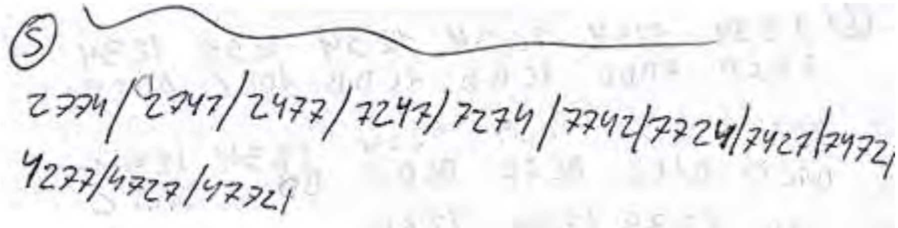


Figura 3.7.1. Ejemplo de solución correcta en el problema 5

*Solución parcialmente correcta:* una solución parcialmente correcta es aquella en la que se han encontrado sólo algunas de las soluciones correctas, pero no todas. Se incluyen en esta categoría también aquellos casos que contemplen permutaciones repetidas, pero no ordenaciones imposibles en las que aparezcan más números o menos de los que se proponen en el enunciado u otros diferentes.

En la Figura 3.7.2 se puede ver que el estudiante aporta 12 ordenaciones posibles, pero, sin embargo, las tres últimas están repetidas. Se intuye que debido a la inercia de las tres primeras construcciones elaboradas fijando como primera cifra el 2, y las tres segundas fijando el 4, se ha seguido fijando primero un 7 y, para terminar, el otro 7, es decir, que no sólo le han faltado ordenaciones por montar sino que además ha considerado diferentes las dos cifras 7.

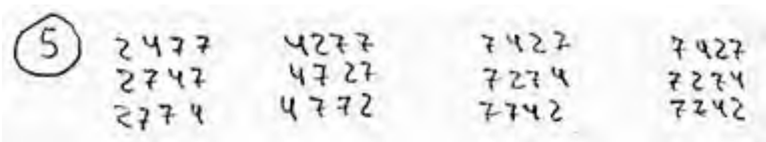


Figura 3.7.2. Ejemplo de solución parcialmente correcta en el problema 5

*Solución incorrecta:* las forman fundamentalmente resultados numéricos erróneos alcanzados tras la realización de un cálculo incorrecto. Se estima que, llevados de ciertos razonamientos o cálculos en problemas anteriores, han intentado extrapolarlos a este problema y han incurrido en el error. En otras ocasiones, se han utilizado más o menos números de los que hay en el enunciado o con más repeticiones de las dadas.

En la Tabla 3.7.1 se presenta el porcentaje de soluciones al problema 5, según su corrección. Navarro Pelayo en un ítem con el mismo contexto, pero con todas las cifras diferentes, obtiene un 12,5% de respuestas correctas en los chicos sin instrucción y 59,1% en los que recibieron instrucción. Nuestro problema es más difícil y a pesar de ello, los alumnos de 3º curso tienen mejores resultados que los de Navarro-Pelayo en el grupo sin instrucción.

En nuestro caso, el número de soluciones correctas mejora progresivamente según se avanza de nivel educativo. En relación con ello, también desciende el número de soluciones incorrectas con el avance de los cursos, luego una vez más en este problema se puede relacionar la mejora del razonamiento con la mayor edad de los estudiantes.

Tabla 3.7.1. Porcentaje de soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas en el problema 5

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Correctas | 4,3 | 10,7 | 37,5 |
| Parcialmente correctas | 60,9 | 71,4 | 50,0 |
| Incorrectas | 34,8 | 17,9 | 12,5 |

**Estrategias de resolución**

Se han encontrado las siguientes:

*Enumeración sistemática completa:* como en problemas anteriores, en ocasiones se ha utilizado esta estrategia fijando una primera cifra: 2-4-7; después, con cada una de ellas, la segunda: 24-27-42-47-72-74-77; y, finalmente, variando las dos últimas si era posible: 2477-2747-2774-4277-4727-4772-7247-7274-7427-7472-7724-7742, teniendo en cuenta siempre que, aunque el 7 aparece repetidos dos veces, dentro de un número construido con tales cifras, representa lo mismo.

*Enumeración sistemática incompleta:* también se ha encontrado enumeración sistemática no totalmente completa. Los motivos habituales son los mismos que ya se han expuesto anteriormente: se empieza por una enumeración sistemática y se termina utilizando el ensayo- error o incluso a veces en sentido opuesto, se fija sólo la primera cifra y se varían las restantes sin criterio alguno, etc.

*Enumeración no sistemática o ensayo- error:* de nuevo se procede a enumerar en base a una construcción aleatoria de los números. En este caso, podría considerarse que hay un reducido número de cifras, máxime con la repetición de una de ellas, y en ocasiones se alcanza la solución correcta; pero en muchas otras, la falta de orden y organización provoca que apenas falten una o dos ordenaciones para completarlas todas como puede apreciarse en la Figura 3.7.3.

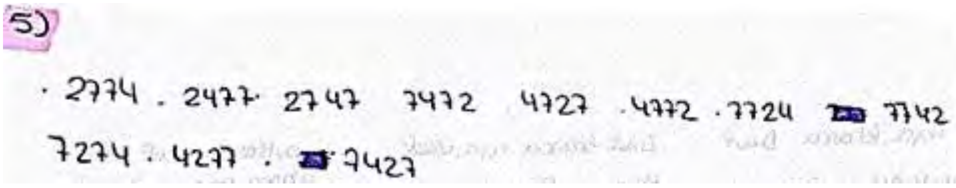


Figura 3.7.3. Ejemplo de aplicación de ensayo- error en el problema 5

*Fórmulas:* a estas alturas del cuestionario, algunos estudiantes creen haber encontrado expresiones algebraicas que sirven para resolver todos los problemas y, ante la dificultad de enumerar la ingente cantidad de ordenaciones que se pueden construir con cuatro cifras, tratan de aplicar una fórmula general. Para ello, extrapolan de un problema a otro, sin análisis ni diferenciación previa, cayendo normalmente en el error, como el la Figura 3.7.4, donde se aplica una fórmula que ya se utilizó en otro problema, pero sin tener en cuenta que aquí el muestreo es sin reemplazamiento de las bolas.


Figura 3.7.4. Ejemplo de aplicación de fórmulas en el problema 5

Tabla 3.7.2. Porcentaje de estrategias en el problema 5

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Esquema gráfico | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Enumeración sistemática completa | 0,0 | 7,1 | 41,7 |
| Enumeración sistemática incompleta | 4,3 | 28,6 | 12,5 |
| Enumeración no sistemática o ensayo- error | 60,9 | 46,4 | 29,2 |
| Fórmulas | 0,0 | 0,0 | 12,4 |
| Tablas | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Resultado sin estrategia | 34,8 | 17,9 | 4,2 |

En la Tabla 3.7.2, se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias observadas, incluyendo en la última fila se almacenan los casos en los que los estudiantes aportan un número como solución del problema, pero sin dar indicación de la estrategia que han utilizado para determinarlo. Las estrategias varían con el curso, restringiéndose prácticamente al comienzo a enumeración no sistemática, para tener una mayor gama de estrategias según se avanza el curso, incluyendo enumeración sistemática y fórmulas en 3º curso.

## 3.8. RESULTADOS EN EL PROBLEMA 6

**Problema 6.** Tres chicas, Rosa, Ana y Lucía quieren dar clases de piano. El profesor tiene libre los Lunes, Martes, Miércoles y Jueves. Rosa y Ana se conforman con una clase a la semana, pero Lucía quiere dar dos clases.

¿De cuántas formas diferentes podría el profesor completar su horario para atender a las chicas?

### Soluciones

*Solución correcta:* se considera como solución correcta aquella en la que se han encontrado las doce formas de distribuir el horario. En cada una de ellas, Lucía debe aparecer dos veces, mientras que Rosa y Ana sólo tienen que hacerlo una vez; y todos ellas en días diferentes.

*Solución parcialmente correcta:* una solución parcialmente correcta es aquella en la que se han encontrado sólo algunas de las soluciones correctas, pero no todas. Pueden aparecer repartos repetidos o puede que falten algunas de las distribuciones posibles, pero entre las soluciones que se presenten cada día sólo puede haber una estudiante y deben respetarse el número de horas semanales que demanda cada una de ellas.

*Solución incorrecta:* las soluciones incorrectas las forman aquellas en las que no se ha entendido el problema en sí, no se ha expresado con claridad cuál es la distribución de las horas o se han programado sesiones de piano con más de una alumna.

Por ejemplo, en la Figura 3.8.1 se puede intuir que el sistema elegido para presentar las soluciones no es el más adecuado, ya que cuesta averiguar qué elementos corresponden a cada permutación. Además, en muchas de ellas los días se repiten, es decir, dos alumnas diferentes asistirán a clase juntas el mismo día. El problema se produce porque se confunde el conjunto a colocar (días de la semana) con el de objetos a ser colocados (las niñas). Hay que distribuir los cuatro días entre las tres niñas, teniendo en cuenta que Lucía necesita dos días. Sería la forma más sencilla de hacerlo fijar los cuatro días, colocar a Lucía en dos y luego completar los días con las otras dos niñas, pero el estudiante lo hace al contrario. Esta dificultad también apareció en Navarro-Pelayo (1994).

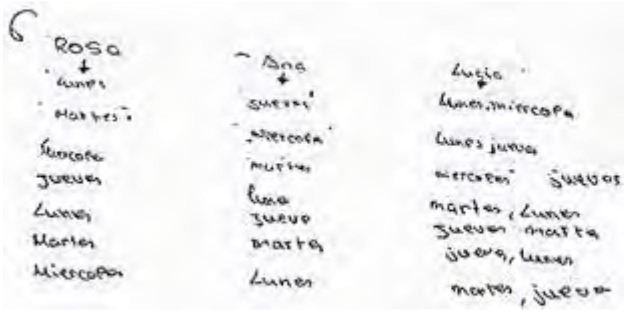

Figura 3.8.1. Ejemplo de solución incorrecta en el problema 6

En la Tabla 3.8.1 se presenta el porcentaje de soluciones al problema 6, según su corrección. Este problema es nuevo, por lo que no podemos comparar con las investigaciones previas. En este caso, el número de soluciones correctas una vez más mejora progresivamente en todos los cursos desde 1º ESO a 3º ESO, aunque las diferencias son en este caso menos significativas. Por otro lado, también el número de soluciones incorrectas desciende con el avance de los cursos, siendo más acusado este último de 1º a 2º ESO que de 2º ESO a 3º ESO; luego en este último problema como en todos se pueden relacionar estos hechos con la mayor edad de los estudiantes.

Tabla 3.8.1. Porcentaje de soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas en el problema 6

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Correctas | 4,4 | 14,3 | 16,7 |
| Parcialmente correctas | 47,8 | 57,1 | 70,8 |
| Incorrectas | 47,8 | 28,6 | 12,5 |

**Estrategias de resolución**

Se han encontrado las siguientes:

*Enumeración sistemática completa:* aprovechando el orden natural de los días de la semana, en este caso concreto lunes, martes, miércoles y jueves, se ha aplicado la enumeración sistemática sobre los nombres o sólo las iniciales de las alumnas de piano. Se fija una de ellas para el lunes y se varían las demás para el martes, y completados esos días, se varían las restantes horas.

Un ejemplo sería el de la Figura 3.8.2, en el que ni siquiera se marcan los días sino que se confía en el conocimiento general de cualquier lector, sobreentendiendo que el primer nombre o inicial se refiere al lunes, el segundo al martes y así sucesivamente hasta completar el horario del profesor.

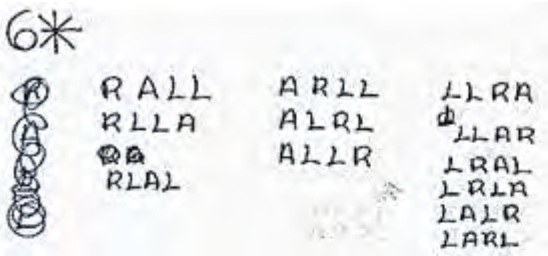

Figura 3.8.2. Ejemplo de enumeración sistemática completa en el problema 6

*Enumeración sistemática incompleta:* como en todos los problemas, también ha habido casos de enumeración sistemática incompleta, en la mayor parte de los casos debido a una mala elección del sistema de codificación del problema, pero en otros porque sólo se ha fijado el primer nombre o porque se ha empezado de forma sistemática, pero se ha terminado con ensayo- error.

Por ejemplo, en la Figura 3.8.3 es posible que el sistema de codificación entorpezca la aplicación de una enumeración sistemática completa, ya que tanto los días como los nombres se identifican mediante letras, que en ocasiones hasta coinciden, como es el caso de lunes y Lucía.

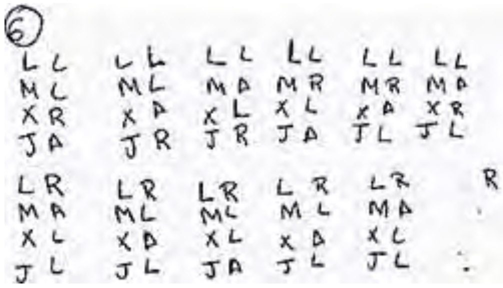

Figura 3.8.3. Ejemplo de enumeración sistemática incompleta en el problema 6

*Enumeración no sistemática o ensayo- error:* también en este ejercicio se encuentran casos en los que la enumeración se ha realizado de forma aleatoria, conectando días y nombres aleatoriamente e intentando no repetir ninguna posibilidad.

*Fórmulas:* como en el problema anterior, algunos estudiantes han extrapolado expresiones algebraicas que habían deducido para otros problemas, sin pararse a analizar las condiciones concretas de este caso. En ningún caso, se han encontrado expresiones de combinatoria como tal.

*Tablas:* una vez más, aprovechando el formato de horario semanal que plantea el problema, se utilizan tablas, aunque sólo sea como apoyo a algún tipo de enumeración. Aprovechando las dos variables, día de la semana y nombre de la alumna, se han construido distintos tipos de tabla, aunque ninguna de ellas es de doble entrada.

Como en la Figura 3.8.4, se trata siempre de tablas en las que se fijan los días de la semana en la parte superior, a modo de horario estándar para después distribuir a las alumnas. En este caso, se sigue el criterio de una enumeración sistemática incompleta.

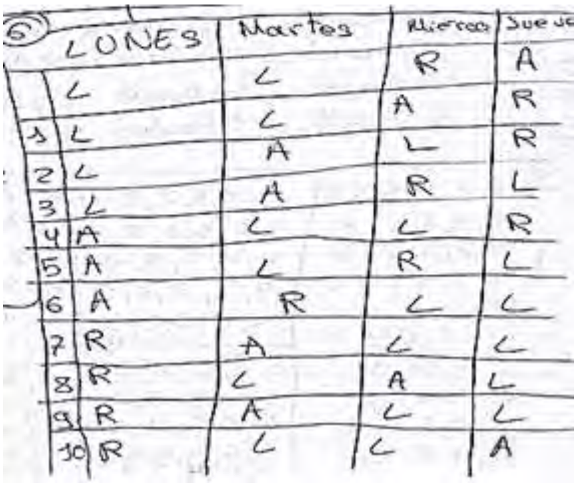


Figura 3.8.4. Ejemplo del uso de tablas en el problema 6

En la Tabla 3.8.2, se muestran los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias observadas, incluyendo también aquellos casos en los que los estudiantes aportan un número como solución del problema, pero sin dar ninguna indicación de la estrategia que han utilizado.

Tabla 3.8.2. Porcentaje de estrategias en el problema 6

| | 1º (n=23) | 2º (n=28) | 3º (n=24) |
|---|---|---|---|
| Esquema gráfico | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Enumeración sistemática completa | 0,0 | 3,6 | 12,5 |
| Enumeración sistemática incompleta | 0,0 | 10,7 | 4,2 |
| Enumeración no sistemática o ensayo- error | 52,2 | 46,4 | 41,6 |
| Fórmulas | 0,0 | 0,0 | 12,5 |
| Tablas | 17,4 | 14,3 | 25,0 |
| Resultado sin estrategia | 30,4 | 25,0 | 4,2 |

Lo más frecuente es la enumeración no sistemática, aunque ahora hay un porcentaje apreciable de uso de tablas en todos los cursos y de fórmulas en tercero.

## 3.9. SÍNTESIS DE RESULTADOS

Para tener una visión general de los resultados obtenidos, a continuación compararemos estos resultados en función de las diversas variables consideradas. En primer lugar, se analiza la diferencia entre los problemas de permutaciones ordinarias y con repetición; seguidamente, las observables entre los problemas de selección y colocación y, finalmente, las diferencias por curso.

Para ello en cada caso totalizamos las otras variables sumando los resultados, excepto en la variable analizada.

### 3.9.1. COMPARACIÓN ENTRE PERMUTACIONES ORDINARIAS Y CON REPETICIÓN

Para comparar los problemas de permutaciones ordinarias y con repetición sumamos todos los resultados en cada problema por curso sin tener en cuenta si se trata de un problema de selección o colocación; lo mismo para el resto de variables.

En la Figura 3.9.1 presentamos el porcentaje de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas en estos dos tipos de problema, observando que no hay diferencias entre los mismos. En cambio en el trabajo de Navarro-Pelayo (1994) resultaron mucho más sencillos los problemas de permutaciones ordinarias, con alrededor del 62% de respuestas correctas, frente al 25% en las permutaciones con repetición. Esta autora calcula estos porcentajes sin diferenciar los alumnos con y sin instrucción y, por otro lado, no considera las respuestas parcialmente correctas.

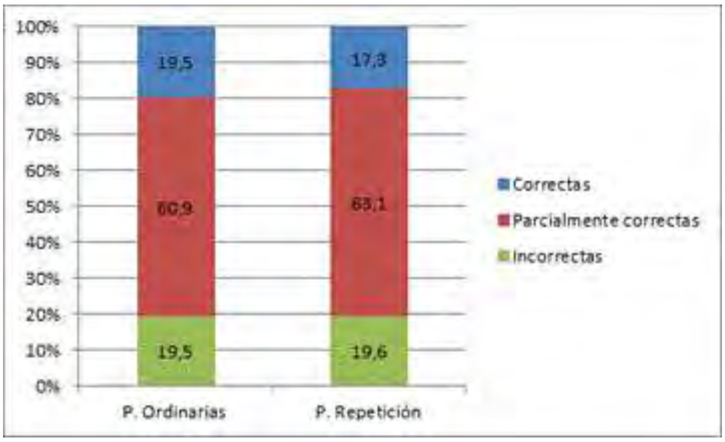


Figura 3.9.1. Porcentaje de respuestas según corrección en problemas de permutaciones ordinarias y con repetición

Siguiendo un método similar, en la Figura 3.9.2 se presentan los porcentajes de cada una de las estrategias observadas. A simple vista, la estrategia más utilizada ha sido la enumeración no sistemática en los dos tipos de problema. El resto de las estrategias se han utilizado en un tanto por ciento similar, excepto el uso de fórmulas, que casi se duplica en los problemas de permutaciones con repetición, y el esquema gráfico que ha sido sólo utilizado en los problemas de repetición. También conviene remarcar que las fórmulas han sido especialmente utilizadas en los últimos problemas del cuestionario, sin que los alumnos valorasen si existían o no repeticiones, en un intento de resolverlos extrapolando resultados a los que habían llegado en los problemas iniciales.

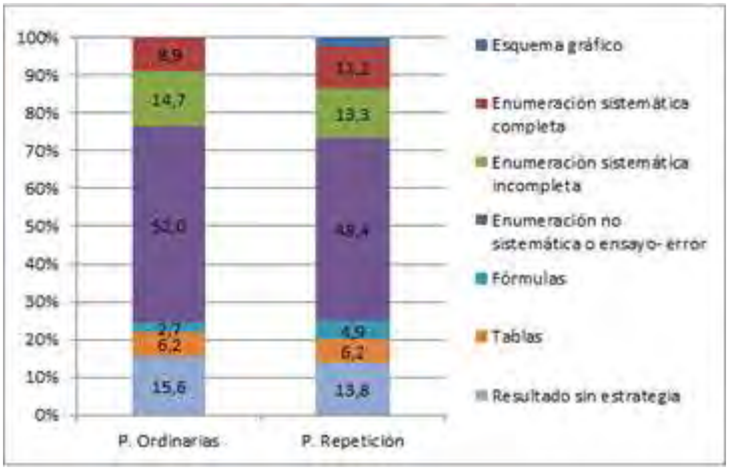


Figura 3.9.2. Porcentaje de estrategias según corrección en problemas de permutaciones ordinarias y con repetición

### 3.9.2. COMPARACIÓN ENTRE PROBLEMAS DE SELECCIÓN Y DE COLOCACIÓN

Para comparar los problemas de selección y de colocación sumamos todos los resultados en cada problema por curso, sin tener en cuenta si se trata de un problema de permutaciones con o sin repetición y de la misma forma para el resto de variables.

En la Figura 3.9.3 presentamos el porcentaje de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, observando que los problemas de selección han sido más sencillo para los estudiantes, al igual que ocurrió en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) y según indican Fischbein y Gazit (1988). El porcentaje de respuestas correctas (25,8) duplica en los problemas de selección al correspondiente a los problemas de colocación (11,1). Además hay un 7% menos de respuestas incorrectas.

Las diferencias entre respuestas incorrectas y parcialmente correctas entre los problemas de colocación y selección son muy similares, aproximadamente de 7 puntos porcentuales; mientras que en el caso de las respuestas correctas, la diferencia es de aproximadamente el doble, 14 puntos porcentuales, en este caso tomando como referencia los problemas de selección frente a los de colocación.

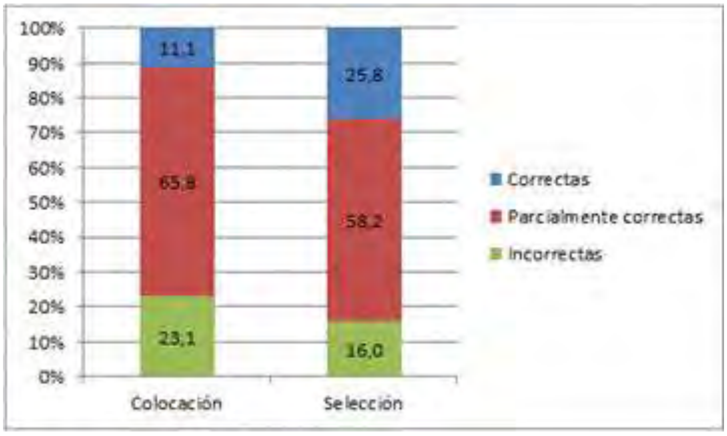


Figura 3.9.3. Porcentaje de respuestas según corrección en problemas de selección y colocación

De nuevo repitiendo el método para representar los porcentajes de las estrategias aplicadas, se observa en la Figura 3.9.4 que la más utilizada vuelve a ser la enumeración no sistemática. Comparando los dos tipos de problema, se ha utilizado más la estrategia de enumeración no sistemática en los problemas de colocación, 55,5%, frente al 44,9% en los de selección. En los problemas de selección ha sido más aplicada la enumeración sistemática completa y las fórmulas.

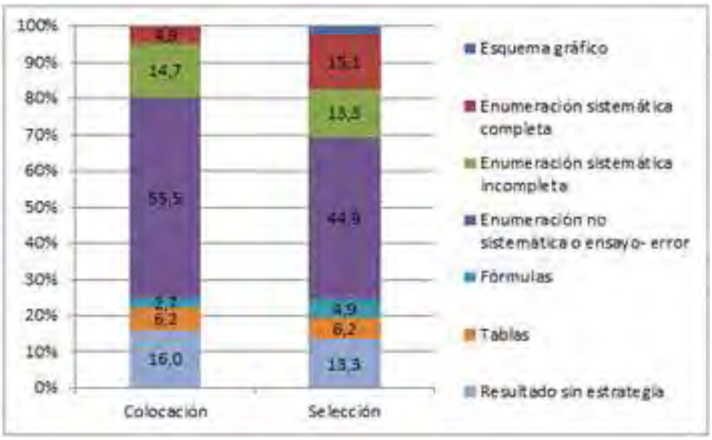


Figura 3.9.4. Porcentaje de estrategias según corrección en problemas de selección y colocación

### 3.9.3. COMPARACIÓN POR CURSO

Finalmente, para comparar los resultados de los tres cursos, se suman las soluciones correctas, parcialmente correctas e incorrectas que cada curso ha obtenido sin tener en cuenta que los problemas fueran de selección o colocación, sin repetición o con repetición y comparando los resultados en los tres cursos participantes.

En la Figura 3.9.5 presentamos los porcentajes para cada curso, observando claramente un aumento de las respuestas correctas con el avance de los niveles educativos, es decir, con la edad de los alumnos, al mismo tiempo que también desciende el porcentaje de respuestas incorrectas. Este resultado coincide con lo expuesto en la investigación de Fischbein y Gazit (1988), pues el razonamiento combinatorio parece desarrollarse espontáneamente con la edad, aunque no completamente. Vemos, que efectivamente son sólo el 32% las respuestas correctas en el curso tercero, pero también notamos que duplican las de segundo y multiplican por seis las de primero.

Igualmente hay un gran descenso de las respuestas incorrectas de primero a tercero, que se reducen a la tercera parte. Puesto que la enseñanza favorece en gran medida el razonamiento combinatorio, pensamos que estos resultados apoyarían el iniciarla desde el tercer curso, donde los estudiantes tienen ya una buena intuición para el tema.

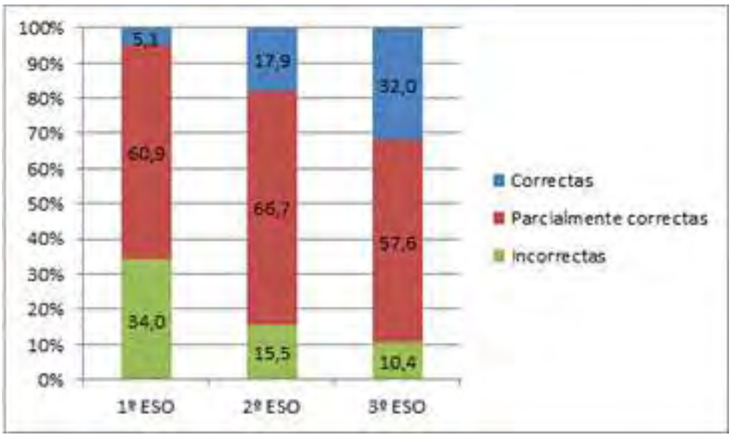


Figura 3.9.5. Porcentaje de respuestas según corrección por cursos

En lo que respecta a las estrategias, a partir de la Figura 3.9.6 se concluye que la enumeración es la técnica más utilizada en todas sus versiones y en todos los cursos. Con el aumento de la edad, cada vez van siendo enumeraciones más sistemáticas, que pasan del 2,2% en primer curso a 19,5% en tercero en detrimento del ensayo- error, que se reduce del 61,6% en primero a 35,4% en tercero.

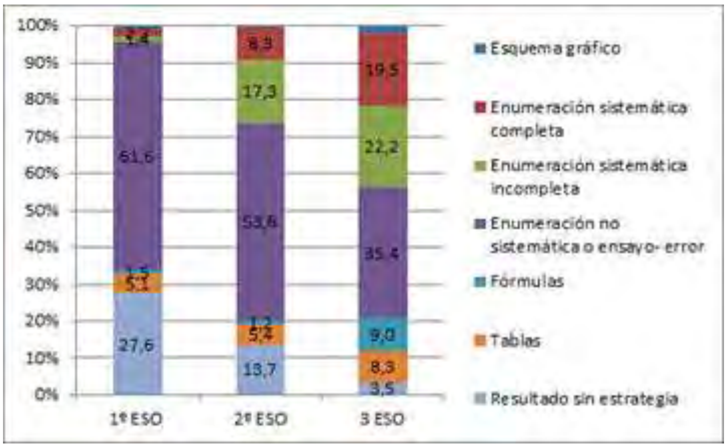


Figura 3.9.6. Porcentaje de estrategias según corrección por cursos

También destacan otras estrategias como el uso de tablas o fórmulas a medida que crecen los alumnos; el uso de tablas llega al 8,3% y el de fórmulas al 9% en tercero. Por otro lado, va dejando de aparecer la falta de argumentos para explicar los resultados alcanzados.

### 3.9.4. CONFLICTOS SEMIÓTICOS OBSERVADOS

En el análisis de las respuestas parcialmente incorrectas e incorrectas, se han observado algunos conflictos semióticos de los estudiantes:

- *No diferenciar permutaciones idénticas.* Aparece como efecto de la enumeración no sistemática, cuando el estudiante repite una permutación listada previamente (ver ejemplo en la Figura 3.3.2).
- *No agotar todas las posibilidades para producir un conjunto de permutaciones,* debido a que no utiliza un razonamiento recursivo completo, por lo que, al producir las permutaciones mediante ensayo y error, olvida algunos casos (también en la Figura 3.3.2).
- *Confusión en el número de elementos al formar una muestra.* Cuando al formar la permutación el número de objetos es mayor que el original (Figura 3.3.3).
- *Confundir las características del elemento a permutar:* Por ejemplo, al permutar bolas de colores, incluir un color que no aparece en la formulación del problema.
- *Repetir un elemento cuando no está permitido.* En una permutación ordinaria repetir alguno de los elementos, confundiendo permutación con y sin repetición. Aparece en Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000).

- *Considerar distinguibles elementos que no lo son*. Esto ocurre principalmente en las permutaciones con repetición y fue observado por Navarro- Pelayo (2004) (ver figura 3.3.5).
- *Al fijar una variable en una permutación de tamaño n, no observar que hay que trabajar con una permutación de tamaño n-1 para fijar el resto.*
- *Confundir el tamaño de la permutación que se debe formar;* por ejemplo, formar pares de objetos (Figura 3.4.2).
- *Fallo en la aplicación de la regla del producto.* Fijadas algunas posiciones, para hallar todas las permutaciones a que da lugar no se multiplica por el número de permutaciones posibles, sino por el número inicial de elementos.
- *Confundir el conjunto a colocar con el conjunto de puestos que debe ser colocado en el modelo de colocación* (ver Figura 3.8.1). También aparece en Navarro-Pelayo.

## 3.10. DISCUSIÓN E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Como se expuso en el Capítulo 2, Fischbein (1975) consiguió mostrar que la capacidad para resolver problemas de combinatoria no se alcanza de forma espontánea cuando los alumnos no han recibido instrucción al respecto, ni siquiera en el nivel de las operaciones formales. Igualmente, en el estudio de Navarro-Pelayo se observa una gran mejora en los estudiantes que han recibido instrucción. Y, del mismo modo, también otros autores han planteado que la edad media a la que se alcanza el pensamiento formal es bastante diferente a los 14-15 años marcados por Piaget e Inhelder (1951); incluso a la ampliación posterior hecha por Piaget hasta el periodo comprendido entre los 15-20 años. Es más, sugieren que un número significativo de personas no llega a alcanzarlo nunca. Sea como fuere, la cuestión es que cuantiosos estudios indican que, con cierta frecuencia, los adultos presentan sesgos en su razonamiento probabilístico, como consecuencia evidente de un frágil y deficiente razonamiento combinatorio.

En este sentido, los resultados presentados en este capítulo confirman estas opiniones y ponen de manifiesto las dificultades que presentan los estudiantes sin instrucción en combinatoria, así como la escasez y poca solidez de sus estrategias, a pesar de las limitaciones y la sencillez del cuestionario empleado. Algunos estudiantes se encuentran a un paso de finalizar sus estudios obligatorios y podrían entrar en muy pocos años en el mercado laboral arrastrando todas estas carencias.

La combinatoria es la base de la matemática discreta y un gran apoyo en el estudio de la probabilidad, por lo que un razonamiento combinatorio incompleto dificulta estas otras materias, pero, sin embargo, es posible introducir ideas combinatorias en diferentes ramas de las matemáticas y en forma gradual (Godino y Batanero, 2016). Por tanto, se concluye este capítulo con la esperanza de motivar e inspirar, tanto a los profesores para su labor en el aula, como a las personas que diseñan los currículos, para que se conciencien de la importancia del tema y promuevan la enseñanza de la combinatoria en esta etapa educativa. Las conclusiones de todos los estudios como el nuestro, así como las reflexionen resultantes sobre la metodología y los contenidos matemáticos que se transmite a los estudiantes del hoy, contribuyen a mejorar la enseñanza en aras de que la sociedad adulta del mañana consiga o haya conseguido desarrollar plenamente el pensamiento formal.

# CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Para finalizar el presente Trabajo Fin de Máster, en este último capítulo se exponen las conclusiones obtenidas a lo largo del mismo, en base a los resultados a los que se ha llegado tras el análisis de los cuestionarios y su relación con los objetivos que se plantearon al inicio del estudio.

Del mismo modo, tales conclusiones se complementan con una breve descripción de las limitaciones que tiene el trabajo, además de una serie de propuestas en forma de nuevas líneas de investigación, para que se puedan completar los resultados obtenidos. Como cierre, dadas las características del estudio, se termina con una breve reflexión sobre las posibles implicaciones que puede tener para la enseñanza de la Combinatoria.

## 4.2 CONCLUSIONES SOBRE LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS

El primero de los objetivos que se plantearon al inicio del trabajo se centraba en el estudio de la dificultad de los problemas y se redactó en el modo siguiente:

*O1. Analizar la dificultad relativa de los problemas de permutación, medida en porcentaje de respuestas correctas, en función del curso escolar y de las variables de tarea: tipo de permutación y modelo implícito del enunciado, ya que se había detectado en trabajos previos su influencia en dicha dificultad.*

Para alcanzarlo, se construyó un cuestionario formado por seis problemas en que se varían sistemáticamente las variables señaladas y se pasó a una muestra de estudiantes de diferentes cursos.

En base al análisis de los resultados obtenidos con los cuestionarios, se puede concluir en que el razonamiento sobre los problemas de permutación mejora entre los alumnos con la edad, es decir, con el avance de los cursos, ya que el porcentaje de respuestas correctas mejora en cada nivel escolar, teniendo en cuenta que ninguno ha recibido instrucción previa. Este resultado confirma los estudios previos realizados por Fischbein y Gazit (1988) y Fischbein, Pampu y Minzat (1970) en los que también se observa mejor razonamiento en los chicos de mayor edad.

Por otro lado, al comparar los problemas, según el modelo implícito en el enunciado, resulta que los estudiantes han tenido menos dificultades para resolver correctamente los problemas de selección que los de colocación, de acuerdo con los resultados de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1977). En su caso, los autores indican que la diferencia se debe a que los problemas de selección son los utilizados para definir las operaciones combinatorias, pero en nuestro estudio los alumnos no han recibido enseñanza sobre el tema. Pensamos que el resultado se explica por ser la selección una operación más relacionada con la actividad cotidiana. Además hay un menor número de problemas diferentes de selección que de colocación, según se vio en el primer capítulo.

Sin embargo, no han resultado diferencias significativas en función del tipo de permutación, contradiciendo el trabajo de Navarro-Pelayo (1994). En nuestro caso, se ha utilizado un número mayor de problemas de permutación con y sin repetición que los propuestos por la citada autora, lo que puede contribuir a la diferencia de resultados; y también a que los estudiantes que recibieron instrucción en dicho trabajo habían estudiado únicamente las permutaciones ordinarias. Por lo general, que haya o no repetición de elementos, no ha supuesto una dificultad adicional en nuestro estudio.

## 4.3 CONCLUSIONES SOBRE LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS

Lo relacionado con las estrategias se recoge en el segundo objetivo, que se planteó en la siguiente forma:

*O2. Analizar las estrategias que usan los estudiantes para resolver este tipo de problemas. No se espera que los estudiantes usen las operaciones combinatorias, pero se puede estudiar si llegan a dar una fórmula, usando previamente las reglas de la suma y producto; si realizan una enumeración sistemática o no sistemática; si se apoyan en un esquema gráfico, o cualquier otra estrategia.*

Para cumplir este objetivo se analizaron las estrategias seguidas en cada problema diferenciando el tipo de enumeración, así como el uso de fórmulas o esquemas gráficos. En nuestro estudio, tal y como se esperaba, y al contrario que en el trabajo de Navarro-Pelayo (1994) o Roa (2000), ningún alumno ha conseguido deducir por sí mismo la fórmula precisa que resuelve la estructura combinatoria de cada problema, pues esta deducción requeriría la aplicación recursiva de la regla del producto. Algunos estudiantes, sobre todo los de tercer curso, han intentado deducirlas sin éxito, proponiendo distintos tipos de potencias, que están más cerca de las variaciones que de las permutaciones. Del mismo modo, el esquema gráfico ha sido una de las estrategias menos utilizadas, y muy pocos llegan a la elaboración de un diagrama en árbol.

Por otro lado, se observa de manera muy generalizada en todos los niveles el uso de la enumeración, si bien es cierto que es más sistemática a medida que se avanza de curso. Mientras que en el primer curso se encuentra más a menudo la enumeración no sistemática o ensayo- error, que deriva en muchas soluciones incorrectas o inconclusas, siendo prácticamente inexistente la enumeración sistemática, en el tercero el porcentaje de enumeración sistemática, considerando completa e incompleta, ya iguala al de enumeración no sistemática. También el uso de tablas crece según avanzan los niveles, pero no aparece en grandes porcentajes.

## 4.4 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS CONFLICTOS SEMIÓTICOS

En el tercer objetivo se planteó el estudio de los conflictos semióticos de los estudiantes, con el siguiente enunciado:

*O3. Identificar los principales conflictos semióticos latentes en las respuestas y estrategias de los estudiantes. Se verá si se confunde el tipo de elementos y si se tiene en cuenta el orden y la repetición.*

En la Sección 3.9.4, se ha realizado una descripción de todos los conflictos semióticos identificados en nuestro estudio. Se ha observado que por lo general no se producen confusiones con el tipo de elemento, aunque a veces se hayan formado configuraciones con más elementos de los que contenía el conjunto inicial o se hayan incluido colores que no aparecen en el enunciado del problema. Del mismo modo, tampoco se ha encontrado apenas el error de repetir elementos en una permutación ordinaria en la que no se puede repetir; sin embargo, especialmente en las permutaciones con repetición, sí que ha sido más recurrente el error de distinguir entre dos elementos que son exactamente iguales.

Otros conflictos de los estudiantes han sido fallar en aplicar la regla del producto, confundir permutaciones idénticas o confusión en el número de elementos permitidos al formar una muestra.

## 4.5 COMPARACIÓN CON EL ESTUDIO DE NAVARRO-PELAYO

Nuestro último objetivo era el siguiente:

*O4. Comparar todos estos resultados con los obtenidos por Navarro-Pelayo (1994). Esta autora utilizó todas las operaciones combinatorias, pero respecto a las permutaciones su estudio es más limitado que el nuestro. Estudiaremos si se mantienen los porcentajes de repuestas correctas o encontramos cambios.*

A lo largo del Capítulo 3, se han ido realizando comparaciones con los resultados de Navarro-Pelayo, cuyos estudiantes tenían 14 años y la mitad de ellos habían recibido instrucción. Por tanto, se comparan con los resultados en tercer curso, que son los alumnos de edad más similar a la de dicho estudio.

En resumen, los resultados de los estudiantes sin instrucción fueron ligeramente mejores en el problema 1, algo inferiores en el problema 5, muy similares en el problema 3 y bastante mejores en los problemas 2 y 4. En lo que respecta al problema 6, la autora no lo consideró en su trabajo. Globalmente, no hay una gran variación respecto al trabajo citado, pudiéndose achacar las pequeñas diferencias al menor tamaño de nuestra muestra.

## 4.6 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

La principal limitación que se identifica en este estudio es su alcance. Al tratarse de un estudio de evaluación, fue necesario construir un cuestionario en el que se acotaron muchos de los contenidos en los que interviene el razonamiento combinatorio, de forma muy razonable, por otra parte, dadas las circunstancias, ya que se iba a presentar a alumnos desde primer a tercer curso de la ESO que no habían recibido apenas nociones de combinatoria. Además se prefirió centrarlo únicamente en las permutaciones, pues es el contenido explícitamente citado en las orientaciones curriculares, que estos alumnos estudiarán a partir del tercer curso.

Pero no es menos cierto que los resultados de la investigación podrían ampliarse si se introdujeran problemas donde aparecieran permutaciones cíclicas o incluso otro tipo de estructuras combinatorias, como las variaciones o las combinaciones, con y sin repetición. Del mismo modo, también resultaría complementario plantear problemas donde esté implícito el modelo de partición, además de los de selección y colocación que han sido utilizados.

Por otro lado, también existen carencias en cuanto a la muestra. El estudio se ha llevado a cabo con estudiantes del mismo instituto, muchos de los cuales han realizado también sus estudios de primaria en el mismo colegio, compartiendo así maestros, profesores, compañeros, libros de texto, métodos pedagógicos, etc. Aunque es evidente que supone un mayor esfuerzo para el investigador, recolectar cuestionarios de una muestra más diversa, a nivel provincial, autonómico o incluso nacional, enriquecería los resultados y les daría un valor mucho más general.

Igualmente sería enriquecedor complementar el estudio con entrevistas que revelen mejor la forma de razonar de los estudiantes.

## 4.7 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Como se menciona en el apartado anterior, el cuestionario que se ha utilizado en el estudio está acotado a problemas relativos a permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición, aprovechando que esta operación combinatoria era la única mencionada explícitamente hasta tercer curso de ESO en las nuevas directrices curriculares. Pero esta investigación podría a su vez complementarse con réplicas similares donde entren en juego problemas sobre variaciones con y sin repetición o problemas sobre combinaciones con y sin repetición, que tendrán que estudiar en cursos posteriores. A su vez o en trabajos paralelos, también se podrían incluir todos los modelos combinatorios: selección, colocación y partición.

Por otro lado, siguiendo la estela de las investigaciones de Fischbein sobre el efecto que podría tener la instrucción sobre el desarrollo de la capacidad combinatoria, diseñando para ello su propia metodología y recursos didácticos, muy apoyados en sistemas de representación como el diagrama en árbol, se podrían plantear líneas de investigación orientadas igualmente al diseño de materiales didácticos, que pudieran compatibilizarse con las estrechas líneas marcadas por el currículo vigente, con el objetivo de mejorar el razonamiento combinatorio entre los alumnos y poder evaluarlo antes de que reciban instrucción sobre operaciones combinatorias, bien sean permutaciones en 3º ESO o variaciones y combinaciones en 4º ESO.

# REFERENCIAS


Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed*.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York: Springer.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

Bernoulli, J. (1987). *Ars conjectandi* (N. Meunier, Trans.). Rouen: Institut de Recherche sur l'Enseignement Mathematique (original work published in 1713).

Bishop, A., Clements, M. K., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (Eds.). (2012). *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 4). Springer Science & Business Media.

Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configutarions combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 37-57.

Eizenberg, M. y Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and learning*, *6*(1), 15-36.

Engel, A. (1973). *Probabilidad y estadística*. Valencia: Mestral Universidad.

Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie?* París: O.C.D.L.

English, L.D. (1991). *Young children´s combinatoric strategies*. Educational Studies in Mathematics 22: 451-474.

English, L.D. (1993). *Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems*. Journal for Research in Mathematics Education, 24 (3): 255-273.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 121-141). Springer.

Espinel, M. C. (1999). Sistema de reparto de poder en las elecciones locales. *Números, 39*, 13-20.

Espinoza, J. (2011). *La combinatoria en libros de texto de matemáticas de educación secundaria en España.* Tesis de Máster. Universidad de Granada.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 5, 193-198.

Fischbein, E., Pampu, I., y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatorial ability in children. *The British Journal of Psychology, 40*(3), 261-270.

Glaymann, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conf*erence (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22* (2 y 3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2016). Implicazioni delle relazioni fra epistemologia e insegnamento della matematica per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria. *La Matemática e la Sua Didatica, 24* (1-2), 17–39.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J D., Batanero, C**.** y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60(1), 3-36.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Universidad de Granada.

Grimaldi, R. P. (1989). *Discrete and combinatorial mathematics: an applied introduction*. Reading, MA: Addison- Wesley.

Hadar, N. y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problema is strew with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics, 12*(1), 435-443.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187 205.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: P.U.F.

Jefatura del Estado (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*. Madrid: Autor.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education,* 3(1), 111-127.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Maury, S. (1986). *Contribution à l´étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la rèsolution des problèmes*. Thèse d´État. Université de Montpellier II.

Maury, S. y Fayol, M. (1986). *Combinatoire et résolution de problemes au cours moyens première et deuxième annés*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (1): 63-104.

Mendelsohn, P. (1981). *Analyse procedurale et analyse structurale des activités de permutation d´objets*. Archives de Psychologie, 49: 171-197.

MEC (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las ense.a nzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.* España: Ministerio de Educación y Cultura.

MEC (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Millán, E. F. (2013). Razonamiento combinatorio y el currículo español. *Probabilidad Condicionada, 2,* 539-545.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Navarro Pelayo, V. y Batanero, C. (1991). La combinatoria en los textos de Bachillerato. *Investigación en la Escuela, 14,* 123 127.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1991). Enseñanza de la combinatoria en Bachillerato. Una aproximación al pensamiento del profesor. *Revista de Educación*. Universidad de Granada, 4, 179-189.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., y Godino, J. D. (1997). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. *Educación matemática, 8(*1), 26-39.

NCTM (2000): *Principles and Standards of school mathematics*. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1951). *La génèse de l´idée de hasard chez l´enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Ribnikov, K. (1988). *Análisis combinatorio.* Moscú: Mir.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Roa, R., Batanero, C., y Godino, J. D. (2001). *Dificultad en los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 47, 33-47.

Roa, R., Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, *15(2),* 5-26.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon , 36,* 433-446.

Roa, R., Godino, J. D. y Batanero, C. (2001). Interpretación del enunciado de problemas combinatorios por estudiantes universitarios. *Epsilon,* 50, 193-206.

Roa, R., Navarro-Pelayo, V., y Batanero, C. (2001). Antecedentes y estado actual de la investigación en resolución de problemas en el campo de la combinatoria elemental. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 14,* 159-178.

Scardamalia, M. (1977). Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child Development*, 48 (1), 28-37.

Sriraman, B. y English, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. *Mathematics Teacher*, *98*(3), 182.

Stanley, W. (1946). *Los principios de las ciencias. Lógica del método científico*. Madrid: Espasa-Calpe.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.