UNIVERSIDAD DE GRANADA

Curso 2017-2018

Alex Alejandro Venegas Guerrero

RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Trabajo Fin de Máster en Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

Dirigido por

Dra. María Magdalena Gea Serrano

Este trabajo contó con el apoyo y financiamiento de CONICYT, Becas de Magíster en el Extranjero para Profesionales de la Educación BECAS CHILE, Folio 77170016; el Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

RESUMEN.

En este trabajo se presenta un estudio que da cuenta del análisis de las respuestas de futuros profesores de Educación Primaria a problemas combinatorios, según el tipo de lenguaje y estrategia utilizada para su resolución; además, se clasifican los conflictos semióticos presentes en sus respuestas.

El estudio se realiza en una única fase mediante la aplicación de cuatro problemas combinatorios propuestos a 62 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada. La caracterización de las variables de análisis se realiza mediante un análisis de contenido, atendiendo fundamentalmente a la investigación previa, lo que nos permite comparar los resultados obtenidos en nuestro estudio.

El estudio muestra que, a pesar del carácter simplista de los problemas combinatorios propuestos, los participantes tienen dificultades importantes para resolverlos debido, fundamentalmente, a conflictos semióticos asociados a la estructura del problema y el concepto de combinación que se pone en juego.

ABSTRACT.

In this work we presented a study where analyse the answers of prospective primary school teachers to combinatorial problems, according to the type of language and the strategies used for its resolution; in addition, the semiotic conflicts present in their answers were classified.

The study was carried out in a single phase through the application of four combinatorial problems proposed in 62 students of the Degree of Primary Education at the University of Granada. The characterization of the analysis variables was carried out through a content analysis, mainly based on previous research, which allowed us to compare the results obtained in our study.

The study showed that, despite the simplistic nature of the proposed combinatorial problems, the participants had significant difficulties to solve them, basically due to the semiotic conflicts associated with the structure of the problem and the concept of combination that has been put into play.

INDICE.

INTRODUCCIÓN.

Durante el transcurso de la vida, hemos sido testigos y actores, de cómo las matemáticas se han ido convirtiendo en uno de los principales pilares de la humanidad. Las matemáticas forman parte de nuestra cultura, de nuestra vida cotidiana, y se aplican en tantas situaciones, que a veces ni nos damos cuenta del uso que hacemos de ellas, por lo que su participación en nuestra vida ha sido y es fundamental.

Justamente, los ámbitos de mayor importancia es la resolución de problemas, y en esta línea es en la que se enfocan los programas de estudio de las matemáticas en el currículo escolar español (MECD, 2014, 2015), orientados hacia una metodología constructivista.

La resolución de problemas forma parte importante de la formación de nuestros estudiantes, y como manifiestan algunos investigadores en Didáctica de la matemática, *hacer matemáticas* no es más que resolver problemas, en los contextos en que estos puedan verse implicados. En consiguiente, la enseñanza de las matemáticas se debe plantear desde el enfoque de ofrecer problemas en los que se haga pensar, reflexionar e investigar a los estudiantes, permitiendo mostrar el sentido y la utilidad práctica de las matemáticas (Gaulin, 2001).

En la conexión de la resolución de problemas con el razonamiento lógico presente para su resolución, esta línea de investigación ha sido objeto de estudio de diversos autores, otorgando a las matemáticas un rol más importante que meros símbolos, sino más bien un rol de herramientas que permiten resolver problemas en contextos sociales-reales, situaciones de la vida cotidiana (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1996), en definitiva: matemáticas para la vida.

En este sentido es que el razonamiento combinatorio juega un rol importante en la resolución de problemas, el cual no solo implica técnicas de conteo, sino que además conlleva un análisis profundo de situaciones, que en ocasiones involucra circunstancias probabilísticas. Según Roa, Batanero, Godino y Cañizares (1997), el razonamiento combinatorio desarrolla y fortalece habilidades, mencionando, entre otras, el razonamiento hipotético-deductivo que opera en situaciones problema, las cuales son descubiertas y analizadas por medio de la combinatoria.

Con la intención de profundizar en el conocimiento combinatorio que posee una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, según la resolución de problemas combinatorios propuestos, en este Trabajo Final de Máster se describe el estudio de evaluación sobre el razonamiento combinatorio que se muestra en las respuestas de los futuros profesores participantes, según el tipo de lenguaje y estrategias utilizados para su resolución; además, se clasifican los conflictos semióticos presentes en sus respuestas. El presente trabajo se organiza de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se describen los objetivos de investigación de nuestro estudio, enfocando previamente la importancia de la combinatoria en la matemática y en la educación matemática que se planifica para los estudiantes en la Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato. Se describe de forma breve su presencia en el currículo, ofreciendo una perspectiva internacional.
- El Capítulo 2 da cuenta del marco teórico en que está inmerso este estudio, analizando el objeto matemático en cuestión, además del modelo del conocimiento del profesor que es utilizado para nuestro estudio. Se completa esta fundamentación teórica con el análisis de diversas investigaciones que nos ofrecen el marco de estrategias de resolución de problemas que involucran el análisis combinatorio, las principales dificultades encontradas, así como otras investigaciones que aportan resultados de interés para este trabajo.
- En el Capítulo 3 se describe el contexto de nuestro estudio, los participantes y el método de investigación, así como el análisis de los problemas combinatorios propuestos en la investigación y de las respuestas de los futuros profesores a los mismos, atendiendo a las variables de análisis como son el lenguaje y los tipos de estrategias utilizadas, así como los conflictos semióticos presente en sus respuestas. Debido a la limitación de espacio en el trabajo que presentamos, se decide incluir como Anexo 1 el análisis del primer problema planteado a los futuros profesores puesto que, los siguientes tres problemas propuestos se refieren a los tres tipos de modelo combinatorio implícito y por tanto, su análisis interesa presentarlo de manera conjunta.
- Se concluye en el Capítulo 4 con una síntesis de los resultados obtenidos en el estudio presentado en este trabajo, según los conflictos que los participantes mostraron al resolver los problemas, el análisis del lenguaje y de las estrategias empleadas por los participantes. Además, se valora el alcance de los objetivos planteados para el desarrollo de este trabajo y las líneas de investigación futuras según el planteamiento de nuestro estudio y los resultados obtenidos.

CAPITULO 1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

1.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se describen varios aspectos relativos a la combinatoria, comenzando por el origen del concepto y de cómo los primeros grandes matemáticos empezaron a cuestionarse las problemáticas implicadas en lo que hoy en día se conoce como combinatoria. Se presenta su importancia en la matemática, como área de estudio específica, y su utilidad en la resolución de problemas, centrando la atención en la formación del alumnado.

Todo ello nos conduce a reflexionar en la manera en que se concreta su enseñanza, a nivel curricular, ya que, como manifiesta Fischbein en el prólogo del libro de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), la combinatoria se trata de un elemento crucial para el fomento del razonamiento lógico-matemático (Fischbein, 1994, p.11):

> El Análisis Combinatorio, con sus conceptos y métodos no representa, por tanto, solamente un dominio definido de la matemática. Expresa, como he dicho, un esquema operacional, (en la terminología Piagetiana), ¡un prerrequisito estructural importante para la dinámica y potencia creativa del razonamiento lógico en general!"

Con todo ello, se trata de delimitar el problema de investigación que abordamos en este Trabajo Fin de Máster, que es analizar el conocimiento que posee una muestra de futuros profesores de Educación Primaria cuando resuelven tareas relativas a combinatoria, incluidas en una práctica de formación en una asignatura obligatoria que forma parte de su formación docente en segundo curso del Grado en Educación Primaria. El interés por investigar el conocimiento del profesor radica en la necesidad de que el docente disponga de un adecuado conocimiento para abordar su enseñanza y así poder fomentar en sus estudiantes el razonamiento combinatorio.

A continuación se describe brevemente el origen del concepto y su papel en la matemática, su importancia en la formación del estudiante, su presencia en el currículo en España, junto a una perspectiva internacional a través del NCTM, y finalizamos presentando los objetivos que se busca alcanzar con este trabajo, dando con ello respuesta a la problemática planteada.

1.2. COMBINATORIA Y SU PAPEL EN LA MATEMÁTICA.

Para contextualizar el inicio de la combinatoria, nos remontamos más allá de la concepción actual en la que se considera el tema vinculado casi en exclusiva a la probabilidad. Cabe destacar que la combinatoria resulta de gran utilidad a la rama de la probabilidad, puesto que su desarrollo favorece la resolución de problemas, en base al tipo de razonamiento que promueve.

Navarro- Pelayo (1994) menciona que la combinatoria se manifiesta desde la necesidad por saber la manera de seleccionar o elegir parejas a partir de un cierto número de elementos, agregando que la enumeración proporciona las herramientas que se necesitan para establecer todas las posibilidades de ocurrencia de un resultado en un experimento. En su investigación, la autora ubica el origen del concepto en la cultura árabe, concebido por Al Hayyam (1048-1131), siendo Levi ben Gerson (1288-1344) quien escribió acerca de las permutaciones y combinaciones, consagrando las tres reglas principales de estos conceptos, conocidas en la actualidad con la siguiente notación:

1) *n!* para el número de permutaciones de *n* elementos;
2) $m \bullet (m-1) \bullet \ldots \bullet (m-(n-1)) = m \bullet (m-1) \bullet \ldots \bullet (m-n+1)$ para el número de variaciones de *m* elementos tomadas de *n* a *n* veces (con $m \geq n$); y
3) $\frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$ para el número de combinaciones de *m* elementos tomados en *n* veces:

Beuchot (1985) plasma las ideas de Leibniz (1646- 1716) y Lulio (1232- 1315), grandes pensadores y filósofos, que entendían la combinatoria como un arte. El autor menciona que Leibniz, en su *Ars combinatoria* (1666), lo considera como el ente, el cual es considerado como un todo que está formado por partes. Lulio, en su *Ars Magna* (1274), lo entiende como una justificación al conocimiento racional a partir de nociones y principios que, combinados mediante los símbolos que los representan, poseen los contenidos de todas las ciencias. Estos pensadores otorgaban a la combinatoria la esencia del arte, dando énfasis a diversas formas de pensamiento y razonamiento.

Siguiendo de forma breve esta línea histórica, la combinatoria surge de la necesidad del hombre por seleccionar cierto conjunto de elementos. Tras numerosos aportes de diversas civilizaciones como la griega, árabe y la india, el desarrollo del concepto avanza a partir del s. XVI, de la mano de matemáticos como Tartaglia (1499-1557) y Cardano (1501-1576). Con el interés de obtener el cardinal del conjunto de posibilidades de ganar un juego, frente al total de posibilidades que se puedan presentar en dicho juego, se produce una matematización y sistematización del concepto, que se desarrolla de manera paralela al significado clásico de la probabilidad (Batanero, 2005).

Desde esta perspectiva, podemos entender a la combinatoria como una herramienta que ayuda a determinar el orden y selección de cierta cantidad de elementos y que ha sido materia de estudio desde tiempos inmemoriales. Grandes han sido los estudios realizados sobre probabilidad, donde podemos apreciar cómo la combinatoria ha otorgado valiosas ideas y aportes para su construcción.

La combinatoria, al igual que la matemática, también lleva sobre sus hombros el peso de ser utilizada y aplicada como herramienta que permite el avance científico. Esto se debe a la extensión que ha tenido desde su campo original de aplicación, lo que ha implicado el avance de estudios en el transporte, confección de horarios, planes de producción, informática, biología y economía, como también en la misma matemática, donde la combinatoria ha ayudado en la teoría de grupos, geometría y álgebra (Guirado y Cardoso, 2007). Coincidiendo con lo anterior, Fischbein (1994) relaciona el análisis combinatorio con variadas ramas de las matemáticas como la programación lineal, topología, teoría de números, siendo para cada una de ellas un gran aporte. Por ejemplo, gracias a la combinatoria, áreas como el cálculo integral y el álgebra han fundamentado sus bases. Colerus (1973) menciona que existen libros de geometría, que a cambio de usar líneas y figuras geométricas, utilizan letras y formulas combinatorias. Además, estos mismos ejemplos sirven de contextos de aplicación que facilitan su enseñanza.

Con todo ello, nos atrevemos a dar una definición del concepto, desde lo que se considera razonamiento combinatorio, según Pessoa y Borba (2010, p. 2):

> […] el raciocinio combinatorio como un tipo de pensamiento que implica conteo, pero que va más allá de la enumeración de elementos de un conjunto. En la Combinatoria se cuentan, basándose en el raciocinio multiplicativo, grupos de posibilidades, a través de una acción sistemática, sea por el uso de fórmula, sea por el desarrollo de una estrategia que dé cuenta de atender a los requisitos de esos tipos de problemas, como la constitución de agrupaciones, la determinación de posibilidades y su cuenta.

Cabe señalar que gran parte del interés del surgimiento de la combinatoria, fue consecuencia de los tipos de problema, que a través del tiempo, se han definido en diferentes campos de aplicación. Navarro-Pelayo (1994) resume la tipología de problemas relativos a la combinatoria según la siguiente clasificación:

1. *Problemas de existencia:* La estructura de estos problemas se enfoca al estudio de asuntos de existencia o no existencia de estructuras discretas. La simbolización y visualización son primordiales en la resolución de este tipo de problemas, donde la disposición de los elementos (ternas, columnas, filas, etc.) facilita su resolución.
2. *Problemas de enumeración:* Algunos autores consideran este tipo de problemas como consecuencia de los problemas de existencia, ya que una vez estudiada la existencia de cierta estructura discreta, se procede al estudio del número de dichas estructuras con ciertas condiciones previamente establecidas. A pesar de ello, el matiz de estos problemas radica en que no es necesario determinar todos los posibles casos que se

pueden presentar en una situación-problema, sino que un algoritmo o método de construcción de la enumeración con su correspondiente generalización es suficiente para dar la solución del mismo.

3. *Problemas de optimización o extremales:* Se considera este tipo de problemas como consecuencia de los problemas de existencia, puesto que seguido de ellos, se escogen el número de elementos que poseen las propiedades buscadas, aunque hay un ligero matiz con aquellos y es que, a través de una función de valor, se permite considerar nociones de máximo y mínimo valor.
4. *Problemas de recuento:* En este tipo de problemas se propone determinar la cantidad de elementos de un conjunto finito de elementos que comparten ciertas características determinadas por una o varias propiedades.
5. *Problemas de la clasificación:* Este tipo de problemas se puede entender como caso particular del anterior, pero poseen un matiz que los caracteriza, por lo que generan una nueva tipología: cuando encontramos un número elevado de elementos que se recuentan y se advierte que comparten ciertas características, se requiere llevar a cabo una clasificación de dichos elementos para facilitar el recuento de los mismos.

1.2.1. OPERACIONES COMBINATORIAS.

En lo que respecta al aspecto operacional de la combinatoria, Wilhelmi (2004) otorga un acercamiento a sus definiciones formales y algoritmos, que se aplican en los tipos de problema de recuento, descritos en la sección anterior, y distingue las siguientes operaciones combinatorias:

Combinación, que se refiere al número de conjuntos de *k* elementos que se pueden formar con *n* elementos, donde no interesa considerar su orden sino su pertenencia o no al conjunto. Se distinguen dos tipos, según se considere la repetición o no de los elementos en los conjuntos que se forman:

Combinaciones sin repetición: Se refiere al recuento de los subconjuntos de tamaño *k* que se generan del conjunto total de *n* elementos (tomados de *k* en *k*), donde los conjuntos son diferentes entre sí en, al menos, un elemento y cuya notación es C_k^n o $C_{n,k}$. Su fórmula viene dada por:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Combinaciones con repetición: Se refieren al recuento de los subconjuntos de tamaño *k* que se generan del conjunto total de *n* elementos (tomados de *k* en *k*), indistinguibles o no, de modo que una agrupación se diferencie de las demás en, al menos, un elemento, sin importar su orden de colocación o selección. Su notación es $CR_{n,k}$ y su fórmula viene dada por:

$$CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1} \quad si \quad k \neq 1, n \neq 1$$
$$CR_{1,k} = 1 \quad y \quad CR_{n,1} = n$$

Permutación, que se refiere al número de ordenaciones posibles de *n* elementos distintos. Considerando las ordenaciones de modo lineal (no circular), y teniendo en cuenta si se considera o no repetir elementos en las ordenaciones, se distingue dos tipos:

Permutación sin repetición: Son aquellas ordenaciones de *n* elementos que cuantifican los diferentes grupos que se pueden formar, de tal forma que en cada grupo entren los *n* elementos y que los grupos se diferencien entre sí sólo en el orden de colocación de dichos elementos. Su notación es P_n y su expresión viene dada por:

$$P_n = n!$$

Permutación con repetición: Son aquellas permutaciones de *n* elementos, distribuidos en *k* grupos de $a_1, a_2, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ elementos indistinguibles, de tal modo que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k = n$. De las diferentes configuraciones que se pueden formar con los *n* elementos, se distinguen entre ellas en el orden de colocación de sus elementos y en los elementos que componen cada uno de los grupos que conforman la composición del conjunto, excluyendo los elementos que pertenecen a un mismo grupo. Su fórmula viene dada por:

$$PR_n^{a_1,a_2,\dots,a_{k-1},a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!}$$

Variaciones, que se refiere al número de cambios que se pueden presentar en los elementos de un conjunto, según una situación marcada, así como por el orden que presentan los elementos en dicho conjunto. Según se considere la repetición o no de los elementos en el conjunto se distinguen dos tipos:

Variaciones sin repetición: Son aquellas variaciones de *n* elementos, tomados de *k* en *k*, de tal manera, que en cada conjunto ingresen *k* elementos diferentes, y que los conjuntos se diferencien entre ellos, en alguno de sus elementos o bien en su orden de colocación. Su notación es $V_{n,k}$ y su fórmula viene dada por:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variaciones con repetición: Son aquellas variaciones de *n* elementos, tomados de *k* en *k*, de tal forma que en cada conjunto ingresen *k* elementos iguales o distintos, y que cada conjunto se diferencie de los demás en algún elemento o bien, en su orden de colocación. Su notación es $VR_{n,k}$ y su fórmula viene dada por:

$$VR_{n,k} = n^k$$

1.3. COMBINATORIA Y SU PAPEL EN LA FORMACIÓN DEL ALUMNO.

Como se explicó en secciones previas, el concepto de combinatoria, desde su origen, ha llevado asociado un conjunto de ideas que nos hacen considerarlo una herramienta, útil e imprescindible, fundamental en la formación del estudiante.

El razonamiento combinatorio juega un papel fundamental en el dominio de la estructura aritmética, sobre todo en la resolución de problemas. El papel de la combinatoria, como modo de pensamiento e instrumento de resolución de problemas descrito en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), es una gran aportación didáctica para el docente en cuanto a la enseñanza y aprendizaje del tema, a nivel de Educación Primaria y Secundaria. Como indican Cid, Godino y Batanero (2013), los niños y niñas desarrollan gradualmente el sentido numérico, como resultado de la variedad de contextos en donde se hace uso de los números y sus relaciones. Los autores relacionan el sentido numérico con la actividad de contar, ordenar, las operaciones y relaciones que se establecen entre ellas para dar solución a problemas, así como el propio sistema lógico deductivo que organiza, justifica y estructura todos estos elementos; y ubican su lugar natural de iniciación en la etapa de preescolar. También, Ruiz Higueras (2005, p. 193) indica:

> El número y la numeración son objetos culturales, utilizados cotidianamente en el medio familiar y social. […]. Para diseñar el proceso de enseñanza, no podemos servirnos únicamente de la definición matemática de número natural y de las reglas del algoritmo de «contar», tenemos necesidad de determinar un conjunto de situaciones que permita a los niños, desde la Educación Infantil, encontrar las «razones de ser» del número y la numeración.

De este modo, en la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, se debe tener en cuenta no sólo el desarrollo de las técnicas (orales y escritas) de cálculo, sino las propiedades y situaciones en las que el uso de dichas operaciones es pertinente. De este modo, afrontar una situación aditiva o multiplicativa requiere, en gran medida, reconocer la estructura lógica interna de dicha situación para poder identificar la posición de la incógnita en el problema que se resuelve (Cid, Godino y Batanero, 2013).

Por otro lado, Batanero (2004) plantea el concepto de espacio muestral como una idea estocástica fundamental a desarrollar en un curso de probabilidad, tanto para Educación Primaria como Secundaria. La autora destaca, entre otras, su relación con el concepto de suceso (pues el álgebra de conjuntos permite definir operaciones entre partes del conjunto de referencia), de muestreo (puesto que nos permite observar las repeticiones del experimento según los elementos observados del espacio muestral), así como con la probabilidad (al comparar la probabilidad de sucesos según la disposición de los conjuntos que se determinan en el espacio muestral).

Chernoff y Rusell (2011) plantean la importancia de discutir con los estudiantes sus aproximaciones al concepto de espacio muestral en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema, donde se integre la comprensión del estudiante con la respuesta esperada del profesor, puesto que ciertos razonamientos del alumnado atienden a la importancia del orden y son buenas oportunidades para profundizar en este concepto. En Chernoff y Rusell (2012), se muestra la dificultad de reconocer el orden ante una tarea probabilística en la que se pide, a una muestra de futuros profesores de Educación Primaria (40%) y Secundaria (60%), determinar la corrección de dos respuestas de estudiantes ante el problema de determinar la probabilidad de que una familia de tres hijos tenga dos hijas y un hijo. Los resultados no son muy buenos, pues cerca de la mitad de participantes (42%) eligieron mal la respuesta.

En este sentido, el razonamiento combinatorio se muestra útil ante esta idea de espacio muestral, al inventariar todos los posibles resultados del experimento. Así es que "El utilizar técnicas de recuento para calcular el número de elementos favorables y desfavorables a un suceso y usar estos números para calcular las probabilidades fue un punto crucial en el desarrollo del cálculo de probabilidades" (Batanero, 2004, p. 22).

Fischbein (1994) matiza esta idea al entender la combinatoria como una de las condiciones básicas del razonamiento lógico, tal como citamos con sus propias palabras al inicio de este capítulo (Ver Introducción). Como indica Batanero: "la combinatoria es algo más que un auxiliar de la probabilidad […] las operaciones combinatorias son un componente fundamental de pensamiento formal." (Batanero, 2004, p. 22).

1.4. LA COMBINATORIA EN EL CURRÍCULO.

La combinatoria ha generado grandes aportes a diversos campos de aplicación, evidenciándose su utilidad para el desarrollo de diversas disciplinas, no sólo de las matemáticas, como se ha descrito en las secciones previas. Así es que el razonamiento combinatorio se constituye en una herramienta valiosa, que se debe considerar como parte de la formación que reciben nuestros estudiantes.

Como indica Fischbein (1994), el análisis combinatorio, en toda su composición, no representa un único dominio de la matemática, sino más bien, un esquema operacional, una base estructural para el potenciamiento del razonamiento lógico. Así es que, sin menospreciar las dificultades que el tema pueda generar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades, coincidimos con Navarro-Pelayo (1994) en que la combinatoria elemental no utiliza métodos matemáticos complejos y su incorporación en la enseñanza de los primeros niveles educativos aporta ventajas de valor incalculable, por ejemplo, en el desarrollo de la intuición, el cambio de representación, la generalización o la formalización de conceptos. Además, la combinatoria es el eje central de la probabilidad elemental, por lo que el diseño de su enseñanza debiera tener en cuenta todos estos hechos.

Los cálculos numéricos en la combinatoria no son complicados, por lo que debiera ser insertada desde la Educación Primaria, facilitando así el desarrollo de estos contenidos en estudios posteriores como la etapa de Educación Secundaria, Bachillerato y estudios universitarios. Kapur (1970) propuso la enseñanza de la combinatoria como adecuada para todos los grados académicos, ya que en un inicio no depende del cálculo y con el tiempo, se convertiría en un problema considerable dentro de la enseñanza de las matemáticas si prescindimos de su introducción en los primeros niveles.

Tras la importancia que evidencian diversos autores porque la enseñanza de la combinatoria se inicie en los primeros niveles educativos, a continuación se describe brevemente cuál es la actual presencia del tema en el currículo de las matemáticas, centrando la atención al caso de España, puesto que el estudio que realizamos y describimos en este Trabajo Fin de Máster, se lleva a cabo en una muestra de estudiantes que se preparan para ser profesores de Educación Primaria en el sistema educativo de este país. Asimismo, ofrecemos una perspectiva internacional de las orientaciones curriculares del tema, particularizando en el caso del NCTM.

1.4.1. COMBINATORIA EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL.

En las orientaciones curriculares en España, el razonamiento combinatorio se considera un pilar fundamental para el desarrollo cognitivo y el razonamiento lógico - matemático de los estudiantes de los primeros niveles, asociado al sentido numérico, pero, a pesar de las recomendaciones que diversos autores proponen en sus investigaciones sobre la inclusión del tema en las primeras edades, su presencia en Educación Primaria está implícita, siendo en la etapa de Educación Secundaria y Bachillerato donde adquiere explícitamente su concreción curricular.

Educación Primaria

En la normativa curricular estatal se plantea como uno de los objetivos generales de esta etapa educativa: “Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana” (MECD, 2014, p. 19354). Luego, el interés por desarrollar estas habilidades es fundamentalmente para que resulten ciudadanos críticos y pensantes, capaces de ser participantes activos de nuestra sociedad.

Derivando de lo anterior, se plantean la enseñanza de la matemática dividida en 5 bloques de contenidos: Procesos, métodos, y actitudes en matemáticas; Números; Medida; Geometría; y Estadística y Probabilidad, siendo los bloques relativos a procesos y métodos, números y el de estadística y probabilidad los más importantes para ubicar la enseñanza del tema. Para estos bloques de contenidos, se establecen los siguientes estándares de aprendizaje evaluables:

- Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales. (MECD, 2014, p. 19388).
- Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. (MECD, 2014, p. 19390).
- Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.” (MECD, 2014, p. 19393).

Los criterios de evaluación que se establecen para el tema de combinatoria se relacionan con “Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.” (MECD, 2014, 19393) siendo los contenidos que se pretenden desarrollar los específicos al tema de probabilidad: “Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso” (MECD, 2014, p. 19393).

Educación Secundaria y Bachillerato

En la normativa curricular estatal (MECD, 2015), en primer y segundo curso de Educación Secundaria, hay una presencia implícita del razonamiento combinatorio, puesto que se inicia el estudio del muestreo y se avanza en el cálculo de probabilidades de sucesos. En tercer o cuarto curso de Educación Secundaria, dependiendo de la modalidad, es cuando se concreta la enseñanza del tema.

En la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, se plantea el uso de problemas que involucren permutaciones, factorial de un número, además de la aplicación del diagrama del árbol, todos ellos en contextos del cálculo de probabilidad (MECD, 2015). En cuarto curso, en la misma opcionalidad, aparecen los siguientes estándares de aprendizaje: “1.1. Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. […] 2.1. Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias” (MECD, 2015, p. 398).

En la opción de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, para cuarto curso se tiene el siguiente estándar de aprendizaje: “3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos” (MECD, 2015, p. 407).

En Bachillerato, para ambas modalidades, se plantea la enseñanza de la combinatoria en el ámbito del cálculo de probabilidades, ambas compartiendo el siguiente estándar de aprendizaje: “Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento” (MECD, 2015, p. 422).

Se observa una mayor profundización de conceptos ligados a la combinatoria en la modalidad de humanidades que en la de ciencias, aunque la diferencia es mínima.

1.4.2. PERSPECTIVA INTERNACIONAL (NCTM).

En la revisión de los estándares que determina el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) observamos mayor concreción del tema que en el caso del currículo español, que se concreta principalmente en tres focos de contenido: *Resolución de Problemas*, *Álgebra* y *Análisis de Datos y Probabilidad* (NCTM, 2000).

Centrando la atención en las etapas 3 a 5, con respecto a la resolución de problemas, el razonamiento y análisis combinatorio está presente en el estándar: “Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas” (NCTM, 2000, p. 186). Podemos ver de modo más explícito su presencia desde los ejercicios que se plantean, en los que se puede aplicar diversas estrategias, como en el siguiente ejemplo (etapa 3-5):

> Si tiras dos dados (Ambos numerados de 1 al 6), y restas el número menor del mayor o, si son iguales, restas el uno del otro, ¿Cuáles son los resultados posibles? Si haces veinte veces y elaboras una tabla y un diagrama de puntos de los resultados, ¿Cómo crees que sería el diagrama? ¿Es más probables una diferencia que las otras? (NCTM, 2000, p. 186)

Este problema da pie a que los estudiantes verifiquen todas las combinaciones posibles, además de relacionarlo con conceptos básicos de probabilidad. Otro aspecto importante del problema es que genera un razonamiento que puede influenciar en el estudiante la escritura, toma de nota y/o realización de bosquejos para indagar todas las combinaciones que el enunciado implica. Inclusive tiene relación con temáticas básicas de estadística, al solicitar la organización de los datos, la experimentación y la elaboración de una tabla para la simulación de la situación problema.

Debido a que los problemas combinatorios involucran razonamiento algebraico, en el estándar de Algebra se aprecia una expectativa de interés en el tema como es: "Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos" (NCTM, 2000, p. 162). Es importante que a partir de situaciones numéricas y geométricas, los estudiantes sean capaces manifestar un razonamiento combinatorio adecuado, lo que debe ser estimulado por los profesores, ya que muchos de los problemas combinatorios iniciales fueron geométricos y numéricos.

Para el estándar de Análisis de Datos y Probabilidad, en la etapa de 3 a 5, el tema se encuentra implícito en la resolución de problemas relativos al cálculo de probabilidades. En la etapa 6-8, en la parte de comprensión y aplicación de conceptos básicos de probabilidad, se indica la siguiente expectativa de aprendizaje relativa a problemas de combinatoria: "Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área" (NCTM, 2000, p. 252). Se observa la intención del uso de diversas técnicas de recuento y operaciones combinatorias, que se puede iniciar con problemas simples, como por ejemplo lanzar una moneda 4 o 5 veces, donde los estudiantes necesitan conocer todas las combinaciones para saber cuántas veces se repiten algunas de ellas, y así calcular su probabilidad correspondiente.

Una de las técnicas mencionada en los estándares es el diagrama de árbol, el cual resulta bastante útil para conocer el número de combinaciones de ciertos elementos, como en el caso mencionado del lanzamiento de las monedas. Cabe señalar que la combinatoria se presenta de manera introductoria, no profundizando en su teoría y/o aplicación de fórmulas o algoritmos para su desarrollo.

La resolución de problemas en la etapa 6-8 presenta, como uno de sus estándares, la aplicación y adaptación de diversas técnicas. Se propone la implementación de problemas que impliquen situaciones conocidas por los estudiantes, como experiencias de la vida cotidiana y que involucren contenidos de probabilidad, y de los demás contenidos de matemática.

Como ya se ha mencionado anteriormente, los problemas que incluyen combinatoria no son exclusivamente de probabilidad, como se muestra en los siguientes ejemplos: "Obtén una suma de 1000, usando algunos ochos con algunos signos + intercalados" (NCTM, 2000, p. 263); "Sobre papel con cuadrículas de un centímetro cuadrado, dibuja todas las figuras que tengan un área de 14 cm^2 y perímetro de 24 cm. Cada cuadrícula que traces debe tener, al menos, un lado común con otra" (NCTM, 2000, p. 264). Este último problema es fundamentalmente de índole geométrico, otorgando énfasis en algunas figuras geométricas que cumplan las condiciones pedidas, y de igual manera que el problema anterior, tiene diversas soluciones.

1.5. OBJETIVOS DEL TRABAJO.

Una vez planteada la importancia del tema y su papel en el currículo, pasamos a plantear el objetivo general de nuestra investigación, que es indagar en el conocimiento matemático puesto en juego en una muestra de futuros profesores de Educación Primaria al resolver problemas combinatorios simples, con intención de identificar las estrategias que emplean en su resolución, así como los errores y dificultades que manifiestan en torno al tema. Para alcanzar este objetivo general en nuestro trabajo, planteamos los siguientes objetivos específicos:

O1. *Profundizar en la importancia de la combinatoria en el razonamiento matemático y analizar las investigaciones más relevantes en torno al razonamiento implicado en la resolución de problemas combinatorios*.

En investigaciones previas se evidencia la influencia de variables de tarea en las estrategias y en los errores que cometen los sujetos al resolver problemas combinatorios. Por ello, la consecución de este objetivo permitirá seleccionar los problemas que conformen el cuestionario que se utilizará para evaluar el conocimiento del futuro profesor de Educación Primaria en torno al razonamiento combinatorio. Para cumplir este objetivo, en este capítulo se ha mostrado la utilidad e importancia del tema en las matemáticas (Sección 1.1), siendo en el Capítulo 2 donde se hace un resumen de las principales investigaciones sobre estrategias, errores y dificultades asociados a la resolución de problemas combinatorios.

O2. *Caracterizar el lenguaje y las estrategias que emplean una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, durante su formación inicial, al resolver problemas combinatorios simples.*

Se espera que los futuros profesores usen las operaciones combinatorias, principalmente, mediante lenguaje verbal o icónico, sin hacer gran uso de fórmulas, y utilizando estrategias como la enumeración (sistemática o no sistemática) mediante esquema simbólico o herramientas como el diagrama de árbol, etc. Este objetivo se aborda en el Capítulo 3, donde se describe el estudio de evaluación realizado mediante un cuestionario compuesto por problemas que se utilizaron en investigaciones previas sobre el tema a una muestra de futuros profesores de Educación Primaria. Esto permitirá comparar nuestros resultados con los obtenidos en dichas investigaciones.

O3. *Caracterizar los conflictos semióticos que presentan una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, durante su formación inicial, al resolver problemas combinatorios simples.*

Este objetivo se aborda en el Capítulo 3, donde se describe el estudio de evaluación realizado mediante un cuestionario compuesto por problemas que se utilizaron en investigaciones previas sobre el tema, en una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, lo que permitirá identificar aquellas asignaciones imprecisas de significado que presentan los futuros profesores de Educación Primaria al resolver los problemas combinatorios propuestos y comparar los resultados de nuestra muestra con los obtenidos en dichas investigaciones.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES.

2.1. INTRODUCCIÓN.

Este capítulo da a conocer los fundamentos teóricos que sustentan la investigación que se describe en este trabajo, ayudando a estructurar los medios para lograr los objetivos que planteamos en el capítulo anterior.

En primer lugar, describimos los principios que rigen el marco teórico y el modelo del conocimiento del profesor que plantea dicho marco, describiendo sus diversas facetas y niveles que lo conforman. Posteriormente, se resumen las principales investigaciones asociadas a la resolución de problemas combinatorios, profundizando en los resultados obtenidos en los estudios que se describen en ellas tales como las estrategias que se manifiestan en las resoluciones de los participantes, sus errores y dificultades, etc. Cabe señalar, que la mayoría de investigaciones son de carácter empírico, siendo estudios aplicados principalmente a estudiantes de primaria, secundaria y universitarios. Nuestro trabajo pretende completar los resultados de investigaciones previas, indagando en el conocimiento sobre combinatoria que posee una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, que se trata de una población poco estudiada en el tema hasta el momento.

2.2. MARCO TEÓRICO.

En el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (en adelante, EOS), la actividad matemática es considerada un quehacer humano, pues el significado de un contenido matemático cobra vida cuando un individuo resuelve situaciones problemáticas sobre dicho contenido, ya sea del mundo real o de la propia matemática (Godino y Batanero, 1994). Igualmente, el lenguaje ocupa un rol fundamental, en función comunicativa como instrumental, al resolver la tarea matemática (Godino, 2002). Así, la organización lógica de saberes del individuo se movilizará, de tal manera, que le permitirá resolver la situación que se plantee y favorecerá a que se reestructure dicha organización conceptual continuamente.

En las siguientes secciones se describen los aspectos más relevantes del marco teórico que utilizamos en nuestra investigación, comenzando por el papel predominante que adquieren las nociones de práctica, objeto y significado, y profundizando posteriormente en el modelo del conocimiento del profesor propuesto en el EOS.

2.2.1. OBJETO MATEMÁTICO, PRÁCTICA Y SIGNIFICADO.

En el marco teórico EOS, un objeto matemático es considerado cualquier entidad en la actividad matemática. Así, por ejemplo, la notación, los procedimientos o las propiedades que se formulen, entre otros, se consideran objetos matemáticos implicados o emergentes de la práctica matemática (Godino y Batanero, 1994). El EOS ofrece la siguiente clasificación de objetos (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006):

- La *situación-problema*, enunciados que inducen una actividad matemática y que, según su aplicación, se agrupan en clases. Un ejemplo, en nuestra investigación, son los problemas referidos a selección, colocación y partición, distinguiéndose para cada uno de ellos las operaciones de combinación, permutación y variación.
- El *lenguaje*, que se refiere a los términos, símbolos, expresiones verbales o algebraicas, gráficos, dibujos, etc., que se utilizan para informar de la situación-problema así como para resolverla. En nuestra investigación, podemos destacar los símbolos asociados al factorial de un número, entre otros.
- Los *conceptos*, que se refieren a las definiciones evocadas implícita o explícitamente al enfrentarse a una situación-problema, bien porque aparezcan en el enunciado de la tarea o porque el estudiante hace uso de ellos. Entre otros conceptos, en nuestra investigación destacamos el de orden, posición o colocación, cardinal, etc.
- Las *proposiciones* o *propiedades*, se refieren a los enunciados que regulan las relaciones de un objeto matemático con otros objetos. Un ejemplo, en nuestra investigación, es que el conjunto de combinaciones de n elementos, tomados de k en k, coincide con el cociente entre las variaciones de n elementos tomados de k en k y el conjunto de permutaciones de k elementos.
- Los *procedimientos*, para resolver una situación-problema son variados y se refieren al conjunto de operaciones, algoritmos o técnicas de cálculo que deben conocerse para abordar dicha situación. En nuestra investigación se destaca, por ejemplo, el método de resolución mediante el diagrama de árbol.
- Los *argumentos*, que se refieren al modo en que los enunciados son emitidos para validar o explicar las propiedades o conceptos utilizados en la resolución de una situación-problema, así como el procedimiento aplicado o los resultados obtenidos.

La variedad de objetos matemáticos que se ponen en juego en la actividad matemática pueden ser interpretados desde un doble enfoque, puesto que pueden estar compartidos en el seno de una institución y dependen de los instrumentos (reglas y modos de funcionamiento) disponibles en la misma, que constituyen lo que se denomina el significado institucional del objeto matemático; o bien, se puede interpretar desde la perspectiva del sujeto que realiza sus propias prácticas, que podemos denominar práctica personal, y que podrían variar respecto a las propuestas por la institución (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007); hablamos, en este sentido, del significado personal que el sujeto posee de dicho objeto matemático.

Además, el EOS nos ofrece un instrumento para evidenciar las relaciones entre los objetos matemáticos y los procesos interpretativos en las prácticas matemáticas que se denomina *función semiótica* (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Así, la expresión y el contenido, pueden ser cualquier tipo de objeto y el sujeto puede activar su propia red de funciones semióticas, pudiendo aumentar o disminuir la dificultad de su red, además de facilitar la ejecución de la tarea propuesta (Godino y Batanero, 1994). En consecuencia, las actividades que desarrolle el sujeto serán consideradas correctas, cuando éstas sean conformes con las propuestas otorgadas por la institución. En caso contrario, encontramos un *conflicto semiótico*: "Disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (Godino, 2002, p.250).

Con el estudio de las relaciones que se establecen entre los objetos y los sistemas de prácticas, se establece un primer nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En nuestra investigación abordamos este primer nivel, con el estudio de las respuestas de una muestra de futuros profesores a los problemas combinatorios que se plantean en un cuestionario, teniendo en cuenta los conflictos semióticos que se presentan en ellas. Como indica Godino (2017), este nivel de investigación de la actividad matemática se denomina epistémico y cognitivo.

2.2.2. MODELO DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR.

Existe un acuerdo en la investigación educativa en la necesidad de que un profesor esté capacitado para resolver las prácticas matemáticas planteadas a los estudiantes a un determinado nivel y tenga desarrollado el razonamiento correspondiente a las diversas formas de resolver los problemas propuestos a dichos estudiantes en dicho nivel y niveles avanzados. Además, el profesor no sólo debe poseer los conocimientos puramente matemáticos, sino que debe saber transponerlos en el aula y proyectarlos para un posterior desarrollo en la formación del alumnado. Todo esto es lo que en el marco teórico EOS se denomina Conocimiento Didáctico Matemático (en adelante CDM) (Godino, 2009; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan y Godino, 2015).

El modelo CDM analiza el conocimiento del profesor desde tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática (Pino-Fan y Godino, 2015). Cada una de estas dimensiones se divide en componentes que facilitan su interpretación y análisis, como se muestra en la Figura 1. En nuestro trabajo ponemos atención a la dimensión didáctica, que se divide en seis facetas o componentes (Godino, 2009; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan y Godino, 2015): la *faceta epistémica*, ligada al conocimiento especializado del contenido matemático, en nuestra investigación, nos referimos al conocimiento sobre combinatoria que manifiestan en sus respuestas una muestra de futuros profesores a las cuatro situaciones-problema que se plantean; la *faceta cognitiva*, que comprende al conocimiento de cómo aprenden y piensan los estudiantes; la *faceta afectiva*, que implica el conocimiento acerca de los aspectos emocionales y actitudinales que tienen los estudiantes frente a un objeto matemático; la *faceta interaccional,* que es el conocimiento acerca de los modelos de comunicación "profesor-estudiante y "entre estudiantes" en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular, la capacidad para reconocer los errores y dificultades potenciales, así como el modo de abordarlos para su superación; la *faceta mediacional*, que tiene que ver con el conocimiento de recursos disponibles, ya sean tecnológicos, temporales o manipulativos; y la *faceta ecológica*, que es el conocimiento que relaciona el contenido matemático con otras disciplinas, directrices curriculares y condicionamientos del propio centro educativo (o comunidad).

Nuestra investigación se centra en la faceta epistémica del CDM, donde se aplica el conocimiento común y ampliado del contenido y, además, se vinculan variadas representaciones de un objeto matemático en la resolución de una situación problema aplicando diversas estrategias.

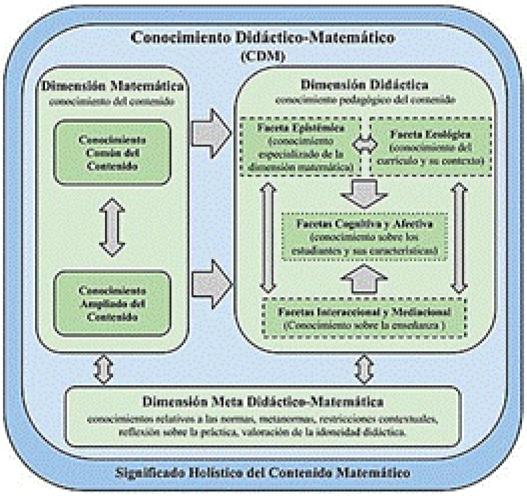


Figura 2.2.3.1. Facetas y componentes del CDM (Pino- Fan y Godino, 2015, p. 98).

2.3. INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE COMBINATORIA.

Los precursores en el estudio del razonamiento combinatorio fueron Inhelder y Piaget (1958), quienes llevaron a cabo investigaciones con niños (5 y 11 años) y representaron el desarrollo de las operaciones combinatorias en la formación de la lógica proposicional. En el primero de estos estudios se entregan cuatro recipientes con líquidos de diferentes colores, que se mezclarían de todas las maneras posibles y se solicitó que reprodujesen el color amarillo. En otro estudio, de similares características, Piaget e Inhelder aplicaron contadores de colores, investigación sobre el desarrollo de la idea de azar, donde se presentaron conjuntos de contadores de diferentes colores y se debía crear tantos pares de diferentes contadores como fuese posible.

En ambos experimentos, los niños y niñas en estado preoperacional (hasta los 7 años) generaban combinaciones sólo de manera empírica, asociando de manera aleatoria parejas de elementos sin plantearse ningún método sistemático. En la etapa concreto-operacional es cuando se evidencia la necesidad de aplicar un método sistemático, encontrando en la etapa de operaciones concretas (8 a 11 años) un avance en la sistematización del método de recuento, aunque aún predomina la búsqueda empírica de soluciones, y en la etapa de operaciones formales (11 a 12 años) sí se alcanza la sistematización en el método de resolución de la tarea. Los cambios en el desarrollo del razonamiento combinatorio empiezan a medida que se acerca el período formal-operacional, donde la evidencia de los métodos sistemáticos para la formación de combinaciones y de razonamiento resulta notoria. Así, los autores sugieren que el sistema combinatorio no emerge hasta bien entrada la etapa de operaciones formales.

Otras investigaciones importantes son las de Fischbein (1975), quien estudio el efecto que la instrucción tiene sobre el razonamiento combinatorio en niños de entre 10 y 15 años de edad. Para ello realizó experimentos de enseñanza a base del diagrama del árbol y material manipulativo para la resolución de problemas combinatorios sencillos. En el caso del diagrama del árbol, Fischbein lo considera un modelo facilitador para la generalización constructiva, permitiendo desarrollar el pensamiento recursivo en problemas que impliquen un mayor número de elementos. Con ello, formuló la hipótesis de que estos métodos de representación podrían mejorar y acelerar el aprendizaje formal de la combinatoria. Finalmente concluyó, que el desarrollo del razonamiento combinatorio no se genera de modo espontáneo a determinada edad, y que los niños y niñas tienen intuiciones correctas, lo que provoca que la enseñanza formal de la combinatoria pueda ser llevada a cabo en edades más tempranas que las determinadas por Piaget e Inhelder

(1975). Es así como Fischbein (1975) otorga gran importancia al conocimiento intuitivo, por ser un proceso cognitivo inmediato de las acciones mentales, las cuales surgen de forma espontánea y distingue en intuiciones primarias y secundarias, según sean forjadas o no desde la instrucción.

Se concede a la práctica un cargo relevante en la intuición, por lo que sus investigaciones experimentales con el uso de material concreto, además del diagrama de árbol, son consideradas primordiales para obtener una enseñanza exitosa de los procesos formales de la combinatoria. Por otro lado, refiriéndose a la enseñanza formal del tema (intuición secundaria), expuso que cuando los sujetos no reciben una enseñanza apropiada, no siempre alcanzan un nivel avanzado para resolver problemas combinatorios, lo que dificulta, en ocasiones, la utilización del algoritmo propicio al momento de determinar la solución de un problema de estas características.

Otro estudioso en el ámbito del razonamiento combinatorio es English (1993; 1999), quien investigó la comprensión estructural en niños desde 4 a 10 años en problemas combinatorios presentados en diversas tareas. Los niños fueron examinados con respecto a diversas competencias como identificar propiedades estructurales o relacionales de los problemas, además de representarlos y resolverlos. Además, la capacidad de razonamiento analógico se exploró en relación a la determinación de las similitudes estructurales y diferencias entre los problemas, resolución de nuevos problemas similares a los otros y planteamiento de problemas.

Los resultados de sus estudios concluyeron que la mayoría de los niños podían resolver problemas de diversas formas, además de representarlos de manera simbólica, todo ello marcado por la edad puesto que los niños de 7 a 9 años cambian con frecuencia su estrategia, algo que no ocurría con niños de 4 a 6 años, quienes usaron procedimientos básicamente empíricos. No obstante, tuvieron dificultades para explicar completamente la estructura bidimensional de algunos problemas $A \times B$, y no eran capaces de identificar la multiplicación cruzada en ellos. Aunque algunos declararon la multiplicación como método resolutivo, hubo una cantidad considerable de niños que favoreció la adición reiterada, independiente del tipo de representación gráfica que hubiesen utilizado.

García (2014) realiza un estudio de casos, de corte descriptivo, con problemas combinatorios en el contexto intercultural en estudiantes de Educación Primaria y Educación universitaria. Como conclusión, los estudiantes universitarios recurren a procedimientos más elaborados para la resolución de los problemas, aunque algunos de ellos manifiestan las mismas dificultades que los estudiantes de primaria como es no diferenciar cuándo la experiencia es con o sin repetición.

Por su lado, Zapata, Quintero y Morales (2010) realizan un estudio que se aplicó con la estructura de una prueba de diagnóstico, pre y post-test, tras la implementación de una unidad didáctica. Como conclusión, observó que las permutaciones simples y las combinaciones tuvieron similar nivel de dificultad, pero las variaciones ordinarias presentaron una mayor dificultad para los estudiantes. No obstante, de acuerdo con la propuesta de los autores, se determinó que cumplió su propósito, ocasionando en los estudiantes un mayor dominio conceptual de las diferentes ramas de la combinatoria. Además, el estudio mostró que los estudiantes tienen mayor facilidad para los problemas que implican el principio multiplicativo, pero mucha más dificultad en aquellos que implican contar, organizar o arreglar elementos de algún conjunto en los que se repiten elementos o hay restricciones. Los autores recomiendan que los problemas propuestos a los estudiantes provoquen su interés, donde puedan formular estrategias además de validar su comprensión (Zapata, Quintero y Morales, 2010).

Por otro lado, Acevedo y Romero (1992) realizaron un estudio acerca del razonamiento correlacional y combinatorio en estudiantes de secundaria. Para ello se proponen dos problemas de correlación de probabilidades y otros dos de operaciones combinatorias, una de ellas en la que importa el orden pero sin repetir elementos (permutación) y otra referida a combinaciones (no importa el orden). Los autores no pretendieron evaluar la formulación de expresiones matemáticas para la resolución de los problemas, sino más bien la utilización de métodos sistemáticos y exhaustivos para la obtención de las agrupaciones requeridas. Los principales errores cometidos por los estudiantes se observan en los intentos de controlar las variables, pues no son capaces de establecer un procedimiento que les permita construir las combinaciones o permutaciones posibles, estableciéndose agrupaciones repetidas así como ausencia de otras, produciendo que sus respuestas den la impresión de que fueron obtenidas al azar.

Un estudio más profundo sobre el tema es el llevado a cabo por Navarro-Pelayo (1994), quien evaluó el razonamiento combinatorio de estudiantes de secundaria mediante un cuestionario con tareas basadas en diferentes operación combinatorias, dirigido a dos muestras de estudiantes de secundaria según hubieran o no recibido instrucción previa en el tema. La autora tiene en cuenta la naturaleza de los elementos (contexto del enunciado), su total y el cardinal de los conjuntos que se forman con dichos elementos, el efecto de una variable hasta el momento no analizada como es el modelo que estructura la tarea (que describimos detalladamente en la siguiente sección) y la operación combinatoria que se aplica. Se observa que los estudiantes con instrucción tienen menor número de errores, aunque algunos con instrucción no comprendieron el significado de la operación combinatoria y se observan nuevos errores después de dicha instrucción. La mayor cantidad de errores están presentes en las variaciones con repetición, donde el parámetro *m* es más pequeño que el parámetro *n*.

Morales y Frisancho (2014), basándose en el método clínico-crítico de Jean Piaget (1896-1980), realizaron un estudio con estudiantes universitarios que cursaban su primer y segundo año, mostrando que los participantes que tuvieron éxito en la resolución de los problemas muestran un mayor equilibrio en la capacidad combinatoria, donde se observó diversos procedimientos para la resolución de los problemas como gráficos, esquemas y operaciones, incluso la construcción de un conjunto de partes para poder enumerar todos los casos posibles. Los que fallaron, no tenían un equilibrio en la capacidad cognitiva, lo que produjo que los algoritmos fueran aplicados mecánicamente, sin dar motivo de su utilización. Esto último, da cuenta de la falencia que existe a la hora de enseñar combinatoria, ya que los estudiantes que fallaron tenían las fórmulas en su cabeza, pero no sabían utilizarlas, es por ello de la importancia del desarrollo de un razonamiento combinatorio correcto.

Por otro lado, Roa (2000) lleva a cabo un estudio sobre razonamiento combinatorio en estudiantes de matemática con preparación avanzada, dando cuenta de la considerable dificultad de los estudiantes en problemas de combinatoria simples, además de que la propia operación combinatoria que otorga la solución al problema tiene una consecuencia significativa sobre la dificultad en los mismos. Utiliza once de los trece problemas propuestos en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) y propone dos nuevos problemas referidos a operaciones combinatorias compuestas. Los resultados en la investigación de Roa son un tanto mejores que los de Navarro-Pelayo, con estudiantes de Secundaria, lo que puede justificarse por el grado de madurez y preparación matemática de los estudiantes; aun así, en algunos ítems se obtienen resultados similares o incluso peores que los obtenidos por Navarro-Pelayo y se observa que ningún participante fue capaz de resolver correctamente todos los problemas (58% no fue capaz de resolver correctamente más de la mitad de los problemas).

La investigación en la resolución de problemas combinatorios en torno a las operaciones de combinación, permutación y variación es escasa, enfocada principalmente a estudiantes de Secundaria y Bachillerato o estudios universitarios, pero en futuros profesores de Educación Primaria son insuficientes. Bajo esta situación, este trabajo pretende ofrecer un estudio exploratorio del razonamiento combinatorio de una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, en formación inicial, con intención de informar y orientar posibles mejoras en su formación.

2.3.1. MODELO COMBINATORIO IMPLICITO.

Con el objetivo de explicar los errores y dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas combinatorios, Navarro-Pelayo (1994) plantea en su investigación el análisis de la influencia de una variable que denominó "Modelo Combinatorio Implícito" (en adelante, MCI) previamente identificada y descrita por diversos autores, entre los que se destaca la clasificación expuesta por Dubois (1984), aunque nunca anteriormente investigada. Esta variable se basa en la identificación de esquemas de representación que se encuentran implícitos en los enunciados de los problemas y es relevante desde el punto de vista matemático, pues el tipo de objetos implicados en cada modelo varía según el tipo de problema que se trate. Mediante esta variable, los problemas de recuento simples combinatorios se pueden clasificar en tres tipos básicos:

- *Modelo de selección*: Este tipo de problemas está centrado en la idea de muestreo, el cual puede ser con reemplazo o sin él; además, puede ser resuelto sistemáticamente o mediante ensayo-error. Suele ser utilizado para definir las operaciones combinatorias en la enseñanza y aprendizaje del tema.
- *Modelo de distribución o colocación*: Este tipo de problemas implica la colocación de elementos en celdillas, cajas, celdas, etc., considerando la posibilidad de que los elementos sean distinguibles o no.
- *Modelo de partición*: Se centra en la división de un conjunto en subconjuntos; además, existe una correspondencia biunívoca entre los modelos de colocación y partición, debido a que la partición de un conjunto de k elementos en n subconjuntos puede traducirse como la colocación de k elementos en n casillas.

Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000) concluyen que el modelo de selección fue el más simple de resolver. En el estudio del efecto de la instrucción en problemas centrados en dichos modelos, en estudiantes de Secundaria, Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) concluyeron que, después de la instrucción, hubo una reducción en la dificultad en los problemas de selección, mientras que en los problemas de colocación, la mejora no fue general, solo en casos particulares, y en los problemas de partición no hubo mejora. Esto puede deberse a las definiciones utilizadas para introducir las operaciones combinatorias en el currículo español, ya que la mayoría de ellas se basan, principalmente, en la idea de muestreo, que radica en el modelo de selección.

En relación a lo anterior, Navarro-Pelayo y Batanero (1991) realizan un estudio de libros de texto de Bachillerato sobre el tema, donde observan que el modelo combinatorio implícito no se ha tenido en cuenta en la enseñanza a este nivel. Las definiciones de las operaciones combinatorias se presentaban sólo al nivel del modelo de selección, excluyendo los problemas combinatorios de partición y colocación, los cuales eran presentados de manera escasa en los libros de texto.

Navarro-Pelayo (1994) considera importante el efecto de la instrucción en los estudiantes, por sus mejores respuestas. En los problemas de partición, los estudiantes presentaron una serie de problemas comunes y otros específicos, entre otros, que la unión de los subconjuntos de la partición no coincidía con el total de elementos. Otro problema que se manifestó fue el cambio del modelo combinatorio del enunciado, es decir, cambiar el modelo de selección por el de colocación.

Por su parte, García de Tomás (2016) evaluó el razonamiento combinatorio en estudiantes de Secundaria determinando, como conclusión, que los estudiantes tuvieron menos dificultad para resolver los problemas de selección que los de colocación, lo que, según el autor, puede deberse a que la selección implica operaciones más cercanas a la vida cotidiana. Con respecto a las estrategias, el autor señala que el esquema gráfico no fue muy utilizado, por lo que muy pocos lograron la elaboración del diagrama del árbol. A continuación, se describen con más detalle las investigaciones previas referidas a estrategias de resolución de problemas combinatorios.

2.3.2. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN.

Algunas de las investigaciones descritas anteriormente analizan también las estrategias de resolución de los participantes a los problemas combinatorios que se plantean. En esta sección se describen las estrategias identificadas en diversas investigaciones, utilizadas por estudiantes de Educación Primaria (English, 1993; 1999), de secundaria (García de Tomas, 2016; Melusova y Vidermanova, 2015; Navarro-Pelayo, 1994), así como estudiantes con preparación avanzada en matemática (Roa, 2000), y son:

- *Fijación de variables*. Esta estrategia es muy utilizada en cualquier nivel, como se muestra en la investigación previa (por ejemplo, Melusova y Vidermanova, 2015; Roa, 2000). La fijación de variables consiste en mantener de manera constante una o más variables que están involucradas en el problema, por ejemplo: ¿Cuántos números diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, de modo que los dígitos pares ocupen posiciones pares? En este problema se debe tener en cuenta la variable: "dígito par" y "dígito impar" y la posición, por lo que al tener en cuenta los dígitos y las posiciones, un método de resolución es fijar los dígitos pares e impares en sus respectivas posiciones. Esta estrategia es útil para reducir la dificultad del problema, ya que en el ejemplo, a pesar de no tener gran dificultad por la poca cantidad de dígitos presentes, impulsa su utilización en problemas que puedan ser similares a este, pero con más dígitos, por ejemplo, con 10 dígitos.

- *Principio aditivo o regla de la suma*. La gran mayoría de los problemas combinatorios son resueltos aplicando esta estrategia, bien por si sola o combinada con otras. El tipo de resolución que implica esta estrategia radica en formar subconjuntos de cierta cantidad de elementos cada uno, según las características identificadas en el enunciado del problema, donde su unión abarca el total de elementos del conjunto de partida (conjunto total). Cabe señalar que los subconjuntos deber ser disjuntos, así por ejemplo, si Andrés debe viajar de una ciudad a otra y tiene dos opciones de línea aérea y 5 opciones de líneas de buses. ¿De cuentas maneras puede viajar? En el problema se tiene dos subconjuntos: líneas aéreas y líneas de buses, donde la suma de todos los elementos de cada subconjunto otorga la solución del problema.
- *Principio multiplicativo o regla de la multiplicación*. Esta estrategia es necesaria para los problemas en que se pueden tener dos o más subconjuntos dependientes, o bien, dos situaciones en la cual la primera dependa de la segunda. El producto de la cantidad elementos de cada subconjunto resulta en la solución del problema. Por ejemplo, en un grupo de 5 alumnos hay 3 mujeres y 2 hombres. ¿Cuántas parejas (de diferente sexo) pueden formarse en este grupo? A diferencia de la regla de la suma, se debe tener en cuenta que las decisiones de escoger un hombre y una mujer son situaciones en la cual una depende de la otra, por lo que la solución del problema es el producto del número de elementos de cada decisión.
- *Traducción del problema en otro más simple*. En la investigación de Roa, Batanero, Godino y Cañizares (1997) se aprecia que no es una estrategia muy utilizada. Esta estrategia implica reducir la dificultad de un problema, traduciéndolo en otro equivalente pero más sencillo. Esta traducción puede llevarse a cabo mediante una disminución de subconjuntos, o disminución de elementos que pueda contener un subconjunto del problema inicial, lo cual puede dar lugar a algún patrón de equivalencia que permita generalizar el problema inicial.

- *Descomposición del problema en subproblemas*. Esta estrategia puede ser una combinación de la estrategia anterior y de la fijación de variables, incluso en la que tenga cabida el principio aditivo o multiplicativo. Se trata de buscar una disminución de la dificultad del problema inicial, que se divide en subproblemas cuyas soluciones individuales, combinadas, permiten obtener la solución del problema inicial.
- *Uso de fórmulas*. Muchos estudiantes intentan resolver los problemas combinatorios mediante la aplicación de fórmulas, según la operación combinatoria a la que se refiera el problema, lo cual no siempre utilizan de modo correcto, ya que incurren en identificar incorrectamente la operación combinatoria requerida o confunden los parámetros que deben utilizar (Batanero, Godino y Navarro- Pelayo, 1994).
- *Estrategia de enumeración*. Este tipo de estrategia es muy utilizada por los participantes en muchas investigaciones (por ejemplo, Navarro-Pelayo, 1994), y se refiere al recuento que se produce, sistemático o no sistemático, al inventariar todas las posibles opciones (o al menos una cantidad suficiente para poder generalizar a la solución del problema), y con ello cuantificar para solucionar el problema. Este tipo de estrategia suele venir acompañada del uso de lenguaje gráfico y simbólico, que facilita la enumeración de los posibles resultados, principalmente en las primeras edades (English, 1991, 1993). Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) presentan un resumen de diversas estrategias de enumeración:
  - *Estrategia de selección al azar*, se trata de dar solución al problema, aunque suele derivar en error, puesto que al elegir los elementos en una primera instancia se suelen volver a repetir en el proceso.
  - *Estrategia de tanteo*, similar a la anterior, pero en ella los elementos que se había escogido previamente no vuelven a emplearse.
  - *Estrategia intermedia entre el tanteo y el procedimiento algorítmico*, que da muestra de la búsqueda de un procedimiento sistemático en la enumeración de todas las combinaciones posibles, por ejemplo, considerar sólo la permutación de modo cíclico de las letras A, B, C y D del modo: ABCD, BCDA, CDAB y DABC sin tener en cuenta el total de posibilidades que es 24.
  - *Estrategia del uso de un elemento constante*, que permite la formación de las demás permutaciones. No obstante, puede ocurrir la omisión de alguna de las permutaciones. Por ejemplo, al permutar las letras ABCD manteniendo A como elemento constante, las permutaciones serían: ABCD, ABDC, ACDB, ACBD, ADCB, ADBC. Sin embargo, los estudiantes suelen ser incapaces de repetir el proceso sistemático para

obtener el resto de permutaciones.

- *Estrategia algorítmica completa*, que se caracteriza por la utilización, generalmente, de un elemento constante, además de la estrategia cíclica completa. Esta estrategia es la que permite la enumeración de todos los casos posibles.

2.3.3. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO COMBINATORIO.

Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997) otorgan a la evaluación el papel de un proceso continuo y dinámico, que sirve a los estudiantes para alcanzar los objetivos curriculares. Un punto crucial en la evaluación del tema es la identificación de los errores y las dificultades de los estudiantes. A lo largo de este capítulo se ha ido advirtiendo de errores y dificultades de los estudiantes en la resolución de tareas combinatorias, propuestas en dichas investigaciones. A continuación, organizamos estos resultados, según la investigación desarrollada en Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000):

- *Cambiar el modelo matemático del enunciado*. Este error se produce cuando se confunde el MCI en un problema. Fue identificado por Navarro-Pelayo (1994) y analizado en Roa (2000), siendo considerado uno de los errores más comunes entre los estudiantes participantes. García de Tomas (2016) observa que, bajo el modelo de partición, los estudiantes suelen pensar en el modelo de colocación. Un ejemplo lo encontramos cuando se pide guardar un conjunto de ocho pares de calcetines de colores en una mesa de noche con dos cajones para guardarlos.
- *Error de orden*. Confusión entre las variaciones y las combinaciones, es decir, no tener en cuenta la relevancia en el orden de los elementos. Por ejemplo, a la hora de elegir un trío de colores entre un conjunto de cinco lápices, suponiendo que los colores son: amarillo (A), rojo (R), verde (V), naranja (N) y café (C), para crear estuches de lápices de tres colores, algunos sujetos consideran que con las combinaciones ARV y RVA se diseñaran dos estuches diferentes, cuando en realidad ambas combinaciones, en orden diferentes, dará lugar al mismo estuche.
- *Error de repetición.* Que consiste en la repetición de elementos en situaciones donde no hay posibilidad de hacerlo, como también sucede al contrario: la no repetición de elementos cuando sí es posible hacerlo. Por ejemplo, si se tiene los números 1, 2 y 3 escritos en tres bolitas contenidas en una urna, y se pide extraer una por una, sin reposición, y escribir el número de tres cifras que forma, se pueden encontrar respuestas erróneas del tipo: 121, 132, 232, etc.
- *Confundir el tipo de objetos (distinguibles o indistinguibles).* Este tipo de error se

produce cuando los estudiantes consideran que elementos iguales son distinguibles o que los elementos diferentes son indistinguibles. Por ejemplo, si se quiere ordenar todas las palabras diferentes que se pueden formar sobre una mesa con las cartas que tienen las letras A, A, B y B. El error en este caso surge si al hacer el recuento, ambas letras A o ambas letras B, se consideran diferentes.

- *Error al desarrollar una formula combinatoria.* Hay errores que se pueden considerar externos a la interpretación y comprensión del problema, que se refieren a la expresión incorrecta de la fórmula de la operación combinatoria que se utilice (descritas en el Capítulo 1).
- *Intercambiar los parámetros.* De manera similar que el error anterior, este tipo de error es más específico en el sentido de que se recuerda la formula pero se aplica mal, al intercambiar sus parámetros. Algunos estudiantes muestran dificultad en este sentido ante la operación combinatoria de variaciones con repetición, donde el parámetro *m* es más pequeño que el parámetro *n* (Navarro-Pelayo, 1994).
- *Enumeración no sistemática.* Este tipo de error consiste en realizar una enumeración prácticamente aleatoria, sin aplicar estrategias concretas para guiar una recursividad apropiada, lo que genera parte de las soluciones correctas o repite algunas.
- *Error al construir un diagrama del árbol.* La utilización del diagrama del árbol, puede conllevar a errores, que pueden ser de interpretación o de la construcción misma del diagrama. Por ejemplo, si se plantea combinar ropa, donde disponemos de tres camisas, de color blanco, azul y gris, dos pantalones, de color negro y crema, y dos pares de zapatos, de color negro y marrón. Para determinar cuántas combinaciones de ropa pueden realizarse, se podría construir un diagrama de árbol equivocado, como el de la siguiente figura, dando como solución 7 formas de vestir.

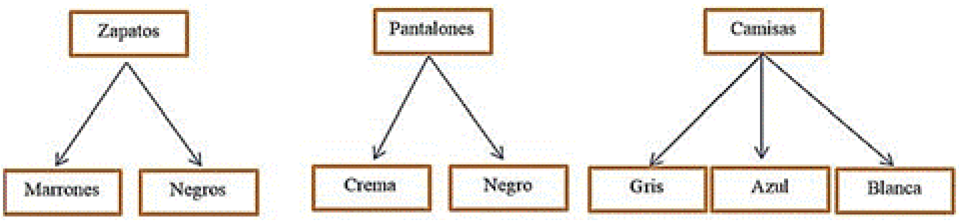


Figura 2.3.3.1. Diagrama del árbol construido erróneamente.

2.4. OTRAS INVESTIGACIONES SOBRE COMBINATORIA.

Lockwood (2013) presenta un modelo basado en entrevistas a estudiantes universitarios, mientras resolvían problemas de combinatoria. En el análisis de sus resultados construyó un modelo interrelacionando tres componentes: las fórmulas o expresiones utilizadas, los procesos de conteo y el conjunto de resultados que involucran la actividad. Dicho modelo sugiere relaciones de paridad entre cada una de estas componentes, donde cada uno de ellos puede ir enlazado con alguno de los otros dos, además de poder enlazarse los tres elementos del esquema. El autor sugiere que estas relaciones son claves para un correcto pensamiento y razonamiento combinatorio, donde las distintas componentes se complementan biunívocamente entre ellas. Bajo la perspectiva de este modelo, Lockwood, Swinyard y Caughman (2015) realizaron un estudio de caso en dos estudiantes universitarios de formación avanzada, para observar si eran capaces de reinventar fórmulas de conteo y justificar sus resultados. Los autores enfatizan la importancia del principio multiplicativo en la resolución de problemas combinatorios, que no se manifestó en las respuestas de los estudiantes al justificar sus resultados. Lograron formular expresiones para resolver los problemas, pero sus justificaciones se basaron principalmente en procedimientos empíricos.

Por otro lado, Mcgalliard (2012) realizó un estudio con futuros profesores de educación primaria centrado en el análisis del concepto de espacio muestral. Dicho estudio buscaba examinar las conexiones entre la enumeración y generalización a otros espacios muestrales similares. Entre los resultados se destaca la dificultad de relacionar las estrategias aplicadas para la determinación del espacio muestral y para su generalización, según las estrategias empleadas. Se refleja de este modo la separación en el conocimiento que poseen los futuros profesores entre la aplicación de estrategias y su generalización. Además, trataban de generalizar haciendo uso de fórmulas, la mayoría de los casos sin éxito, más que en confiar en su propio razonamiento.

Por su parte, Sukoriyanto, Nusantara, Subanji y Chandra (2016) llevaron a cabo una investigación con estudiantes universitarios acerca de la resolución de problemas de permutación y combinación, basándose en los procesos de resolución de problemas de Polya. Los resultados de la investigación mostraron que los estudiantes poseen dificultad en entender los problemas de permutación y combinación, ya que la gran mayoría cometió errores al identificar el tipo de problema a resolver, así como en las etapas de resolución, principalmente al planificar la resolución del problema y al valorar la solución (volver hacia atrás) en el problema propuesto. Los estudiantes tuvieron una baja capacidad en el razonamiento combinatorio al mostrar su limitación en resolver problemas en contextos reales, además de la tendencia por entender que dar soluciones en forma de símbolos garantizaba la corrección de la tarea.

CAPITULO 3. ESTUDIO DE EVALUACIÓN.

3.1. INTRODUCCIÓN.

Este capítulo da a conocer el estudio realizado sobre el lenguaje, estrategias y conflictos semióticos en las respuestas de una muestra de futuros profesores de Educación Primaria a una selección de problemas combinatorios. Se describe el contexto del estudio, la población y muestra de los participantes, la metodología utilizada y los problemas propuestos, junto a los resultados del análisis de las variables consideradas. Finalizamos con una síntesis del análisis comparado de los resultados obtenidos.

3.2. CONTEXTO, POBLACIÓN Y MUESTRA.

Con intención de analizar el conocimiento que los futuros profesores de Educación Primaria ponen en juego al resolver problemas combinatorios, abordamos nuestro estudio con alumnado del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, centrando la atención en el segundo curso de su plan de formación.

La asignatura a que nos referimos es *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, en la que se pretende que el estudiante conozca el papel de la matemática en el sistema educativo y valore la importancia social y cultural que poseen. Los contenidos se basan en caracterizar el aprendizaje de los alumnos de Educación Primaria según la identificación de competencias y capacidades que provoquen el desarrollo del sentido matemático, según los diferentes bloques de contenidos en que se concreta la matemática en el currículo (MECD, 2014). Además, se pretende que se interprete e identifique el papel del error en el aprendizaje de las matemáticas, valorando la importancia del diseño de tareas, en este sentido.

La muestra considerada es un grupo de clase natural de 62 estudiantes, correspondiente al curso 2017/18, que comparten el mismo profesor y cursan la asignatura de modo obligatorio para obtener la titulación de maestro. Todos cursaron el año anterior una asignatura obligatoria de matemáticas con índice de aprobación en la muestra de, aproximadamente, el 60%, siendo sus notas de acceso a la universidad mayoritariamente de notable (solo dos estudiantes no respondieron a esta pregunta puesto que uno era Erasmus y otro procedía de estudios de Formación Profesional).

Se concluye, con la información suministrada, que el grupo dispone de buena formación en matemáticas como para resolver con éxito los problemas que se plantean en el cuestionario que se propone en nuestro estudio. Aunque la muestra es intencionada y el estudio es de carácter exploratorio, tratamos de compensar estas limitaciones con un análisis pormenorizado de las respuestas de los estudiantes a los problemas propuestos.

3.3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.

La asignatura donde realizamos el estudio se desarrolla en dos tipos de clases: en gran grupo (desarrollo teórico y práctico de la materia) y en pequeño grupo (desarrollo práctico de la materia), que es donde los futuros profesores resolvieron los problemas combinatorios planteados de modo individual. Los estudiantes están acostumbrados a la resolución de problemas en clase, pues resuelven tareas en sesión de prácticas para cada bloque de contenidos curriculares (MECD, 2014). Así, el estudio se enmarca en una actividad práctica que contribuye a alcanzar los objetivos del curso, a modo de profundización en la resolución de problemas.

El tiempo dedicado para completar la prueba fue de 30 - 45 minutos, y fue suficiente para que justificasen sus respuestas a cada problema. El tiempo restante (15 - 30 minutos), se dedicó a desarrollar el razonamiento combinatorio en los estudiantes, pues se corrigieron y compartieron las soluciones entre profesor y alumnado, pero el análisis de esta práctica educativa no se describe en este trabajo.

Para nuestra investigación se proponen cuatro problemas simples, tres de ellos tomados de la investigación de Navarro-Pelayo (1994) sobre combinación sin repetición, elegidos por ser problemas de poca dificultad según los resultados de su investigación y la investigación de Roa, Batanero y Godino (2001). Cada uno de ellos representa a los tipos de modelos de combinación implícitos identificados en la investigación: selección, colocación y partición (Ver Sección 2.3.1, Capítulo 2). El primer problema difiere de los anteriores porque vincula la visualización con el pensamiento recursivo, por eso se incluye como primer problema en el cuestionario, con la intención de introducir al estudiante en el uso del razonamiento combinatorio.

El análisis de las respuestas de los participantes a los problemas planteados se realiza desde una metodología mixta, combinando el análisis cualitativo de las respuestas mediante el análisis de contenido de las mismas (Cook y Reichardt, 2000) con el análisis cuantitativo (descriptivo), donde se identifican patrones de respuesta (categorías), se cuantifica su frecuencia y se presentan los resultados en tablas.

En las siguientes secciones se describen tres de los problemas propuestos, acompañados de soluciones prototípicas para cada uno, que pueden encontrarse en el análisis de las respuestas de los participantes, aunque pudieran encontrarse nuevas, combinadas o diferentes estrategias; presentamos los resultados y su discusión en el análisis de las respuestas de los futuros profesores en cada uno de ellos y una comparativa de los resultados del análisis realizado. Debido a la limitación de espacio en el trabajo, decidimos presentar en este capítulo sólo el análisis de los problemas referidos a los tres tipos de modelo combinatorio implícito, incluyendo el análisis del primer problema, con la descripción y discusión de los resultados del mismo en el Anexo 1.

3.4. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 2. DESCRIPCIÓN Y RESULTADOS.

El segundo problema se refiere al modelo de colocación (Ver Capítulo 2), donde se pide el número de formas de colocar 3 cartas indistinguibles en diferentes sobres, según 4 colores, por lo que se requiere considerar dos conjuntos: sobres y cartas:

Problema 2. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Para resolver el problema se puede aplicar la fórmula de combinación de n = 4 sobres, tomados en grupos de k = 3 sobres (para meter en cada uno una carta):

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$$

Igualmente se podrían establecer y enumerar todas las combinaciones posibles mediante diferente uso de lenguaje. Por ejemplo, mediante lenguaje simbólico, según las letras iniciales de cada color y teniendo en cuenta que siempre quedará un sobre vacío en cada combinación, podemos establecer todas las combinaciones haciendo corresponder a la letra que no se elige la combinación que genera dicha “no elección”:

{No está D; no está C; no está B; no está A} = {ABC; ABD; ACD; BCD}

Los estudiantes responden en su mayoría de modo correcto (48,4%) utilizando principalmente el lenguaje verbal como describimos a continuación.

***Lenguaje*.** El principal lenguaje que utilizan los futuros profesores para responder al problema es verbal y simbólico; algunos participantes también utilizan representaciones icónicas, tabulares y algunos gráficos, cuyo porcentaje de uso fue bastante similar.

- *Simbólico:* Se utiliza principalmente para representar cada carta y sobre mediante letras, lo cual facilita la enumeración de las combinaciones requeridas. La gran mayoría de los participantes, asocian cada sobre a su letra inicial, (A, B, C, D), mientras que otros utilizan números. Por ejemplo, en la siguiente Figura 3.4.1 se muestra la respuesta de JG, quien se equivoca al dar la solución, pues no aplica correctamente la estrategia de enumeración.

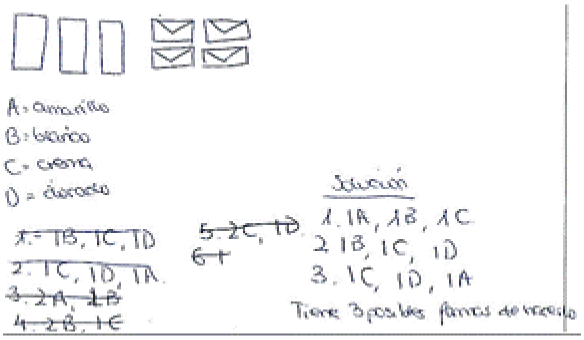


Figura 3.4.1. Uso de lenguaje simbólico en respuesta parcialmente correcta del estudiante JG.

- *Icónico:* Algunos participantes utilizan este tipo de lenguaje representando con dibujos los sobres y las cartas, como se mostró anteriormente, en la Figura 3.4.1.
- *Gráfico:* Los participantes utilizan gráficos para mostrar las formas en que un sobre puede contener una carta, o viceversa. Un ejemplo se muestra a continuación, donde RO escribe todas las posibilidades mediante un diagrama de árbol y luego justifica verbalmente cuales considera para responder al problema (Figura 3.4.2).

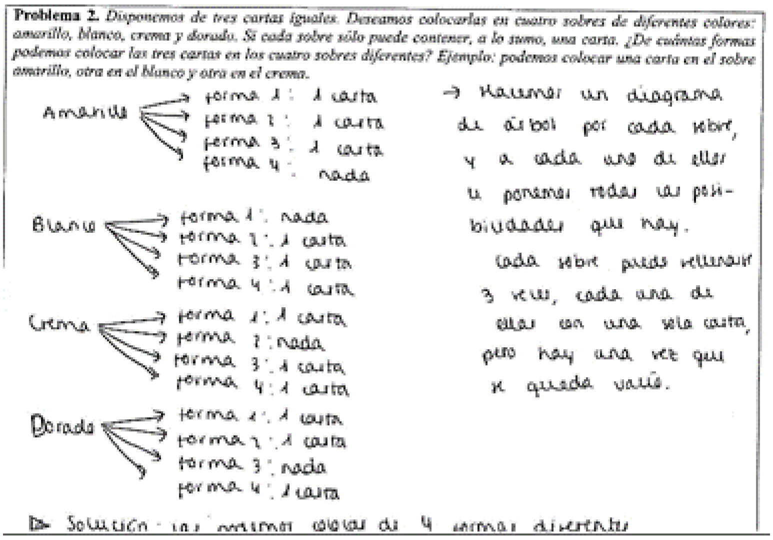

Problema 2. *Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.*

Figura 3.4.2. Uso de lenguaje gráfico por el estudiante RO al problema 2.

- *Tabular*: Se utiliza este lenguaje con igual finalidad que con el gráfico, pues ayuda en la obtención de las combinaciones posibles al cruzar en una tabla de doble entrada las cartas con los sobres, como se muestra en la Figura 3.5.3.

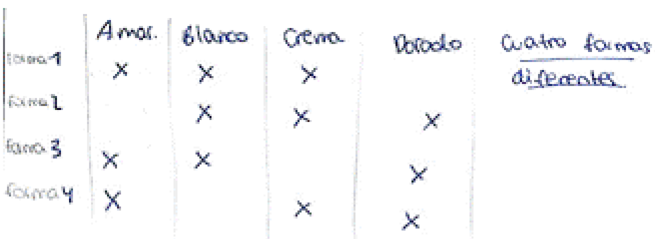
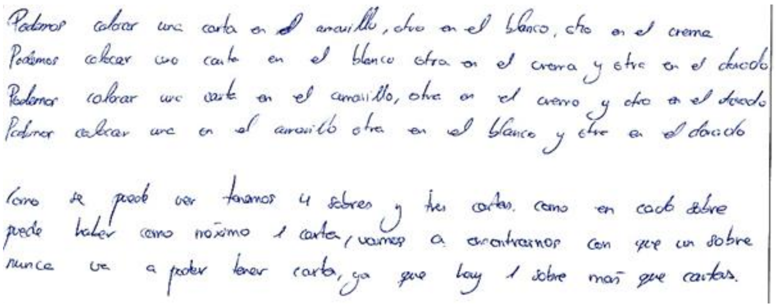


Figura 3.4.3. Uso de lenguaje tabular por el estudiante TC al problema 2.

- *Verbal:* Es el lenguaje más utilizado en las respuestas de los futuros profesores, bien sólo o combinado con otros tipos de lenguaje. En algunos casos, como SL, se utiliza sólo el lenguaje verbal, describiendo sistemáticamente cada combinación de colocación de cartas en los sobres.


Podemos colocar una carta en el amarillo, otra en el blanco, otra en el crema
Podemos colocar una carta en el blanco otra en el crema y otra en el dorado
Podemos colocar una carta en el amarillo, otra en el crema y otra en el dorado
Podemos colocar una en el amarillo otra en el blanco y otra en el dorado

Como se puede ver tenemos 4 sobres y tres cartas, como en cada sobre puede haber como máximo 1 carta, vamos a encontrarnos con que un sobre nunca va a poder tener carta, ya que hay 1 sobre más que cartas.

Figura 3.4.4. Uso de lenguaje verbal por el estudiante SL al problema 2.

En la Tabla 3.4.1 se muestran los resultados del análisis del tipo de lenguaje utilizado por los futuros profesores, donde se observa que el principal lenguaje utilizado es el verbal (38,8%), seguido del simbólico (25%) y el icónico (15,5%). Los futuros profesores suelen utilizar dos tipos de lenguajes en sus respuestas (45,2% de participantes) o más de dos (22,6%), en su mayoría dando respuestas correctas.

Tabla 3.4.1. Frecuencia (porcentaje) del tipo de lenguaje utilizado según grado de corrección en las respuestas de los futuros profesores al problema 2.

Lenguaje	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Simbólico	8(6,9)	8(6,9)	13(11,2)	29(25)
Icónico	9(7,8)	3(2,6)	6(5,2)	18(15,5)
Gráfico	3(2,6)	4(3,4)	4(3,4)	11(9,5)
Tabular	8(6,9)	1(0,9)	4(3,4)	13(11,2)
Verbal	26(22,3)	7(6)	12(10,3)	45(38,8)
Total	54(46,6)	23(19,8)	39(33,6)	116(100)

***Estrategias*.** En el análisis de las estrategias utilizadas por los futuros profesores para resolver el problema 2, la mayoría se basan en la enumeración, aunque encontramos variedad en ellas, como se describe a continuación.

- *Enumeración sistemática:* Este tipo de estrategia, bien aplicada, conduce a la respuesta correcta, ya que se enumeran el total de combinaciones posibles. Como ejemplo, en la Figura 3.4.2 se mostró la enumeración sistemática de RO, según todas las variaciones sin repetición, considerando luego las que cumplían no contener un determinado color. En algunas respuestas esta estrategia se utilizó incorrectamente, tanto en exceso como en defecto; así, en la Figura 3.4.1, se mostró cómo JG obtiene por defecto tres de las cuatro combinaciones mediante una enumeración sistemática; mientras que AM (Figura 3.4.5), continúa el procedimiento, excediéndose.

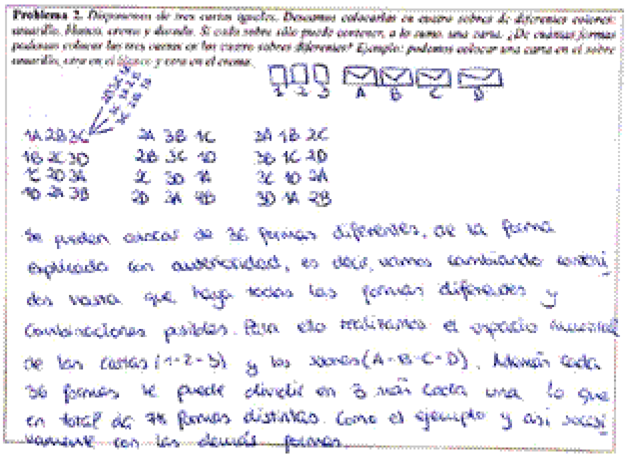


Figura 3.4.5. Uso de enumeración sistemática incorrecta excesiva por AM al problema 2.

- *Enumeración no sistemática:* Algunos futuros profesores no establecen un orden sistemático al enumerar las combinaciones, que en su mayoría conducen a respuestas parcialmente correctas o incorrectas. Sólo tres estudiantes ofrecen respuestas correctas, como la que se mostró en la Figura 3.4.4, donde SL, responde correctamente pero no se observa un orden de enumeración de las combinaciones.
- *Fijación de variables*: Esta estrategia fue utilizada por gran parte de los estudiantes, que asocian cada sobre de color con una letra o número y se fija para determinar las combinaciones, tal como hace AD (Figura 3.4.6), quien fija como variable la carta, lo que le conduce a responder incorrectamente aunque utilice el diagrama de árbol.

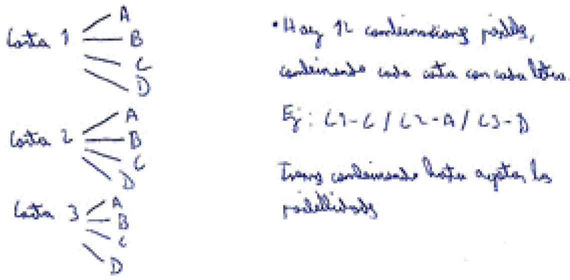


Figura 3.4.6. Estrategia de fijación de variable por el estudiante AD en el problema 2.

- *Principio multiplicativo:* Algunos futuros profesores aplicaron erróneamente el principio multiplicativo, como se muestra en la Figura 3.4.7, donde el estudiante NR multiplica la cantidad de sobres (4), por la cantidad de cartas (3), estableciendo como resultado un total de 12 posibilidades.

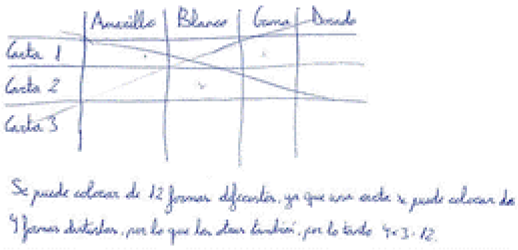


Figura 3.4.7. Respuesta incorrecta del estudiante NR utilizando el principio multiplicativo.

- *Principio aditivo:* En algunos casos se utiliza la suma del cardinal de los conjuntos de posibles soluciones al establecer la situación de que un sobre se quede vacío. Así, se suma el total de posibilidades en cada caso, que es: 1+1+1+1 = 4. En el siguiente ejemplo (Figura 3.4.8), SH describe su razonamiento para establecer las 4 combinaciones, según esta estrategia.

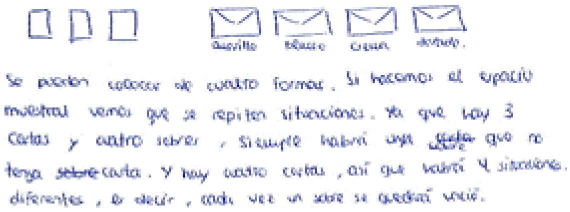


Figura 3.4.8. Uso de la respuesta intuitiva del estudiante SH en el problema 2.

- *Otras:* En la mayoría de los casos se aplicaron estrategias específicas, como el hecho de colocar varias cartas en un mismo sobre o la utilización de tablas de manera confusa, como se muestra en el siguiente ejemplo (Figura 3.4.9) donde DL utiliza una tabla para enumerar las combinaciones, pero de manera incomprensible dando como resultado 12 posibilidades.

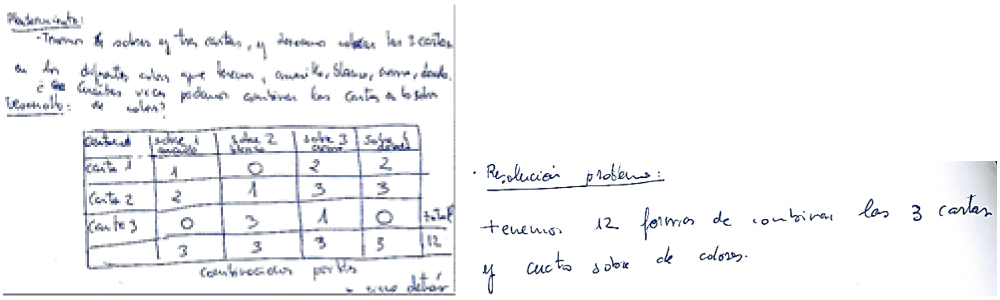


Figura 3.4.9. Uso de otra estrategia del estudiante DL el problema 2.

La Tabla 3.4.2 muestra los resultados del análisis del tipo de estrategia utilizada al responder al problema 2, según su grado de corrección, donde observamos que las principales estrategias utilizadas se clasificaron como “otras” (32,9%), con el 15,1% correctas; le sigue la estrategia de fijación de variable (26%) y el principio multiplicativo (19,2%).

Tabla 3.4.2. Frecuencia (porcentaje) del tipo de estrategias utilizadas, según grado de corrección, en las respuestas de los futuros profesores al problema 2.

Estrategias	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Enumeración sistemática	7(9,6)	5(6,8)		12(16,4)
Enumeración no sistemática	3(4,1)			3(4,1)
Fijación de variables	11(15,1)	7(9,6)	1(1,4)	19(26)
Principio multiplicativo		3(4,1)	11(15,1)	14(19,2)
Principio aditivo	1(1,4)			
Otras	11(15,1)	3(4,1)	10(13,7)	24(32,9)
Total	33(45,2)	18(24,7)	22(30,1)	73(100)

Además, en algunos casos, se utilizaron más de dos estrategias. Estos resultados son mejores que los obtenidos en la investigación de Navarro-Pelayo (1994), donde cerca del 27% respondieron correctamente (con o sin instrucción).

Conflictos semióticos en la resolución de la tarea. En el análisis de los conflictos semióticos presentes en las respuestas de los futuros profesores al problema 2, la mayoría son causadas por el tipo de procedimiento o por conceptos mal adquiridos.

En cuanto al procedimiento aplicado, los estudiantes plantean la enumeración pero no generalizan adecuadamente o bien cuentan combinaciones en exceso o defecto; por ejemplo, en la Figura 3.4.1 se mostró la respuesta de JG, quien aplica una estrategia de enumeración sistemática, pero incompleta, o AM quien realiza la enumeración excesiva (Figura 3.4.5). Navarro-Pelayo encontró mayoritariamente este conflicto en sus participantes sin instrucción (35,6%). Además, el 32,6% de participantes consideraron las cartas distinguibles por lo que aplicaron mal la enumeración.

En cuanto a conceptos mal adquiridos, encontramos un participante que confunde el concepto de probabilidad con el de posibilidad pues, aplica el significado clásico de la probabilidad al contar los casos favorables y no lo que se pide en el problema, que es contar las posibles combinaciones de cartas en sobres.

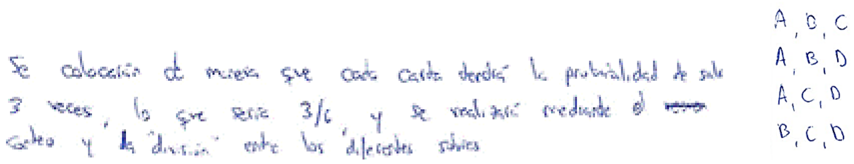


Figura 3.4.10. Estrategia de enumeración sistemática y conflicto con la probabilidad por DT.

La situación es preocupante pues, gran parte de los futuros profesores muestran escaso razonamiento combinatorio. Pareciera que no comprenden a qué se refiere el enunciado del problema y por tanto no comprender el significado de una combinación, en la que el orden no importa en la colocación de los elementos. Como ejemplo, en la Figura 3.4.6, se mostró la respuesta de AD, quien multiplica y responde 12 posibilidades; o el siguiente ejemplo (Figura 3.4.11), donde LS responde 12, fijando el sobre amarillo y otorgando combinaciones erróneas y poco lógicas.

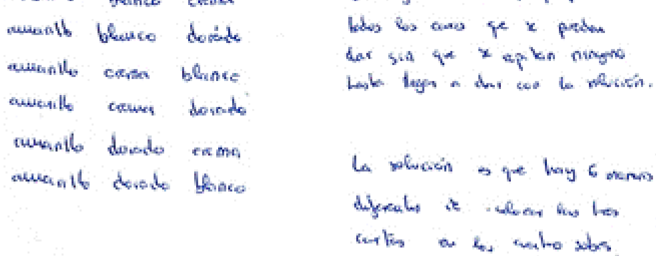


Figura 3.4.11. Presencia del conflicto semiótico en la fijación de variable por LS.

El conflicto en el concepto también se manifestó en la investigación de Navarro-Pelayo (1994), donde el 51,2% de participantes con instrucción trataron de aplicar la fórmula de variación considerando las cartas distinguibles; en este sentido, el estudiante BM (Figura 3.4.12) se atreve a usar la fórmula erróneamente de variación con repetición.

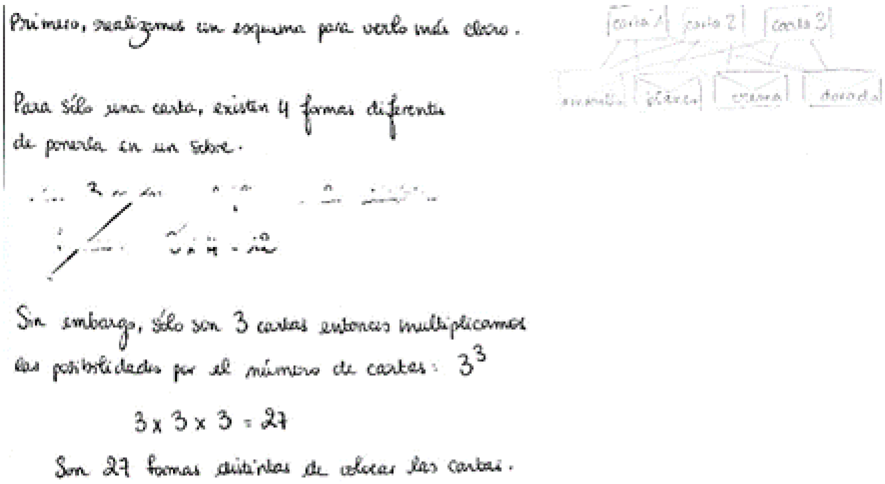


Figura 3.4.12. Conflicto de fórmula presente en el problema 2 por el estudiante BM.

3.5. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 3. DESCRIPCIÓN Y RESULTADOS.

En este problema se pide seleccionar alumnos y alumnas para borrar una pizarra. El modelo de selección planteado parte de un conjunto inicial formado por cinco estudiantes y se va a ir seleccionando tres de ellos para borrar la pizarra.

Problema 3. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Si identificamos los estudiantes por sus iniciales, podemos establecer la enumeración del total de posibles combinaciones de 5 estudiantes tomadas de 3 en 3 o también la estrategia de fijar la variable de estudiantes que se van seleccionando o los dos que se quedan en cada caso sin seleccionar. Así, si se quiere utilizar como estrategia la fijación de un elemento constante (o pivote) para establecer el recuento, obtenemos lo siguiente:

{EFG, EFJ, EFM, EGJ, EGM, EJM, FGJ, FGM, FJM, GJM}

También se puede utilizar la fórmula, donde se selecciona k =3 personas de n =5 personas (total del grupo):

$$C_3^5 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 2 = 10$$

En cuanto al grado de corrección de las respuestas, el 33,9% ofrecen respuestas incorrectas y el 40,3% parcialmente correctas, lo que muestra el escaso razonamiento combinatorio de los participantes. En las respuestas, el tipo de lenguaje que predomina es el verbal y el simbólico, como se describe a continuación:

Lenguaje. La mayoría de repuestas presentan combinaciones de lenguajes, aunque predomina el verbal, seguido del simbólico. A continuación se describe la tipología de lenguaje utilizado por los futuros profesores para responder al problema:

- *Simbólico:* Se utiliza este tipo de lenguaje principalmente para operar y calcular las diversas combinaciones, asociando letras o números a los estudiantes. Como ejemplo, la Figura 3.5.1, muestra la respuesta de TC, quien utiliza letras para simbolizar cada estudiante en cada combinación, respondiendo correctamente.

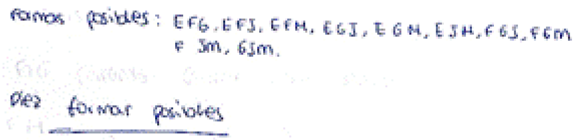


Figura 3.5.1. Uso de lenguaje simbólico por el estudiante TC al problema 3.

- *Gráfica:* Se utiliza este lenguaje para enumerar las diversas combinaciones, como por ejemplo LF, quien dibuja un diagrama del árbol (Figura 3.5.2) para responder al problema usando la fijación de variable en el estudiante, comenzando con E (Elisa), y generaliza al resto, aunque de modo incorrecto, además de no responder realmente a cuántas posibilidades se presentan. Consideramos la respuesta incorrecta puesto que se observan las 12 posibilidades e indica que así se iría haciendo con todos. Por lo que considera la operación combinatoria de variación más que de combinación.

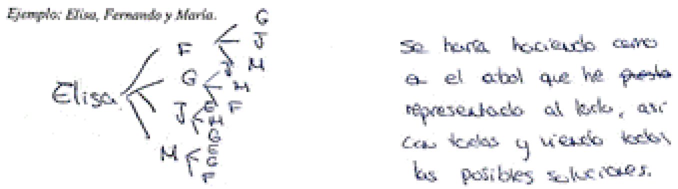


Figura 3.5.2. Uso de lenguaje gráfico por el estudiante LF al problema 3.

- *Icónico:* Encontramos algunas respuestas mediante esquemas o dibujos que representan las diferentes combinaciones; por ejemplo, EB (Figura 3.5.3) realiza un esquema que le facilita determinar las combinaciones, aunque responde incorrecto.

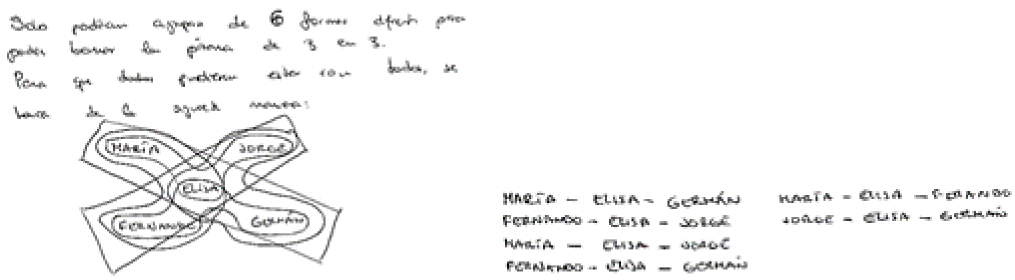


Figura 3.5.3. Uso de lenguaje icónico por el estudiante EB al problema 3.

- *Tabular:* Este tipo de lenguaje se utiliza para representar la selección de los estudiantes, aunque ninguna de las respuestas fue correcta mediante este lenguaje, como ejemplo se muestra la siguiente Figura 3.5.4.

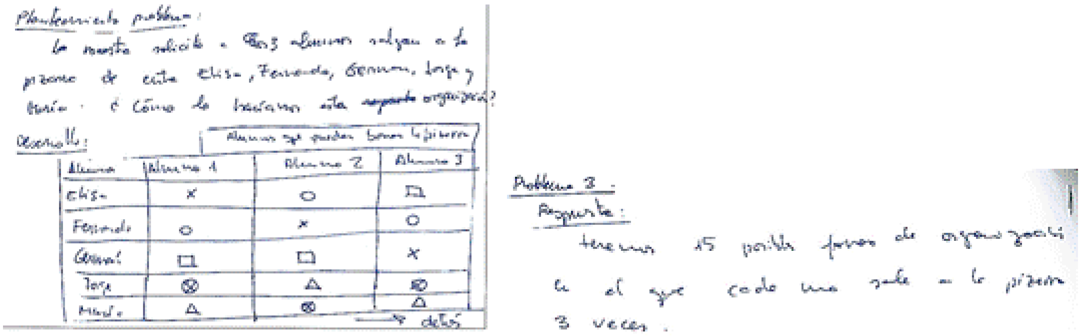


Figura 3.5.4. Respuesta incorrecta del estudiante DL al problema 3.

- *Verbal:* La mayoría de futuros profesores utiliza este lenguaje aunque, en general, combinado con otro tipo de lenguaje. Como ejemplo, el estudiante LS (Figura 3.5.5) utiliza únicamente este lenguaje para resolver el problema.

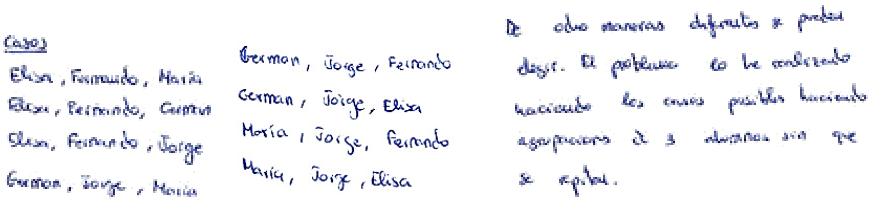


Figura 3.5.5. Respuesta parcialmente correcta del estudiante LS al problema 3.

En la Tabla 3.5.1 se muestra el tipo de lenguaje utilizado por los participantes al responder al problema, según su grado de corrección en la respuesta, donde se observa que el principal lenguaje utilizado es el verbal (46,2%), seguido del simbólico (38,5%).

Tabla 3.5.1. Frecuencia (porcentaje) del tipo de lenguaje utilizado según grado de corrección en las respuestas de los futuros profesores al problema 3.

Lenguaje	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Simbólico	8(7,7)	16(15,4)	16(15,4)	40(38,5)
Icónico	1(1)	2(1,9)		3(2,9)
Gráfico	2(1,9)	3(2,9)	6(5,8)	11(10,6)
Tabular		1(1)	1(1)	2(1,9)
Verbal	13(12,5)	21(20,2)	14(13,5)	48(46,2)
Total	24(23,1)	43(41)	37(35,6)	104(100)

Estrategias. En el análisis de las estrategias utilizadas por los futuros profesores para resolver el problema, encontramos que ninguno de los participantes utilizó la fórmula para calcular el total de combinaciones posibles. A continuación se describen las distintas estrategias que utilizan los participantes para responder al problema, mostrando ejemplos en cada caso para clarificar cada categoría.

- *Enumeración sistemática:* Con este tipo de estrategia se responde al problema enumerando todas las combinaciones de estudiantes que se pueden seleccionar, considerando, en algunos casos, a los estudiantes que estarán sentados por cada combinación. Como ejemplo, en la Figura 3.5.6, se muestra la respuesta del estudiante

SS, que establece sus combinaciones de manera sistemática, además de reconocer, en cada combinación, a los estudiantes sentados.

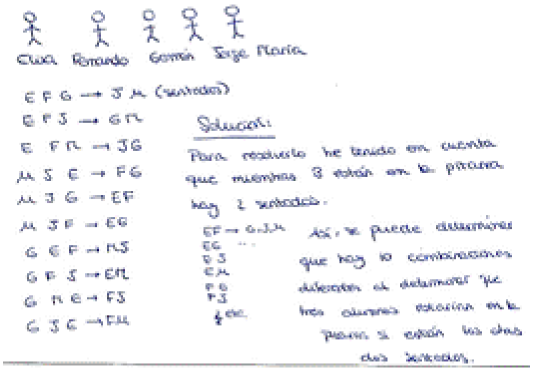


Figura 3.5.6. Uso de la enumeración sistemática correcta por el estudiante SS.

En algunas respuestas se observa esta estrategia, pero mal aplicada, puesto que la enumeración sistemática se plantea en más (excesiva) o menos (incompleta) casos de los que se debiera considerar. Como se mostró en la Figura 3.5.5, LS establece la enumeración de las combinaciones en lenguaje verbal pero no logra terminar el proceso y responde con ocho combinaciones; mientras que en la siguiente Figura 3.5.7, SL enumera las combinaciones en exceso.

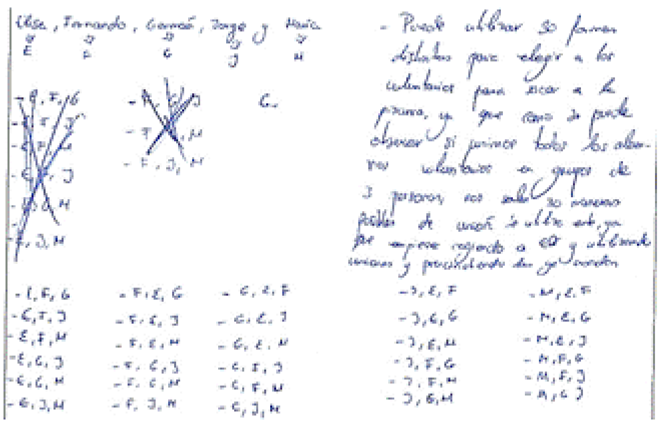


Figura 3.5.7. Uso de la enumeración sistemática incorrecta excesiva por el estudiante SL.

- *Enumeración no sistemática:* Por otro lado, encontramos futuros profesores que no establecen en sus respuestas un orden sistemático al enumerar las combinaciones, lo que les conduce a respuestas parcialmente correctas o incorrectas, como se mostró en la Figura 3.5.3, donde EB responde erróneamente, ya que no establece una sistematicidad en su enumeración.
- *Fijación de variables:* Esta estrategia fue utilizada por la mayoría de los estudiantes, donde asocian cada estudiante con una letra o número y fijan una de ellas para determinar las combinaciones; como se mostró en la Figura 3.5.2, LF fija la variable estudiante y obtiene las combinaciones por generalización, aunque incorrectamente.

- *Respuesta intuitiva:* Dos participantes respondieron utilizando la intuición como estrategia, no obstante, todas estuvieron incorrectas. Como ejemplo, el estudiante POX (Figura 3.5.8) no explica correctamente la solución del problema, estableciendo que puede elegir a tres estudiantes, y que puede repetir el proceso.

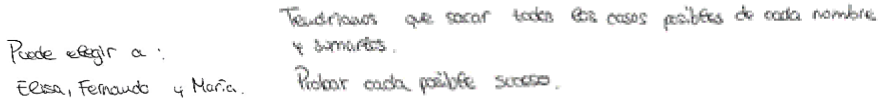


Figura 3.5.8. Uso de una respuesta intuitiva por el estudiante POX en el problema 3.

- *Descomposición del problema:* Solo dos participantes utilizaron esta estrategia, puesto que abordaron el problema mediante una descomposición del mismo, como se muestra en la Figura 3.5.9, donde LI enumeró, separando a cada estudiante, las combinaciones con cada uno de ellos, para posteriormente, eliminar aquellas repetidas, no obstante, repitió una de ellas y no contestó correctamente.

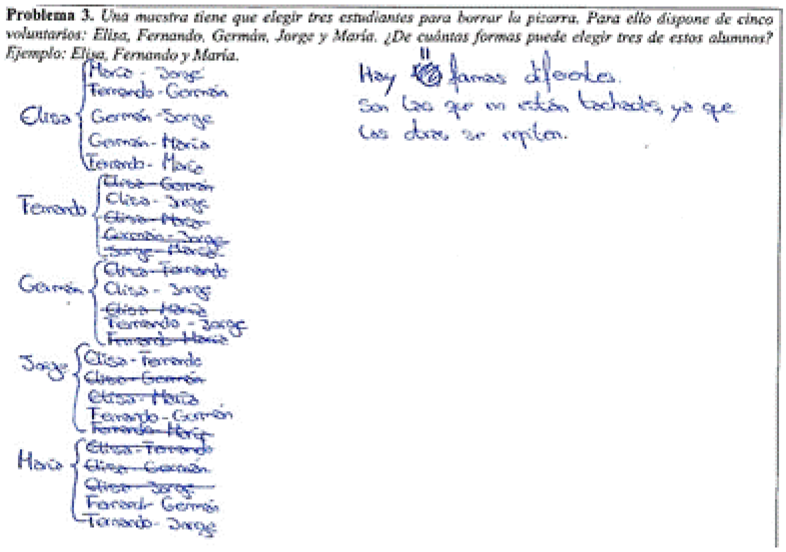


Figura 3.5.9. Uso de la descomposición del problema por el estudiante LI.

- *Principio multiplicativo:* Algunos futuros profesores aplicaron, erróneamente, el principio multiplicativo. Como ejemplo, en la Figura 3.5.10 se observa que el estudiante AP multiplica la cantidad de estudiantes voluntarios (5), por la cantidad de estudiantes que la profesora debe seleccionar (3), estableciendo que la respuesta es el producto de ambos (15). Cabe señalar que se consideraron como utilización de esta estrategia, sólo a aquellos que la aplicaron de manera explícita.

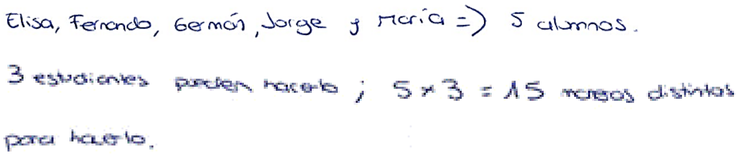


Figura 3.5.10. Uso del principio multiplicativo por el estudiante AP en el problema 3.

- *Otras:* Algunos futuros profesores utilizaron otro tipo de estrategias, como el ejemplo que se mostró en la Figura 3.5.4, donde DL utiliza el lenguaje tabular sin entender muy bien su procedimiento para responder 15 como resultado al problema.

En la Tabla 3.5.1 se muestran los resultados del análisis del tipo de estrategia utilizada por los participantes, según su grado de corrección, al responder al problema. Observamos que la principal estrategia utilizada es la fijación de variables (40%), no obstante, dio principalmente como resultado respuestas parcialmente correctas (20%). En menor medida se encuentran las estrategias de descomposición del problema o principio multiplicativo. Los resultados son similares a los obtenidos en la investigación de Navarro-Pelayo (1994), en participantes sin instrucción (22,6% respuestas correctas), mientras que el 46% de sus participantes con instrucción respondieron correctamente. La autora no consideró la valoración de respuestas parcialmente correctas, aun así, consideramos preocupantes nuestros resultados pues la formación matemática que recibieron los futuros profesores en la Educación Secundaria, Bachillerato y el año previo en el Grado debieran ser suficientes como para resolver con éxito la tarea, tal como los estudiantes en el estudio de Navarro-Pelayo (1994) que recibieron instrucción.

Tabla 3.5.1. Frecuencia (porcentaje) del tipo de estrategias utilizadas, según grado de corrección, en las respuestas de los futuros profesores al problema 3.

Estrategias	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Enumeración sistemática	10(11,1)	12(13,4)	5(5,5)	37(30)
Enumeración no sistemática		1(1,1)	3(3,3)	4(4,4)
Fijación de variables	12(13,3)	18(20)	6(6,7)	36(40)
Descomposición del problema		1(1,1)	1(1,1)	2(2,2)
Principio multiplicativo		4(4,4)	5(5,6)	9(10)
Respuesta intuitiva			2(2,2)	2(2,2)
Otras	1(1,1)	2(2,2)	7(7,8)	10(11,1)
Total	23(25,6)	38(42,2)	29(32,2)	90(100)

Conflictos semióticos. En el análisis de los conflictos semióticos presentes en las respuestas de los futuros profesores al resolver el problema 3, encontramos que la mayoría fue a causa del procedimiento o el concepto de combinación.

En cuanto al procedimiento, algunas respuestas reflejan que la enumeración no está bien asimilada, pues los participantes realizan enumeraciones no sistemáticas, lo que provoca error en sus respuestas. También encontramos que dos futuros profesores no saben afrontar la tarea, como se mostró en la Figura 3.5.8, con procedimientos intuitivos. Resultados similares se muestran en Navarro-Pelayo (1994), donde el 60,4% de estudiantes sin instrucción aplica mal la enumeración.

La dificultad en el modo de afrontar la tarea mediante un procedimiento adecuado se muestra sobre todo en aquellos estudiantes que utilizan el lenguaje gráfico o tabular. Todos los que aplican el lenguaje tabular cometen error y en cuanto al uso del diagrama de árbol, sólo dos de los once lo utilizan de modo correcto, lo que a muchos les condujo a usar el principio multiplicativo equivocadamente.

También encontramos ausencia o equivocada generalización del procedimiento de enumeración o fijación de variable, Por ejemplo, para este último caso, PO generaliza inadecuadamente el caso de un estudiante y, por tanto, responde que 30 son el total de posibilidades (Figura 3.5.11.).

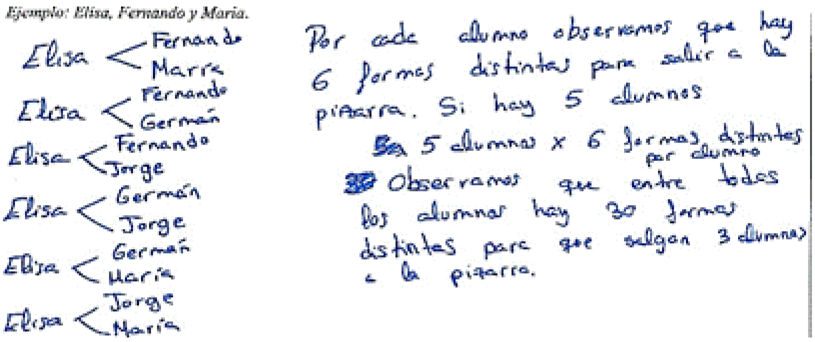


Figura 3.5.11. Presencia del conflicto de generalización por PO mediante fijación de variable.

Algo que sí es de destacar es que tampoco en esta tarea los futuros profesores identifican y aplican adecuadamente procedimientos asociados al concepto de combinación, dando muestra de no comprender dicho concepto puesto que el orden no influye en las posibilidades que se formen de selección de estudiantes. Como se mostró en el ejemplo de la Figura 3.6.9, AP aplica la multiplicación para considerar el total de posibilidades que se pide. Este error se identifica en Navarro-Pelayo en un 61,1% y un 24,3% de estudiantes con o sin instrucción, respectivamente. Destacamos que cerca del 75% de las respuestas de los estudiantes en nuestro estudio presentan al menos un conflicto de los descritos anteriormente.

3.6. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 4. DESCRIPCIÓN Y RESULTADOS.

Este problema es del tipo de partición, descrito en el Capítulo 2, al pedir dividir conjuntos (en nuestro caso cuatro cromos) en subconjuntos (dos cromos para cada conjunto).

Problema 4. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

Como en los problemas anteriores, se resuelve con la operación combinatoria sin repetición, de manera intuitiva o de una manera formal, según la fórmula pertinente:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{4} = 6$$

También se puede hacer uso de lenguaje tabular, donde se representen los nombres de las chicas (M = Maria y C = Carmen) y los cromos para cada una de ellas, mostrando así la relación de este tipo de problemas con los de colocación (Ver Capítulo 2).

Tabla 3.6.1. Ejemplo de uso de lenguaje tabular para responder al problema 4

	Cromo 1	Cromo 2	Cromo 3	Cromo 4
Combinación 1	M	M		
Combinación 2	M		M	
Combinación 3	M			M
Combinación 4		M	M	
Combinación 5		M		M
Combinación 6			M	M

En cuanto al grado de corrección de las respuestas de los participantes, el 58,1% estuvieron correctas y el 33,9% parcialmente correctas, lo que denota que este problema resultó mejor que en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) donde el 37,2% y el 31% de participantes con y sin instrucción, respectivamente, respondió correctamente. En las respuestas, los estudiantes suelen utilizar el lenguaje verbal, aunque otra gran parte de los participantes utilizó representaciones simbólicas y gráficas.

Lenguaje. La mayoría de repuestas presentan combinaciones de dos tipos de lenguajes, aunque predomina el verbal, seguido del simbólico y del gráfico:

- *Simbólico:* Se utiliza este tipo de lenguaje, principalmente, para identificar los cromos mediante números, no obstante, algunos estudiantes utilizan otro tipo de símbolos, como se muestra en la Figura 3.6.1, donde DL utiliza símbolos y números.

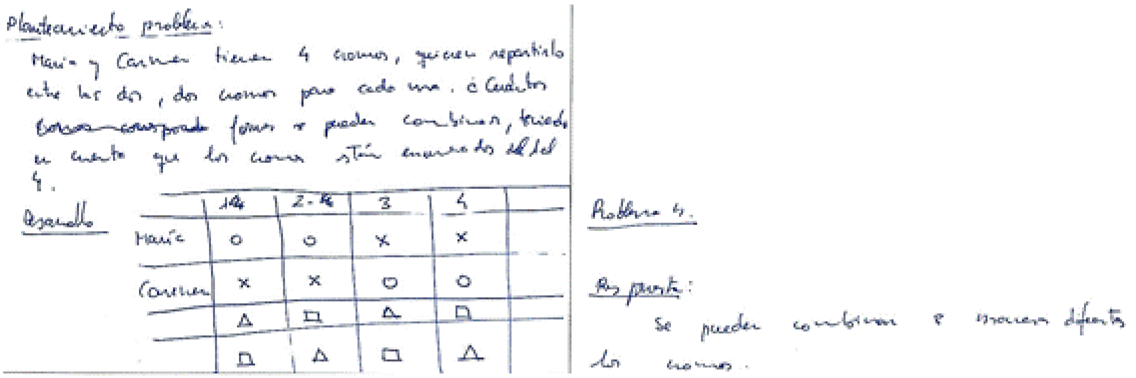


Figura 3.6.1. Uso de lenguaje simbólico por el estudiante DL al problema 4.

- *Gráfico:* Algunos estudiantes utilizan este lenguaje, como preferencia el diagrama del árbol, para obtener las combinaciones de cromos, como por ejemplo, en la Figura 3.6.2, el estudiante CU implementa un diagrama del árbol, lo cual le da facilidad para visualizar las combinaciones de los cromos a repartir, aunque incorrectamente.

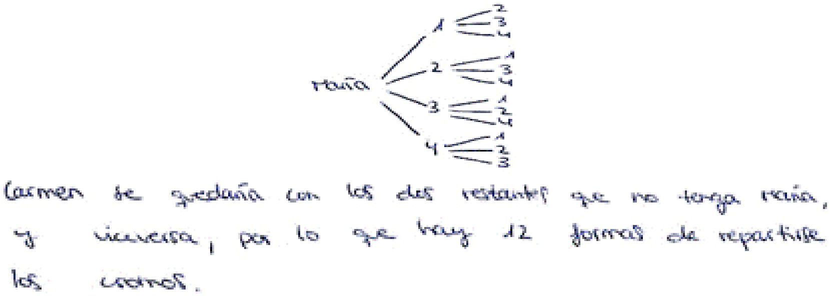


Figura 3.6.2. Uso de lenguaje gráfico por el estudiante CU al problema 4.

- *Icónico:* Encontramos respuestas mediante esquemas o dibujos para plantear la situación de distribución de los cromos entre las dos chicas, como por ejemplo BM (Figura 3.6.3.), quien realiza un dibujo de chicas y cromos que se pueden obtener.

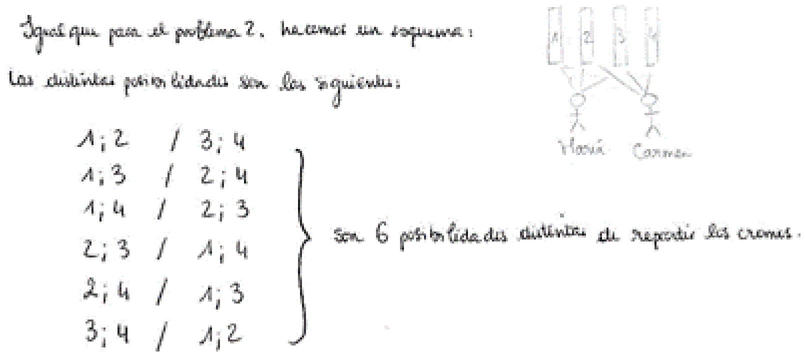


Figura 3.6.3. Uso de lenguaje icónico por el estudiante BM al problema 4.

- *Tabular:* Este tipo de lenguaje se utiliza para representar la distribución de los cromos entre las chicas, como se mostró en la Figura 3.6.1, donde DL implementa, además del lenguaje simbólico, una tabla para plantear la repartición de los cromos.
- *Verbal:* Como se había anticipado, la mayoría de los participantes utiliza este lenguaje para dar su respuesta, en general, combinado con otro, como se mostró en la Figura 3.6.2, donde CU utiliza este medio para explicar su desarrollo.

En la Tabla 3.6.2, se muestra el tipo de lenguaje utilizado por los futuros profesores al responder al problema, según su grado de corrección en la respuesta, donde se observa que el principal lenguaje utilizado es el verbal (33%), seguido por el simbólico (28,7%). En gran parte, ambos lenguajes estaban combinados.

Tabla 3.6.2. Frecuencia (porcentaje) de tipo de lenguaje utilizado y grado de corrección en las respuestas de los futuros profesores al problema 4.

Lenguaje	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Simbólico	20(17,4)	10(8,7)	3(2,6)	33(28,7)
Icónico	9(7,8)	3(2,6)	1(0,9)	13(11,3)
Gráfico	13(11,3)	9(7,8)	2(1,7)	24(20,9)
Tabular	6(5,2)		1(0,9)	7(6,1)
Verbal	21(18,3)	13(11,3)	4(3,5)	38(33)
Total	69(60)	35(30,4)	11(9,6)	115(100)

***Estrategias*.** En el análisis de las estrategias utilizadas por los futuros profesores para resolver el problema, encontramos que ninguno de los participantes utilizó la fórmula para calcular el total de combinaciones posibles. A continuación se describen las distintas estrategias que utilizan los participantes para responder al problema, mostrando ejemplos en cada caso para clarificar cada categoría.

- *Enumeración Sistemática:* Este tipo de estrategia, bien aplicada, conduce a dar respuesta correcta al problema, ya que se realiza una enumeración recursiva de las combinaciones de cromos distribuidas entre María y Carmen. Como ejemplo, en la Figura 3.6.4 se muestra la respuesta del estudiante PO, quien fija los cromos que obtendrá María, sistemáticamente, para así, establecer los que tendrá Carmen.

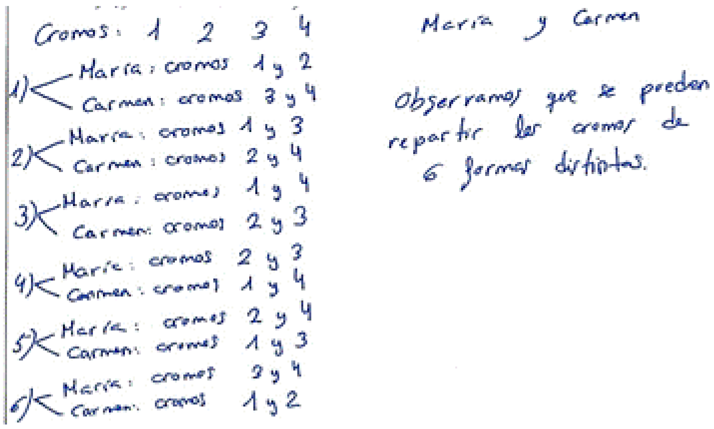


Figura 3.6.4. Uso de una enumeración sistemática correcta por el estudiante PO.

No obstante, como en problemas anteriores, también se presentaron enumeraciones sistemáticas que fallaron en exceso o defecto de combinaciones, o se aplicó una errónea generalización, al no acabar el proceso.

- *Enumeración no sistemática:* Encontramos futuros profesores que no establecen en sus respuestas un orden sistemático al enumerar las combinaciones y en su mayoría les conduce a dar respuestas parcialmente correctas o incorrectas. Sólo dos estudiantes ofrecen respuestas correctas mediantes este tipo de estrategia, como se muestra en la Figura 3.6.5, donde AC, responde correctamente pero el orden de enumeración de los cromos parece aleatorio.

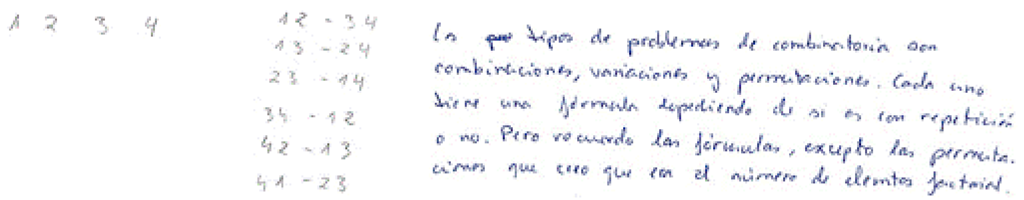


Figura 3.6.5. Uso de una enumeración no sistemática por el estudiante AC en el problema 4.

- *Fijación de variables:* Algunos participantes, además de asociar cada cromo con un número, fijan una de ellas para determinar las demás combinaciones, tal como se muestra en la Figura 3.6.6, en la que el estudiante IG fija un cromo como elemento constante para la determinación de las combinaciones.

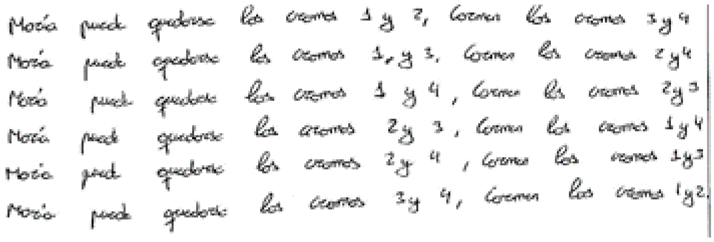


Figura 3.6.6. Uso de una enumeración no sistemática por el estudiante IG en el problema 4.

- *Principio aditivo:* Esta estrategia fue utilizada sólo por un estudiante de manera explícita (Figura 3.6.7), donde se considera los conjuntos de combinaciones de cromos que cada chica puede tener, y luego se suma, erróneamente, sus cardinales:

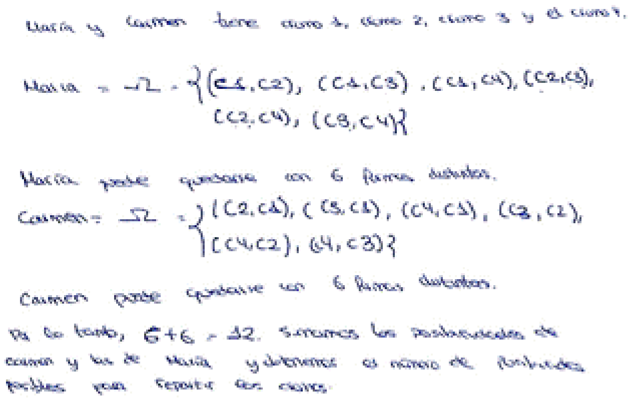


Figura 3.6.7. Uso del principio aditivo por el estudiante ME en el problema 4.

- *Principio multiplicativo:* Algunos de los futuros profesores aplicaron erróneamente el principio multiplicativo. Como ejemplo, en la Figura 3.6.8 se observa que el estudiante MC, posterior a mencionar que cada chica tendrá dos cromos, multiplica dicha cantidad de cromos (2), por la cantidad de cromos totales (4), estableciendo que la respuesta es el producto de ambos (8).

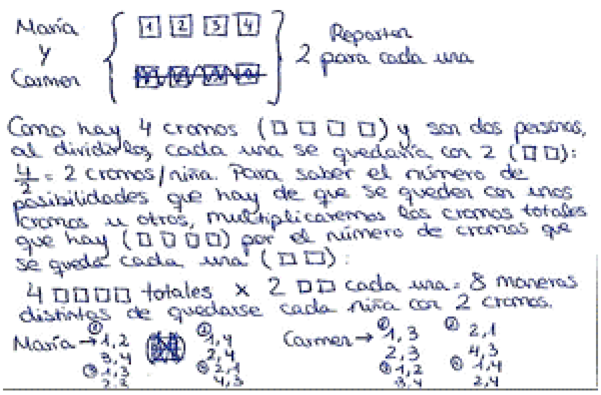


Figura 3.6.8. Uso del principio multiplicativo por el estudiante MC en el problema 4.

- *Otras:* Por otro lado, algunos participantes utilizaron otro tipo de estrategias, como es el caso que se mostró en la Figura 3.6.1, donde DL usa una tabla con símbolos para establecer las combinaciones, sin comprender bien su repartición.

En la Tabla 3.6.3, se muestran los resultados del análisis del tipo de estrategia utilizada por los participantes, según su grado de corrección al responder al problema 4.

Observamos que la principal estrategia utilizada es la enumeración sistemática (49,3%), siendo la mayoría de ellas correctas (32,8%). De las demás estrategias utilizadas puede apreciarse una distribución uniforme en el grado de corrección, excepto en la fijación de variables, la cual fue utilizada en un 19,4%, siendo correctas un 11,9%. En menor medida fueron utilizadas las estrategias de principios aditivo y multiplicativo.

Tabla 3.6.3. Frecuencia (porcentaje) del tipo de estrategias utilizadas, según grado de corrección, en las respuestas de los futuros profesores al problema 4.

Estrategias	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Enumeración sistemática	22(32,8)	10(14,9)	1(1,5)	33(49,3)
Enumeración no sistemática	2(3)	3(4,5)	3(4,5)	8(11,9)
Fijación de variables	8(11,9)	3(4,5)	2(3)	13(19,4)
Principio aditivo		1(1,5)		1(1,5)
Principio multiplicativo		1(1,5)	2(3)	3(4,5)
Otras	4(6)	4(6)	1(1,5)	9(13,4)
Total	36(53,7)	22(32,8)	9(13,4)	67(100)

Conflictos semióticos. En el análisis de los conflictos semióticos presentes en las respuestas de los futuros profesores al resolver el problema 4, encontramos que la mayoría fue a causa de una ausencia o indebida generalización del procedimiento recursivo de enumeración, habiendo realizado una enumeración sistemática. Un ejemplo se muestra en la Figura 3.6.9, donde LS identifica los objetos pero cae en el error de repetición, afirmando que la combinación (cromos 1 y 2) es diferente a la combinación (cromos 2 y 1), sin considerar que el orden no importa. Este error también se manifiesta en el 24% de participantes sin instrucción en Navarro-Pelayo (1994).

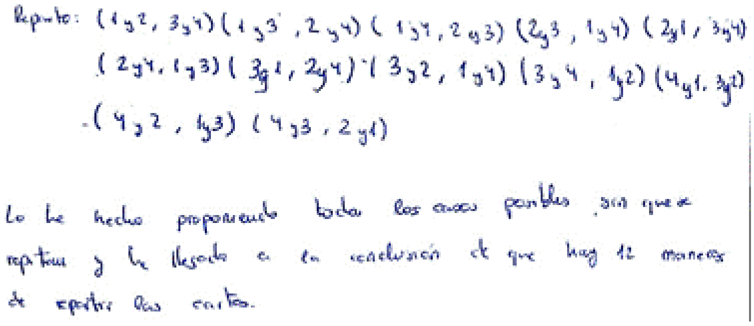


Figura 3.6.9. Respuesta parcialmente correcta del estudiante LS al problema 4.

La dificultad en el modo de enfrentar el problema se aprecia en los procedimientos y lenguajes utilizados, especialmente en los lenguajes tabular y gráfico, los cuales, en su mayoría, mostraron conflictos en lo que se debía enumerar. Aunque se trata del problema con menor presencia de conflictos, resulta preocupante la ausencia de un razonamiento combinatorio adecuado al identificar el concepto de combinación. Esta situación también se presenta en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) en un 41,7% y 11,8% de participantes con y sin instrucción, al considerar la relevancia del orden en sus respuestas.

3.7. ANÁLISIS COMPARADO Y SÍNTESIS DE RESULTADOS.

El análisis de respuestas de los futuros profesores a los tres tipos de problemas planteados en nuestra investigación, atendiendo al modelo de combinación implícito del enunciado, nos informa del escaso razonamiento combinatorio de los participantes ante la operación de combinación sin repetición, a pesar de ser la de menor dificultad en participantes de investigaciones previas (Navarro-Pelayo, 1994; Roa, 2000).

En la Tabla 3.7.1 presentamos los resultados comparados en los problemas analizados, junto a los resultados obtenidos por Navarro-Pelayo (1994) en los mismos problemas resueltos por estudiantes de Bachillerato, con o sin instrucción previa en el tema. Observamos resultados un tanto mejores en nuestra investigación, en comparación con la de Navarro-Pelayo (1994) excepto en el problema 3, que es donde encontramos mayor número de respuestas parcialmente correctas en nuestra investigación.

Tabla 3.7.1. Porcentaje de respuestas según grado de corrección en los problemas aplicados.

	Futuros profesores			Alumnos de Bachillerato (Navarro-Pelayo, 1994)					
	(n=62)			Con instrucción (n = 352)			Sin instrucción (n = 368)		
	C	PC	I	C	I	NR	C	I	NR
Problema 2	48,4	19,4	32,3	26,7	57,1	16,2	26,9	53,3	19,8
Problema 3	25,8	40,3	33,9	46	47,7	6,3	22,6	72	5,4
Problema 4	58,1	33,9	8,1	37,2	56	6,8	31	60,6	8,4

C = Correcta, PC = Parcialmente correcta, I = Incorrecta, NR = No responde

Cabe señalar que Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000) habían concluido que los problemas correspondientes al modelo de selección habían sido los más simples de resolver por los participantes, y que los problemas de partición, después de la instrucción, no hubo cambio en la dificultad. En nuestra investigación, el problema correspondiente al modelo de selección fue el que mayor cantidad de error presentó, con mayor cantidad de respuestas parcialmente correctas puesto que el concepto de orden no se consideró adecuadamente (error mayoritario en todos los problemas propuestos); por otro lado, el de partición (problema 4) fue el más simple de todos.

El tipo de lenguaje utilizado, como se muestra en la Tabla 3.7.2, es mayoritariamente verbal (variable no analizada en investigaciones previas).

Tabla 3.7.2. Porcentaje de tipo de lenguaje utilizado en los problemas combinatorios.

Lenguaje	Problema 2			Problema 3			Problema 4		
	C	PC	I	C	PC	I	C	PC	I
Simbólico	6,9	6,9	11,2	7,7	15,4	15,4	17,4	8,7	2,6
Icónico	7,8	2,6	5,2	1	1,9		7,8	2,6	0,9
Gráfico	2,6	3,4	3,4	1,9	2,9	5,8	11,3	7,8	1,7
Tabular	6,9	0,9	3,4		1	1	5,2		0,9
Verbal	22,3	6	10,3	12,5	20,2	13,5	18,3	11,3	3,5

C=Correcto; PC = Parcialmente Correcta; I=Incorrecta

En cuanto al tipo de estrategia utilizada para responder a los problemas combinatorios, en la Tabla 3.7.3 se comparan los resultados del análisis, donde la enumeración y la fijación de variable fueron las estrategias más utilizadas, principalmente en el problema 4, aunque emergieron otras estrategias como el principio aditivo y multiplicativo.

Tabla 3.7.3. Porcentaje de tipo de estrategias utilizadas en los problemas combinatorios.

Estrategias	Problema 2			Problema 3			Problema 4		
	C	PC	I	C	PC	I	C	PC	I
Enumeración sistemática	9,6	6,8		11,1	13,4	5,5	32,8	14,9	1,5
Enumeración no sistemática	4,1				1,1	3,3	3	4,5	4,5
Fijación de variables	15,1	9,6	1,4	13,3	20	6,7	11,9	4,5	3
Descomposición del problema					1,1	1,1			
Principio aditivo	1,4							1,5	
Principio multiplicativo		4,1	15,1		4,4	5,6		1,5	3
Respuesta intuitiva						2,2			
Otras	15,1	4,1	13,7	1,1	2,2	7,8	6	6	1,5

El análisis del tipo de estrategia permitió identificar los tipos de conflictos semióticos que manifiestan los futuros profesores, que igualmente se manifestaron en investigaciones previas con estudiantes de Bachillerato (Navarro-Pelayo, 1994).

Encontramos que la mayoría fue a causa del procedimiento o el concepto de combinación, puesto que la enumeración no está bien asimilada, ya que los participantes realizan enumeraciones no sistemáticas, lo que provoca error en sus respuestas y el concepto de combinación supone un conflicto cuando deben realizar la enumeración sistemática puesto que no valoran que el orden no es relevante al resolver el problema. Así, a medida que se ha presentado la descripción de resultados en cada problema, se ha ido ejemplificando el tipo de conflicto en cada caso, comparando la situación de nuestra investigación con la encontrada en la investigación de Navarro-Pelayo (1994).

CAPITULO 4. CONCLUSIONES.

4.1. INTRODUCCIÓN.

Para finalizar este Trabajo Fin de Máster, en este último capítulo exponemos las conclusiones que se establecen en base a los resultados obtenidos en el análisis realizado de las respuestas a los problemas combinatorios propuestos de una muestra de futuros profesores; además, relacionamos estos resultados con los objetivos que se plantearon en el Capítulo 1 y así dar respuesta del logro de los mismos.

Además, complementaremos las conclusiones con una breve descripción de las limitaciones que tiene el trabajo y algunas de las propuestas para futuras líneas de investigación con respecto a este tema.

4.2. CONCLUSIONES SOBRE ESTRATEGIAS Y LENGUAJE UTILIZADO EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS COMBINATORIOS.

El primero de los objetivos que se plantearon en este trabajo se centra en profundizar en la importancia de la combinatoria en el razonamiento matemático, por lo que el análisis realizado de las investigaciones consultadas, que se describen en el Capítulo 2, da muestra de que se cumplió este objetivo.

El análisis de los antecedentes a nuestro estudio sirvió para la selección de los problemas que conforman el cuestionario de nuestra investigación, que atienden a la variable descrita por Navarro-Pelayo (1994) como modelo implícito del enunciado y responde a tres tipos: selección, colocación y partición, y un primer problema que responde al pensamiento o razonamiento recursivo y la visualización espacial.

En base a este análisis de investigaciones previas hemos observado que diversos investigadores han profundizado en el estudio del razonamiento combinatorio en individuos de diferentes edades; desde los estudios realizados por Inhelder y Piaget (1958), Fishbein (1975), hasta los de años más recientes, como los de Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000), entre otros. Se establece una línea de investigación acerca del razonamiento combinatorio, no sólo desde el aspecto matemático, sino buscando desarrollar un razonamiento lógico-matemático en la formación del ciudadano, en función de un pensamiento estructurado de las personas. Todo esto sitúa a la combinatoria en una pieza fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, en especial en la educación estadística por su utilidad en el estudio de conceptos como el espacio muestral o la probabilidad, entre otros. Compartimos con otros investigadores que el razonamiento combinatorio debe fomentarse e iniciarse desde los primeros cursos de Educación

Primaria, mediante juegos y actividades que involucren situaciones que requieren este tipo de pensamiento (Kapur, 1970).

Ante esta situación, en el trabajo nos planteamos como objetivo específico: *caracterizar el lenguaje y las estrategias que emplean una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, durante su formación inicial, al resolver problemas combinatorios simples*; puesto que nos interesamos por indagar en el conocimiento que posee una muestra de futuros profesores de Educación Primaria en el tema.

Este objetivo se ha cumplido con el análisis de las respuestas de una muestra de 62 futuros profesores de Educación Primaria a cuatro problemas combinatorios propuestos en un cuestionario donde se categoriza el tipo de lenguaje utilizado (simbólico, icónico, verbal, gráfico, etc.) y el tipo de estrategia empleada en su resolución.

Los resultados obtenidos son preocupantes, pues muestran la poca capacidad de razonamiento combinatorio de los participantes al resolver los problemas planteados, los cuales fueron planteados en investigaciones previas (Navarro-Pelayo, 1994, Roa, 2000) y se refieren a los ítems que tuvieron menor dificultad en dichas investigaciones.

El lenguaje utilizado es eminentemente verbal y cabe señalar que hubo respuestas que utilizaban únicamente este lenguaje. Muy pocos estudiantes utilizan el lenguaje gráfico, el cual podía ser un diagrama de árbol o algo similar, y los que lo hicieron, en su mayoría fueron respuestas incorrectas. El lenguaje icónico fue utilizado para simbolizar los elementos que intervienen en la situación planteada, como por ejemplo dibujar las cartas y los sobres en el problema 2, o los cromos en el problema 4. El simbólico se implementó para asociar, ya sea con números, letras o algún otro símbolo, los elementos involucrados en la situación planteada, como por ejemplo, en el caso del problema 2, utilizar las letras iniciales de cada color para identificar los sobres, o números para identificar cada cromo en el problema 4.

Por otro lado, las estrategias aplicadas se muestran en su mayoría incorrectas o parcialmente correctas, debido a que las enumeraciones no son completas o bien no son sistemáticas. Aunque no se trabaja con números de gran magnitud, los participantes no son capaces de resolver los problemas propuestos.

En cuanto a la enumeración sistemática o la fijación de variable, que si son bien aplicadas otorgan resultados correctos, las dificultades se encontraron en la mala generalización de los procesos. Ningún participante utilizó fórmulas.

Otro aspecto no menor, es la gran cantidad de estrategias no reconocidas en las respuestas, siendo en algunos casos correctas pero en su mayoría incorrectas. Esto último resulta preocupante, ya que evidencia la presencia de conflictos semióticos en los futuros profesores sobre las operaciones combinatorias y el propio modelo implícito del enunciado, como se describe a continuación.

4.3. CONCLUSIONES SOBRE LA DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS.

Con respecto a los conflictos semióticos, la consecución del primer objetivo específico nos ofreció suficiente información sobre las dificultades y asignaciones imprecisas de significado en investigaciones con estudiantes de Educación Primaria, Secundaria, Bachillerato y estudios universitarios avanzados en matemáticas.

Las investigaciones descritas dejan en evidencia la dificultad que supone la resolución de problemas que implican el razonamiento combinatorio, tanto en los estudiantes con poca preparación en combinatoria, quienes mostraron un tratamiento básico al intentar resolver los problemas mediante estrategias informales sin llegar al resultado correcto; como aquellos estudiantes con mejor preparación, quienes se limitaban al uso de los diversos algoritmos presentes en combinaciones, permutaciones y variaciones, pero de forma inapropiada, lo que refleja la presencia de un mecanicismo al limitarse a sólo la aplicación de la fórmula determinada de la operación combinatoria. Las dificultades y errores que conlleva este tipo de razonamiento son evidenciadas en todas las investigaciones sobre el tema.

En nuestro trabajo nos planteamos como objetivo específico: *caracterizar los conflictos semióticos que presentan una muestra de futuros profesores de Educación Primaria, durante su formación inicial, al resolver problemas combinatorios simples*.

Este objetivo se ha cumplido con el análisis de las respuestas de la muestra de 62 futuros profesores de Educación Primaria a los cuatro problemas combinatorios propuestos donde se categoriza los conflictos semióticos identificados en sus respuestas.

Los resultados obtenidos son preocupantes, pues dan cuenta, en primera instancia, de los conflictos producidos en el procedimiento, principalmente por la aplicación de una enumeración no sistemática, lo que otorga cierta aleatoriedad a la enumeración, y da cuenta de un escaso pensamiento recursivo y procedimiento sistemático por parte de los futuros profesores. Además, también se presentan conflictos asociados al propio concepto de combinación, lo que conlleva un mal uso de herramientas como el diagrama del árbol, o la no identificación de los elementos que conforman la enumeración, según se considere o no el orden o según sean o no distinguibles.

A lo largo del Capítulo 3, así como en las conclusiones establecidas al final de dicho capítulo, damos cuenta de la comparación de los resultados de nuestro estudio con la investigación de Navarro-Pelayo (1994). Así es que, aunque hubo diferencias en algunos resultados, obteniendo mejor índice de respuesta en nuestro estudio que en el obtenido por la autora con estudiantes de Bachillerato, la muestra de su estudio fue mayor, y hubo un grupo control y otro grupo con instrucción. No obstante, consideramos realmente importante preparar a los futuros profesores de Educación Primaria en el tema, pues no poseen las competencias suficientes con respecto a la resolución de problemas combinatorios que sería deseable que tuvieran para su futuro profesional en cuanto a la introducción del tema en sus estudiantes.

4.4. LIMITACIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIONES FUTURAS.

Como se ha mencionado, los problemas seleccionados corresponden a combinaciones sin repetición, escogidos siguiendo los tres tipos de problemas del modelo combinatorio implícito descritos, entre otros autores, por Navarro-Pelayo (1994). Puesto que el objetivo era indagar en el razonamiento combinatorio de una muestra de futuros profesores, consideramos que el propósito ha sido logrado, pero reconocemos que la muestra es intencional así como limitada. El estudio, puede ser replicado a una muestra mayor de futuros profesores de Educación Primaria, así como en estudiantes de últimos cursos de esta etapa educativa y con ello compararlos con los resultados que obtuvieron los futuros profesores de nuestra muestra ante dichos problemas.

Además, podría realizarse estudios comparativos con otras realidades, en mi caso, replicar el mismo estudio con futuros profesores de Educación Primaria en Chile, entre otros países. Además, bajo esta perspectiva, puede ampliarse la selección de problemas que conforman el cuestionario y considerar otras operaciones combinatorias bajo el modelo combinatorio implícito abordado.

Por otro lado, es posible diseñar e implementar material didáctico y talleres de formación al profesorado, donde se pueda desarrollar el tema en profundidad en las diversas facetas que conforman la dimensión didáctica del modelo CDM del profesor, no sólo en su faceta epistémica y cognitiva como se abordó en este trabajo.

A mi juicio, se espera que esta investigación pueda ser de utilidad, para tomar conciencia sobre la importancia del razonamiento combinatorio, y el buscar su desarrollo, principalmente en nuestros estudiantes desde los primeros años de Educación Primaria, mediante situaciones cotidianas, llamativas, entretenidas, e inmersas en la realidad de su propio entorno.

REFERENCIAS

Acevedo, J., y Romero, S. (1992). El desarrollo del razonamiento lógico en matemáticas: correlación y combinatoria. *Suma*, *11*, 42-52.

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales. ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad? En J. A. Fernandes, M. V. Sousa y S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247- 263.

Batanero, C., Godino, J. D, y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

Beuchot, M. (1985). El ars magna de Lulio y el ars combinatoria de Leibniz. *Diánoia. Revista de Filosofía*, *31*(31), 183-194.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Cook, T. D. y Reichardt, C. S. (2000). Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa. Paideia.

Colerus, E. (1973): *Breve historia de las Matemáticas*. Madrid: Doncel.

Chernoff, E. J. y Russell, G. L. (2011). The sample space: One of many ways to partition the set of all possible outcomes. *The Australian Mathematics Teacher*, *67*(2), 24-29.

Chernoff, E. J. y Russell, G. L. (2012). Why order does not matter: an appeal to ignorance. *34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kalamazoo, MI, USA.

Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configutarions combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 37-57.

English, L.D. (1991). Young children´s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics 22*: 451-474.

English, L.D. (1993). Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3): 255-273.

English, L. D. (1999). Assessing for structural understanding in children's combinatorial problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(4), 63-82.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

García de Tomas, J. (2016). *Razonamiento combinatorio en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria*. Universidad de Granada. Tesis de Master.

García, J. (2014). *Resolución de problemas combinatorios en el contexto intercultural: estrategias utilizadas por niños de primaria y estudiantes universitarios. Universidad Intercultural de Guerrero*. Tesis de Master. Universidad Intercultural del Estado de Guerrero, México.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20,* 13-31.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 117-150.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Guirado, J. C., y Cardoso, E. (2007). Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. *Anais do IX Encontro Paranaense de Educação Matemática. Paraná*.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking: From childhood to adolescence.* London: Routledge and Kegan Paul.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education, 3*(1), 111-127.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Lockwood, E., Swinyard, C., y Caughman, J. (2015). Patterns, sets of outcomes, and combinatorial justification: Two students' reinvention of counting formulas. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 27-62.

McGalliard III, W. A. (2012). *Constructing sample space with combinatorial reasoning: A mixed methods study*. Tesis doctoral. The University of North Carolina at Greensboro.

Melusova, J. y Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary students' strategies for solving combinatorial problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, (197), 1703-1709.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *ORDEN ECI/2211/2007, del 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del bachillerato*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Morales, J. A., y Frisancho, S. (2014). Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial. *Schème-Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*, *5*(2), 130-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1991). La combinatoria en los textos de bachillerato. *Investigación en la escuela*, *14*, 123-127.

Pessoa, C. A. y Borba, R. (2010). O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Em Teia| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *1*(1), 1-22.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* London: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1951).

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perpectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Roa, R., Batanero, C., y Godino, J. D. (2001). Dificultad en los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *47*, 33-47.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, *36*, 433-446.

Ruiz, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En M. C. Chamorro (coord.) *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 181-220). Madrid: Ed. Pearson.

Sukoriyanto, S., Nusantara, T., Subanji, S., y Chandra, T. D. (2016). Students' Errors in Solving the Permutation and Combination Problems Based on Problem Solving Steps of Polya. *International Education Studies*, *9*(2), 11.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Zapata, L., Quintero, S. y Morales, S. (2010). La enseñanza de la combinatoria orientada bajo la teoría de las situaciones didácticas. Bogotá: *11 Encuentro Nacional de Matemática Educativa ASOCOLME.*

ANEXOS.

ANEXO 1. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1. DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

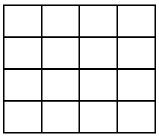
A.1. INTRODUCCIÓN.

Este anexo da a conocer el estudio sobre el lenguaje, estrategias y conflictos semióticos de las respuestas de una muestra de futuros profesores de Educación Primaria al primer problema combinatorio, propuesto en el cuestionario que se describe en la Sección 3.3 de este trabajo.

A.2. ANÁLISIS DEL PROBLEMA 1. DESCRIPCIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

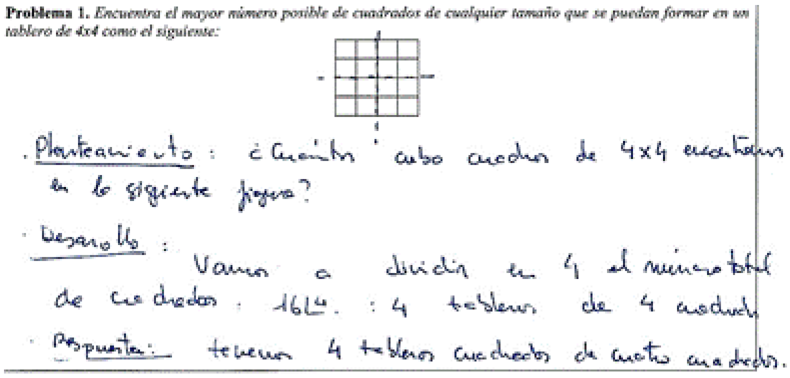
Este primer problema se refiere al recuento del conjunto de cuadrados que se puede formar a partir del tablero donde, además, se ve implicada la capacidad de visualizar todos los posibles cuadrados.

Problema 1. Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se pueda formar en un tablero de 4x4 como el siguiente:



Para resolver el problema se debe tener en cuenta los cuadrados de diversos tamaños que se pueden formar (1x1, 2x2, 3x3 y 4x4). Para solucionar el problema podemos usar la estrategia de fijar una variable, por ejemplo, el número de cuadrados que conforman el cuadrado o la longitud del lado del cuadrado que se forma. También se puede enumerar todos los cuadrados posibles según su ubicación en el tablero, etc. El total de cuadrados que se pueden formar es 30.

Los estudiantes responden en su mayoría de modo incorrecto (54,8%), pues suelen utilizar lenguaje icónico que no les ayuda en la tarea, como por ejemplo DL (Figura A.2.1), quien no fue capaz de enumerar ningún cuadrado. Encontramos el mismo porcentaje de participantes que responden al problema de modo correcto que parcialmente correcto (22,6%). En las respuestas parcialmente correctas, los estudiantes muestran un razonamiento combinatorio adecuado pero no completan el proceso de enumeración sistemática, o no generalizan el proceso que han seguido, por lo que se equivocan en el valor de la respuesta. Por ejemplo, CR (Figura A.2.2) no visualiza correctamente los cuadrados de tamaño 2x2, pues indica que son 7 en lugar de 9. En su estrategia no recorre el cuadrado en horizontal/vertical según la medida del lado. La estrategia gráfica que emplea (ejes perpendiculares que dividen en cuatro partes el tablero) le hace considerar sólo los cuadrados de lado dos sobre el eje de simetría vertical y los cuatro que se disponen en los cuadrantes que dividen los ejes, sin considerar los que se encuentran sobre el eje de simetría horizontal.

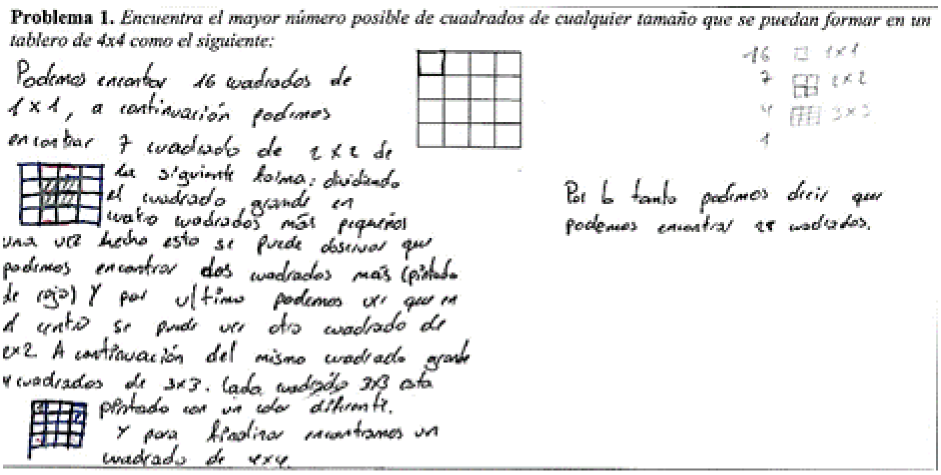

Problema 1. *Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de 4x4 como el siguiente:*

· Planteamiento: ¿Cuántos cubo cuadros de 4x4 encontramos en la siguiente figura?

· Desarrollo: Vamos a dividir en 4 el número total de cuadrados: 16/4. : 4 tableros de 4 cuadrados.

· Respuesta: tenemos 4 tableros cuadrados de cuatro cuadrados.

Figura A.2.1. Respuesta incorrecta del estudiante DL al problema 1.


Problema 1. *Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de 4x4 como el siguiente:*

Podemos encontrar 16 cuadrados de 1x1, a continuación podemos encontrar 7 cuadrados de 2x2 de la siguiente forma: dividiendo el cuadrado grande en cuatro cuadrados más pequeños una vez hecho esto se puede observar que podemos encontrar dos cuadrados más (pintado de rojo) y por último podemos ver que en el centro se puede ver otro cuadrado de 2x2. A continuación del mismo cuadrado grande 4 cuadrados de 3x3. Cada cuadrado 3x3 está pintado con un color diferente. Y para finalizar encontramos un cuadrado de 4x4.

16 1x1
7 2x2
4 3x3
1

Por lo tanto podemos decir que podemos encontrar 28 cuadrados.

Figura A.2.2. Respuesta parcialmente correcta del estudiante CR al problema 1.

Lenguaje. El tipo de lenguaje utilizado por los participantes es principalmente verbal, aunque algunos participantes también utilizan representaciones simbólicas (letras o números) o representación icónicas (dibujos y descomposiciones de la imagen mediante simetría). No se encontraron tipos de respuesta utilizando lenguaje tabular ni gráfico. Describimos a continuación cada uno de ellos, con ejemplos que clarifican las tipologías.

- *Simbólico:* Todos los participantes utilizan la representación numérica y algunos utilizan los símbolos para operar, como en el ejemplo de la Figura A.2.1. Además, encontramos el uso de letras y números para indicar el tipo de cuadrado que se está enumerando como se muestra en la Figura A.2.3, donde SS utiliza la expresión "*N* x *N*" para referirse a la tipología de cuadrados que cuenta.

Figura A.2.3. Uso del lenguaje simbólico del estudiante SS en el problema 1.

- *Icónico:* Los futuros profesores suelen utilizar este lenguaje para referirse al tipo de cuadrados que enumeran, utilizando normalmente colores. Por ejemplo, CR2 (Figura 3.4.2), dibuja cada uno de los cuadrados marcados en el tablero con colores.

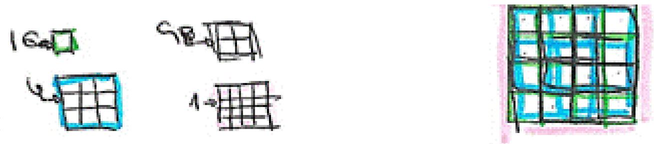


Figura A.2.4. Uso del lenguaje icónico del estudiante CR2 en el problema 1.

- *Verbal:* La mayoría de futuros profesores utilizó este tipo de lenguaje, combinado con otros como el icónicos o simbólico (Ver Figura A.2.2.), donde CR respondió a la tarea en su mayoría con lenguaje verbal.

En la Tabla A.2.1 se muestra el tipo de lenguaje utilizado por los futuros profesores al responder al problema, según su grado de corrección en la respuesta.

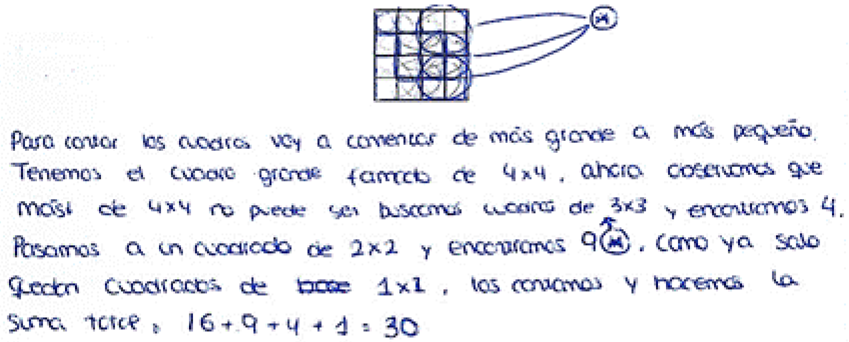
Tabla A.2.1. Frecuencia (porcentaje) del tipo de lenguaje utilizado según grado de corrección en las respuestas de los futuros profesores al problema 1.

Lenguaje	Correcta	Incorrecta	Parcialmente correcta	Total
Simbólico	10(7,8)	15(11,6)	11(8,5)	36(27,9)
Icónico	9(7,0)	19(14,7)	8(6,2)	36(27,9)
Verbal	11(8,5)	33(25,6)	13(10,1)	57(44,2)
Total	14(23,3)	34(51,9)	14(24,8)	129(100)

Observamos que el principal lenguaje utilizado es el verbal, bien de modo único en la respuesta o combinado, seguido del lenguaje simbólico e icónico en igual proporción (27,9%). Además, se suelen combinar dos tipos de lenguaje o más de dos en las respuestas, siendo incorrectas principalmente aquellas respuestas en que se utilizan dos tipos de lenguaje.

Estrategias. En el análisis de las estrategias utilizadas por los futuros profesores para resolver el problema 1, encontramos que se utilizó mayoritariamente la descomposición del problema en partes, a propósito de fijar el valor de la longitud del lado del cuadrado o de los cuadrados considerados en el tablero para formar nuevos cuadrados y dentro de cada caso, visualizar los distintos tipos; aunque también hubo muchos quienes respondieron de modo intuitivo. A continuación se describen las distintas estrategias utilizadas, mostrando ejemplos en cada caso para clarificar cada categoría.

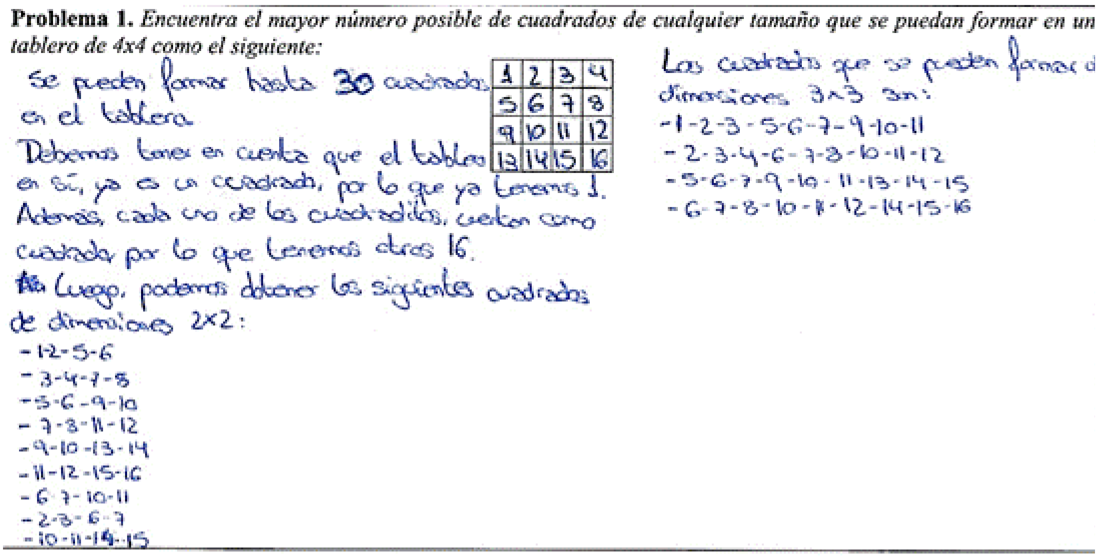
- *Enumeración sistemática:* Este tipo de estrategia conduce a enumerar los diversos cuadrados presentes en el tablero, bien de menor a mayor tamaño, o viceversa. Como ejemplo, MG, a pesar de no dibujar todos los cuadrados en la misma medición de su lado (Figura A.2.5.), utilizó una enumeración sistemática, empezando a contar desde los cuadrados más pequeños hasta los de mayor tamaño y luego generalizando.



Para contar los cuadros voy a comenzar de más grande a más pequeño.
Tenemos el cuadro grande formado de 4x4, ahora observamos que más de 4x4 no puede ser buscamos cuadros de 3x3 y encontramos 4.
Pasamos a un cuadrado de 2x2 y encontramos 9(x). Como ya solo quedan cuadrados de ~~base~~ 1x1, los contamos y hacemos la suma total: 16+9+4+1=30

Figura A.2.5. Uso de una enumeración sistemática por el estudiante MG en el problema 1.

En el siguiente ejemplo se ve más claramente la enumeración realizada por LI (Figura A.2.6), donde se enumera cada posibilidad según los cuadrados de lado uno simbolizados por números que conforman el tablero.



Problema 1. *Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de 4x4 como el siguiente:*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Se pueden formar hasta 30 cuadrados en el tablero.
Debemos tener en cuenta que el tablero en sí, ya es un cuadrado, por lo que ya tenemos 1.
Además, cada uno de los cuadraditos, cuentan como cuadrado por lo que tenemos otros 16.
Luego, podemos obtener los siguientes cuadrados de dimensiones 2x2:
- 1-2-5-6
- 3-4-7-8
- 5-6-9-10
- 7-8-11-12
- 9-10-13-14
- 11-12-15-16
- 6-7-10-11
- 2-3-6-7
- 10-11-14-15

Los cuadrados que se pueden formar de dimensiones 3x3 son:
- 1-2-3-5-6-7-9-10-11
- 2-3-4-6-7-8-10-11-12
- 5-6-7-9-10-11-13-14-15
- 6-7-8-10-11-12-14-15-16

Figura A.2.6. Respuesta de LI con estrategia específica.

Algunos estudiantes trataron de realizar una enumeración sistemática pero cometieron errores o la realizaron de modo incompleto. Por ejemplo, en la Figura A.2.2, se mostró que CR no considera los casos de cuadrados de lado dos sobre el eje de simetría, lo cual le conduce a error.

- *Enumeración no sistemática:* Encontramos futuros profesores que no establecen un orden sistemático al enumerar los tipos de cuadrados y, en su mayoría, les conduce a respuestas parcialmente correctas o incorrectas. Sólo dos estudiantes ofrecen respuestas correctas con esta estrategia, como se mostró en la Figura A.2.3, donde SS, responde correctamente, pero el orden de enumeración de los tipos de cuadrados, según la medida de su lado, es desordenada.

- *Descomposición del problema en partes:* Es la estrategia más utilizada, puesto que se aborda el problema considerando la medida del lado de cada tipo de cuadrado o el número de cuadrados que conforman la figura considerada, tal como se muestra en la Figura A.2.7.

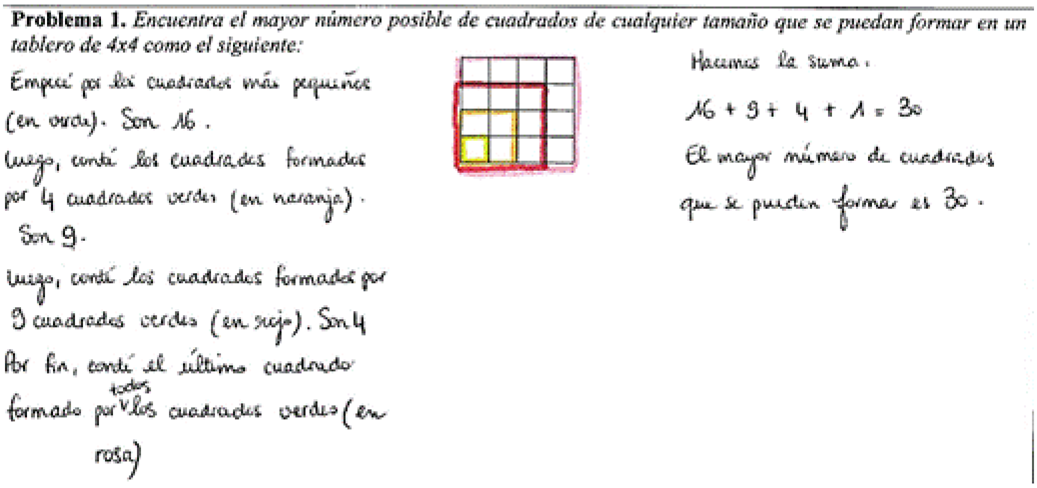


Figura A.2.7. Uso de una descomposición del problema en partes por el estudiante BM en el problema 1.

- *Principio aditivo:* Esta estrategia fue utilizada por todos los participantes, de modo implícito o explícito, puesto que luego de la descomposición del problema en partes, sumaban la cantidad de cuadrados obtenidos, (Ver Figura A.2.7), o al generalizar, se sumaban todos los cardinales de los conjuntos considerados.
- *Principio multiplicativo:* Esta estrategia fue implementada sólo en dos casos, pero de manera incorrecta, y fue utilizada para contabilizar el número de cuadrados que forman la figura cuadriculada, tal como se muestra en el siguiente ejemplo (Figura A.2.8).

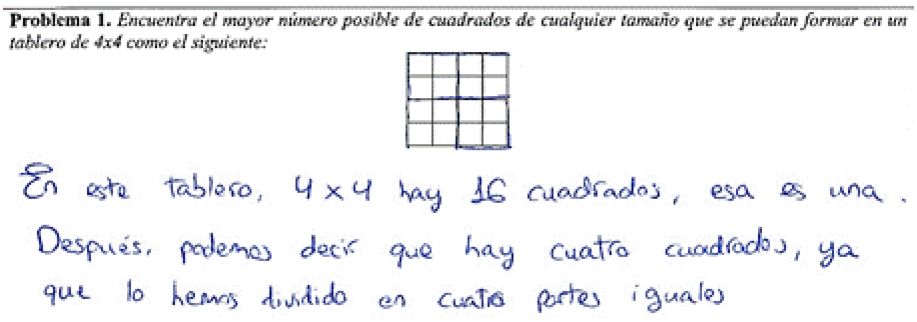
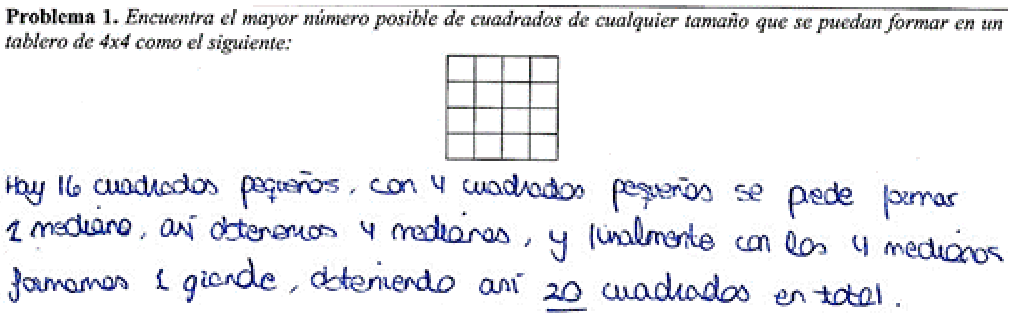


Figura A.2.8. Uso del principio multiplicativo por el estudiante EV en el problema 1.

- *Respuesta intuitiva:* En algunos casos se responde sin mostrar el procedimiento, en la mayoría de los casos de modo incorrecto, lo que consideramos que viene motivado por la intuición como estrategia, tal como se muestra en la Figura A.2.9.



Problema 1. *Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de 4x4 como el siguiente:*

Hay 16 cuadrados pequeños, con 4 cuadrados pequeños se puede formar 1 mediano, así obtenemos 4 medianos, y finalmente con los 4 medianos formamos 1 grande, obteniendo así 20 cuadrados en total.

Figura A.2.9. Uso de una respuesta intuitiva por el estudiante BM en el problema 1.

- *Otras:* Se presentaron casos de estrategias diversas debidas a entender mal el enunciado, como se mostró en la Figura A.2.1.

En la Tabla A.2.2, se muestra la estrategia utilizada en el problema 1 por los futuros profesores, según su grado de corrección en la respuesta.

Tabla A.2.2. Frecuencia (porcentaje) del tipo de estrategias utilizadas, según grado de corrección, en las respuestas de los futuros profesores al problema 1.

Estrategias	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Enumeración sistemática	10(10)	10(10)	4(4)	23(24)
Enumeración no sistemática	2(2)	3(3)	9(9)	14(2)
Descomposición del problema	6(6)	14(14)	8(8)	28(28)
Principio aditivo	3(3)	4(4)	4(4)	11(11)
Principio multiplicativo			2(2)	2(2)
Respuesta intuitiva		1(1)	16(16)	17(17)
Otras			4(4)	4(4)
Total	21(21)	32(32)	47(47	100(100)

Observamos que la principal estrategia empleada es la descomposición del problema en partes (28%), bien aplicada únicamente o combinada con otras; le sigue en uso la estrategia de enumeración sistemática (24%). No obstante, cabe señalar que de la descomposición del problema en partes, la mayoría se concentra en las respuestas parcialmente correctas (14% de respuestas). Las veces que fue utilizada una enumeración sistemática, solo el 10% de respuestas fueron correctas. En contraste, cuando se aplicó la enumeración no sistemática, sorprendentemente hubo respuestas correctas (2% de las respuestas), pero la mayoría de las veces que fue utilizada, no fueron correctas (12% de las respuestas parcialmente correctas o incorrectas). Encontramos también que el uso de la estrategia de respuesta intuitiva resultó incorrecta o parcialmente correcta en todos los casos. Además, del 4% de veces que fue utilizada otro tipo de estrategias, todas fueron incorrectas.

Conflictos semióticos en la resolución de la tarea. Se manifiestan dos tipos de conflictos semióticos en las respuestas analizadas, relativos a los procedimientos y a los conceptos implicados en la tarea. Por una parte, se observa un escaso razonamiento combinatorio en cuanto a la recursividad cuando se trata de establecer una enumeración sistemática como estrategia. No se logra bien porque no se completa bien, porque se realiza de modo no sistemático. Por otra parte, resultó complejo para los futuros profesores considerar que con los cuadrados de lado 1 del tablero (16 en total) se pudieran formar nuevos cuadrados más grandes, por lo que consideramos un conflicto en el concepto de estructura y descomposición de figuras en el campo del sentido geométrico y espacial.