

RAZONAMIENTO SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL EN SITUACIONES DE RIESGO

Carmen Batanero, Juan J. Ortiz, Luis Serrano y Veronica Albanese

Suma, 83, 73-80, 2016

Resumen

El razonamiento sobre probabilidad condicional suele causar mucha confusión, pero es importante en las situaciones de riesgo que encontramos en la vida cotidiana. En este artículo describimos algunas de estas situaciones y los principales sesgos en el razonamiento condicional. Finalizamos sugiriendo algunos recursos didácticos para mejorar la enseñanza de la probabilidad condicional.

Palabras clave: Probabilidad condicional, Sesgos de razonamiento, Situaciones de riesgo, Recursos didácticos.

Abstract

Conditional probability reasoning often causes confusion; however it is important in risk situations that we find in everyday life. In this paper we describe some of these situations and the main risks in conditional probability reasoning. We finally suggest some didactic tools that may help improving the teaching of conditional probability.

Keywords: Conditional probability, Reasoning biases, Risk situations, Didactical resources.

Entre las ideas estocásticas fundamentales propuestas por Heitele (1975), la probabilidad condicional es una de las más relevantes, al ser la base de la estadística bayesiana y permitir modelizar la forma en que aprendemos de la experiencia, al modificar nuestras creencias sobre las situaciones inciertas, cuando adquirimos nueva información.

La comprensión de la probabilidad condicional es fundamental en el estudio de los experimentos compuestos y es la base para la definición de muchos conceptos utilizados en la inferencia estadística, así como en el estudio de la correlación y regresión. Estas y otras razones explican que el tema se incluya en las dos modalidades de matemáticas del 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria y en los cursos 1º y 2º de Bachillerato (MECD, 2015).

La probabilidad condicional aparece con frecuencia en situaciones de la vida diaria, especialmente las relacionadas con la toma de decisión y en contextos de riesgo. La investigación previa nos informa de la existencia de sesgos en el razonamiento con la probabilidad condicional, (Falk, 1986; Díaz y de la Fuente, 2005; Díaz, Batanero y Contreras, 2010). Esto puede afectar a la toma de decisiones adecuadas.

En este trabajo mostramos ejemplos del uso de la probabilidad condicional en situaciones de riesgo. También recordamos algunos sesgos en el razonamiento con la probabilidad condicional y proponemos algunos recursos didácticos para contribuir a la mejora de dicho razonamiento.

Situaciones de riesgo y probabilidad condicional

El estudio didáctico de las situaciones de riesgo cobra actualmente un gran auge, debido al interés de políticos, responsables de salud o seguridad o gestores de empresas de seguros y

financieros, por informar debidamente a los ciudadanos, para ayudarles en la toma de decisiones informadas (Borovcnik, 2015).

Al analizar el concepto de riesgo nos encontramos con diferentes definiciones del mismo. De acuerdo a Sriraman y Lee (2014) una idea primitiva de riesgo aparece en muchas culturas asociada a los juegos de azar, pero no es hasta el final del siglo XV cuando se empieza a cuantificar en relación con el sector financiero, para asegurar las inversiones relacionadas con el comercio marítimo. En la actualidad su estudio está asociado a muchas actividades humanas y es la base de la economía de mercado.

Encontramos también diferentes definiciones: Slovic (2000) describió un riesgo como un suceso o condición incierta que al ocurrir produce un efecto negativo o positivo sobre una persona o grupo. Borovcnik (2015) diferencia entre riesgos personales (que afectan sólo a una persona) o sociales, aunque también indica que en ocasiones (como el caso de una epidemia o la seguridad vial) estos riesgos pueden mezclarse.

Gigerenzer (2003) indicó que se puede asociar a dichos sucesos una probabilidad o frecuencia sobre su ocurrencia pasada o potencial. Dicha probabilidad puede ser frecuencial (información de una larga serie de observaciones del suceso), subjetiva (grado de creencia personal), o basada en la propensión (propiedad física de un objeto o tendencia a comportarse en cierto modo; por ejemplo, regularidad de un dado). Como consecuencia, la percepción de un suceso como riesgo depende de la concepción de probabilidad de la persona.

Una situación de riesgo aparece al contratar una póliza de accidentes. Por ejemplo, al tratar de decidir si conviene tomar una póliza de accidentes a todo riesgo para un coche, no nos importa pagar una cantidad de dinero para tener cobertura, en caso de que se produzca un accidente con un coste elevado. La compañía de seguros calcula el precio de la póliza estimando la probabilidad de diversos tipos de accidentes (con costes variados) a partir de la frecuencia de accidentes similares.

Para simplificar el ejemplo, supongamos que una compañía sólo paga el accidente en caso de siniestro total (donde habría que comprar un nuevo coche, que cuesta 25000 euros). El coste de la póliza es de 1000 euros anuales. En la Tabla 1 mostramos los posibles costes que ha de asumir el propietario del coche en un año dado, dependiendo de si tiene o no un accidente en que el coche quede destruido y si contrata o no el seguro (por supuesto en una situación más real, tendríamos más filas en la Tabla 1, con diferentes tipos posibles de accidentes cubiertos por la póliza y costes asociados).

Tabla 1. Coste que debe asumir el propietario del coche en diferentes situaciones

	Coste que ha de asumir el propietario	
	Contrata el seguro	No lo contrata
No sufre accidentes	1000	0
El coche queda totalmente destruido	1000	25000

En la situación simplificada planteada, ¿qué decisión conviene tomar al propietario del coche? Observamos que la decisión va a depender de la posibilidad de tener el accidente (con destrucción del coche), la cual dependerá de la habilidad del conductor, frecuencia con que conduzca y circunstancias, como estado de las carreteras, volumen del tráfico, velocidad, si conduce bebido, etc. Supongamos que las posibilidades de accidente son 1 de cada 10, entonces el coste esperado para el conductor si no contrata la póliza sería $25000 \times 0.1 + 0 \times 0.9$

= 2500 euros. Si contrata el seguro, el coste esperado es 1000 euros (tenga o no el accidente); por tanto, en términos de esperanza matemática es mejor contratar el seguro.

En el ejemplo, hemos estimado una probabilidad muy alta de accidente; ¿cuál sería la probabilidad a partir de la cual conviene tomar el seguro? Un cálculo sencillo muestra que esta probabilidad sería 1/25 en el ejemplo dado. Si la probabilidad de accidente es menor, no merece la pena contratar el seguro; sin embargo, en general, las personas prefieren no arriesgarse a pesar de las bajas probabilidades; prefieren pagar dinero para tener seguridad. Esta tendencia a evitar el riesgo permite el beneficio obtenido por las compañías de seguro, que operan con muchos propietarios.

Este es uno de los posibles ejemplos que puede usarse en la clase al explicar la probabilidad condicional. Otros ejemplos descritos en Batanero (2006) aparecen en situaciones médicas, psicológicas, legales o incluso educativas. Estas situaciones nos afectan, por lo que es necesaria una buena comprensión del riesgo y de la información probabilística para una toma de decisión correcta. Sin embargo, Gigerenzer y Edwards (2003) sugieren que la percepción incorrecta de los riesgos es frecuente y ocurre al confundir las probabilidades condicionales y simples o bien al confundir los riesgos absolutos y relativos que aparecen en dichas situaciones.

Una de las mayores dificultades, según Borovnick (2015), es interpretar correctamente los riesgos en situaciones en que la probabilidad implicada es muy pequeña. Supongamos, por ejemplo, que el riesgo de sufrir un percance (retraso, pérdida de conexión, pérdida de maleta) en una compañía aérea sea únicamente de 2 en 1 millón, es decir 0,000002. En un solo viaje, la probabilidad de no sufrir el accidente, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,999998$ sería casi despreciable. Pero si la compañía transporta 200.000 viajeros en un periodo, la probabilidad de que ninguno de ellos tenga un accidente sube a $(P(\bar{A}))^{200000} = (0,999998)^{200000} = 0,81873$. Dicho de otro modo, la probabilidad de que entre todos estos viajeros haya al menos un percance sería 0,1812. Si subimos el riesgo inicial a 5 en 1 millón, la probabilidad de tener algún percance entre 200000 pasajeros llega a 0,6321. Si en vez de pasajeros diferentes pensamos en actividades que hacemos con frecuencia alta (por ejemplo tomar el autobús), podremos comprender que no es tan raro esperar pequeños percances, como atrasos, a pesar de la baja probabilidad en cada vez aislada que realizamos la actividad.

Es también difícil interpretar en sentido absoluto riesgos cuya probabilidad se da en términos relativos; es decir, se refieren a una subpoblación (y no a la población total). Gigerenzer y Edwards (2003) describen el siguiente ejemplo: La reducción de muertes por cáncer de pecho en las mujeres que se realizan actualmente la prueba de mamografía a partir de los 50 años es el 25%. ¿Qué significa este 25% y a qué población se refiere este porcentaje? La verdadera interpretación de este dato describe un riesgo relativo (hay 3 muertes por cáncer de pecho de cada 1000 mujeres que realizan el screening frente a 4 de cada 1000 en el grupo que no se somete a la prueba). Esto supone un 25% de reducción de las muertes (la población considerada), lo cual es un riesgo relativo (a pasar o no pasar el screening). Supone 3 muertes de cada 1000 mujeres en el primer grupo frente a 4 de cada 1000 en el segundo; o bien 1 muerte más por cada 1000 mujeres como diferencia. Sin embargo a veces el dato se interpreta como reducción del 25% de muerte en el total de mujeres enfermas o incluso del 25% de muertes en el total de mujeres.

Otro ejemplo de razonamiento incorrecto es cuando tratamos de evaluar los factores potenciales que producen un efecto indeseado; por ejemplo, si queremos evaluar el efecto de una vida sedentaria o activa sobre el sobrepeso. El riesgo se entendería en estos casos como la probabilidad de que un sujeto (persona o sociedad) sufra el efecto en presencia del factor

potencial. Si al efecto sigue en forma inmediata al factor, se podría establecer una relación causal entre el factor y dicho efecto, pero si el efecto es retardado, esta relación es difícil de establecer. Estadísticamente usamos la asociación para establecer relación entre posibles factores y los efectos posibles en situaciones de riesgo (Batanero, Cañadas, Díaz y Gea, 2015); pero como es sabido, correlación no implica causalidad.

Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional

Como hemos indicado, algunas decisiones incorrectas en situaciones de riesgo son debidas a sesgos de razonamiento asociados a la probabilidad condicional, que resumimos a continuación.

Díaz y de la Fuente (2005) sugieren que algunos de estos sesgos se producen al suponer que una relación condicional $P(A/B)$ es de tipo causal, en situaciones en que no es pertinente. Esto ocurre en particular cuando usamos la probabilidad condicional para evaluar relaciones diagnósticas; por ejemplo, cuando B es un síntoma asociado a una posible enfermedad A . Si la persona tiene el síntoma B , entonces es claro que la probabilidad de que la persona sufra la enfermedad $P(A/B)$ es mayor que la probabilidad de que la sufra otra persona cualquiera $P(A)$, pero un síntoma no es una causa, sino una consecuencia de la enfermedad.

La relación de causalidad también se asocia con el orden de ocurrencia de los sucesos (Falk, 1986) y por ello algunos estudiantes tienen problemas para calcular una probabilidad condicional $P(A/B)$ si la condición B sucede después de que haya ocurrido A . Sin embargo, muchas situaciones están condicionadas por un suceso posterior. Por ejemplo, cuando se realiza una prueba de paternidad, si el estudio genético indica una alta probabilidad de que una persona sea el padre biológico de otra (digamos el 99,9%), está claro que la prueba genética en sí no es una causa de la supuesta paternidad sino un indicativo de ella. Además, la prueba es posterior a la paternidad en sí. Igualmente ocurre al valorar una evidencia en un juicio; la evidencia se produce después de que ocurre el delito, pero se usa como condición para emitir un veredicto sobre la posible culpabilidad. En particular, tenemos que invertir el orden temporal de los sucesos siempre que aplicamos el teorema de Bayes, y ello puede explicar la dificultad de resolver problemas que implican este teorema.

Otros alumnos no diferencian bien las probabilidades condicionales $P(A/B)$ y $P(B/A)$, sobre todo cuando se enuncian en lenguaje ordinario (probabilidad de aprobar un examen si se ha estudiado o probabilidad de haber estudiado si se aprobó el examen). Falk (1986) llamó a este error *falacia de la condicional transpuesta* y puso como ejemplos la interpretación del nivel de significación α en un contraste de hipótesis: $\alpha = P(\text{Rechazar una hipótesis} | \text{supuesta cierta})$ se confunde con $P(\text{Hipótesis cierta} | \text{cuando se ha rechazado})$. Al actuar como jurado en un juicio esta confusión puede llevar a confundir la probabilidad de que un culpable lleve a una evidencia (por ejemplo, un cierto grupo sanguíneo) con la probabilidad de que una persona sea culpable por haber hallado la evidencia dada en el escenario (el grupo sanguíneo del acusado). La falacia de la condicional transpuesta puede llevar al médico a recetar un tratamiento en caso innecesario (a veces un tratamiento agresivo) si se confunde la probabilidad de tener una enfermedad, dado un síntoma, con la probabilidad de tener el síntoma, dada la enfermedad.

Finalmente, tenemos dificultades en comprender la idea estadística de independencia; esta idea es importante en inferencia, donde se supone que los elementos de una muestra, además de ser aleatorios son independientes unos de otros..

La definición matemática de la independencia es muy simple: dos sucesos serían independientes si y solo si se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Pero en la vida práctica no

sabemos cuándo la debemos aplicar. Un ejemplo en la vida cotidiana se muestra por la frecuencia con que las personas se abonan a un mismo número de lotería y juegan a él todos los años. Sin embargo, sabemos que los números premiados anteriormente, no se retiran del bombo; por tanto no aumenta la probabilidad de obtener un premio en un número que nunca ha resultado ganador.

Por otro lado ¿Podemos asegurar que las repeticiones de un ensayo son independientes entre sí? ¿Nos gustaría, por ejemplo, pensar que el examen de cada alumno es una repetición independiente de un experimento? Sin embargo, en este ejemplo y en otros, como votaciones, accidentes, etc. utilizamos la distribución binomial que asume la independencia de ensayo. Vemos acá la diferencia entre el modelo matemático (la independencia) y la realidad, que siempre es más compleja que el modelo.

Igualmente si sabemos que un matrimonio tiene cuatro hijos, esperamos que tengan exactamente dos niños y dos niñas; pero en realidad la probabilidad nos enseña que es más fácil tener tres hermanos del mismo género. Si X es el número de varones, la probabilidad de tener exactamente dos niños (y, por tanto, otras dos niñas es) $P(X=2) = 0,375$; mientras la probabilidad de tener tres del mismo género sería: $P(X=1) + P(X=3) = 0,25 + 0,25 = 0,5$.

Recursos didácticos en la enseñanza de la probabilidad condicional

Hemos visto que, en las situaciones de riesgo, se confunden probabilidades condicionales (asociadas a estos riesgos) con probabilidades simples (Gigerenzer y Edwards, 2003). Por suerte, la didáctica de la probabilidad proporciona hoy diferentes recursos, que podemos usar en el aula, para ayudar a los estudiantes a mejorar su razonamiento en probabilidad condicional. Hemos descrito algunos de estos recursos en Díaz, Batanero y Contreras (2010).

Frecuencias absolutas y tablas de contingencia

Un primer recurso didáctico consiste en transformar las probabilidades condicionales en frecuencias absolutas y representarlas en una tabla de contingencia que visualice y simplifique los cálculos. Gigerenzer (2002) sugiere que nuestra mente está mejor equipada para razonar con frecuencias absolutas (que llama frecuencias naturales) que con probabilidades o porcentajes.

Supongamos, por ejemplo, una situación de diagnóstico médico, donde nos interesa una cierta enfermedad A . Los posibles pacientes pasan una cierta prueba, que se caracteriza por su sensibilidad (probabilidad de que la prueba sea positiva si se tiene la enfermedad, $P(+|A)$) y especificidad (probabilidad de que sea negativa si no se tiene, $P(-|\bar{A})$). Supongamos los siguientes valores: $P(+|A) = 0,99$ y $P(-|\bar{A}) = 0,95$. ¿Cuál será la probabilidad de que una persona en la que la prueba fue positiva tenga la enfermedad dada, $P(A|+)$ en una población donde la prevalencia de la enfermedad $P(A) = 0,001$?

Un método de simplificar los cálculos es pensar que ocurriría en una muestra de 100000 personas a las que pasamos la prueba. Supongamos que las personas no tienen síntomas (es decir, estamos en una situación de revisión masiva de la población o screening). En la Tabla 2 hemos realizado los cálculos; comenzamos calculando el número de enfermos (100) en la población, de los cuáles 99 obtendrán un resultado positivo y 1 un resultado negativo. Nos quedan 99900 personas sanas, de las cuales el 95% (94905) tendrán un resultado negativo; fácilmente completamos las celdas que faltan y hemos transformado todas las probabilidades en frecuencias.

El cálculo de la probabilidad $P(+|A)$ es ahora sencillo, pues podemos simplemente aplicar la regla de Laplace dividiendo el número de enfermos en la fila de personas con resultado positivo por el número total de resultados positivos: $P(+|A) = \frac{99}{5094} = 0,0194$; un resultado que sorprende a muchos. La probabilidad de estar sano, aunque la prueba en un screening sea positiva, es muy alta; en el ejemplo, el complementario del anterior, es decir, 0.9806. La explicación es que, aunque la prueba sea muy fiable, son muchas las personas sanas que se someten a ella y, por tanto, hay muchos falsos positivos.

Tabla 2. Número de personas sanas y enfermas en una muestra de 100000 personas según el resultado de una prueba (prevalencia= 0,001)

Resultado de la prueba	Estado de salud		Total
	Enfermo	Sano	
Positivo	99	4.995	5.094
Negativo	1	94.905	94.906
Total	100	99.900	100.000

Diagramas en árbol y visualizaciones

La traducción de los datos de la Tabla 2 a un diagrama en árbol es aún más efectiva, pues nos ayuda a pensar en la secuencia temporal de los sucesos y separa claramente las dos subpoblaciones en estudio. En la Figura 1 trabajamos directamente con frecuencias absolutas y llegamos a la misma conclusión que con la tabla, pero de un modo más visual. En realidad cualquiera de los dos métodos nos ha hecho transformar un problema típico de aplicación del teorema de Bayes en un problema de cálculo de probabilidades simples (regla de Laplace).

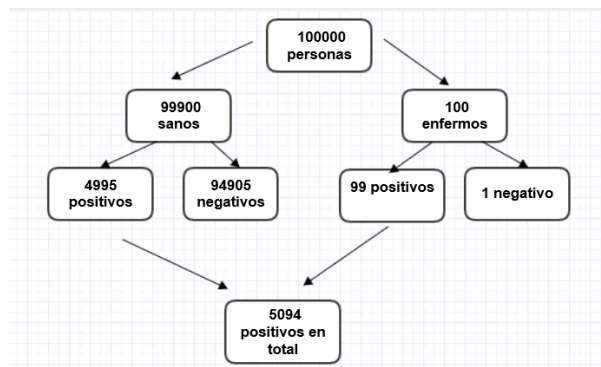


Figura 1. Visualización del problema de prueba médica mediante diagrama en árbol

Si se añaden iconos relacionados con el contexto, se mejora la comprensión, sobre todo en el caso de comparar diferentes riesgos relativos. Mostramos en la Figura 2 una adaptación de la visualización propuesta por Spiegelhalter (2015) de los riesgos relativos en el ejemplo sobre screening de cáncer de pecho. A partir de esta visualización es sencillo pasar de riesgos relativos (1 muerte menos entre todas las muertes producidas en 200 mujeres que pasan el screening, es decir un riesgo relativo del 25% a riesgos absolutos (1 muerte menos entre 200 mujeres) o relativos a otra subpoblación 1 muerte menos entre 15 mujeres afectadas por cáncer.

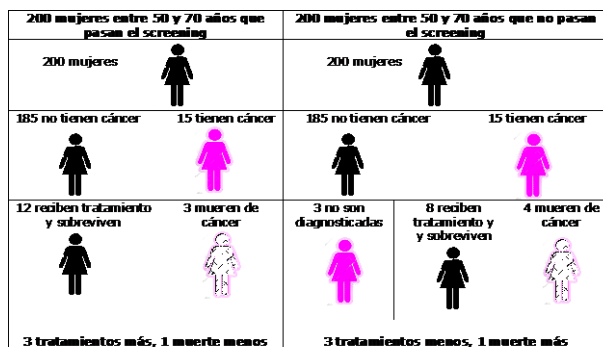


Figura 2. Visualización riesgos relativos

Simulaciones y programas de cálculo

Otra ayuda importante son los numerosos programas de cálculo y applets disponibles en Internet que nos permiten introducir una metodología exploratoria y activa en el aula, reduciendo los cálculos fastidiosos. Tienen un papel importante en los casos en que las soluciones de probabilidad chocan con nuestra intuición. Por ejemplo, para comprobar si es más probable tener el número de niños de igual género entre cuatro hijos (o resolver cualquier otro problema sobre la distribución binomial), podemos usar el applet sobre distribución binomial, presentado en la Figura 2 (<http://www.mickybullock.com/blog/2011/06/interactive-dynamic-binomial-distribution-applet/>). Otra alternativa sería utilizar el simulador de lanzamiento de cuatro monedas del laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria (ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/), que es un experimento equivalente al propuesto (Figura 3).

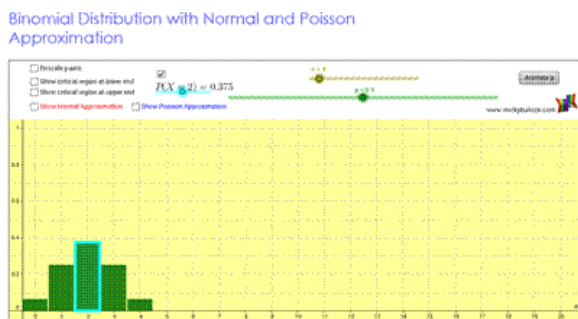


Figura 3. Cálculo de la distribución binomial con GeoGebra

Aunque a primera vista el uso de monedas para simular el experimento pueda parecer más intuitivo, hay que recordar que en toda simulación se lleva a cabo una actividad de modelización (Chaput, Girard y Henry, 2011). Por ello el profesor debe poner atención al aprendizaje de los diferentes pasos en la modelización. En este sentido el recurso citado es muy útil ya que permite una variedad de simulaciones con diferente material, donde el alumno puede analizar la equivalencia de diferentes experimentos (Figura 4).

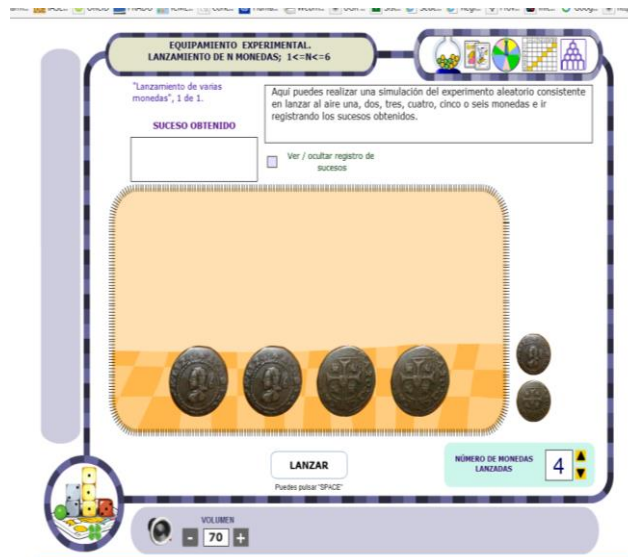


Figura 4. Simulación del problema sobre número de niños y niñas con monedas virtuales

Consideraciones finales

Las reflexiones anteriores nos llevan a concluir la importancia de reforzar la enseñanza de la probabilidad condicional y conectarla con contextos que el estudiante experimenta en su vida cotidiana.

Este puede comprender la importancia de saber interpretar correctamente un diagnóstico o tomar una decisión sobre un posible tratamiento; comprende que cuando se acude a una consulta médica, el diagnóstico depende de los diferentes síntomas, estilo de vida del paciente, edad y otros factores. Estudios sobre el posible efecto de riesgos como el fumar, tomar drogas o estar en sobrepeso sobre la salud se pueden utilizar para motivar el estudio de la probabilidad, a la vez que contribuir a la educación para la salud.

Otros contextos cotidianos engloban desde el pronóstico del tiempo, resultados de partidos o votaciones, calificaciones en exámenes, veredictos en juicios, o cambio climático. No tenemos excusa para seguir repitiendo únicamente problemas sobre juegos de azar o, lo que es peor, problemas sin ningún contexto, en que la finalidad es puramente adquirir una erudición matemática.

Como indica Borovcnik (2015) las situaciones de riesgo pueden enriquecer la enseñanza de la probabilidad, pero aún necesitamos encontrar caminos para introducirla en las aulas y ayudar a los estudiantes a mejorar su percepción del riesgo y la forma de afrontarlo.

Algunos investigadores, como Sánchez y Orta (2015) han realizado experiencias docentes, utilizando estos contextos y evaluando el nivel de razonamiento de los estudiantes y su evolución en las experiencias. Sus resultados son alentadores y nos indican la posibilidad de utilizar estas situaciones para mejorar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Esperemos que otros profesores e investigadores contribuyan en el diseño de este tipo de tareas y su incorporación en el aula.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

- BATANERO, C. (2006), << Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo>>. *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales.
- BATANERO, C., CAÑADAS, G. R., DÍAZ, C. y GEA, M. M. (2015), <<Psychology students' perception of potential risk factors in 2-way tables>>, *The Mathematics Enthusiast*, nº. 12(1 & 2), 347-363.
- BOROVNIK, M. (2015), <<Risk and decision making: The "logic" of probability>>, *The Mathematics Enthusiast*, vol. 12(1), 113-139.
- CHAPUT, B., GIRARD, J. C., y HENRY, M. (2011), <<Frequentist approach: modelling and simulation in statistics and probability teaching>>. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 85-95). New York: Springer.
- DÍAZ, C., BATANERO, C. y CONTRERAS, J. M. (2010), <<Teaching independence and conditional probability>>, *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, nº. 26 (2), 149-162.
- DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. (2005), <<Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística>>, *Epsilon*, nº. 59, 245-260.
- FALK, R. (1986), <<Conditional probabilities: insights and difficulties>>, En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, International Statistical Institute, Victoria, Canada, 292–297.
- GIGERENZER, G. (2002), <<Calculated risks: How to know when numbers deceive you>>, Simon & Schuster, New York.
- GIGERENZER, G. (2003), <<Reckoning with risk: learning to live with uncertainty>>, Penguin, Londres.
- GIGERENZER, G. Y EDWARDS, A. (2003), <<Simple tools for understanding risks: from innumeracy to insights>>, *British Medical Journal*, nº. 327, 741-744.
- HEITELE, D. (1975), <<An epistemological view on fundamental stochastic ideas>>, *Educational Studies in Mathematics*, nº. 6, 187-205.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*.
- SLOVIC, P. E. (2000), <<The perception of risk>>, Earthscan Publications.
- SANCHEZ, E. y ORTA, A. (2015), <<Levels of reasoning of middle school students about data dispersion in risk contexts>>, *The Mathematics Enthusiast*, nº. 12 (1), 275-289.
- SRIRAMAN, B. y LEE, K.H. (2014), <<The humanistic dimensions of probability>>. En E.J. Chernoff and B. Sriraman (Eds) *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (pp. 117-119). Springer Science and Business, Berlin/Heidelberg
- SPIEGELHARTER, D. (2015), <<A visualisation of the information in NHS Breast Cancer Screening leaflet>>, <understandinguncertainty.org/visualisation-information-nhs-breast-cancer-screening-leaflet> [acceso marzo 2016].