INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

*M*ARÍA *M*AGDALENA
*G*EA
*S*ERRANO

María Magdalena Gea Serrano

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN
CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

ISBN: 978-84-695-8840-6

Depósito legal: GR 1991-2013

Edición: Gea Serrano, María Magdalena

Diseño: María Magdalena Gea Serrano

Esta obra se realiza en el marco del proyecto: EDU2010-14947 (MICINN-FEDER), con la colaboración de la beca BES-2011-044684 (MICINN-FEDER), dentro del Grupo de investigación *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística* de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM-126).

INDICE

		Pág.
INTRODUCCIÓN		1
CAPÍTULO 1. LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA		
1.1.	Introducción	3
1.2.	La Didáctica de la Matemática como disciplina científica	4
1.3.	Génesis de un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática	11
CAPÍTULO 2. EL ANÁLISIS ONTOLÓGICO-SEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA		
2.1.	Introducción	15
2.2.	Objeto matemático, práctica y significado	16
2.3.	Componentes de los sistemas de prácticas	18
2.4.	Facetas duales del conocimiento matemático	19
	4.3.3. Faceta institucional y personal	20
	4.3.4. Faceta ostensiva y no ostensiva	22
	4.3.5. Faceta extensiva e intensiva	23
	4.3.6. Faceta unitaria y sistémica	23
	4.3.7. Faceta expresión y contenido	23
2.5.	La instrucción matemática	25
	2.5.1. Las trayectorias didácticas	25
	2.5.2. Configuraciones didácticas	29
	2.5.3. Idoneidad didáctica	30
	2.5.4. Dimensión normativa	32
2.6.	Análisis y reflexión guiada de la práctica docente	36
	2.6.1. Guías para el análisis y la reflexión didáctica	38
2.7.	El enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática como herramienta de investigación	39
CAPÍTULO 3. LA ESTADÍSTICA, OBJETO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA		
3.1.	Introducción	41
3.2.	La estadística en la enseñanza de las matemáticas	43
3.3.	Enseñanza de los contenidos estadísticos: correlación y regresión	45
	3.3.1. Origen de las nociones de correlación y regresión	46
	3.3.2. La correlación y regresión, útiles en el método estadístico	50
	3.3.3. La correlación y regresión en el sistema educativo andaluz	52
CAPÍTULO 4. FUNDAMENTOS DE INVESTIGACIÓN DE LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN		
4.1.	Introducción	55
4.2.	Razonamiento covariacional	55
	4.2.1. Origen de las nociones de correlación y regresión	56
	4.2.2. Marco de investigación del razonamiento covariacional	58
4.3.	Las nociones de correlación y regresión en el marco del razonamiento covariacional	61
	4.3.1. Estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones	64
	4.3.2. Experiencias de aula	68
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES		83
REFERENCIAS		85

INTRODUCCIÓN

Explicar, controlar y predecir los acontecimientos que se suceden en nuestro día a día depende, en un ni vel fundamental, de habilidades y destrezas para detectar asociaciones entre las variables implicadas. Así es que, disciplinas como la Psicología, Sociología y la Didáctica Estadística, entre otras, se interesen por estos procesos de razonamiento, y proporcionen líneas de investigación de gran dedicación, que aportan conocimiento específico sobre este tema. En todas ellas se puede advertir la dificultad intrínseca del ser humano en la emisión de juicios de asociación correctos. En este sentido, las nociones estadísticas de correlación y regresión resultan de gran ayuda en cuanto a discernir si dos variables se relacionan, con qué intensidad o en qué sentido lo hacen, e incluso predecir, cuando sea posible.

El presente trabajo se refiere a las nociones de correlación y regresión, y nace con el propósito de aunar resultados científicos relevantes sobre su enseñanza y aprendizaje. Se trata de aportar una fundamentación teórica a quien desee adentrarse en este maravilloso y apasionante mundo de la investigación sobre estas nociones. Todo ello servirá además, para motivar su razón de ser. Por ello, se parte de los orígenes de la Didáctica de la Matemática, de la necesidad de considerar la Estadística como ciencia necesaria para nuestra vida en sociedad, y con ello, situamos a la Estadística como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. De este modo, los contenidos se distribuyen en cinco capítulos que, desde lo general a lo particular, desarrollan el objetivo que se pretende.

El primer capítulo muestra la presencia de la Matemática en el sistema educativo, como área (Educación Primaria) o materia (Educación Secundaria Obligatoria y Postobligatoria) fundamental para el desarrollo de las capacidades cognitivas de nuestro alumnado, particularizando en la Comunidad Autónoma de Andalucía; y se describen las principales concepciones desarrolladas sobre la Didáctica de la Matemática, así como algunas nociones teóricas relevantes en su construcción, dando paso a describir la génesis del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

En el segundo capítulo se detallan los principios que sustentan el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico, y se describen sus componentes, constructos, interpretaciones, etc. que finaliza aportando unas reflexiones sobre la utilidad que desempeña su uso en la investigación, como medio y sustento para la Didáctica de la Matemática.

Este recorrido teórico aportará al lector la base necesaria para abordar los siguientes capítulos con un mayor aprovechamiento, sobre todo respecto a las preguntas de investigación que se puedan plantear.

A continuación, en el tercer capítulo se presenta a la Estadística como ciencia necesaria en nuestra vida en sociedad, se describe brevemente la situación actual de la Didáctica de la Estadística como campo científico de investigación, y se centra la atención en las nociones de correlación y regresión: su origen, su utilidad y su ubicación en el sistema educativo, tanto a nivel nacional como autonómico de Andalucía.

Todo ello dará paso al cuarto capítulo, en que se resumen los resultados científicos más destacados sobre la enseñanza y aprendizaje de las nociones de correlación y regresión en las investigaciones analizadas. Dado que el razonamiento covariacional es una conducta inherente a todo ser vivo, se muestran las dificultades que el ser humano muestra en su toma de decisiones y emisión de juicios covariacionales. Con la consideración de que el estudio covariacional se encuentra subdividido en diferentes tareas, se muestran las diferentes estrategias que son empleadas en la consecución de éstas. Son descritas, además, diferentes experiencias de aula de gran interés para una posterior investigación más profunda.

Finalmente, se presentan unas conclusiones de tipo general, en el capítulo cinco, a modo de reflexión para el lector, con la idea de generar cuestiones de interés que despierten su inquietud en esta temática.

"… el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber" (Chevallard, 1991, p.74).

CAPÍTULO 1.

LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

1.1. INTRODUCCIÓN

El compromiso social de cualquier país de extender la educación a toda la población escolar, plantea el reto de alcanzar una enseñanza innovadora y eminentemente marcada por el futuro más inmediato en que nos encontremos. Alcanzar un aprendizaje significativo, útil para la vida en sociedad, en contra de una finalidad exclusivamente propedéutica, hace plantearnos cuestiones sobre lo que se enseña, para qué se enseña y cómo se enseña.

Las leyes y normativas que regulan el sistema educativo español, y por ende, la regulación de las competencias educativas de las respectivas comunidades autónomas, nos manifiestan la preocupación por "*garantizar el ejercicio de la ciudadanía democrática, responsable, libre y crítica, que resulta indispensable para la constitución de sociedades avanzadas, dinámicas y justas."*(ME, 2006, p.17158). Por ese motivo, se plantea la educación como "*la mayor riqueza y el principal recurso de un país y de sus ciudadanos*" (ME, 2006, p.17158), enfocado desde una perspectiva que aporte un modo de aprendizaje permanente, que se desarrolle a lo largo de toda la vida.

Uno de los tres principios fundamentales recogidos en la Ley Orgánica de Educación (ME, 2006) que regula en territorio nacional consiste en proporcionar una educación de calidad a todos los ciudadanos y ciudadanas, además de permitirles desarrollar, en lo posible, todas sus capacidades (intelectuales, culturales y emocionales) sea cual sea el nivel del sistema educativo en que nos encontremos. Para la consecución de los objetivos educativos pretendidos, son delimitadas áreas (Educación Primaria) o materias (Educación Secundaria Obligatoria y Postobligatoria), que contribuyen al desarrollo de competencias en nuestro alumnado, con objeto de propiciar su realización y desarrollo personal. Una de estas materias en que se desarrolla el currículo es la Matemática.

La enseñanza de las Matemáticas, se encuentra presente en el currículo de cada etapa educativa y cabe citar su relevancia en los primeros cursos de la enseñanza básica, que comprende la educación primaria y secundaria obligatoria (10 cursos) donde se indica que:

> […] *se aprende matemáticas porque son útiles e incluso imprescindibles para la vida cotidiana y para el desarrollo de actividades profesionales y de todo tipo; porque nos ayudan a comprender la realidad que nos rodea; y también, porque su aprendizaje contribuye a la formación intelectual general potenciando las capacidades cognitivas de niños y niñas*. (Consejería de Educación, 2007a, p.18).

El dominio de los conocimientos y destrezas matemáticos se hace cada vez más necesario, principalmente porque la sociedad actual se encuentra marcada por continuos cambios donde los ciudadanos deben encontrarse preparados para su adaptación. Disponer de una "*mayor autonomía para afrontar los cambios que se producirán en un futuro más o menos inmediato*" (Consejería de Educación, 2007b, p.51), es, en los distintos ámbitos profesionales, de gran utilidad. Es por ello, que en la normativa que regula las diferentes etapas educativas, se haga presente la alusión a la necesidad de desarrollar en nuestro alumnado la capacidad de aprendizaje autónomo. Como señala la Ley de Educación de Andalucía en referencia a la enseñanza del Bachillerato: "*Las actividades educativas deberán favorecer la capacidad del alumnado para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para aplicar métodos de investigación apropiados.*" (Consejería de Educación, 2007c, p.17)

Desde esta perspectiva, las concreciones curriculares para la enseñanza de la Matemática en bachillerato en España señalan la necesidad de potenciar la "*capacidad de búsqueda selectiva e inteligente de la información y extraer de ella sus aspectos más relevantes, pero supone además saber dar sentido a esa búsqueda.*"(MEC, 2007b, p.45474). Convertir la sociedad de la información en sociedad del conocimiento es, en los distintos ámbitos profesionales, de gran utilidad, así se indica en las concreciones curriculares de la educación secundaria obligatoria que: "*La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación*" (MEC, 2007a, p.750).

La importancia de la enseñanza de las Matemáticas es evidente, pero la apuesta por una educación de calidad, no está exenta de dificultades, como por ejemplo las elevadas tasas de terminación de la educación básica sin titulación ó el abandono temprano de los estudios. Para ello, reconocer la complejidad del conocimiento, y en nuestro caso, del conocimiento matemático, ayudará a concienciar de la dificultad de alcanzar una competencia y comprensión eficientes en nuestros estudiantes.

Para ello, la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas comienza desde una investigación científica propia, que proporcione conocimiento sobre los fenómenos que se suceden en el aula.

A continuación presentamos brevemente algunas concepciones que dan origen a la Didáctica de la Matemática como ciencia.

1.2. DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

La investigación sobre la cognición matemática ha sido y es un tema de interés y preocupación para diversas disciplinas como la Filosofía, Psicología, Pedagogía, Sociología, Antropología, Semiótica, etc. Pero ha de hacerse notar, el papel que juega la especificidad del conocimiento matemático implicado en el análisis pormenorizado de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje.

Los profesores, en cualquier etapa educativa, dada su experiencia y reflexión en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje, "*ponen en funcionamiento, casi sin pretenderlo de modo implícito, una serie compleja de ideas sobre qué significa aprender* *matemáticas y cómo pueden ayudar a sus alumnos en este proceso*" (Ruiz Higueras, 2005, p.2). En este sentido, disponer de un modelo teórico facilitará el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje, aportando herramientas necesarias para identificar y explicar los fenómenos que se suceden en el aula.

Los modelos teóricos que sirven de referencia para interpretar el comportamiento de los alumnos y del profesor en cuanto al saber matemático, permitirán abordar una cuestión fundamental "*¿Qué es "saber matemáticas"?*" (Ruiz Higueras, 2005, p. 10).

La necesidad de construir un área de conocimiento que permita explicar y servir de fundamento a la comunicación y adquisición de los contenidos matemáticos, instiga a una comunidad de investigadores, en la segunda mitad del s. XX, a cimentar las bases teóricas de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. Investigadores, que desde campos muy diversos (Matemáticas, Psicología, Sociología, Formación de profesores, Antropología, etc.) desarrollan programas de investigación mediante diferentes concepciones sobre la Didáctica de la Matemática. Estas concepciones se desarrollan en un continuo, que va desde una investigación puramente teórica, sin aplicabilidad y desarrollo de tipo tecnológico, hasta una investigación con enfoque práctico donde se llegue a elaborar incluso materiales para la instrucción (Godino, 2010). Describimos a continuación, los principios generales de las principales concepciones desarrolladas sobre la Didáctica de la Matemática.

Una primera concepción de la Didáctica de la Matemática es la referida con el calificativo de *teórica* y sustenta su campo de investigación en otras disciplinas clásicas como la Psicología, Sociología, Semiótica, Epistemología, Lingüística, etc. Los problemas a los que se da respuesta, vienen determinados por la ciencia desde la que se contempla el proceso de enseñanza y aprendizaje y en general, su interés radica en describir y explicar la evolución del alumno en cuanto al conocimiento, así como pretender describir leyes de carácter general que expliquen el funcionamiento del proceso de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2010).

La concepción *práctica* o *técnica* de la Didáctica de la Matemática gira en torno a la planificación de la enseñanza (currícula, medios de evaluación, materiales, etc.), a la toma de decisiones en el aula en momentos específicos e incluso medios para la formación de profesores.

Por último, y no por ello menos importante, se encuentra la concepción de la Didáctica de la Matemática en la que se sitúa la especificidad del saber matemático como una premisa fundamental en cuanto a la construcción de una teoría propia de investigación. Esta concepción se construye, esencialmente, con el esfuerzo de la comunidad de investigadores que constituye la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática. Con el desarrollo de nociones teóricas y métodos de investigación específicos (postura integradora en gran medida de métodos cuantitativos y cualitativos), se da soporte a un programa de investigación que no depende del desarrollo de otros campos científicos (Godino, 2010).

Presentamos a continuación algunas de las nociones teóricas más relevantes desarrolladas por los didactas franceses.

Sistema Didáctico

El estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje del saber matemático debe ser concebido desde un enfoque sistémico, cuya base o esquema de investigación se fundamente en la noción de *sistema didáctico:*

> *El didacta de las matemáticas se interesa en el juego que se realiza -tal como lo puede observar, y luego reconstruir, en nuestras clases concretas- entre un docente, los alumnos y un saber matemático. Tres lugares, pues: es el sistema didáctico. Una relación ternaria: es la relación didáctica.* (Chevallard, 1991, p.15).

Como indica Ruiz Higueras (2003), el hecho de situarnos en un contexto escolar, hace que el aprendizaje del alumno se someta a restricciones específicas que se son específicas y difieren de otros espacios de aprendizaje como la familia o la sociedad. La autora señala dos restricciones como son el tiempo determinado para la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos y la epistemología asociada a e stos. Luego, el sistema didáctico no es efecto de la voluntad del docente, ya que se encuentra sujeto a las interacciones que se suceden entre sus tres elementos/polos y el medio en que se circunscribe.

Chevallard invita a en tender el sistema didáctico como un sistema abierto, "*no se comprende lo que ocurre en el interior del sistema didáctico si no se toma en cuenta su exterior. Su supervivencia supone su compatibilización con su medio.*" (Chevallard, 1991, p.17). Surge así la noción de *noosfera*, como respuesta a la exigencia que el proyecto social de enseñanza y aprendizaje impone al *saber a enseñar* (esta noción serán desarrollada más adelante). Esto es, el entorno más inmediato del sistema didáctico lo constituye el *sistema de enseñanza*, "*que reúne el conjunto de sistemas didácticos y tiene a su lado un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico y que intervienen en él en diversos niveles*" (Chevallard, 1991, p.27). Este sistema de enseñanza, posee a su vez un entorno que Chevallard denomina la sociedad "laica", donde se destacan a los padres, académicos matemáticos, y la instancia política en competencia educativa. De algún modo, el saber tratará de compatibilizar el funcionamiento del sistema de enseñanza y su entorno, entre la sociedad y su escuela como veremos en el desarrollo de la noción de transposición didáctica: "*la noosfera opta prioritariamente por un reequilibrio por medio de una manipulación del saber*" (Chevallard, 1991, p.36).

La noosfera alberga los conflictos entre el sistema de enseñanza y el entorno (véase Figura 1), manteniendo en lo posible la autonomía del funcionamiento didáctico. (Chevallard, 1991).

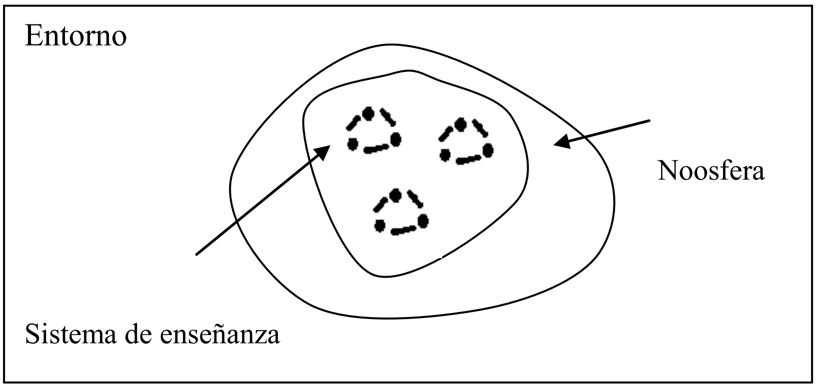

Figura 1. Entorno del sistema didáctico. (Chevallard, 1991, p. 28)

De este modo, "*la didáctica de las matemáticas va a modelizar y estudiar las interacciones en los tres subsistemas: profesor-alumno, alumno-saber, profesor-saber*" (Chamorro, 2003a, p.72)

Teoría de Situaciones Didácticas

Para describir el funcionamiento del sistema didáctico y del sistema de enseñanza en general, son construidos conceptos propios así como teorías con una visión propia sobre el aprendizaje matemático. Este es el caso de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) abordada por Brousseau (1988).

En la TSD, el problema de investigación se establece desde el propio saber matemático, estudiando las condiciones mediante las cuales el individuo construye el conocimiento. Controlar estas condiciones permitirá optimizarlas y reproducirlas en situaciones escolares.

"*Saber matemáticas, no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, sabemos bien que hacer matemáticas implica ocuparse de los problemas*" (Brousseau, 1986, p.37) . Por tanto, el alumno aprende matemáticas haciendo matemáticas, y junto a este marcado sentido constructivista, se ha de considerar, como objeto de investigación en sí mismo, la importancia que presenta la dimensión situacional: la situación, el contexto, la cultura, y las conductas cognitivas de los alumnos. De este modo, el objeto matemático tiene una doble utilidad: por un lado, el alumno construye el conocimiento por la interacción que éste ejerce con el objeto y por otro lado, el objeto define la situación-problema además de determinar la gestión que el profesor desempeñe sobre dicha interacción alumno – situación-problema.

El *aprendizaje por adaptación al medio* implica rupturas cognitivas en el alumno, que provocan una evolución en sus *concepciones* por lo que el error es, pues, necesario para producir desequilibrio entre el conocimiento previo del alumno y el *saber a enseñar*. Brousseau define el error del siguiente modo:

> […] *el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les atribuye. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre o el azar, sino de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos*" (Brousseau, 1997, p. 82)

De aquí emerge la noción de *obstáculo* construida por Brousseau (1983), entendido como tal, a todo error constante y persistente que manifiesta el alumno en la actividad matemática, aunque sea de modo transitorio. El conocimiento que posee el alumno se revela, en la resolución de la tarea, insuficiente o inadecuado pero aún así, resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce a favor de establecer un conocimiento más adecuado.

Se presentan, atendiendo a su origen, tres tipos de obstáculos: *epistemológico* (referido a la epistemología del propio objeto matemático, suelen aparecer en la historia y evolución del objeto matemático en cuestión); *didáctico* (debido a algunos modos de enseñanza que se desempeña en el aula referida al objeto matemático) y *ontogénico* (son los que sobrevienen de las limitaciones - neuropsicológicas, entre otras- del sujeto en un momento de su desarrollo) (Brousseau, 1983).

La construcción del conocimiento es responsabilidad del alumno y la solución al problema que éste plantee, requiere de estados transitorios de equilibrio y desequilibrio (desde una perspectiva piagetiana) apoyados en los procesos de *asimilación* (que permiten al sujeto integrar la información que el medio aporta a los conocimientos que ya posee) y *acomodación* (proceso que obliga al sujeto a transformar sus conocimientos dada la evidencia de su utilidad). Surge así, desde una perspectiva antropológica, la problemática de estudio de la relación que existe o puede ser creada entre el alumno, el saber matemático que se enseña y la institución a la que es referido. Desde esta tripleta, Chevallard (1991) plantea la noción de *transposición didáctica*, que se encuentra sujeta al término institución. Entendiendo por institución: el conjunto de personas que comparten una misma problemática y que consecuentemente llevarán a la práctica reglas y modos de resolución homogéneos, socialmente aceptados.

Transposición Didáctica

Como apuntábamos en el desarrollo de la noción de sistema didáctico, el saber matemático (conjunto de resultados admitidos como verdaderos por la comunidad científica de referencia) o *saber sabio*, se encuentra sometido a un proyecto social de enseñanza y aprendizaje que nace de la noosfera y que determina qué parte de las matemáticas serán enseñadas de forma efectiva en un determinado nivel escolar, lo que Chevallard (1991) denomina *saber a enseñar*. Como el autor indica:

> […] *se torna indispensable la instauración de una corriente de saber proveniente del saber sabio. El saber enseñado se ha vuelto viejo en relación con la sociedad; un nuevo aporte acorta la distancia con el saber sabio, el de los especialistas; y pone a distancia a los padres. Allí se encuentra el origen del proceso de transposición didáctica.* (Chevallard, 1991, p.31).

El saber sabio requiere de ciertas modificaciones para poder ser enseñado (constituyéndose así en saber a enseñar), y la noción de transposición didáctica supone una poderosa herramienta que da respuesta a las restricciones (anteriormente expuestas) que pesan sobre el sistema de enseñanza. Constituye la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico representando una guía del buen uso de la Epistemología para la Didáctica. Constituye el eje vertebrador entre dos saberes: el saber sabio y el saber a enseñar (Chamorro, 2003b), y se hace notar en la propia normativa curricular ya que, por ejemplo, en la Comunidad Autónoma de Andalucía se indica (Consejería de educación, 2008a, p.20):

> *Todo aprendizaje supone la interiorización y reelaboración individual de una serie de significados culturales socialmente compartidos. La interacción con las personas y los objetos que subyace en todo proceso de aprendizaje, pasa necesariamente por el filtro de la cultura común y está mediatizada por la utilización de un determinado lenguaje*

Así es que Chevallard explica que, cuando se construye el saber sabio, este se encuentra personalizado por el investigador y contextualizado por las situaciones y problemas que se han estudiado (unas veces son de la vida real y otras veces surgen del propio saber matemático y sus relaciones). Sin embargo, el productor del saber, el investigador, cuando lo comunica, lo despersonaliza y lo descontextualiza, quedando oculto todo este proceso de generación. Éste se comunica de manera limpia, secuenciada. El autor indicando que (Chevallard, 1991, pp.16-17):

> *Para que la enseñanza de un determinado elemento de saber sea meramente posible, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado. El saber-tal-como-es-enseñado, el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, el saber a enseñar* (…). *El saber enseñado debe aparecer conforme al saber a enseñar.*".

Cuando el saber se encuentra constituido, las transformaciones, reformulaciones, generalizaciones y aplicaciones que sufre, algunas veces pueden hasta hacer que pierda su identidad. Algunas veces, los saberes son destruidos sea porque se identifican con otros saberes ya conocidos, o bien, porque se incluyen en saberes más fuertes, o, porque simplemente se olvidan. El trabajo del profesor es, en cierta medida, inverso al del productor del saber, debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos. A este respecto, "*Es muy necesario que el proceso de aprendizaje sea* *secuencial: pero el orden de aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber*" (Chevallard, 1991, p.74). Tengamos en cuenta que estos conocimientos van a ser los conocimientos del alumno, es decir, una respuesta natural a las condiciones particulares y personales que son indispensables para que los nuevos conocimientos tengan sentido para el estudiante. Cuando el estudiante se ha apropiado de los nuevos conocimientos con sentido y ha adquirido un cierto dominio de ellos, debe redescontextualizar y redespersonalizar sus nuevos conocimientos e identificarlos con los existentes en la comunidad matemática científica.

Es por ello necesaria la transformación/adaptación de los contenidos de saber para constituirse en objetos de enseñanza, evitando, de algún modo, la ilusión de transparencia en la enseñanza de los objetos matemáticos, implicando en ciertos casos la creación de diversos objetos (como los diagramas de Venn en la enseñanza de la teoría de conjuntos) a exigencia de este proceso, o la consideración de los que Chevallard (1991) denomina *nociones paramatemáticas* ya que, como indica Chevallard (1991), junto a las nociones matemáticas se encuentran unas nociones que podrían ser consideradas como herramientas que no se suelen incluir como objetos de enseñanza, pero que facilitan la adquisición de las nociones para las que han sido construidas.

En este sentido, la noción de *campo conceptual* (Vergnaud, 1995) revitaliza la importancia de presentar el conocimiento en un contexto de aprendizaje fructífero, donde ciertos aspectos del mismo se adapten al contexto de aprendizaje que la institución estime oportuno.

Campos conceptuales

Un individuo adquiere un determinado conocimiento, siempre que se enfrente a un conjunto variado de situaciones en las cuales cobra sentido/significado. La variedad de situaciones implica que se relacionen varios conceptos, procedimientos, etc. y por tanto, que el individuo disponga de *esquemas conceptuales* (esquemas mentales), que le permitan en la práctica dar solución a los problemas planteados.

Las nociones *concepto en acto* y *teorema en acto*, surgen como respuesta al análisis del comportamiento del alumno en el desarrollo de la tarea en una determinada situación. Identificar estos invariantes operatorios es "*fundamental para el estudio de los procesos cognitivos que regulan el aprendizaje de los alumnos y para la configuración de los esquemas propios del aprendizaje de las matemáticas.*"(Ruiz Higueras, 2003, p. 63) siendo por ello fundamental para la Didáctica de las Matemática considerar el estudio de los campos conceptuales. "*Se considera un campo conceptual como un "conjunto de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas en estrecha conexión"* (Vergnaud, 1995, p.184).

Desde estos diferentes enfoques de la Didáctica de la Matemática, se aporta riqueza a la investigación que en cuanto a teoría, desarrollo y práctica se debe realizar del sistema de enseñanza de las Matemáticas. Como se indica en el RD. 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria: "*no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática*". (MEC, 2007a, p.751). Por ello, sea cual sea el nivel educativo en que nos encontremos, desde la Didáctica de la Matemática se pretende estudiar y en la medida de lo posible mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, haciéndose cuestiones generales como las planteadas por Godino y que se indican a continuación (Godino 2003a):

1. ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos que son tratados en el aula?
2. ¿Cuál es el papel que desempeña la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
3. Las matemáticas, ¿se descubren o se inventan?
4. Las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones que exponemos en el aula entorno a cierto concepto matemático, ¿agotan su significado integral?
5. Dado un obj eto matemático determinado, ¿qué papel juega en su significado la relación con otros objetos matemáticos?, ¿qué consecuencias podemos esperar en la utilización de dicho objeto en un contexto o s ituación problemáticas de la que forma parte y en la que se puede utilizar como herramienta?, ¿qué papel juega en la adquisición de su significado las diversas representaciones simbólicas en que puede manifestarse?

Frente a las cuestiones 2 y 3, el currículo (ya en la etapa de infantil) plantea el inicio en las habilidades matemáticas desde la exploración y la manipulación. Estas cuestiones cobran sentido al plantear el desarrollo de las habilidades lógicas y el conocimiento matemático desde la interacción con el medio. La acción y la reflexión, referidos a situaciones de la vida cotidiana con incógnitas o i nterrogantes, exigirá la aplicación de esquemas de pensamiento donde se pretende que el alumnado se acerque a estrategias de resolución de problemas, sea cual sea el nivel educativo en que nos encontremos.

La concepción de la matemática como medio para conocer y comprender la realidad, es una premisa fundamental en toda etapa educativa y por ello, la resolución de problemas constituye un eje principal de la actividad matemática. La variedad de contextos y situaciones a q ue se enfrente el alumno, le permitirá desarrollar las capacidades y competencias matemáticas básicas, como elemento esencial para la construcción del conocimiento (cuestión número 5). En este aspecto, se ha de reconocer que la matemática es una ciencia viva y no una colección de reglas fijas e inmutables y para ello, se considera necesario contemplar la Historia en la enseñanza de las matemáticas como núcleo transversal en el desarrollo del currículo. Según el currículo correspondiente a la enseñanza de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía se indica que las matemáticas:

> *Son el espíritu y la intuición los elementos fundamentales que hay que potenciar en la enseñanza actual* […]. *El rigor propio de la ciencia no debe identificarse con cadenas deductivas aparentemente perfectas en un sistema axiomático, sino que, al hacer matemáticas, es imperativo buscar en el método deductivo la confirmación de los procesos constructivos que se han llevado a cabo con definiciones parciales, demostraciones informales y un lenguaje muchas veces representativo. Las teorías no son incuestionables. Una forma de hacer avanzar las matemáticas consiste en cuestionarse los axiomas de partida así como los resultados obtenidos mediante la búsqueda de contraejemplos.*(Consejería de Educación, 2008b, p. 170).

Por otra parte, se señala la importancia de motivar el conocimiento desde el acercamiento progresivo al mismo. Partiendo de la interacción con los objetos matemáticos, el estudiante podrá ir construyendo su propio conocimiento, desde ideas intuitivas hasta la abstracción y simbolización de las mismas, no siendo adecuada una enseñanza formal de las matemáticas en un inicio. En las concreciones curriculares se indica: "*el aprendizaje debe ser equilibrado y gradual. El simbolismo no debe desfigurar la esencia de las ideas fundamentales, el proceso de investigación necesario para alcanzarlas, o el rigor de los razonamientos que las sustentan.*" (MEC, 2007b, 45449) (cuestiones número 4 y 5 anteriormente planteadas). Con el desarrollo del lenguaje, y la riqueza de experiencias culturales, se generará en el alumno la competencia para representar algunas de las relaciones concretas experimentadas en forma matemática, ya sea de modo convencional o no convencional.

Sin alejarnos del buen propósito con el que se desarrolla la normativa que regula nuestro sistema educativo español, hemos de evidenciar las limitaciones de respuesta a cada uno de los fenómenos que se suceden en las situaciones de enseñanza (aspectos recogidos en las cinco cuestiones planteadas anteriormente) y prueba de ello la encontramos en la preocupación que muestra el profesorado (asistencia y participación en diversos congresos de ámbito nacional e internacional) ante la necesidad de solucionar el sentido fracaso que la Enseñanza de la Matemática, encuentra en el sistema educativo obligatorio y postobligatorio.

En este sentido, la investigación realizada en el campo de la Didáctica de la Matemática, la contribuye a satisfacer estas necesidades/vacíos permitiendo "*describir (qué ha ocurrido aquí), explicar (¿por qué ha ocurrido?) y valorar (¿qué se podría mejorar?) procesos de instrucción en el aula de matemáticas*" (Font, Planas y Godino; 2010).

Como ciencia establecida, la Didáctica de la Matemática emerge desde hace un tiempo relativamente reciente y de algún modo, es inevitable que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Por ello, la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando para analizar los fenómenos cognitivos, hace necesaria la existencia de modelos teóricos que, valiéndose de herramientas teóricas disponibles, avancen hacia un modelo útil y unificado de la cognición e instrucción matemática.

El modelo ontológico-semiótico sobre el conocimiento y la instrucción matemática, desarrollado por J. D. Godino y cols., desde hace más de una década y publicado en diferentes trabajos, en distintos medios de difusión de la Didáctica de la Matemática, nos ofrece un modelo teórico unificado de la cognición e instrucción matemática que integra todos los constituyentes del conocimiento matemático y que tiene en consideración las herramientas conceptuales y metodológicas que desde diversas disciplinas como la semiótica, la antropología, psicología y la ecología, entre otras, son aportadas a la investigación en Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2002; 2003a).

Presentamos a continuación, las principales nociones y enfoques teóricos que han servido de fundamento y punto de partida en la creación de la teoría del Enfoque Ontológico y Semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). Una recopilación amplia y estructurada de estos trabajos se puede consultar en Godino (2003a) y trabajos posteriores (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; 2007).

1.3. GÉNESIS DE UN ENFOQUE UNIFICADO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Reflexionando acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, el EOS propone que la investigación didáctica se debe abordar desde los elementos principales que componen el sistema didáctico (noción descrita en la Sección 1.1) y las relaciones que entre ellos se establecen. Aunque una investigación particular se centre en aspectos específicos, no se debe perder de vista la articulación entre las facetas: epistemológica, cognitiva e instruccional del conocimiento matemático.

La concepción del sistema didáctico como un sistema dinámico (Godino, 2003b) nace de la TSD (Sección 1.1) y básicamente, el funcionamiento de sus elementos principales se expresa desde este enfoque.

La consideración que el EOS hace de la TSD, es que impide considerar la evolución del conocimiento. Esto es, si el saber está de por sí constituido, y nuestra labor consiste en elaborar situaciones-problema que presenten dicho conocimiento en un contexto de aprendizaje eficaz, se limita la consideración de que el conocimiento está en una continua evolución (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006) y además plantea la utopía de que todo objeto matemático será explicable mediante el juego (formal). Por otra parte se ha de considerar la limitación del tiempo didáctico (duración temporal de las diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de enseñanza y aprendizaje), la exigencia de unas capacidades intelectuales excepcionales por parte del alumnado y la limitación de los momentos de institucionalización donde el papel del profesor es esencial (Godino, Contreras y Font, 2006).

La propuesta del EOS radica en precisar qué ocurre con los alumnos que no logran una eficiente retroacción con el medio, y qué sentido atribuyen estos alumnos a las explicaciones dadas por el profesor en la situación de institucionalización, en la que el profesor identifica los nuevos saberes y procedimientos, precisa las convenciones del lenguaje (vocabulario, simbolización, ...), y trata de homogeneizar los conocimientos de la clase y de precisar entre los saberes construidos los que se van a retener y de qué forma. En este sentido, el EOS incita a un análisis más profundo desde una perspectiva cognitiva e instruccional. Para ello, será de gran importancia la transposición que se realice del saber matemático.

La noción de Transposición Didáctica propuesta por Chevallard (Sección 1.1) respalda la idea de que un conocimiento matemático *vive* en diversas instituciones (la industria, los negocios…) y por medio de una adaptación, se convierte en una matemática útil para dicho hábitat. Se conoce o no, sólo en relación a la institución portadora del saber, y por ello, la epistemología de la matemática deberá liderar la investigación en la cual se evidencien las fuentes, modos de control y mecanismos de crecimiento de la matemática en todos los *nichos ecológicos* donde vive (D'Amore y Godino, 2007).

Como indica Chevallard (1991), un saber *S* se encuentra en diversas instituciones *I*, que en términos de ecología, se reduce a contemplarlos en hábitats diferentes. Son consideradas así cuatro tipos de manipulaciones de *S*: "*si consideramos esos hábitats, percibimos inmediatamente que el saber en cuestión ocupa regularmente nichos muy diferentes.* […] *una problemática de utilización,* […] *una problemática de enseñanza,* […] y *una problemática de producción.* […]. *Por lo tanto, un saber puede ser utilizado, enseñado, producido*" (Chevallard, 1991, pp. 153 -154), siendo pues necesaria la investigación epistemológica en estos tres ámbitos dada su relatividad. Chevallard (1991) considera el cuarto tipo de manipulación del saber la *manipulación transpositiva*, entendida como *transposición institucional*. Los procesos transpositivos son en sí el resorte de la vida de los saberes, que marca el funcionamiento de nuestra sociedad, "*un hábitat con una ecología particular,* […] *y que, contra los modernos adoradores de la Escuela-centrada-en-el-niño, nos recuera que los individuos somos antes que nada seres sociales y por ende "escolentes"*" (Chevallard, 1991, p.166).

La Teoría Antropológica, aporta elementos esenciales al estudio de la actividad matemática. En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, al igual que en la Teoría Antropológica, los objetos matemáticos se conciben en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, esto es, sistemas compuestos de praxis y logos (Godino, 2002).

La divergencia entre esta teoría y el EOS se produce por la necesidad de precisar un análisis de la cognición del alumno descentralizada del sentido institucional (Godino y

Batanero, 1994; Godino, Font, Contreras, y Wilhelmi, 2006). Utilizar en una investigación herramientas de tipo cognitivo permitirá enriquecer el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje sin limitarnos únicamente a las herramientas de tipo epistémico. A menudo, la identificación alumno-institución impide poder dar cuenta de las condiciones bajo las cuales se produce el aprendizaje en el alumno (D'Amore y Godino, 2007; Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006).

El desarrollo teórico presentado por Duval (1993), contribuye a este planteamiento, postulando la existencia de una naturaleza mental (representaciones internas) para el conocimiento matemático, para la cual, el lenguaje constituye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis). El lenguaje, en todas sus manifestaciones, contribuye a la semiosis (producción o aprehensión de una representación semiótica). (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006; Font, Godino y D'Amore, 2007).

La observación que a este enfoque aporta el EOS radica en el propio alumno. Desde un punto de vista pragmático, "comprender" un objeto matemático consiste en "*ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que le son propuestas en el aula.*" (Font, Godino y D'Amore, 2007). Así podemos decir que "*un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos*" (Godino, 2003a, p.33). Se considera por tanto, que un alumno comprende un determinado contenido cuando es capaz de usarlo de un modo óptimo y no tanto como un proceso mental que se produce articulando representaciones.

Según el EOS, es necesario considerar la acción del alumno ligada a la situación-problema y no basar la investigación en el lenguaje y las tareas de producción y manipulación de los sistemas de representación. De algún modo, el contexto o situación planteada, y en última instancia la institución, influyen en la comprensión matemática. La faceta institucional o epistémica es un medio que ayuda a interpretar el aprendizaje y comprensión matemática como un acoplamiento progresivo entre significados institucionales y personales de objetos matemáticos así como permite planificar los procesos instruccionales (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006)

En la búsqueda por dotar de significado a un objeto matemático, el EOS comparte ciertos aspectos de la teoría de campos conceptuales desarrollada por Vergnaud (Sección 1.1). La puntualización que el EOS aporta radican en los invariantes o constituyentes del concepto los cuales son los que dan lugar a diferentes prácticas significativas.

Pensemos que, aunque exista un conjunto de invariantes que constituyan un concepto, estos no agotan el significado *operativo* del mismo. Una reflexión clara sobre este aspecto es el hecho de que existen ciertos usos extensivos de un determinado concepto que son considerados en gran medida como aplicaciones de los mismos y por tanto independientes del propio objeto. Con esta concepción difícilmente podrá ser considerada una formación y evolución dinámica de los conceptos tanto culturalmente como mentalmente (Godino y Batanero, 1994)

En este sentido, la *función semiótica*, aporta el germen al enfoque ontosemiótico en cuanto a la significación de un objeto matemático. Esta noción describe las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (contenido, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Se trata metafóricamente, de una "correspondencia entre conjuntos" por medio del código interpretativo elaborado por el alumno (regla de correspondencia) donde se hace corresponder la expresión con el contenido (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006).

Describimos a continuación el marco teórico desarrollado por el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática: sus componentes, constructos, interpretaciones… finalizando el capítulo con unas reflexiones sobre la utilidad que desempeña su uso en una investigación.

"*La necesidad de construir teorías es evidente, ya que constituyen una guía para el planteamiento de problemas de investigación y para interpretar los resultados de las mismas. Un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones*" (Godino, 2010, p.11).

CAPÍTULO 2.

EL ANÁLISIS ONTOLÓGICO-SEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

2.1. INTRODUCCIÓN

Previo a toda pregunta de investigación que nos podamos plantear en torno a cualquier conocimiento matemático, cabe cuestionar y reflexionar acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, es decir, partir de las características que determinan la condición de la ciencia Matemática, ya que nuestra investigación se encuentra determinada por su especificidad (Godino, 2003b). Así, las principales características que se atribuyen a la ciencia matemática permiten considerarla como:

a) un quehacer humano, respuesta o solución de cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática.

b) una entidad cultural, en la que los objetos matemáticos dan solución a problemas compartidos en el seno de instituciones específicas.

c) un lenguaje simbólico con función comunicativa e instrumental.

d) un sistema conceptual lógicamente organizado, donde cualquier conocimiento establece una estructura propia y unas relaciones dinámicas con el resto de estructuras conceptuales.

Surge, de estas consideraciones, una teorización ontológica de los objetos matemáticos que considera a la ciencia matemática como una actividad de resolución de problemas, que se comparten en una determinada institución, que se comunica mediante el lenguaje, y basada en un entramado de conceptos lógicamente organizados (Godino, 2003b; Godino, Batanero y Font, 2007).

El hecho de considerar la actividad matemática como una actividad humana de dominio personal (actividad de resolución de problemas), mediada por el lenguaje en los procesos de comunicación e interpretación (como lenguaje simbólico), desarrollada en una institución (socialmente compartida); genera el punto de partida para el EOS en cuanto al interés por:

- equilibrar el dominio de lo personal y de lo institucional,

- evidenciar el papel determinante de la situación-problema a la que el alumno se enfrenta, y
- precisar las nociones de *práctica* y *objeto*, proponiendo con ello un uso más técnico, y sin ambigüedades, de la noción de significado de un objeto matemático.

A lo largo de este capítulo, detallamos estos propósitos, así como los constructos y el sentido que se dota a algunos términos que son utilizados para estos fines.

2.2. OBJETO MATEMÁTICO, PRÁCTICA Y SIGNIFICADO

Las nociones más elementales desde las que se construye el EOS son las nociones de objeto, significado sistémico de un objeto matemático y práctica matemática.

El sentido que el EOS dota al término objeto matemático, supera la concepción simplista de que objeto matemático es sinónimo de concepto matemático, y abarca tanto a la situación-problema como a los propios medios expresivos y argumentativos. Los problemas planteados, las notaciones utilizadas, los procedimientos llevados a cabo, las proposiciones formuladas, o los argumentos utilizados, entre otros, son entendidos como "objetos matemáticos" que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y deben ser considerados cuando sea estudiada la actividad matemática. De este modo, "*"objeto matemático" es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática*" (Font, Godino y D'Amore, 2007). Con esta percepción, podemos definir el conocimiento matemático según sus diferentes constituyentes.

La variedad de objetos matemáticos que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, emergen de la actividad matemática realizada y por ello son nombrados y descritos mediante las *prácticas* que le son asociadas (Godino y Batanero, 1994). La noción de práctica se describe como: "*toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.*" (Godino y Batanero, 1994, p. 334; Godino, 2003a, p.91). Y se distinguen, dos tipos de prácticas: personales e institucionales.

Godino y Batanero (1994) indican que, asociado a un campo de problemas, existe un sistema de prácticas prototípicas que son determinadas por la institución y se caracterizan por ser invariantes de la propia situación-problema, que se manifiestan cuando el sujeto actúa y resuelve la tarea. De este modo, entendemos por práctica institucional, al conjunto de prácticas con rasgos particulares, y que se comparten en la institución que las alberga, generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas, y modos de funcionamiento y son consideradas significativas ya que conducen a la resolución de la tarea o conjunto de tareas para los que adquiere significado (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007)

Por otra parte, las prácticas que desempeña el sujeto para alcanzar la solución a la tarea propuesta, son denominadas prácticas personales y se caracterizan por permitir al alumno desempeñar "*una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.*" (Godino y Batanero, 1994). De este modo, cuando el alumno se enfrenta a la resolución de un problema propuesto en un contexto institucional determinado, interacciona con los problemas y situaciones planteadas, manifestando ensayos, intentos de solución fallidos… generando con ello un sistema de prácticas operativas y discursivas.

Bajo la concepción de que un objeto matemático emerge de los sistemas de prácticas que tanto operativas como discursivas desarrolla un sujeto (persona o institución) para resolver un tipo de situación-problema planteado en una determinada institución, el EOS considera, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática.

En un primer nivel tenemos toda entidad que se puede observar en un texto matemático: en cualquier práctica matemática intervienen objetos representados de forma textual, oral, gráfica o incluso gestual, los cuales evocamos cuando llevamos a cabo su realización tales como problemas, definiciones, proposiciones, etc.

En un segundo nivel, tenemos una tipología de objetos que emergen de los distintos modos de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior. Un objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, 2003a). Éstos pueden ser ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) o no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), unitarios o sistémicos, etc. (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007) atendiendo a las facetas desde las que es considerado, por el EOS, el conocimiento matemático (estas facetas son descritas en la Sección 2.2).

En este segundo nivel, es relevante la noción de *función semiótica* (Sección 1.2) dado que la adquisición del significado de un objeto matemático, se consigue de un modo operativo por el uso o función que de éste se realice. Cuando entre dos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental (dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí), donde uno de los objetos se pone en lugar del otro o bien uno es usado por otro, un objeto matemático adquiere indistintamente el estatus de significante y significado en la tarea matemática y así, el significado logrado por el sujeto en la resolución de la actividad propuesta posee un carácter sistémico.

El alumno activa su propia trama o red/redes de funciones semióticas, pudiendo, por una parte, reducir o aumentar la complejidad de dicha trama y por otra parte, facilitar la realización de un modo efectivo la tarea propuesta (Godino y Batanero, 1994; Font, Godino y D'Amore, 2007). Las prácticas que desarrolla el alumno, serán consideradas correctas atendiendo al sistema de prácticas prototípicas que le sea asociado al objeto matemático. Como indican Godino y Batanero:

> *La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es, lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto O* [objeto matemático] *desde el punto de vista de I* [institución de referencia]. *El resto de prácticas personales serían consideradas "erróneas", desde el punto de vista de la institución.* (Godino y Batanero, 1994, p.14)

Surge así la noción de *conflicto semiótico* para identificar cualquier "*disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas*" (Godino, 2002, p.250).

El análisis ontológico-semiótico que propone el EOS supone una indagación sistemática de los significados puestos en juego en la actividad matemática donde, sin alejarse de la utilidad de los análisis de tipo macrodidáctico, se concretan las componentes de los sistemas de prácticas para poder llevar a cabo un análisis más preciso. Estos elementos básicos o primarios se denominan unidades semióticas y como Godino indica:

> […] *el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada*

por los sujetos participantes. Llamaremos análisis ontológico-semiótico (o simplemente análisis semiótico) de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos." (Godino, 2003a, p.155).

Para delimitar los elementos de análisis de nuestra investigación, se tiene en cuenta cada una de estas componentes, identificando los momentos en que se ponen en juego. Así, el investigador, dependiendo de la finalidad de su estudio, fijará el nivel de análisis necesario; y cada unidad de análisis puede ser agrupada constituyendo unidades semióticas más extensas, o bien ser descompuesta en tantas subunidades como términos y expresiones matemáticas contenga.

Una vez sea descrito el aspecto sistémico del significado según las herramientas aportadas por el EOS, podemos abarcar lo que Godino, Font y Wilhelmi (2008) caracterizan como primer nivel de análisis aplicable a un proceso de estudio matemático: el análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas asociados (significados sistémicos).

2.3. COMPONENTES DE LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS

Como se indicó anteriormente, un objeto matemático cobra significado en el alumno cuando se enmarca en un conjunto de prácticas significativas llevadas a cabo por el mismo. Dada la complejidad de analizar el proceso de significación, que por parte del alumno se realiza en torno al sistema de prácticas planteadas, el EOS ofrece una clasificación de elementos básicos de significado que permitirá diseñar situaciones didácticas así como evidenciar las dificultades y errores que el alumno presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los tipos de elementos en el significado sistémico de un objeto matemático son la *situación-problema*, el *lenguaje*, los *conceptos o definiciones*, las *proposiciones*, los *procedimientos*, y los *argumentos*.

La *situación-problema* es vista como la tarea, ejercicio ó actividad planteada al alumno y es parte integrante de su significado dado que los problemas o prácticas suelen estar agrupados en tipos o clases y "*el paso de un tipo puntual a otro más amplio es el determinante del progreso o avance del conocimiento matemático, tanto individual como institucional*" (Godino, 2003a). Las situaciones-problemas deben, por un lado ser representativas de las incluidas en el significado de referencia y, por otro lado, permitir contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones relacionadas. (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006).

Los elementos del *lenguaje* tales como términos, expresiones, notaciones, gráfico, etc. son vitales en nuestra práctica matemática. En general, los elementos lingüísticos vienen dados en diversos registros (escrito, oral, gestual,…) y deben ser muestra representativa de los identificados en el significado de referencia.

Los *procedimientos* son el conjunto de operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, etc. que permiten resolver la tarea propuesta y que llegan a automatizarse para tipos específicos de problemas. En el proceso de estudio, todo procedimiento que el alumno lleve a cabo en torno a la resolución de las diferentes prácticas planteadas, enriquecerá el significado del objeto matemático tratado.

Las *definiciones, conceptos o nociones* matemáticas son evocados por el alumno cuando realiza cualquier acción con objeto de resolver las cuestiones planteadas. Es fundamental tener en cuenta los conceptos que permiten caracterizar el objeto de estudio en el sistema de prácticas planteadas, así como conocer los nexos que el alumno establece entre lo que conoce y el objeto matemático que se pretende enseñar.

Las *proposiciones, atributos o propiedades* son los enunciados que se realizan sobre el objeto matemático que se trata. De algún modo, marcan las condiciones de actuación por parte del alumno ya que regulan las relaciones de este objeto con otros objetos y con ello se producirá un e nriquecimiento en el significado del objeto en cuestión.

Los *argumentos* son los enunciados emitidos para validar o explicar las acciones llevadas a cabo.

Estos seis elementos son el resultado de una reflexión en cuanto a l as componentes tanto prácticas como teórico/discursivas que se ponen en j uego en cualquier tarea matemática. Las relaciones o redes que se establecen entre ellos dan lugar a entidades más complejas que el EOS denomina *configuraciones*. No es otra cosa, que poner de manifiesto que un obj eto matemático no pue de ser entendido de modo aislado sino que adquiere sentido sólo como parte de un s istema más amplio. Dicha red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, junto con las relaciones que se establecen entre los mismos, servirá de apoyo para describir la construcción del conocimiento matemático y su relatividad al contexto institucional en que sea tratado (D'Amore y Godino, 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007). La noción de configuración didáctica es desarrollada en la subsección 2.4.2 pues para comprender mejor su funcionamiento se requiere considerar por un lado las diferentes dualidades o facetas del propio conocimiento matemático y por otro lado la importancia de la instrucción en la génesis del conocimiento matemático.

En la Figura 2 se muestra el entramado de entidades funcionales y relativas a los juegos del lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) que se manifiestan en la ejecución del sistema de prácticas asociadas al objeto matemático emergente de ellas.

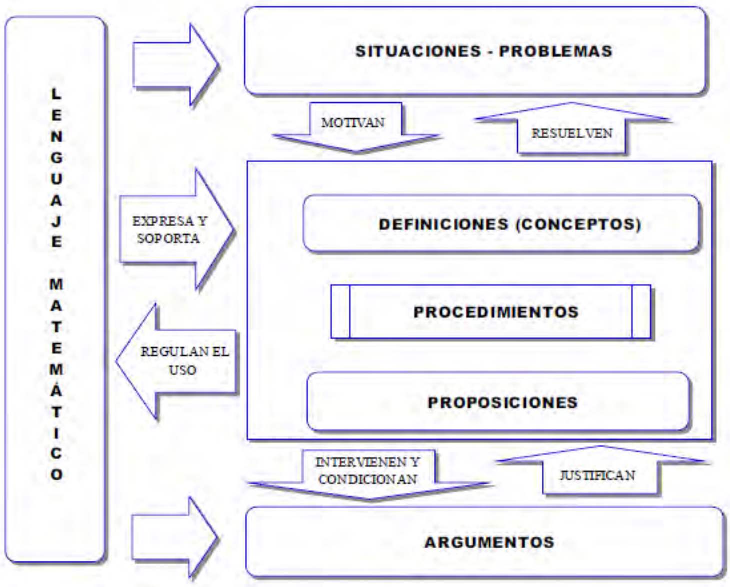

Figura 2. Configuración de objetos primarios (Godino Batanero, 2009, p. 7)

2.4. FACETAS DUALES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Realizando una precisión en cuanto al análisis de la actividad matemática, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los que surgen de ellas, de acuerdo con el juego de lenguaje en que participan, pueden ser vistas desde diferentes perspectivas. Es necesario contemplar las diferentes facetas en que puede ser considerado el conocimiento, pudiéndose concebir éstas como atributos aplicables a los objetos donde su dualidad se hace complementaria.

Las facetas duales desde las que puede ser interpretado el conocimiento matemático se pueden clasificar en:

- institucional y personal
- ostensiva y no ostensiva
- extensiva e intensiva
- unitaria y sistémica
- expresión y contenido

2.4.1. FACETA INSTITUCIONAL Y PERSONAL

Dada la naturaleza sistémica del significado de un objeto matemático descrita en las secciones anteriores (Sección 2.1 y 2.2), necesitamos considerar la correspondencia que se establece entre el significado que la institución ostenta sobre dicho objeto y el significado personal que el alumno posee de éste. Un ejemplo de ello lo encontramos cuando la institución provee al alumno de reglas y fórmulas para adquirir cierto conocimiento con la pretensión de alcanzar en él una comprensión relacional adecuada y por sorpresa encontramos nuestro objetivo malogrado. Como indica Estepa (1993, p.58):

> "*A menos que se proporcione una instrucción adecuada, los estudiantes pueden creer que la compresión instrumental de un concepto constituye la plena comprensión. (…) A no ser que una variedad de problemas y ejemplos, extraídos de una variedad de contextos proporcionen una intensa práctica de útiles estructuras computacionales, parece improbable que se pueda adquirir una comprensión general de los conceptos.*"

El EOS establece la *comprensión de un objeto matemático* como un proceso progresivo. "*La comprensión sería así no un estado dicotómico (se comprende/ no se comprende), sino un proceso creciente y continuo que se desarrolla mediante actos de comprensión*" (Godino, 2003a, p.123).

Aceptando la dualidad personal e institucional del conocimiento, según el EOS, la comprensión personal será considerada como la *apropiación* del significado institucional del objeto matemático, emergente del sistema de prácticas significativas llevadas a cabo por el individuo. Sirva como ejemplo el hecho de que un pr ofesor cuando evalúa la comprensión de sus alumnos en referencia a los conocimientos transmitidos, éste debe relativizar su control al contenido que presentó a éstos. De algún modo, el alumno comprende cuando reconoce los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades, conceptos y representaciones donde el objeto cobra significado y es capaz de relacionarlo con otros objetos matemáticos en las diversas situaciones-problema planteados. Así es que "*La comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles.*" (Godino, 2003a p.132).

Según centremos nuestra investigación didáctica en el alumno, en la institución, o bien en la interacción entre ambas, estamos considerando la doble faceta que desde una dimensión institucional y personal adquiere el conocimiento matemático. Si en nuestra investigación didáctica centramos nuestro interés en el alumno, hablaremos de los objetos personales emergentes del sistema de prácticas que ha llevado a cabo dicho alumno. Si por el contrario centramos nuestro interés en los objetos institucionales (documentos curriculares, libros de texto, explicación del profesor, etc.) hablaremos de faceta institucional del conocimiento matemático.

En esta dualidad personal e institucional, es importante tener conciencia de los tipos de significado que podemos encontrar tanto en el significado institucional como en el significado personal del objeto matemático en cuestión, según la profundidad con que tratemos cada uno de ellos. En la Figura 3 encontramos un resumen de esta tipología básica de significados.

En cuanto a los significados institucionales, podemos distinguir cuatro tipos: *implementado*, *evaluado*, *pretendido* y *referencial*.

En el momento en que el profesor planifica su proceso de instrucción, está delimitando la implicación que el objeto matemático mantiene en la institución. Para ello se vale de la fuente del saber científico así como de las diversas orientaciones curriculares disponibles, delimitando con ello las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto dentro de la institución valedora del saber. La determinación de dicho significado requiere realizar un estudio sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos en los que dicho objeto cobre significado/sentido. De este modo se genera el significado institucional de referencia del objeto matemático tratado donde se pudiera considerar de modo dinámico:

> *El estudio de los cambios que el significado institucional de referencia de los objetos matemáticos sufre para convertirse en significado a enseñar, a través de distintas instituciones de enseñanza (diseños curriculares, autores de textos, …) constituye lo que podríamos llamar dinámica de los significados institucionales (transposición didáctica, ecología conceptual)* (Godino y Batanero, 1994, p.22).

Una vez establecido el significado de referencia del objeto matemático que se va a tratar, el profesor diseñará el contenido que propondrá a los estudiantes atendiendo a los diversos factores del sistema educativo donde se desarrolla: temporalización, conocimientos previos requeridos, etc. Con estos determinantes se concreta el significado institucional pretendido del objeto tratado. El profesor basará en el significado pretendido su práctica docente, pero dada la interacción profesor-alumno, alumno-alumno y alumno-contexto, el proceso de instrucción permite enriquecer o empobrecer el significado pretendido debiendo hablar pues de significado institucional implementado. Es en base al sistema de prácticas implementadas en la clase de matemáticas, como el profesor diseña de un modo objetivo la evaluación del aprendizaje. Y por tanto, en esa colección de tareas, cuestiones o problemas, se refleja el significado evaluado. De algún modo, se espera que el significado evaluado sea un fiel reflejo del significado implementado.

De igual modo, distinguimos tres tipos de significado que constituyen el significado personal de un objeto matemático, y se distinguen tres tipos: *global*, *declarado* y *logrado*.

Con el significado global indicamos el conjunto de sistema de prácticas significativas que es capaz de desempeñar el alumno, relativas al objeto matemático tratado. Con el significado declarado nos referimos a las prácticas que el alumno realiza en una determinada tarea propuesta y son manifestadas a propósito de ser evaluadas por la institución. Y finalmente, por significado personal logrado, nos referimos al conjunto de prácticas que el alumno manifiesta conforme a la institución. En un análisis dirigido al estudio de los cambios producidos por el alumno en cuanto a los significados personales, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

En el momento en que el significado declarado no se ajuste al significado de referencia serán manifestados los errores de aprendizaje, materia de interés didáctico de nuestra investigación.

Figura 3. Significado institucional y personal (Godino, Batanero y Font, 2009, p. 6)

Las relaciones dialécticas que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje constituyen el papel central de la actividad matemática (Figura 3), propiciando el ajuste entre los significados personales e institucionales.

2.4.2. FACETA OSTENSIVA Y NO OSTENSIVA

Todo objeto matemático tiene un modo de ser reconocido y diferenciado de entre el resto. El hecho de que un alumno pueda distinguir un objeto de entre el resto requiere de una previa apropiación del significado de éste. El EOS se refiere a la dimensión no ostensiva de un objeto matemático como a la idealización que el alumno realiza sobre dicho objeto permitiendo con ello ser "*capaz de pensar e imaginar uno de estos objetos sin necesidad de mostrarlo externamente*" (Godino, 2003a, p.142,).

El hecho de poder nombrar, representar (mediante el lenguaje oral, escrito, gráfico ó simbólico), e incluso reconocer situaciones en que sea necesaria la aplicación de un objeto, evidencian su dimensión ostensiva. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y por tanto es susceptible de ser mostrado.

El matiz que aporta el EOS en esta dimensión ostensiva y no ostensiva de un objeto matemático es que los objetos ostensivos también pueden funcionar como no ostensivos en la medida en que estos son considerados y utilizados en el pensamiento/razonamiento ó imaginación del alumno. Un ejemplo que Godino (2003a) aporta a este matiz es el de considerar el procedimiento algorítmico ostensivo de un cálculo determinado (suma, resta, multiplicación, división, etc.) de modo mental. Con este ejemplo se evidencia el funcionamiento no ostensivo de un elemento primario ostensivo.

2.4.3. FACETA EXTENSIVA E INTENSIVA

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de cualquier objeto matemático, un aspecto de gran interés es la generalización de dicho objeto a tipos de situaciones-problema. De este modo, desarrollando procedimientos, estrategias y técnicas generales, conseguimos situar a dicho objeto en un estatus de representante de una clase de objetos.

Evidenciar lo concreto y particular que acontece a un determinado objeto en una situación determinada y la abstracción que conlleva la generalización de dicho concepto a una situación cualquiera ha de ser reflejado como una dualidad existente en el propio objeto. Considerar la dualidad extensiva e intensiva de cada uno de los elementos primarios que lo conforman, permitirá distinguir en nuestro estudio si el objeto interviene como caso particular o como una clase más general o abstracta de objetos. Por ejemplo, una recta de regresión lineal, particular, $y = 3x - 2$ es un elemento extensivo, cuando la generalizamos a la ecuación general de la regresión: $y = a \cdot x + b$, obtenemos la faceta intensiva.

En relación a esta faceta del conocimiento matemático, Contreras y cols. (2005) presentan una revisión de diferentes investigaciones desarrolladas sobre la didáctica del análisis relacionadas con la complejidad semiótica asociada a la función derivada donde, con la ayuda del EOS, se detectan determinados fenómenos didácticos, además de sugerir las causas que los producen. Este estudio supone un desarrollo en cuanto a la faceta extensiva e intensiva de la noción de derivada.

2.4.4. FACETA UNITARIA Y SISTÉMICA

En la definición de ciencia matemática, que obtenemos del diccionario de la Real Academia Española en su vigésima edición: "*la matemática es una ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones*", evidenciamos el carácter relacional que ésta posee en cuanto a los elementos que la integran. Los objetos matemáticos, concebidos como elementos unitarios independientes que constituyen la ciencia matemática, son unidades elementales y completas de significado para el sujeto que las utiliza como herramientas para su trabajo matemático. El hecho de considerar los objetos matemáticos y establecer relaciones entre ellos, ofrece un carácter sistémico a los objetos matemáticos estableciendo dichas relaciones. Al considerar la faceta sistémica de los objetos matemáticos es necesaria su descomposición para su estudio. Por ejemplo: en el estudio de la adición y sustracción en los últimos niveles de primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, etc.) se considera como algo conocido y que se puede utilizar y en consecuencia como entidades unitarias. Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su estudio.

Es importante reconocer la dimensión unitaria y sistémica que poseen los objetos matemáticos dado que ello permitirá un mejor reconocimiento de su tipología en el desarrollo del trabajo didáctico.

2.4.5. FACETA EXPRESIÓN Y CONTENIDO

Dada la diversidad de objetos matemáticos que intervienen en el desarrollo de la actividad matemática (los cuales evidencian la faceta unitaria y sistémica de la ciencia matemática), así como la dimensión ostensiva y no ostensiva de dichos objetos, es importante contemplar el proceso de semiosis que el alumno realiza en el desarrollo de la actividad matemática como un aspecto central de nuestra investigación.

En este sentido, es de gran ayuda reconocer que existen diferentes procesos semióticos que el alumno lleva a cabo en la resolución de la tarea propuesta según el contexto ó situación en que se encuentre (remitimos al lector a la Sección 2.1 donde se describe la noción de función semiótica y a la Sección 2.2 donde se describe su funcionalidad)

La gran potencialidad del EOS, es la de ofrecer un modelo capaz de reflejar, no sólo las relaciones entre objetos matemáticos (función semiótica), sino además, los procesos interpretativos llevados a cabo por el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto es, un *análisis ontológico-semiótico* que permite determinar significados institucionales y personales así como sus interacciones, (Godino, 2003a).

El EOS postula que, la expresión y el contenido pueden ser cualquier tipo de objeto, filtrado por las dualidades que sean manifestadas, lo cual proporciona una mayor capacidad analítica y explicativa. Además, el tipo de relación expresión-contenido no se limita a la acepción representacional, entendida como un objeto (generalmente de tipo lingüístico) que está en lugar de otro, puede ser, por ejemplo: "está asociado con", "es parte de", "es causa/razón de", etc. (Font, Godino y D'Amore, 2007).

Atendiendo a las relaciones de dependencia entre la expresión y el contenido se pueden distinguir tres tipos de funciones semióticas: *representacional*, *instrumental* u *operatoria* y *estructural*.

Cuando un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito hablamos de función semiótica representacional. Si un objeto utiliza a otro u otros como instrumento hablamos de función semiótica instrumental y si dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos hablamos de función semiótica estructural. (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006; D'Amore y Godino, 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007)

En consecuencia, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las Matemáticas permitiendo formular en términos semióticos el conocimiento matemático de un modo general y flexible además de explicar en términos de conflictos semióticos las dificultades y los errores de los estudiantes (D'Amore y Godino, 2007).

En la siguiente Figura 4 se resume la construcción que el EOS establece, mediante un "decágono" donde sus lados contiguos están organizados de un modo contrapuesto mediante las diferentes facetas duales expuestas anteriormente. La potencialidad de este polígono se encuentra en que no sólo se muestran las facetas duales, sino que además se reflejan los procesos que tienen lugar en cada una de ellas.

De la emergencia de los objetos que configuran el sistema de prácticas (lenguaje, situaciones-problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) surgen los procesos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos/algoritmización y argumentación, ver Figura 4. Estos procesos favorecen la ejecución de los procesos cognitivos/epistémicos implícitos en cada una de las facetas duales que han sido explicitadas anteriormente y son:

~ institucionalización–personalización (faceta institucional-personal);

~ generalización–particularización (faceta extensiva-intensiva);

~ análisis/descomposición–síntesis/reificación (faceta unitaria-sistémica);

~ materialización/concreción–idealización/abstracción (faceta ostensiva-no ostensiva);

~ expresión/representación–significación (faceta expresión-contenido).

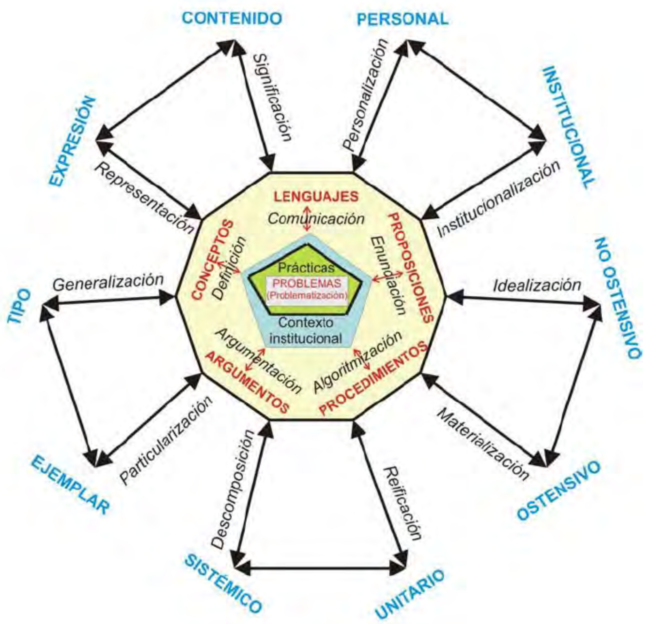

Figura 4. Configuración de objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2009, p. 10)

2.5. LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Dado que los significados institucionales implementados en el aula son el resultado de diferentes interacciones dinámicas ocurridas entre el docente, el discente, el saber y el medio, se evidencia la necesidad de ser incluidas en este trabajo. El significado personal del alumno se encuentra influenciado por éstas, y disponer de herramientas para realizar análisis descriptivos pormenorizados de los procesos de instrucción matemática, ofrece la posibilidad de encontrar explicaciones de las regularidades observables.

El EOS amplía el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas abordando, con nuevas herramientas teóricas como configuración didáctica, trayectoria didáctica, e idoneidad didáctica, el análisis de la dimensión instruccional de dichos procesos. Todas estas nociones deberán ser valoradas teniendo en cuenta las diversas facetas o dimensiones presentadas en la Sección anterior.

En el artículo presentado por Godino, Contreras y Font (2006), se muestra un análisis pormenorizado de algunas de estas nociones. El análisis comprende las cuatro primeras configuraciones didácticas de las 12 configuraciones didácticas empíricas (o efectivamente implementadas) identificadas de una clase sobre el cálculo de derivadas.

2.5.1. LAS TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS

En este enfoque unificado del conocimiento y la instrucción matemática proporcionado por el EOS, se considera que un proceso de instrucción engloba diferentes dimensiones interconectadas susceptibles de modelizarse mediante un proceso estocástico dado que siempre existen elementos aleatorios que producen alteraciones en el proceso de instrucción planeado. Como tal proceso estocástico, los estados de transición o paso son conectados mediante diferentes trayectorias que dependen del tiempo. Así, la modelización del proceso de instrucción que el EOS realiza, en términos de trayectorias, permite describir con detalle las actuaciones que llevan a cabo el profesor y el alumno a lo largo del mismo:

> *En cada realización de un proceso de instrucción matemática sobre un objeto matemático se pondrán en juego una muestra de las funciones docentes y discentes. También se seleccionarán unos recursos instruccionales específicos. Parece natural modelizar esta distribución temporal de funciones y componentes mediante procesos estocásticos, considerando tales funciones o componentes como sus estados posibles.*(Godino, Contreras y Font, 2006, p.6).

El marcado carácter aleatorio proviene de la inevitable aleatoriedad existente en el proceso de instrucción, dado que es necesario continuamente adaptar la enseñanza pretendida a las características y requerimientos del medio y los alumnos.

Como indican Godino, Contreras y Font (2006), estas dimensiones interconectadas pueden ser de tipo epistémico (referente a los significados institucionales), docente (referente a la función del profesor), discente (referente a la función del/de los alumno/os), mediacional (referente a los recursos materiales y temporales), cognitiva (referente a los significados personales) y emocional (referida a los sentimientos y afectos presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto por la institución como por los integrantes de ésta de modo personal).

A continuación se presentan las diferentes trayectorias que encontramos en el proceso de instrucción de la actividad matemática:

Trayectoria epistémica. Distribución de la enseñanza a lo largo del tiempo dada la planificación establecida por el profesor según el significado implementado. Se trata de descomponer en elementos básicos de significado la actividad matemática que se implemente en el aula. De este modo, a lo largo del proceso de instrucción, el alumno se situará en distintos estados, y todos ellos secuencialmente constituirán el sistema de prácticas asociado al objeto matemático que se trate:

- *actuativo*, cuando se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas,
- *situacional,* cuando se enuncia un ejemplar de cierto tipo de problemas),
- *lingüístico*, cuando se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.,
- *conceptual*, cuando se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego,
- *proposicional*, cuando se enuncian o interpretan propiedades, y
- *argumentativo*, cuando se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas).

El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional implementado y su complejidad ontosemiótica. (Godino, Contreras y Font, 2006).

Todo el sistema de objetos y funciones semióticas establecidas en el proceso de instrucción que conducen a la resolución de la situación-problema constituyen lo que el EOS denomina "*configuración epistémica*". El análisis epistémico propuesto trata de caracterizar de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis elementales (*unidades epistémicas*) según los estados de la trayectoria.

La secuencia de todas las configuraciones epistémicas, que se van agrupando y construyendo progresivamente, constituye finalmente el sistema de prácticas operativas y discursivas que fijan el significado institucional implementado del objeto que se trate. Un ejemplo de análisis de una trayectoria epistémica es desarrollado por Godino, Contreras y Font (2006) en torno a la derivada de una función.

Trayectoria docente. Distribución o secuenciación de las tareas docentes en el proceso de instrucción. Se trata de analizar la gestión que del significado implementado ha realizado el profesor en el proceso de instrucción. Disponer de la guía de actuación que lleva a cabo el docente, permitirá considerar todos aquellos procesos que provocan un desajuste entre el significado institucional implementado y el significado personal del alumno (posibles conflictos semióticos). Como aproximación a una categorización de las tareas o funciones docentes se destacan:

- *Planificación, diseño del proceso de instrucción (trayectoria epistémica prevista), selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido);*
- *Motivación, creación de un clima de respeto, afectividad y animar a la participación a los alumnos;*
- *Asignación de tareas, gestión y control del proceso de enseñanza y aprendizaje, adaptación de tareas;*
- *Regulación, fijación de normas o reglas, gestión de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista;*
- *Evaluación, observación y valoración del estado de aprendizaje logrado en los diferentes momentos de evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje;*
- *Investigación,* reflexión y análisis del desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje abordado con objeto de introducir posibles mejoras para futuras implementaciones.

Ocurre muchas veces que el docente considera ciertos procesos de asimilación del saber como "transparentes", o al menos así lo lleva a la práctica en su planificación, provocando posibles conflictos semióticos. La trayectoria docente es en definitiva una prueba clave de que disponemos para poder estudiar, con mayor profundidad, las respuestas dadas por el alumno en relación al significado implementado.

En el momento en que las tareas secuenciadas por el profesor se encuentren ajustadas a una situación-problema, se constituye lo que el EOS denomina "*configuración docente*".

Trayectoria discente. Distribución de las acciones del alumno en el proceso de instrucción. Como aproximación a una categorización de las tareas o funciones discentes que desarrolla el alumno dada la configuración epistémica, se destacan:

- *Aceptación*, adopción de una actitud positiva al estudio, al compromiso educativo, a la participación y a la cooperación con los demás;
- *Exploración*, implicación en la tarea propuesta, búsqueda de conjeturas para su resolución;
- *Recuerdo*, *compromiso de estudio* y *seguimiento de reglas* (conceptos y proposiciones) así como manejar el significado de los elementos lingüísticos en cada situación;
- *Formulación* de soluciones a las situaciones y tareas propuestas;
- *Argumentación y justificación* de conjeturas;

- *Recepción de información* sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar;
- *Demanda de información*, estados en que el alumno solicita al profesor o a otros compañeros información referente a conocimientos tratados;
- *Ejercitación*, *implicación* y *compromiso* en la realización de tareas para dominar las técnicas específicas manifestadas;
- *Evaluación*, momento de evaluación del alumno en que realiza alguna prueba.

En nuestra investigación será de vital importancia disponer del conjunto de acciones desempeñadas por el alumno dada una configuración epistémica determinada. Con ello nos referimos a cualquier estado del alumno en el proceso de instrucción, y que constituyen lo que el EOS denomina "*configuración discente*". Cabe destacar en esta trayectoria que existen estados difíciles de registrar, entre otras causas, porque el trabajo del alumno no se limita al horario escolar sino que es continuado fuera de clase.

Trayectoria mediacional. Distribución de los recursos o medios utilizados en el proceso de instrucción. Los medios o recursos, bien sean para presentar el saber o bien como ayuda al estudio, debe ser objeto de atención en la práctica y en la investigación didáctica. Es importante en nuestra investigación, la noción de trayectoria mediacional dado que sirve de herramienta para analizar los usos potenciales y efectivamente implementados de los recursos instruccionales y sus consecuencias cognitivas. (Godino, Contreras y Font, 2006).

Trayectoria cognitiva. Distribución temporal del proceso de formación del significado personal de un objeto matemático. Como decíamos, cuando hablábamos de la cognición matemática desde el enfoque ontológico-semiótico, el significado personal es desarrollado por el alumno a partir del conjunto de prácticas prototípicas realizadas por él mismo según las tareas propuestas en las situaciones-problemas presentadas por el docente. Registrar la trayectoria cognitiva es laborioso dado que conlleva una implicación del investigador en revisar todo lo relativo al alumno (apuntes, cuaderno de prácticas, intervenciones orales en clase, pruebas de evaluación, entrevistas, etc.) en el proceso de instrucción además se debe huir del cariz eminentemente subjetivo que esta observación atañe.

En definitiva, será la trayectoria cognitiva de los alumnos la que condicione el significado implementado por el docente. Estar atento a la actitud y acción de los alumnos, condicionará de algún modo el proceso de instrucción influyendo en primera instancia en la trayectoria epistémica.

Trayectoria emocional. Distribución temporal de los estados emocionales de cada alumno con relación a los objetos matemáticos según el proceso de instrucción implementado. El interés del alumno por el objeto de estudio, así como su compromiso o rechazo hacia éste son, entre otros, diferentes estados que condicionan el proceso de instrucción. En este sentido, la noción de *devolución* propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas responde a uno de los componentes principales de las trayectorias emocionales (Godino, Contreras y Font, 2006), de este modo, el conocimiento es presentado al alumno que no hará suyo lo mejor que pueda. "*El objetivo principal de la enseñanza es el funcionamiento del conocimiento como una producción libre de los estudiantes dentro de su relación con un medio adidáctico.*" (Brousseau, 1997, p. 229).

Como Ruiz Higueras señala (Ruiz Higueras, 2005, p. 27):

El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las *cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los propios alumnos. La gestión de una enseñanza de las matemáticas que dé respuesta a este modelo de actividad matemática queda bajo la responsabilidad del profesor* […].

Considerar en el proceso de enseñanza y aprendizaje la trayectoria emocional de los alumnos resulta determinante, por ejemplo, en aquellas situaciones-problema en que la/las tarea/tareas deban realizarse en grupo de estudiantes que posean necesidades educativas especiales (algún tipo de discapacidad, alumnos inmigrantes, etc.).

Es por ello primordial provocar lo que Brousseau define con el concepto de *devolución*: "*Devolución es el acto por el cual el profesor hace a los estudiantes aceptar la responsabilidad de aprendizaje en una situación (adidáctica) o en un problema, y acepta las consecuencias de esta transferencia de responsabilidad*" (Brousseau, 1997, p.230).

2.5.2. CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS

Una vez establecidas las trayectorias didácticas del proceso de instrucción, nuestro objetivo de investigación es identificar los posibles *patrones* que se presentan como respuesta a un desajuste en la negociación de los significados institucional y personal, lo que denominamos conflicto semiótico (véase Sección 2.1). Los tipos de interacciones didácticas, entendidas como cualquier relación entre dos o más objetos didácticos, sean éstos, epistémicos, cognitivos, docente, etc.; los factores condicionantes de su formación; así como la indagación de sus consecuencias en términos de aprendizaje matemático conduce al uso de la noción de *configuración didáctica* e *idoneidad didáctica* (Godino, Contreras y Font, 2006).

La resolución de una tarea en una determinada situación-problema implica en el docente, en el alumno, en los recursos didácticos y las propias situaciones, un conjunto de estados interconectados (dados por las diferentes trayectorias) que, en su conjunto, constituyen una unidad de análisis del proceso de instrucción. La secuencia de estos estados constituye el entramado de relaciones que entre los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas se establecen. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (cuando las redes se establecen entre objetos institucionales) o *cognitivas* (cuando las redes se establecen entre objetos personales).

Para ello, el EOS postula las diferentes facetas desde las que puede ser presentado el conocimiento matemático atendiendo al juego del lenguaje en que se ve inmerso. Estas facetas condicionan los sistemas de prácticas, y presentan unas dualidades que se complementan siendo de gran ayuda, manifestar su presencia en nuestro análisis didáctico.

Una *configuración didáctica* lleva asociada una *configuración epistémica* determinada por el saber de referencia y que se encuentra sujeta al cargo del profesor, de los estudiantes o di stribuidas entre ambos. Por otro lado, y asociada a una configuración epistémica se encuentra la *configuración instruccional*, constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales que se presentan en la tarea y por último a una *configuración cognitiva*, puesta de manifiesto por los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales en la implementación de una configuración epistémica.

El análisis de las configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso instruccional junto con las que potencialmente puedan diseñarse para su implementación, se verá facilitado si disponemos de modelos teóricos que nos sirvan de referencia. Podemos distinguir, atendiendo a la acción desempeñada por el alumno y el docente, cuatro tipos de configuraciones didácticas: la *configuración dialógica*, la *configuración personal*, la *configuración a-didáctica*, y la *configuración magistral* (Godino, Batanero y Font, 2007).

Desde el EOS se entiende por configuración magistral, la acción desempeñada por el docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, a modo de ejemplo, la manera tradicional o clásica de enseñar Matemáticas basada en la presentación discursiva del significado de los objetos matemáticos es una configuración didáctica magistral. Por contra, en caso de caer en el alumno la responsabilidad de realizar tareas que impliquen explorar en la búsqueda de la solución formulando conjeturas e hipótesis que puedan ser validadas por la propia situación-problema conlleva a hablar de configuración a-didáctica.

En el momento de regulación de los objetos emergentes que se hayan manifestado por parte de los alumnos que resuelven una tarea, surge un espacio de *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos (Godino, Contreras y Font, 2006). La negociación de significados implica hablar de una de configuración didáctica dialógica. Aunque, en caso de que la tarea sea realizada por el alumno sin que exista una interacción expresa del profesor, con el matiz de que el alumno se encuentre capacitado para resolverla, hablamos de configuración didáctica personal. En este tipo de configuración didáctica, básicamente predomina el *estudio personal* (Godino, Contreras y Font, 2006).

2.5.3. IDONEIDAD DIDÁCTICA

La caracterización de posibles trayectorias didácticas que optimicen el aprendizaje matemático sería de utilidad para abordar el reto de elaborar modelos prescriptivos desde una epistemología y axiología determinada. Es muy útil disponer de instrumentos que aporten descriptores que guíen la evaluación de pertinencia de un proceso de instrucción matemática determinado, así como la elaboración de currículos y diseño de investigaciones. En este sentido, el EOS crea la noción de idoneidad didáctica, como indicador de la adecuación de la instrucción a desarrollar (*a priori*) o desarrollada (*a posteriori*) en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este constructo se compone de seis facetas o dimensiones, y pretende abordar de modo integral la complejidad de factores que intervienen en el diseño, desarrollo y evaluación de cualquier proceso de estudio matemático. No tiene un carácter normativo sino explicativo, y aporta criterios de valoración de la viabilidad y adecuación de un proyecto de enseñanza (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006). Como Godino y cols. indican:

> *Se trata de una guía de orientación para la mejora de los procesos de instrucción, no de un criterio que produzca la frustración del profesor «normal» al no poderlo alcanzar. Los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan «cómo se deben hacer las cosas». A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado.*” (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p.61)

Hablar de idoneidad didáctica requeire integrar las interacciones entre cada una de las dimensiones que la conforman dado que, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza y aprendizaje (Godino, Batanero y Font, 2007). Se distinguen los siguientes criterios de idoneidad:

- *Idoneidad epistémica*. Referida a la representatividad del significado institucional implementado en relación al significado de referencia. En particular, supone la elaboración de una transposición didáctica capaz de acomodar por un lado el significado implementado al pretendido y por otro el significado pretendido al de referencia.

- *Idoneidad cognitiva*. Referida a la relación existente entre el saber personal del alumno previo a la instrucción y el saber institucional pretendido/implementado. Es decir, que exista el máximo ajuste entre el significado personal inicial del alumno y el significado institucional implementado, teniendo en cuenta además las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos disponibles (humanos, materiales y temporales). Castro (2007) indica al respecto, que las tareas propuestas a los niños deben tener un grado de dificultad "asumible" permitiendo suponer un pequeño "desafío".

- *Idoneidad ecológica*. Referida a la adaptación del objeto matemático de estudio en cuanto al proyecto educativo, es decir, su adecuación al proyecto educativo de centro, a las directrices curriculares, a las condiciones del entorno social y cultural, etc.

- *Idoneidad mediacional*. Referida a la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el proceso de instrucción. A modo de ejemplo destacar las situaciones de juego o de aprendizaje por proyectos donde se demanda gran cantidad de tiempo dado que si un tipo de actividad consume la mayor parte del horario, es muy probable que otro tipo de actividad quede sin realizar (Castro, 2007).

- *Idoneidad emocional*. Referida a la predisposición e implicación del alumno ante la actividad matemática a desarrollar. Esta idoneidad está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno.

  Las matemáticas producen ansiedad a muchos alumnos y es en este sentido en que debemos tener en cuenta el autoconcepto del estudiante como matemático y su confianza respecto a las matemáticas. Fomentar creencias perfeccionistas y un sentimiento de "inutilidad" en los alumnos puede llegar a incapacitarlos para hacer matemáticas (Castro, 2007). Una ayuda para potenciar la utilidad de la matemática evitando su aparente hostilidad y excentricidad es enfatizar las conexiones de las matemáticas con la realidad y presentar los conocimientos dentro de contextos en que se les dé sentido (Castro, 2007).

- *Idoneidad interaccional*. Referida a la interacción del alumno a favor de su autonomía en el aprendizaje. Un proceso de enseñanza-aprendizaje debe permitir identificar los conflictos semióticos potenciales además de ser valedora de permitir resolverlos durante el proceso de instrucción (Godino Batanero y Font, 2007). Como Castro (2007) indica, es de interés disponer de "*situaciones de aula en las que el tipo de interacción permite elucidar conflictos, discutir dentro del grupo e incorporar elementos en el proceso de estudio que permitan resolver los conflictos que aparecen.*" Estos conflictos no sólo surgen de la interacción profesor-alumno, alumno-alumno, sino que el propio material se puede prestar a dificultades según el modo en que presente la información y las actividades. (Castro, 2007).

La valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio es sumamente complicado dadas las diversas dimensiones en que se compone. Merece especial interés destacar en estas investigaciones las idoneidades epistémica y cognitiva, dado que el proceso de estudio gira en torno al desarrollo de unos conocimientos específicos por parte del alumno. El acoplamiento progresivo de los significados personales e institucionales y la apropiación de éstos últimos por los alumnos dada su participación permitirá lograr alcanzar el conocimiento, entendido éste como comprensión y competencia.

Godino, Bencomo y cols. (2007) nos presentan una serie de principios a destacar cuando buscamos un juicio positivo sobre la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio, éstos son:

- una evaluación inicial de los significados personales de los estudiantes con el objeto de comprobar que los significados pretendidos suponen un reto manejable;
- la existencia de adaptaciones curriculares que tengan en cuenta las diferencias individuales entendidas no como "atención a la diversidad" sino como consideración de la faceta institucional-personal;
- los aprendizajes logrados estén lo más próximos posible a los significados institucionales pretendidos/implementados;

La condición que el EOS plantea a la investigación en Didáctica de la Matemática, es aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio y para ello, una premisa fundamental es estudiar a fondo el proceso de enseñanza y aprendizaje, no limitándose pues a describir lo que ocurre en la actividad matemática sino previendo lo que ocurra.

Incorporar una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. permitirá valorar los procesos de instrucción efectivamente implementados así como guiar su mejora o diseñar propuestas de actuación. Disponer de criterios de idoneidad proporcionará un marco teórico de referencia para valorar cualquier proceso de estudio de las matemáticas en cualquier etapa educativa.

Un ejemplo lo encontramos en la propuesta de evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil que ofrece Castro (2007) donde indica y explica los criterios de idoneidad de modo que puedan estar al alcance de todo maestro en Educación Infantil además de todo especialista en Didáctica de las Matemáticas. Castro plantea una evaluación de métodos basada en la aplicación de criterios de idoneidad didáctica, anteriormente explicitados, que permiten valorar el grado de adecuación de estos métodos para su implementación en el aula acompañando a cada componente una serie de preguntas clave para guiar este proceso de evaluación.

Como plantea Garfield en cuanto a los fines de un proceso de evaluación, es necesario considerar las actitudes que los alumnos llevan a clase, cómo piensan y comprenden y en qué forma son capaces de aplicar su conocimiento. "*Sin este conocimiento, es difícil determinar cómo hacer cambios o diseñar la instrucción para mejorar el aprendizaje*". (Garfield, 1995b, p. 7).

2.5.4. DIMENSIÓN NORMATIVA

La clase de matemáticas constituye una "microsociedad" donde a través de interacciones entre los estudiantes, el profesor y el medio, se producen los procesos de enseñanza y el aprendizaje. Como cualquier actividad social, se encuentra regulada, en algunos aspectos de modo explícito y en otros de modo implícito, mediante normas.

Las configuraciones didácticas, articuladas por las trayectorias didácticas que se suceden, se encuentran sujetas a unos *patrones de interacción* o regularidades que se constituyen con frecuencia de una manera implícita. (Godino, Contreras y Font, 2006). La compleja trama de normas no sólo regula la dimensión epistémica de los procesos de estudio (concreción y directrices curriculares fijadas con frecuencia por decretos oficiales, e incluso leyes orgánicas), sino que también regula otras dimensiones como la cognitiva, afectiva, etc. "*Las normas sociales en el seno de la clase son convenciones que describen cómo comunicarse unos con otros, así como las obligaciones que describen cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación.*" (D'Amore, Font y Godino, 2007, p. 52). Así, reconocer el efecto de las normas que intervienen en las diversas facetas del conocimiento es un factor explicativo importante de los fenómenos didácticos, por lo que Godino y cols. indican:

> *El profesor de matemáticas tiene que tomar decisiones en su quehacer diario y para ello necesita pautas de actuación, algunas de las cuales vienen dadas desde instancias sociales, académicas, o son generadas en su propia práctica. Estas pautas se refieren a la planificación global de su trabajo, al desarrollo de unidades didácticas, o a los modos de interacción con los alumnos, el saber matemático y los recursos didácticos.*" (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p. 72).

Para poder describir con precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales según las distintas normas a que se encuentran sujetos (normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones, etc.), con objeto de su estudio y/o mejora, debemos considerar el conjunto de elementos que conforman lo que el EOS denomina la *dimensión normativa de los procesos de estudio*.

Desarrollar herramientas para identificar de modo sistemático y global las normas que condicionan y soportan los procesos de estudio matemático, tratando de identificar conexiones y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; permitirá alcanzar el cuarto nivel de análisis considerado por el EOS, como es la identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (Godino, Font, Wilhelmi, y Castro 2009) La distinción entre norma y metanorma no será abordada en el presente trabajo, pero un análisis más extenso se aborda en D'Amore, Font y Godino (2007).

El estudio de los fenómenos de índole social que se manifiestan en los procesos de enseñanza y aprendizaje constituye una línea de investigación de creciente desarrollo en Didáctica de la Matemática y aunque algunas de estas normas son específicas de la actividad matemática, algunas son generales y se pueden aplicar a cualquier aula no importando la disciplina que se trate. Muchos problemas y dificultades que se presentan en los procesos de instrucción tienen que ver con la complejidad de normas del aula y la diversidad de interpretaciones y valoraciones de éstas (Godino, Font, Wilhelmi, Castro, 2009).

En particular, las normas que regulan los procesos de enseñanza y aprendizaje pueden ser clasificadas atendiendo a diferentes criterios. En la Figura 5 se muestran cuatro puntos de vista desde los que se puede categorizar los tipos de normas.

Figura 5.Tipos de normas (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 14)

Si se clasifican atendiendo a los *grados de coerción o rigidez* se distinguirán según sean verdades firmes e invariables, convenciones de cumplimiento obligatorio, etc., y todas ellas marcadas por su carácter social o bien su carácter disciplinar, determinado por la institución en que se plantean.

Si se categorizan teniendo en cuenta el *origen* de las normas, se distinguirán atendiendo a si éstas provienen de la administración educativa, la sociedad, la escuela, el aula o la propia disciplina.

Si se especifican teniendo en cuenta el *momento* o fase del proceso de enseñanza y aprendizaje en que se manifiestan se pueden distinguir las normas atendiendo a si se desarrollan en el diseño curricular, en la planificación de la enseñanza, en su implementación o bien en la evaluación de la enseñanza y el aprendizaje.

Por último, y atendiendo a las normas que regulan los procesos de estudio matemáticos, éstas se pueden categorizar según la faceta del proceso de estudio a que se refiere cada norma, es decir, según las facetas duales del conocimiento matemático a que se refiera. Se distingue entre,

- *normas epistémicas*, que rigen las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución. Las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para el aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. Son componentes de las configuraciones epistémicas e informan de las condiciones epistémicas de la actividad matemática.
- *normas cognitivas*, que rigen la manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos. Implícitamente, dada la intervención del alumno en el conjunto de prácticas propuestas en las situaciones-problemas planteadas, se pretende conseguir que aprendan y que la institución se comprometa en lo posible para que ello sea posible. En este sentido surgen normas que regulan el comportamiento matemático de los alumnos y dichas normas personales (o cognitivas) pueden concordar o no con las normas epistémicas a que se hacen corresponder. La configuración cognitiva nos permite describir la estructura de los objetos que han posibilitado la práctica matemática

realizada por el alumno. Indica el grado de apropiación epistémica del alumno en cuanto al significado institucional implementado. (Godino, Font, Wilhelmi, Castro, 2009)

- *normas interaccionales*, que rigen las interacciones docente-discente y discente-discente. Las interacciones que surgen entre los alumnos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje se encuentran sujetas a normas y pautas de actuación. Por una parte, el contexto del propio sistema didáctico genera patrones de actuación (clase de prácticas, sesión de tutoría, etc.) pero por otra y no menos importante, se generan procesos sociales en el aula de tipo dialógico y de trabajo cooperativo que tendrán una mayor idoneidad interaccional para un aprendizaje autónomo del alumno. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y ayudarle a determinar la intervención más adecuada según la situación-problema planteada.
- *normas mediacionales*, que rigen el uso de los recursos humanos, materiales y temporales. El aula, los espacios físicos donde se reúnen los alumnos con el profesor, la pizarra (tradicional, de superficie plástica blanca sobre la que se escribe con rotuladores especiales, digital interactiva…), la tiza/rotulador, el borrador, el retroproyector, los materiales manipulativos, el ordenador y sus diferentes programas, el uso de la calculadora, etc., están sujetos a normas ó reglas específicas que deben ser conocidas.

  Ejemplos de normas mediacionales encontramos en la duración de la tarea, el uso de determinados recursos que a su vez requieren de la apropiación de configuraciones epistémicas, el uso de los diferentes espacios, etc. Todos ellos son ejemplos de normas mediacionales que condicionan los procesos de estudio. En este último caso, podemos destacar la importancia que existe entre una regla o norma mediacional y su implicación en la enseñanza y aprendizaje dado que ciertos conceptos geométricos y métricos requieren para su adecuado desarrollo de un macroespacio y su uso en ciertos centros se encuentra restringido por normas mediacionales suponiendo una limitación en el aprendizaje.
- *normas afectivas*, que rigen la afectividad de las personas intervinientes en el proceso de estudio. Con ellas nos referimos a la motivación, a la actitud positiva de los estudiantes, la autoestima y a la "obligación" que tantas veces se ha atribuido al profesorado de transmitirlas a sus alumnos, olvidándose de la importancia de que en la familia se cree un clima agradable de interés por el estudio que potencie todas estas cualidades.

Como primer nivel normativo encontramos la elección de las tareas a desarrollar en las situaciones-problemas donde se desarrollen, el modelo de instrucción a implementar, así como las configuraciones y trayectorias didácticas que se organizan y gestionan. De algún modo, el profesor debe buscar situaciones ricas y cercanas a la experiencia personal de los alumnos donde se creen condiciones para que el alumno acepte la responsabilidad de resolver los problemas.

En un segundo nivel encontramos el régimen interno de centro donde puede desmotivar a los alumnos la rigidez o condescendencia de la aplicación de sus normativas. Es de destacar la apreciación que Godino, Font, Wilhelmi, Castro, (2009) realizan sobre la responsabilidad y compromiso de los alumnos indicando que la emoción es algo que viene de fuera del individuo pero no por ello el alumno debe ser "mimado" sino que es el propio alumno quien debe ser responsable de su aprendizaje y por tanto comprometerse con el estudio (Godino, Font, Wilhelmi, Castro, 2009).

En un nivel más general se encuentra la sociedad y la propia administración educativa, que dota de espacios y medios materiales e incluso de ayudas al estudio.

- *normas ecológicas*, que rigen la relación con el entorno institucional (social, político y económico) en que se desarrolla el proceso de instrucción. Es decir, las relaciones de la escuela con la sociedad a cuyo servicio se constituye.

  Las normas ecológicas tienen que ver con los contenidos que se van a enseñar, el cumplimiento de la programación, la obligación de asegurar un ni vel de conocimiento y la obligación de informar de él a la sociedad, la incorporación de las nuevas tecnologías

Como señalan Godino, Batanero y Font (2007), la identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones del profesor y los alumnos atendiendo al conjunto de normas y su tipología;
- Sugerir cambios en los tipos de normas que refuercen el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con el propósito de una evolución en el acercamiento entre los significados personales e institucionales pretendidos.

Pensemos además que, la dimensión normativa que regula los procesos de estudio se ve influenciada por los criterios de idoneidad implicados y que un cambio en estos implica una reestructuración de aquellos (Godino, Font, Wilhelmi, Castro, 2009).

2.6. ANÁLISIS Y REFLEXIÓN GUIADA DE LA PRÁCTICA DOCENTE

Como decíamos en la sección anterior, el análisis, la crítica y, en definitiva, la idoneidad didáctica de cada uno de los factores que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, permitirá valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado así como guiar su posible mejora.

Esta valoración es ampliamente concebida como una evaluación de las producciones de los estudiantes, compuesta por pruebas, preguntas y sistemas de calificaciones. La información obtenida, permite al alumno conocer su progreso y nivel de adecuación a los objetivos previstos, pero corre el riesgo de limitarse a un m ero boletín de información. El propósito es conceder a la evaluación una parte integral del proceso de instrucción y no otorgarle el papel de culmen de la instrucción. La capacidad de retroalimentación es muy valiosa en cuanto a la calidad del aprendizaje.

En el caso de la estadística, los métodos de evaluación se ven sometidos a unos fines educativos en profundo cambio, donde para ser capaz de resolver problemas reales y utilizar el razonamiento estadístico en su consecución, no es apropiado evaluar el conocimiento haciendo calcular y aplicar fórmulas. Obviamente, la selección de métodos e instrumentos de evaluación depende del propósito fijado, pero sea cual fuere, deberá reflejar no sólo el conocimiento individualizado de cada alumno, sino además lo que realmente ocurre en el aula (Garfield, 1995b).

El EOS permite incorporar en los procesos de estudio una racionalidad axiológica que facilita el análisis y la justificación de la elección de los medios y fines, así como del cambio producido, permitiendo valorar los procesos de instrucción efectivamente implementados así como guiar su mejora o diseñar propuestas de actuación. Un ejemplo lo encontramos en la propuesta de evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil (Castro, 2007) donde se plantea una evaluación de métodos de enseñanza basada en la aplicación de criterios de idoneidad didáctica. Disponer de criterios de idoneidad (Sección 2.3.3) proporcionará un marco teórico de referencia que permite valorar el grado de adecuación de estos métodos para su implementación en el aula.

Como complemento al análisis y estudio de la cognición e instrucción matemática, el EOS ofrece un modelo de análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor, como una herramienta de gran utilidad para el análisis de su propia práctica docente.

Obvio es, que el conocimiento disciplinar del profesor no es por sí sólo valedor de su enseñanza. El hecho de que la práctica docente se lleve a cabo en el seno de una institución escolar con la pretensión de que cierto alumno se apropie de los conocimientos matemáticos según una realidad cultural, hace que la investigación en didáctica de la matemática deba considerar, en sus estudios, las aportaciones que desde diversas disciplinas se ofrecen en relación al ser humano y su entorno. Si centramos nuestra atención en la formación complementaria deseable en un docente en torno al alumno que aprende, disciplinas como la pedagogía, la psicología ó por ejemplo la antropología, sociología o filosofía, etc., ofrecen importantes estudios a tener en cuenta en nuestras investigaciones, al igual que por ejemplo la epistemología ó la semiótica.

El marco teórico EOS elabora herramientas para abordar el estudio de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las nociones teóricas propuestas por el EOS permitirán analizar y reflexionar sobre la práctica docente permitiendo al profesor tomar decisiones fundamentales sobre cómo realizar de un modo efectivo su labor profesional. Entre las tareas de diseño e implementación de los procesos de instrucción y la evaluación del proceso de aprendizaje de los alumnos a los que se dirige el esfuerzo educativo, se encuentra la valoración de la propia práctica docente en cada una de las anteriores tareas. Para ello, cada uno de los niveles de análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propuestos por el EOS, permitirán reflexionar a los profesores de matemáticas sobre su propia práctica docente (Godino, Font y Wilhelmi, 2008).

El análisis de las tareas sobre las que se organizan las configuraciones didácticas, es un paso previo a la elaboración de instrumentos de evaluación del aprendizaje y evidencia por tanto la importancia de su reflexión. En consecuencia, los profesores (incluyendo en éstos los profesores en formación) deben poseer un "*desarrollo de competencias instrumentales específicas que les permitan realizar los tipos de análisis*" (Godino, Font y Wilhelmi, 2008, p. 16) que sean necesarios en cada momento. A este aspecto, Godino, Rivas, Castro y Konic (2008) presentan un esquema de clasificación de las competencias específicas para la formación didáctica de los profesores según el EOS.

En Godino, Font y Wilhelmi (2008) podemos encontrar el desarrollo del análisis de una experiencia de enseñanza, en particular, de nociones elementales de estadística, donde se implementó una unidad didáctica basada en el uso de un proyecto de análisis de datos, con la finalidad de contextualizar los diferentes contenidos (estadísticos y didácticos). El interés de esta publicación es, entre otros, la aplicación de las nociones teóricas formuladas por el EOS para el análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje, guiado por una serie de cuestiones que pueden ser formuladas a modo de orientación en nuestros análisis en sus diferentes niveles.

Analizar el conocimiento matemático del profesor es un punto clave para el proceso de enseñanza y aprendizaje dado que su concepción sobre la adquisición del conocimiento motivará la adecuación de la actividad matemática a la de resolución de problemas en el aprendizaje. En este sentido, Godino, Rivas, Castro y Konic (2008) presentan el análisis (didáctico) epistémico-cognitivo de un problema aritmético-algebraico propuesto a profesores en formación. Se pretende, con el uso de las consigna "*¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego en la resolución del problema?*" que se reconozcan los diferentes elementos y sus significados, que se ponen en juego en los procesos de estudio matemático que deberán diseñar, implementar y evaluar.

Cabe destacar la aportación del marco teórico del Enfoque Onto-semiótico de instrumentos que contribuyen a elaborar nuestro análisis y reflexión didáctica como son: "Guía para el diseño de unidades temáticas", "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados", "Guía para el Reconocimiento de Actos y Procesos de Significación", "Guía para el reconocimiento de normas" y la "Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica", proporcionando un s istema de indicadores/pautas sobre los diferentes aspectos críticos de la práctica matemática, y que se describen a continuación.

2.6.1. GUÍAS PARA EL ANÁLISIS Y LA REFLEXIÓN DIDÁCTICA

El conjunto de guías que aporta el marco teórico del EOS constituye un ciclo de reflexión que se inicia en el momento de construir o fijar el significado de referencia (Godino y Batanero, 2009).

Gúia para el Diseño de Unidades Temáticas (GDUT). Que sirve de apoyo para diseñar unidades didácticas adecuadas dada la importancia de la selección de situaciones-problemas que permitan contextualizar las competencias matemáticas que se pretenden.

Gúia para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS). Que tiene en cuenta las configuraciones de objetos (intervinientes y emergentes) y los procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de los problemas propuestos en el contexto determinado, con objeto de categorizar los tipos de situaciones planteadas, identificar las variables de tarea, prever generalizaciones y adaptaciones, identificar conflictos semióticos y sistematizar las competencias matemáticas pretendidas.

La reconstrucción de la configuración de objetos y significados propuesta por esta guía para el conjunto de tareas propuestas, permitirá gestionar las interacciones en el aula, decidir la institucionalización del conocimiento tratado, así como prever conflictos semióticos (para ello se requiere la revisión de la literatura correspondiente). Esta guía puede completarse con la identificación de los procesos que intervienen en la actividad matemática y acompañan a cada una de las facetas del conocimiento tratado.

Gúia para el Reconocimiento de Actos y Procesos de Significación (GRAPS). Que permite identificar fenómenos didácticos relacionados con las interacciones entre el profesor y los alumnos, entre los alumnos entre sí, y entre los recursos mediacionales (medios tecnológicos, el tiempo, espacios…); tales como el reconocimiento de conflictos semióticos, la negociación de significados, la participación/implicación por parte del alumnado en el problema propuesto, el papel desempeñado por los recursos mediacionales, la gestión del tiempo, y en definitiva, observar el acoplamiento de los significados institucionales pretendidos a los significados personales (Figura 3, Sección 2.3.1).

Guía para el Reconocimiento de Normas (GRN). Que sirve de apoyo para mostrar las diferentes normas a q ue se encuentra sujeto el proceso de enseñanza y aprendizaje y que tienen lugar en diversos momentos del proceso (planificación, implementación, evaluación, etc.).

Gúia de Valoración de la Idoneidad Didáctica (GVID). Que sirve de apoyo en la valoración del proceso de estudio en cada una de las dimensiones en que este se orienta (epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional (interaccional, mediacional), y curricular/ecológica). La información recogida de los análisis descritos anteriormente, permitirá valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado y el reconocimiento de aspectos del mismo cuyo cambio aumentaría dicha idoneidad.

Con todo ello, la formación didáctica del profesor de matemáticas puede ser orientada y sistematizada por estas "Guías de análisis y reflexión" (Godino y Batanero, 2009, p.8), y a modo de síntesis se presentan la siguiente Figura 6. Así, estas guías sirven para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos, interacciones didácticas, normas y metanormas que soportan y restringen los procesos de estudio, y para la valoración de la idoneidad didáctica. Por otra parte, permiten hacer operativas las nociones de práctica matemática, configuración epistémica y cognitiva, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica. Además proporcionan un sistema de indicadores o pautas sobre los diferentes aspectos críticos de la práctica matemática.

Figura 6. Reflexión guiada (Godino y Batanero, 2009, p.8).

2.7. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo, han sido descritos los puntos de partida que motivan la necesidad de indagación sistemática de los significados puestos en juego en la actividad matemática. Para ello, han sido concretadas las componentes de los sistemas de prácticas (Sección 2.2) que, además de permitir desarrollar una observación más precisa, delimitan los elementos de análisis de nuestra investigación, según los momentos en que éstos se manifiestan.

El investigador, una vez sea descrito el significado sistémico de los objetos matemáticos que conforman su estudio, dispone de un análisis de primer nivel que abarca todo el conjunto de sistema de prácticas y tipología de problemas orientados al objeto matemático de la tarea (Godino, Font y Wilhelmi, 2008).

La potencialidad del marco teórico del EOS, abarca mucho más que esta primera aproximación al estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático. Los constructos descritos en este capítulo, son en sí el propósito de desarrollo de un análisis profundo que evidencie la marcada presencia de la situación-problema en el aprendizaje del alumno, así como el equilibrio de lo personal e institucional en la secuencia de prácticas que en cuanto al objeto matemático son desarrolladas. Así es que desde el EOS se propone unos niveles de investigación, que parten de este análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas que consituyen su significado sistémico, propiciando un terreno firme donde se pueda interpretar la naturaleza de los conflictos semióticos que se manifiesten. Todo ello desde un horizonte en que se contemple el progresivo avance en la adquisición del conocimiento matemático por parte de nuestros alumnos, sin menoscabar en el proceso de instrucción implementado. Estos niveles de investigación a que nos referimos se encuentran en un estudio desarrollado por Font, Planas y Godino (2010), quienes presentan un modelo teórico para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje y es aplicado a un episodio de clase de matemáticas. Aunque ciertas partes del modelo que presentan son específicas de la actividad matemática, pueden ser adaptadas para servir de análisis didáctico a otras áreas de enseñanza y otros tipos de prácticas escolares. Estos niveles son:

2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;
4. Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Cada uno de estos niveles de análisis, que tendrán un peso diferente según el momento del proceso de instrucción que se esté considerando en la investigación, constituye un modo de desarrollo de un análisis didáctico completo que permite describir, explicar y valorar los procesos de estudio. Así por ejemplo, el primer y segundo nivel son fundamentales en el diseño y planificación del proceso de instrucción; el tercero y cuarto nivel son fundamentales en el estudio de la implementación realizada y el quinto nivel es particularmente útil en la fase de planificación como en la fase de evaluación de los procesos de instrucción (Godino, Font y Wilhelmi, 2008). Estos niveles de análisis sirven de guía para el desarrollo de cualquier investigación que se desarrolle en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

"*Conocer si los sucesos se relacionan y, con qué intensidad lo hacen, facilita a las personas explicar el pasado, controlar el presente y predecir el futuro*".
(Crocker, 1981, pg.272)."

CAPÍTULO 3.

LA ESTADÍSTICA, OBJETO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

3.1. INTRODUCCIÓN

La Estadística es una disciplina en plena evolución, que ha acompañado al hombre desde su existencia. Dados sus usos y época en que fueron formulados, se explica la variedad de definiciones que se le han atribuido. Como señala Gutiérrez (1994, p.21): "*Los orígenes de la estadística se confunden con los de la humanidad; pero sólo en tiempos recientes ha adquirido esta ciencia la categoría de disciplina relevante y de importancia práctica.*"

Agradeciendo a la multitud de investigadores sus aportaciones que desde mediados del siglo XVII se han ido sucediendo, podemos contemplar la evolución de su estructura y organización donde, partiendo de una concepción puramente aritmética de recogida de datos numéricos con un fin estatal, se van descubriendo las leyes estadísticas que gobiernan ciertos procesos (proporción de sexos en los nacimientos, supervivencia, etc.) y surge la necesidad de unificar los métodos de recopilación y abstracción de resultados con el propósito de fijar un fin común del que se sirviesen estadísticas más generales.

Para comprender la naturaleza de la Estadística, Gutiérrez (1994) aconseja distinguir entre *estadísticas* en plural y *estadística* en singular. Las estadísticas, son las colecciones de datos obtenidos mediante el proceso estadístico, las cuales serán presentadas de un modo ordenado y sistemático para su divulgación. La Estadística, como ciencia, "*estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo.*" (Gutiérrez, 1994, p.22). De este modo, son estudiados los caracteres generales de un conjunto o colectivo con el propósito de obtener información de ellos. El material de estudio sería esta información recogida, que será tratada mediante un modo propio de razonamiento "*el método estadístico*" donde se generan unas *previsiones* en un ambiente de incertidumbre.

Hace unos pocos años, que los investigadores se han interesado por los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, y en la actualidad, asistimos a un aumento notable de publicaciones, diseños curriculares e investigaciones relacionadas con este tema (Estrada, 2002). Por otra parte, es evidente que la preocupación por la educación estadística, llevada a cabo por instituciones tanto nacionales como internacionales, ve poco a poco su fruto y muestra de ello la encontramos, en particular, en los Congresos Internacionales de Educación Matemática (*ICME*) donde se han dedicado temas específicos de educación estadística, en los *ICOTS* (*International Conference on Statistical Education*) que se iniciaron en 1982 en la universidad de Sheffield y continúan cada cuatro años; o las actividades desarrolladas por diversas sociedades de Estadística o de educación como por ejemplo: *ASA* (*American Statistical Association,*), *AERA* (*American Educational Research Association*), *Royal Statistical Society* (en Inglaterra), *Sociedad estadística Japonesa*, *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, etc

Las revistas orientadas a los profesores de Estadística muestran además, un interés por mejorar la acción docente donde destacamos, entre otras, la revista *Teaching Statistics*, que ha ido adquiriendo a lo largo de su existencia una identidad y calidad internacional reconocida, se edita desde 1979 y ha servido de referencia a los profesores de Estadística de los niveles no universitarios. La revista *Induzioni*, que fue fundada, en 1990, con la intención de reunir material e ideas para la enseñanza de la Demografía, Probabilidad y Estadística en las escuelas (Ottaviani, 1998).

La revista *Journal of Statistical Education*, que es editada por la American Statistical Association, difunde el conocimiento para la mejora de la educación estadística en todos los niveles, incluyendo primaria, secundaria, post-secundaria, de postgrado, formación continua, y formación en la empresa, y se ofrece gratuitamente "on-line".

Otra revista, dedicada solamente a investigación en Educación Estadística, es: "Statistics Education Research Journal" (SERJ). Esta es una revista de difusión electrónica, con revisión confidencial de trabajos por expertos, editada por la Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE) y el Instituto Internacional de Estadística (ISI). Se publica dos veces al año. Su objetivo es profundizar en el conocimiento basado en la investigación que pueda ayudar a mejorar la enseñanza, el aprendizaje y la comprensión de la estadística y probabilidad de todos los niveles educativos y en contextos formales (aula) e informal (fuera del aula).

Es indiscutible que el siglo XX ha sido el siglo de la Estadística, que ha pasado a considerarse una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental. La enseñanza de la Estadística se encuentra en sus comienzos, avanzando de modo imparable y con una gran expansión futura, donde la motivación por alcanzar una interpretación adecuada de sus técnicas es premisa fundamental en cualquier análisis de datos.

La principal razón que induce a incluir el estudio de la Estadística en la educación de nuestros escolares, radica en la fuerte presencia que esta adquiere en nuestro entorno. La amplitud de aplicaciones que presenta la Estadística, son concretadas por la American Statistical Association y el National Council of Teachers of Mathematics en 1972 en cuatro grupos que abarcan: el mundo biológico, social, político y físico, del ser humano. Se subraya así, la naturaleza humana de la Estadística y su presencia en la sociedad en que vivimos donde, para poseer una comprensión plena del mundo moderno, se requiere un cierto nivel de pensamiento estadístico (Tanur, Mosteller, Kruskal et al., 1972).

En las siguientes secciones, hacemos una somera descripción de la presencia de la Estadística en la enseñanza de las Matemáticas, así como de aspectos relativos a la enseñanza de los conceptos estadísticos, centrando nuestro interés en las nociones de correlación y regresión y particularizando en el lugar que ocupan el sistema educativo.

3.2. LA ESTADÍSTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El dominio de los conocimientos matemáticos y la adquisición de destrezas matemáticas, es una necesidad acuciante de la sociedad actual, donde la rapidez con que la sociedad evoluciona y cambia hace necesario que los ciudadanos se encuentren preparados para su continua adaptación. Así es que encontremos la enseñanza de las matemáticas en el sistema educativo español proyectada desde una concepción de la matemática como útil o medio para conocer y comprender la realidad. Atendiendo a estos aspectos, los curricula actuales aconsejan introducir los conocimientos matemáticos a partir de situaciones reales, donde intervengan con sentido los objetos matemáticos a estudiar.

Según esta perspectiva, hemos de considerar la presencia de la Estadística en la vida diaria del ciudadano (prensa, radio, Tv, libros y revistas especializadas, etc.), siendo ésta utilizada como medio y como fin en cuanto a la búsqueda de información. Esto es, la Estadística es susceptible de ser utilizada, bien como método de investigación, bien como vehículo de transmisión de información. De cualquier modo, el ciudadano se encuentra envuelto en una terminología y un tipo de razonamiento que requieren de una enseñanza y aprendizaje específicos que le permitan vivir plenamente en sociedad.

De este modo, las estadísticas elaboradas por el gobierno de un país influyen en las vidas profesionales y personales de sus conciudadanos. Toda investigación que un gobierno realice, y las conclusiones a las que con ellas se confluyan, influyen en la calidad de los datos de investigaciones sucesivas, en una efectiva y eficaz planificación, en una efectiva asignación de recursos, y en última pero no menor importancia, en la política de evaluación llevada a cabo por parte de académicos, empresas, funcionarios de gobierno y, cómo no, de todo ciudadano interesado y preocupado por el país del que forma parte activa. El objetivo no es otro que subrayar la importancia de fortalecer la comprensión de las estadísticas y el pensamiento estadístico en todos los sectores de nuestra población (Wallman, 1993).

La voluntad de los ciudadanos a facilitar información en cualquier tipo de investigación, la desconfianza ante el trato que de la información suministrada sea llevado a cabo, y las dudas o el recelo acerca de los resultados obtenidos de dichas estadísticas públicas ó privadas, tienen sus raíces en una sociedad ausente de una "*alfabetización estadística*" ó "*cultura estadística*". Como Peter Moore manifiesta en su discurso presidencial de 1990 a la Royal Statistical Society, necesitamos, nutrir la preparación estadística de las personas, y mucho más la del consumidor, dado que no sólo se debe entender mejor las estadísticas sino que, más fundamentalmente, ha de potenciarse el pensamiento estadístico, inculcando de este modo lo que se denomina "cultura estadística" para el desempeño de las habilidades de cualquier ciudadano (Moore, 1990).

Son diversas las perspectivas que en torno a la alfabetización estadística encontramos dentro y fuera de la propia profesión estadística. Wallman (1993) nos ofrece un enfoque unificado de diversas fuentes y perspectivas indicando que:

> *"Alfabetización estadística" es la capacidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que impregnan nuestra vida cotidiana - junto con la capacidad de apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer en las decisiones públicas y privadas, profesionales y personales.* (Wallman, 1993, pág. 1)

Todo esto justifica la importancia que la Estadística posee en la formación integral de nuestros escolares. A modo de ejemplo, en la Comunidad autónoma de Andalucía y en la etapa de educación infantil, encontramos su presencia del siguiente modo:

> […] *comprender y representar algunas nociones y relaciones lógicas y matemáticas referidas a situaciones de la vida cotidiana* […] [donde] *los niños y las niñas constaten la existencia en nuestras vidas de situaciones con interrogantes o incógnitas cuya resolución exige la reflexión sobre ellas y la aplicación de esquemas de pensamiento.*".

Para ello, y mediante situaciones vinculadas a su entorno y/o vivencias cotidianas, se plantean la necesidad de propuestas educativas que impliquen la recogida de datos y la organización de los mismos, donde se describan resultados de los datos recogidos, y se pueda discernir desde una terminología cercana y comprensible, si una situación es probable o improbable.

El carácter continuo de los procesos de enseñanza en las etapas educativas que conforman la educación básica (Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria), mantienen una formulación sensiblemente paralela, considerando los aspectos estadísticos como parte integrante de los núcleos temáticos del área de matemáticas, si bien, la formulación, las ideas y las técnicas estadísticas en la educación secundaria obligatoria será poco a poco más compleja, respondiendo además a la diferencia de contenidos relativos a la opcionalidad de la asignatura de Matemáticas (opción A y opción B) en el cuarto curso de esta etapa (MEC, 2007b).

En cuanto a la educación secundaria postobligatoria, que comprende el bachillerato, la formación profesional de grado medio, las enseñanzas profesionales de artes plásticas y diseño de grado medio, y las enseñanzas deportivas de grado medio; destacamos la presencia de la Estadística en el currículo correspondiente a la enseñanza de bachillerato en dos de las tres modalidades en que se desarrolla: modalidad en *Ciencias y Tecnología* (asignatura de *Matemáticas I*) y modalidad en *Humanidades y Ciencias Sociales* (asignaturas de *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* y *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*) (MEC, 2007b).

La presencia de la Estadística en la enseñanza de las Matemáticas es evidente, no obstante, la introducción de nuevos temas de contenido estadístico en los curricula supone un reto para los profesores al tener que preparar, adaptar e impartir los "nuevos contenidos", que hasta hace muy poco tiempo no se contemplaban. A todas estas consideraciones, hemos de añadir el aspecto interdisciplinar que la Estadística tiene en cuanto a disciplinas como las Ciencias Sociales, Biología, Geografía e Historia, entre otras. En el caso de la Comunidad Autónoma de Andalucía, se fijan orientaciones en cuanto a la visión interdisciplinar de los contenidos en su enseñanza tales como adaptaciones curriculares, materiales y recursos de situaciones de enseñanza-aprendizaje útiles y adecuadas al nivel, edad e incluso en cuanto al interés y motivación de los alumnos (Consejería de Educación, 2007c).

Muchos de los contenidos matemáticos de los nuevos curricula, tienen gran tradición de enseñanza en nuestro país, al contrario de lo que ocurre con los contenidos estadísticos, al menos en los niveles elementales de enseñanza, y esto puede ser un factor añadido a la capacidad del profesorado.

No tratamos de ofrecer una visión catastrófica de la enseñanza de la Estadística, sino de mostrar que existen numerosas dificultades de tipo filosófico, epistemológico y didáctico, ligadas a la interpretación y aplicación de los conceptos estadísticos en situaciones prácticas, entre otras causas, por la pluralidad de significados que son atribuidos por el uso del lenguaje. Una aproximación didáctica a esta problemática es la evidenciada por Batanero (2001) cuando señala la importancia que juegan las intuiciones o concepciones previas del alumno en cuanto al aprendizaje de la estadística, manifestándose con ellas una doble funcionalidad:

- Ayudan al alumno a *entender su entorno*, mucho antes de que tome conciencia de la complejidad matemática subyacente.
- *Preparan el conocimiento analítico posterior*.

En este sentido, las dificultades que habitualmente se presentan se refieren a las concepciones previas que un individuo posee, factores notables en los que la investigación sobre la enseñanza, y aprendizaje de los conceptos estadísticos proporcionan conocimiento sobre los fenómenos que se suceden en el aula. A continuación, se describen brevemente algunas de estas dificultades en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos estadísticos.

3.3. ENSEÑANZA DE LOS CONTENIDOS ESTADÍSTICOS: CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

Una protesta común del profesorado, en cuanto a la enseñanza de los conocimientos estadísticos, es el tiempo de que disponen para las diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de enseñanza y aprendizaje (tiempo didáctico). De algún modo, justifican con este hándicap con la necesidad de ceñir la enseñanza de los contenidos estadísticos a la transmisión de una serie de fórmulas o "recetas" unidas a una descripción de su utilidad. Según esta concepción de enseñanza de la estadística, el alumno no tiene la posibilidad de aprender de un modo significativo las nuevas nociones que se pretende que adquieran.

Según los fundamentos de la enseñanza de la Matemática expuestos en el Capítulo 2, los objetos matemáticos emergen del conjunto de prácticas (situaciones-problema) que el alumno realiza, siendo éstas establecidas previamente con arreglo al significado pretendido. De este modo, cuando el alumno interacciona con los objetos matemáticos involucrados en las diferentes situaciones-problema, el objeto matemático tratado adquiere significado personal en el alumno. En la mayor parte de los casos, las nociones estadísticas se presentan a los alumnos de un modo limitado, con un enfoque particular y encasillado, impidiendo adquirir un razonamiento superior, que permita ser generalizado y no se limite a la práctica particular. El conjunto de situaciones-problemas de tipo estadístico que el alumno trata de resolver, dan la impresión, de estar más centradas en las técnicas estadísticas que se utilizan para su resolución que en la interpretación de los resultados obtenidos. Así es que el alumno se limita a aplicar la estadística como un conjunto de fórmulas (que no entiende), pero que ofrecen conclusiones poderosas, aunque tristemente, no sepan interpretar.

Muchas de las nociones estadísticas que se enseñan a los estudiantes no debieran de ser difíciles de comprender para ellos, siempre y cuando el estudio de la Estadística fuese iniciado en edades tempranas como indican las concreciones curriculares. Poco a poco estas nociones se irán progresivamente graduando en profundidad y formalización, y complementando con las propiedades y técnicas que se requiera.

Pudiera parecer que algunos profesores pensasen que la enseñanza de la Estadística debiera posponerse a los cursos anteriormente próximos a la Universidad o la Escuela Politécnica, dada la dificultad de comprensión de sus nociones, aunque esta idea es totalmente contraria a los principios que rigen la actual Ley Orgánica de Educación (ME, 2006), donde se pretende proporcionar una educación de calidad a todos los ciudadanos y ciudadanas. Es por ello, que no se debiera dejar la Estadística para los niveles superiores, dado que una parte importante de la población quedaría privada de la adquisición de conceptos y técnicas de gran importancia para su vida. Por otra parte, la investigación en Educación Estadística, manifiestan la posibilidad de iniciar a los niños en el estudio de la estadística desde edades tempranas, como por ejemplo los pioneros de Fischbein (1975) en el caso de la probabilidad.

No vamos a negar que ciertas nociones estadísticas poseen cierta complejidad, como el caso de la correlación o la regresión, pero existen diferentes niveles de aproximación a estos conceptos, susceptibles de ser adaptados a cada etapa educativa. Para ello, trabajar las nociones estadísticas básicas desde la Educación Infantil, adecuando gradualmente los niveles de profundidad a la madurez de los alumnos, permitirá construir una idea más clara de los diferentes contextos de los datos, del fundamento de las técnicas estadísticas aplicadas, y en definitiva, una visión más real de la estadística. Por ejemplo, en la Comunidad Autónoma de Andalucía, una de las nociones que se introducen en edad temprana es la de situación aleatoria (Consejería de Educación, 2008a). Sería de gran ayuda que efectivamente así se implementara ya que, en general, los alumnos perciben el mundo que les rodea desde una concepción determinista, y la interdisciplinariedad de la Estadística debiese hacerse notar, principalmente para la consecución de las competencias de nuestro alumnado, ya que de este modo se proporcionan ricas experiencias que favorecen el reconocimiento de los aspectos aleatorios y deterministas de nuestro entorno. Cimentar el pensamiento estadístico desde nociones básicas, que se vayan poco a poco desarrollando, permitirá a nuestros alumnos razonar más libremente, con la consecuente fortaleza para la toma de decisiones.

Por otra parte, la enseñanza de las Matemáticas establece, tradicionalmente, un efecto determinista de sus nociones dado que el profesor, implícita o explícitamente, ha manifestado muchas veces la inexactitud de las respuestas de los alumnos. Enfatizar la unicidad y la deducción en la ciencia matemática, puede repercutir en la enseñanza de la Estadística dado que, por la especificidad de ésta, existe la posibilidad de ser establecidas diversas conclusiones con diferentes grados de certeza para un mismo conjunto de datos.

Dadas estas consideraciones sobre la enseñanza de los contenidos estadísticos en general, se presentan a continuación la génesis de la correlación y regresión, su utilidad en la estadística y nos centramos en su concreción curricular en el sistema educativo.

3.3.1. ORIGEN DE LAS NOCIONES DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

Los primeros trabajos científicos que encontramos en cuanto a la asociación de variables estadísticas proceden de Galton (1822-1917). Según Hald (1998), Galton era hijo de un banquero de Birmingham que estudió medicina y matemáticas en Londres y

Cambridge. En 1844 murió su padre, dejándole una inmensa fortuna que le permitió dedicar su vida a asuntos de su interés que no eran precisamente los médicos. La primera parte de su vida la dedica a estudios geográficos y meteorológicos, llegando a tener un papel destacado en los mapas del tiempo diarios del periódico "The Times".

En el periodo 1865-1890, su principal interés fueron los estudios empíricos de las leyes de la herencia por medio de métodos estadísticos donde, la labor investigadora desarrollada por investigadores como Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet (1796-1874), conocido como Adolphe Quetelet, supuso un punto de gran apoyo para Galton en cuanto al desarrollo de las nociones de correlación y regresión (Hald, 1998)

Nacido en Ghent, Bélgica, obtuvo el doctorado en Matemáticas con una tesis sobre secciones cónicas. Fue director del observatorio astronómico de Bruselas. Era un hombre de gran energía, entusiasmo y talento organizativo que utilizó para crear varias instituciones internacionales. En relación con nuestro trabajo sus aportaciones se circunscriben a sus estudios sobre el hombre medio, estudiando medias y desviaciones de medidas antropométricas. Afirma que el hombre depende de varias variables independientes: sexo, edad, edad, profesión, educación, moralidad, etc. En sus estudios relaciona dos o más variables, por ejemplo llega a obtener una ecuación de una hipérbola que relaciona la edad y la altura de las personas entre cero y 30 años. Introduce la distribución normal en Biometría (Hald, 1998). Su originalidad no es haber calculado las medias de las magnitudes antropométricas, sino haber considerado su dispersión y descubierto que la ley normal (bien conocida en Astronomía) ofrecía una descripción aceptable de tal variabilidad. Utilizaba esta distribución como ajuste a sus medidas antropométricas, Seal (1967).

Un avance en cuanto al desarrollo de estos conceptos consistió en el estudio conjunto de la variación de dos medias realizado por Francis Galton

Desde el punto de vista de la estadística matemática se puede considera a Galton como un ingenioso amateur, ya que, sin conocer los refinados métodos estadísticos de la época (de Laplace y Gauss) y por medio de investigaciones empíricas de las leyes de la herencia, estudia la variabilidad de características humanas y desarrolla sus propios y rudimentarios métodos para describir observaciones univariadas y bivariadas normalmente distribuidas, explicando la utilidad y el significado de la correlación y regresión no solamente en el contexto de la herencia sino en general.

Galton no conocía la literatura estadística germana y utiliza el método de Quetelet, tomado de un geógrafo para ajustar una distribución normal a sus datos. Este método era muy simple desde el punto de vista numérico, ya que, requiere solamente el cálculo de frecuencias relativas y la interpolación en la tabla de la binomial acumulativa. Como no domina con soltura la matemática de su tiempo utiliza artificios mecánicos para "probar" las propiedades de la distribución binomial como el de la Figura 7 que llamó "quincunx" (1889), también llamado aparato de Galton.

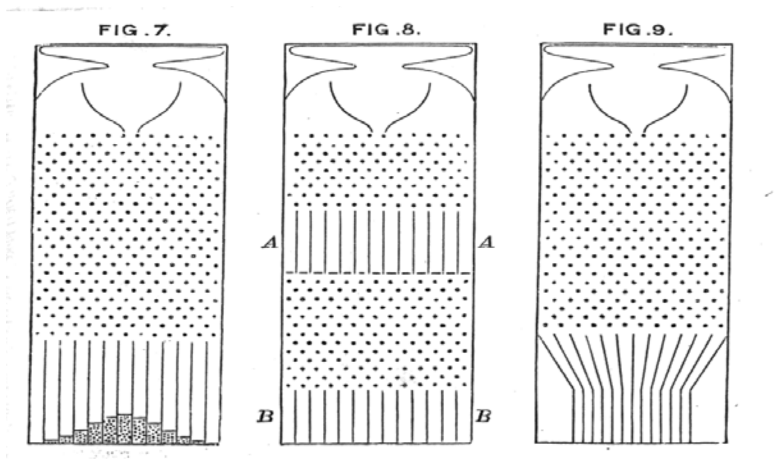

Figura 7. Versiones del quincux o aparato de Galton en Natural Inheritance, p. 63 (Hald, 1998, p. 605)

Quizá su parentesco con Charles Darwin, potenció la necesidad de ofrecer un sustento científico a la ley de herencia biológica presentada en *El origen de las especies* (1859) donde, al no disponer de suficientes datos humanos, diseñó un experimento con semillas de guisantes en 1875, para estudiar la distribución de los pesos de las semillas en dos generaciones (Hald, 1998).

Motivado por la idea de que ciertos caracteres de los padres y otros antepasados influían en los hijos, planeó un método de trabajo donde, al observar que la distribución de los pesos de las semillas utilizadas se distribuía según una distribución normal, seleccionó 7 grupos conteniendo cada grupo 70 semillas del mismo peso. El peso de cada semilla de cada grupo era la media más o menos 0, 1, 2 y 3, desviaciones típicas. Pidió a 7 amigos de diferentes partes del país que cultivaran un grupo de semillas y que le enviarán las semillas cosechadas. Sus conclusiones fueron:

a) Para cada grupo de semillas padres, el peso de las semillas filiales estaba normalmente distribuido;

b) El peso medio de las semillas filiales es una función lineal del peso de las semillas padres con una pendiente menor que la unidad, es decir, el peso medio de la progenie se desvía menos de la población media que de los padres, Galton llamó a esta propiedad **reversión** (después se llamará correlación);

c) La desviación probable del peso de las semillas filiales es la misma para todos los grupos y más pequeña que la desviación probable del peso de las semillas padres.

Para explicar estas propiedades se basa en unos dibujos similares a los de un quincunx (Figura 8).

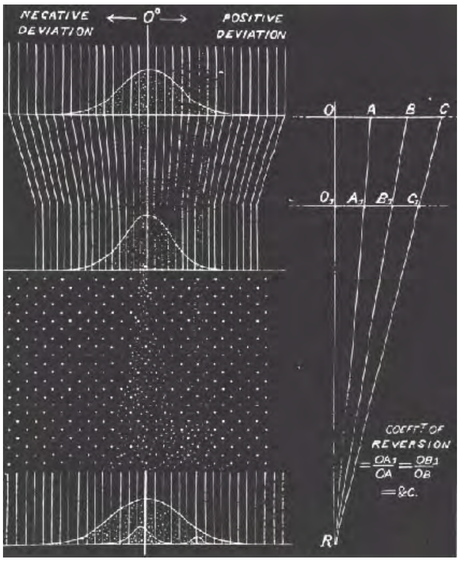

Figura 8. Ilustración de Galton de la identidad estadística de dos generaciones sucesivas obtenidas por reversión combinada con dispersión binomial (1877, p.493) en Hald (1998, p. 606).

Los padres de peso $M+x$ producen hijos adultos de peso medio $M+r\cdot x$, donde $0<r<1$ (observado en el quincunx de la Figura 7). El peso de los hijos llega a ser $M+r\cdot x+y=M+z$ por la variación aleatoria de entre hijos del mismo grupo de padres, variación que se observa en el quincunx. La identidad estadística de las dos generaciones significa que $\sigma_x^2=\sigma_y^2$, en consecuencia, $\sigma_x^2=r^2\cdot\sigma_y^2+\sigma_y^2$, o lo que es lo mismo, $\sigma_y^2=\sigma_x^2\cdot\left(1-r^2\right)$, que nos da la relación entre la varianza condicional (variación entre grupos), la varianza marginal (la variación entre el total de la población) y el coeficiente de reversión.

En 1869 publica el libro "*Hereditary Genius*", orientado a estudiar la influencia de los padres y otros antepasados en los hijos. El método para expresar estas múltiples relaciones de causalidad se le ocurre a Galton una mañana, repasando unas notas de su libreta mientras esperaba el tren. Lo cuenta del siguiente modo:

> *Parecía evidente por observación, y había sido completamente confirmado por esta teoría, que existía un "índice de correlación"; o sea, una fracción, que ahora llamamos simplemente r que relaciona con la mayor aproximación cada valor de desviación (de la media) por parte del sujeto con el promedio de todas las desviaciones asociadas, del pariente, tal como ha sido descrito. Por lo tanto, la aproximación de cualquier parentesco específico puede ser hallada y expresada con un término único. Si un individuo particular se desvía mucho, el promedio de las desviaciones de todos sus hermanos será una fracción definida de esa cantidad; del mismo modo que los hijos, los padres, primos hermanos, etc. Cuando no hay relación alguna, r se vuelve igual a 0; cuando es tan cercana que sujeto y pariente poseen idéntico valor, entonces r = 1. Por lo tanto, el valor de r reside siempre entre los límites extremos de 0 y 1. Mucho más podría añadirse, pero no sin usar lenguaje técnico, lo cual sería aquí inadecuado* (citado por Newman, 1956, pg. 239).

Galton no había considerado más que la distribución conjunta de una medida X, tomada conjuntamente sobre el padre y su descendencia, pero con posterioridad se da cuenta de la posibilidad de estudiar variaciones conjuntas de medidas biológicas diferentes sobre los mismos individuos.

En su obra, *Natural Inheritence* (1889), Galton propone un formidable programa de investigación biométrica: estudiar estadísticamente la variabilidad y la plasticidad de las formas vivientes, a fin de confirmar matemáticamente el mecanismo de la evolución descrito por Darwin (Benzecri, 1982). En consecuencia, Galton se dio cuenta de que sus descubrimientos parecían dar lugar a un amplio campo de aplicación de problemas sociales que caerían bajo las leyes de la correlación y, en consecuencia, existe un amplio campo de investigación que es continuado por prestigiosos autores como Edgeworth, Pearson, Yule, Seppard (Hald, 1998) que en tiempos posteriores desarrollaron estas ideas en profundidad.

A continuación, presentamos su utilidad educativa, siendo tratadas en el estudio de variables estadísticas bidimensionales.

3.3.2. LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN, ÚTILIES EN EL MÉTODO ESTADÍSTICO

Tradicionalmente, la Estadística se ha concebido fragmentada en dos partes, integradas mediante el Cálculo de Probabilidades, como son la Estadística descriptiva y la Estadística inferencial. En la actualidad, la aplicabilidad de esta ciencia y su propio desarrollo, ha hecho extensa su investigación, planteando nuevas corrientes y líneas de investigación con entidad propia, atenuándose así dicha partición absolutista. Una de estas corrientes corresponde al *Análisis Exploratorio de datos* (en adelante AED) desarrollado por Tukey (1962; 1977).

El impulso que la informática ha dado a la investigación en Estadística, ha posibilitado el desarrollo de una serie de tipos de análisis de datos, que se sitúan, por su aplicabilidad, entre las anteriores concepciones de la Estadística (descriptiva e inferencial).

La viabilidad de manejar grandes masas de datos, con el provecho de disponer de la mayor información posible, permite la aparición, entre 1960 y 1980, de una nueva filosofía de estudio estadístico donde, la posibilidad de disponer de una amplia variedad de gráficos y de estadísticos de un modo rápido y sencillo, hace replantear la labor estadística llevada hasta el momento, otorgando importancia a la representación visual de los datos y ofreciendo con ello conclusiones de éstos sin necesidad de recurrir a la Estadística inferencial para ajustar los datos a un modelo preestablecido.

La ventaja de explorar los datos recolectados, pudiéndose conseguir cualquier información de los mismos, hace desarrollar técnicas concretas para su aplicación como el gráfico de la caja o el de tallo y hojas y a la vez, potenciar el uso de técnicas que hasta el momento sólo eran utilizadas en situaciones-problema con objetivos concretos. Este es el caso de las nociones de correlación y regresión.

Cuando se analiza la posible relación entre variables de interés, el investigador no debe basar su estudio únicamente en ajustar los datos a un modelo prefijado, como puede ser un ajuste lineal, sino que debiera estudiar diversos estadísticos, comparar los modelos planteados con los residuos, estudiar la significación estadística de los parámetros utilizados para descubrir si la relación entre las variables se debe o no al azar, etc. Aunque los estadísticos calculados presenten un valor estadísticamente significativo (por ejemplo, que el coeficiente de correlación sea significativamente distinto de cero), la relación entre las variables puede no ajustarse bien al modelo establecido (por ejemplo, a un ajuste parabólico). A modo de ejemplo podemos citar, la importancia del estudio exploratorio de datos influyentes (*outliers*) para el ajuste lineal mínimo-cuadrático. Esto es, los datos atípicos u observaciones anómalas, pueden determinar el ajuste analítico de la recta de regresión y un estudio exploratorio en que se observe el efecto producido al quitar-incluir observaciones, es vinculante para los resultados de nuestra investigación.

Análisis Exploratorio de Datos

El principio general del AED consiste en estudiar los datos recolectados desde todas las perspectivas posibles con el propósito de extraer cuanta más información. Las hipótesis o conjeturas que se establezcan, serán evidenciadas por las propias observaciones de que se dispone, y para ello serán utilizadas todas las herramientas posibles (Batanero, 2001).

Como premisa de este análisis, se ha de considerar la "*regularidad - tendencia*" y la "*desviación - variabilidad*" presente en los datos. Ambas características permitirán investigar y establecer el modelo estadístico que mejor se ajuste a los datos. Por regularidad se entiende, la estructura con la que se compone el conjunto de datos. Una vez estudiada la regularidad presente en los datos, se establecerá un cierto patrón (ajuste lineal, parabólico, exponencial, etc.) que motive el planteamiento de un modelo estadístico. Mediante la observación de las desviaciones o variaciones de cierto subconjunto de datos que, obviamente, no se ajustará a dicha estructura determinada, podremos establecer el modelo buscado. Por tanto, se distinguen en este diseño una *fase exploratoria* y una *fase confirmatoria*.

Sin profundizar en cada una de las fases de que se compone el AED, debemos hacer notar la dificultad por contrastar, en sentido estadístico, las hipótesis sobre el modelo planteado en la fase exploratoria. Pensemos que, para dar validez a nuestras "hipótesis" es preciso tomar nuevos datos (método de replicación) que ratifiquen los resultados obtenidos. Por ello, el análisis exploratorio es recomendable que sea utilizado en una fase inicial de estudio experimental, y especialmente útil en el paradigma cualitativo de investigación.

Desde el punto de vista educativo, las características que Batanero, Estepa y Godino (1991) atribuyen a la idoneidad didáctica de la noción de análisis exploratorio de datos son:

- *Posibilidad de generar situaciones de aprendizaje referidas a temas de interés del alumno*. Analizar datos relativos a un tema de interés del alumno dota a la situación-problema de una idoneidad emocional destacada para su implicación. La necesidad por indagar y explorar los datos recolectados en referencia a un tema cercano a la realidad del alumnado, motivará el estudio desde cuantas más perspectivas.
- *Fuerte apoyo en representaciones gráficas*. Considerar en nuestra investigación múltiples representaciones de los datos, crea nuevas situaciones-problema implícitas en la tarea propuesta, las cuales posibilitan que emerjan nuevos objetos matemáticos. Establecer, por ejemplo, el diagrama de "caja" en nuestro análisis de un modo habitual, instigará su uso en la comparación de varias muestras.
- *Empleo preferente de los estadísticos de orden*. Es aconsejable utilizar los estadísticos de orden de un modo habitual en las tareas estadísticas dado que son menos sensibles a los datos atípicos.
- *No necesita una teoría matemática compleja*. Dado el propósito general del AED, referido anteriormente, las nociones que se ponen en práctica podrán ser

introducidas gradualmente y los procedimientos y dispositivos gráficos se pueden ajustar a la etapa educativa del alumno.

- *Uso de diferentes escalas o re-expresión*. La escala en que una variable estadística es observada y registrada no es única. En la mayoría de los casos, los datos requieren de transformaciones para ser más manejables y en el manejo de diferentes representaciones será útil el uso de diferentes escales.

Centrando nuestra atención en el análisis estadístico bidimensional, es de notar la relevancia que adquieren las nociones de correlación y regresión en cuanto al AED. El uso de métodos como la representación de nube de puntos o diagrama de dispersión (Estepa, 2008), el ajuste gráfico del modelo estadístico, el cálculo y la representación de la recta de ajuste mínimo cuadrática (*recta de regresión*), etc., son, entre otros, métodos y técnicas de gran utilidad en el AED. Por otra parte, el AED es vital para el investigador como metodología en cuanto al planteamiento y verificación del modelo estadístico de ajuste a los datos.

3.3.3. CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN EL SISTEMA EDUCATIVO

El día a día está repleto de ejemplos en los que tomamos decisiones atendiendo, la mayoría de las veces inconscientemente, al grado de asociación existente entre las variables que consideramos influyentes. Los juicios sobre la posible asociación de variables, acompañan al ser humano desde el comienzo de su existencia. A modo de ejemplo podemos citar los juicios de asociación que en la civilización Egipcia se realizaron entre la crecida del río Nilo y la periodicidad del ascenso (en igual sentido que el Sol) de la estrella Sirio. Esta observación y su consecuente análisis, motivaron a los sacerdotes y astrónomos cuestiones que dieron un avance considerable al conocimiento científico como es la construcción de calendarios como soporte físico en cuanto a la medición del tiempo.

El razonamiento humano se comporta, en situaciones de incertidumbre, de un modo indeterminado, regido por valores y creencias del propio individuo. Es por ello, que el procesamiento de la información por cualquier individuo, difiere de un proceso algorítmico en el que, paso a paso y de un modo concreto establecido por criterios dados, se produce una solución para cualquier problema, dentro de una clase dada (Batanero, 2001).

Emitir juicios de asociación efectivos en la toma de decisiones, implica en particular, el dominio de las nociones de correlación y asociación. Estas nociones no son tratadas como contenidos de enseñanza específicos en la educación obligatoria, aunque implícitamente se encuentran presentes en el estudio de las tablas de contingencia, contenido de la asignatura de Matemáticas en cuarto de ESO, en sus dos opciones: A y B. Así es que, el Ministerio de Educación y Ciencia, en cuanto a la aplicación de los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana indica, como criterio de evaluación, que "*Se pretende, además, que los resultados obtenidos se utilicen para la toma de decisiones razonables en el contexto de los problemas planteados*."(MEC, 2007a, p.758). Además, particularizando en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se hace presente la relevancia y el sentido educativo de estas nociones, implícitamente, del siguiente modo: "*El estudio de las relaciones entre las variables y su representación mediante tablas, gráficas y modelos matemáticos contribuirá a describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos económicos, sociales o naturales.*" (Consejería de

Educación, 2007b, p.55)

La correlación y regresión son nociones que se introducen en la enseñanza postobligatoria de Bachillerato, en las asignaturas de *Matemáticas I* y *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* de las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* respectivamente (MEC, 2007b), con contenidos similares. Así, en la asignatura de *Matemáticas I* se encuentra el estudio de: "*Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal"* (MEC, 2007b, p.45449), en el bloque 4 denominado *Estadística y Probabilidad*. Para los que se indican, específicamente, los siguientes criterios de evaluación a seguir (MEC, 2007b, p.45450):

> *6. Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.*
> *En este criterio se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción mas conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden.*

En la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*, se fijan los siguientes contenidos, en el bloque 3 denominado Probabilidad y estadística (MEC, 2007b, p.45475):

> *Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación grafica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.*

Además se incluyen criterios de evaluación a seguir, entre los que destacamos (MEC, 2007b, pp.45475-45476):

> *6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión.*
> *Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información grafica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado.*

Como decíamos anteriormente, la relevancia y el sentido educativo de estas nociones es manifestado ya en el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria, aun no se contemple explícitamente la enseñanza de estas nociones en esta etapa educativa. La adquisición de estas nociones es un útil para todo ciudadano en su vida en sociedad, y ésta es la motivación principal de nuestro estudio.

En el siguiente capítulo, presentamos el estudio llevado a cabo sobre las nociones de correlación y regresión desarrollado por diversos investigadores.

“¿Bajo qué condiciones son los organismos precisos en la detección de la covariación entre sucesos?”
(Alloy y Tabachnik, 1984, p. 113).

CAPÍTULO 4.

FUNDAMENTOS DE INVESTIGACIÓN DE LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

4.1. INTRODUCCIÓN

Para que las propuestas curriculares establecidas en el capítulo anterior puedan ser llevadas a cabo de un modo efectivo y eficaz, es de gran utilidad al profesorado disponer de información sobre las posibles dificultades que pueden encontrarse en la enseñanza y aprendizaje de estas nociones.

El presente capítulo, constituye una síntesis de las investigaciones más relevantes que sobre las nociones de asociación, correlación y regresión han sido analizadas.

4.2. RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

El razonamiento covariacional se encuentra presente en la vida cotidiana del ser humano, como actividad cognitiva fundamental para su desarrollo (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007), inherente a la conducta de todo ser vivo (Alloy y Tabachnik, 1984), y no por ello exenta de dificultades.

Explicar, controlar y predecir los sucesos que se presentan en nuestro día a día, depende, en un ni vel fundamental, de habilidades y destrezas para detectar covariaciones entre los acontecimientos que se suceden (Alloy y Tabachnik, 1984) y en consecuencia, disciplinas como la Psicología, Sociología y la Didáctica estadística, entre otras, proporcionan líneas de investigación de gran dedicación sobre este tema (Moritz, 2004).

Desde el ámbito de la Psicología, autores como Alloy y Tabachnik invitan a plantear una importante cuestión: “*¿Bajo qué condiciones son los organismos precisos en la detección de la covariación entre sucesos?*” (Alloy y Tabachnik, 1984, p. 113).

Según esta cuestión, Alloy y Tabachnik (1984) reducen a dos las fuentes de información que son relevantes para percibir el grado de covariación entre dos eventos por un individuo (ser humano o animal): la información objetiva que ofrece y presenta la situación aleatoria y las expectativas previas o creencias acerca de la covariación de los fenómenos en cuestión. Las *expectativas previas* o *creencias* son referidas al grado en que el "individuo" posee ideas o juicios sobre la asociación de los fenómenos tratados, debidas bien a la experiencia previa directa con dichos fenómenos en situaciones similares o bien de otras fuentes por ejemplo, la transmisión cultural o biológica, las predisposiciones, etc. La *información objetiva* de la situación aleatoria se refiere al grado en que el individuo dispone de información acerca de las relaciones de los fenómenos en el entorno en que se encuentra, por ejemplo, una información débil debida a la poca experiencia con los fenómenos de la situación, o por ejemplo disponer de una información ambigua de los sucesos, entre otras.

Atendiendo a esta caracterización, McKenzie y Mikkelsen (2007) aportan un punto de vista bayesiano al razonamiento covariacional dado que, según estos autores, se hace presente en el comportamiento de un individuo. Según estos autores, nuestro sistema cognitivo se aproxima a la tarea de covariación situando la tarea en un marco inferencial más amplio, que depende del entorno, y puede ser de algún modo justificable. No afirman que el ser humano sea un procesador bayesiano óptimo de la información en general, ni en las tareas de covariación en particular. Sin embargo, el ser humano utiliza este procedimiento bayesiano para evaluar la covariación dado que las personas son sensibles a las creencias previas y a la rareza de los datos. Como señala Moritz (2004), la asociación estadística no se reduce a relacionar datos ajenos a un contexto, implica algo más que una mera relación de valores o cantidades numéricas de diferentes características observadas.

La investigación desarrollada por McKenzie y Mikkelsen (2007), va más allá de evidenciar la presencia de expectativas previas o creencias en el comportamiento covariacional de los sujetos. Estos autores indican, que las condiciones de funcionamiento (de trabajo) en el laboratorio, igualmente influyen en el razonamiento de los sujetos. Esto es, pese a los intentos de los experimentadores de descontextualizar las tareas o de eliminar las influencias del mundo real (el uso de pobres estímulos), los participantes recurren a hipótesis por defecto sobre importantes parámetros de la tarea y, además, estas hipótesis por defecto parecen coincidir con lo que razonablemente cabría esperar en el mundo real.

4.2.1. EL DESEMPEÑO DE UNA TAREA COVARIACIONAL

Emitir juicios precisos sobre la existencia o inexistencia de asociación entre variables, evidenciando con ello un razonamiento covariacional correcto, afecta de modo transversal a diversos campos científicos (Zieffler, 2006), adquiriendo con ello un alto nivel importancia nada simplista (Moritz, 2004).

Diversos autores como Crocker (1981) o Moritz (2004) distinguen pasos o subtareas secuenciales en que se puede descomponer un estudio covariacional, partiendo de la necesidad de recoger datos para estudiar la asociación estadística hasta el uso de los resultados obtenidos para producir juicios y predicciones de interés para el investigador. Crocker (1981), presenta esta subdivisión de tareas del siguiente modo:

(1) decidir los tipos de datos a recolectar;
(2) elegir la muestra de la población de estudio;
(3) diferenciar o interpretar los casos, (codificar los datos recolectados);
(4) recodificar y estimar las frecuencias de los casos determinados;

(5) integrar resultados; y por último,
(6) utilizar las estimaciones como fundamente para hacer predicciones o emitir juicios.

Moritz (2004), describe una secuenciación equivalente, resumida en cuatro pasos, donde se contempla como paso inicial la generación de hipótesis sobre la asociación de las variables estadísticas de estudio y precisando además, la tarea de generar gráficos partiendo de los datos recolectados, acompañando al análisis numérico.

En la investigación desarrollada por este autor, se encuentra una breve historia de la evolución de la construcción de gráficos, ofreciendo con ello un desarrollo epistemológico de la construcción de gráficos estadísticos. Moritz (2004), evidencia la dificultad del ser humano de la interpretación gráfica (desde sus orígenes), donde, a pesar del uso común de las coordenadas en cartografía, la construcción de gráficos estadísticos son utilizados como paso previo a una toma de datos, y no como objetos de interés en sí mismos. En el período de 1663 a 1815, con la inclusión de dispositivos mecánicos en diversos campos de investigación (el caso de dispositivos de medición de temperatura, entre otros), es cuando se construyen los primeros gráficos de series temporales.

Una implicación didáctica que Moritz (2004) señala en su investigación, es la importancia de considerar el desarrollo epistemológico de la construcción de gráficas estadísticas en el diseño y secuenciación de nuestro proceso de enseñanza. Considerar las gráficas de series temporales, permitirá a nuestros estudiantes considerar la asociación bivariada de un modo natural, donde se contemple la variación de la variable de interés en cuanto al tiempo. Aunque el tiempo constituya una variable de estudio implícita (donde tan sólo parece causar interés la variable que motiva el estudio), es relevante considerar la tendencia de los datos, al igual que, epistemológicamente, se introdujo la construcción de los gráficos como mera transcripción tabular.

Estrategias en la tarea de covariación.

En cuanto al análisis de estrategias en los juicios de asociación, diversas investigaciones (Sánchez Cobo, 1999; Sánchez Cobo, Estepa y Batanero, 2000) llevan a cabo un estudio pormenorizado de la resolución de las tareas de covariación propuestas a los alumnos. En una primera clasificación, se distinguen los tipos de problemas de asociación atendiendo a tres tipos de problemas fundamentales (Sánchez Cobo, 1999):

a) Juicios de asociación en tablas de contingencia. Donde se trata de analizar la asociación entre dos variables cualitativas y el sujeto debe utilizar las frecuencias de dicha tabla.

b) Juicios de asociación en diagramas de dispersión. Donde se trata de analizar la asociación entre dos variables numéricas en que la forma o dispersión de la nube de puntos puede ser de gran ayuda para evaluar la relación entre las variables.

c) Juicios de asociación en la comparación de muestras. Donde se trata de analizar la relación entre una variable cuantitativa y otra variable cualitativa.

En los estudios llevados a cabo en torno a cada uno de estos bloques de tareas, se presentan diferentes estrategias de resolución por parte de los estudiantes, extendiéndose incluso el estudio a tablas de contingencia de más de dos filas o columnas (Estepa, 1994; Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996).

En la investigación desarrollada por Estepa (1994), se pone de manifestó la importancia del estudio de las estrategias que siguen los alumnos en los juicios de asociación. A modo de réplica, la investigación desarrollada por Sánchez Cobo (1999), corrobora la existencia de tres ejes que explican las relaciones existentes entre las tareas planteadas y las estrategias empleadas.

En primer lugar, se encuentra una oposición entre el razonamiento numérico covariacional y el razonamiento gráfico covariacional. Ante la tarea de estimar el coeficiente de correlación a partir de la descripción verbal, se asocia la estrategia que pone en juego el marco gráfico. "*Los alumnos recurren a la representación gráfica para estimar el coeficiente de correlación cuando ésta no aparece en el enunciado del problema*" (Sánchez Cobo, 1999, p. 252).

En segundo lugar, se muestra un empleo de argumentaciones conjuntas (numéricas, gráficas, y teorías previas), donde tan solo se requiere un argumento gráfico. Esta situación se presenta principalmente en situaciones cercanas al alumno donde se supone que el hecho de "*que el alumno conoce bien las situaciones le es menos necesario el recurso a estrategias complementarias*." (Sánchez Cobo, 1999, p. 253).

Y en tercer lugar, existe un conflicto semiótico entre el crecimiento/decrecimiento no uniforme de las dos variables mostradas mediante una tabla de doble entrada y el crecimiento/decrecimiento de la dependencia funcional. En este caso el alumno tiende a responder según sus teorías previas o utilizando argumentos incorrectos.

4.2.2. MARCO DE INVESTIGACIÓN DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

La investigación en cuanto a razonamiento covariacional se encuentra ampliamente desarrollada en Psicología, donde se ha evidenciado la presencia de errores o sesgos en la estimación de la covariación al existir en los sujetos expectativas o esquemas referidos a los estímulos presentes en la situación a que se enfrentan (Crocker, 1981; Alloy y Tabachnik, 1984), tal es el caso de la denominada *correlación ilusoria* (Chapman y Chapman, 1967).

Con la noción de *correlación ilusoria* se hace referencia a la presencia de errores sistemáticos producidos por variables inherentes a los estímulos que el sujeto percibe y que conllevan a juicios erróneos de covariación. Como sus autores indican en cuanto a los juicios de asociación: "*"Correlación ilusoria" es un error sistemático en el informe de tales relaciones. Es definida según el informe dado por un observador de una correlación entre dos clases de eventos que en realidad (a) no están correlacionados, o (b) están correlacionados en menor medida que lo manifestado, o (c) están correlacionados en sentido contrario del que se manifiesta en el informe.*" (Chapman y Chapman, 1967, p. 194).

Es clara la vulnerabilidad del ser humano a creer lo que ve, intuye o siente frente a lo que cualquier informe le pueda proporcionar, salvo que exista algún tipo de razón o inseguridad para desconfiar de sus propias observaciones (Chapman y Chapman, 1967). Es por ello, que muchos autores proponen advertir, a nuestros estudiantes en formación, de la dificultad que conlleva disponer de un razonamiento covariacional correcto, con el fin de sensibilizar ante el peligro que acarrea sus sesgos o errores (Chapman y Chapman, 1967; 1969; Moritz, 2004). En concreto, Chapman y Chapman (dado su campo de investigación en Psicología clínica), defienden la necesidad de incluir, en el periodo de formación de los futuros profesionales de la medicina, la evidencia manifiesta de estos sesgos y errores en la toma de decisiones dada su responsabilidad ante la emisión de informes (Chapman y Chapman, 1967; 1969).

A este respecto, la investigación didáctica aporta conocimiento sobre las dificultades que presentan los alumnos ante la adquisición del razonamiento covariacional, siendo desarrollada principalmente con estudiantes universitarios o pre-universitarios, debido en gran parte, al lugar que ha ocupado la enseñanza de la Estadística en la etapa escolar, hasta estos últimos años. Actualmente, la investigación en cuanto al razonamiento covariacional se centra en el estudio del razonamiento covariacional sobre variables cuantitativas, dado la poca investigación desarrollada al respecto, sin menospreciar con ello la importancia de las investigaciones previas sobre variables cualitativas (Zieffler, 2006).

Factores explicativos del razonamiento covariacional

En cuanto a la investigación de los factores que podrían explicar el razonamiento covariacional de nuestros estudiantes en torno a su enseñanza, tales como la secuenciación de los temas incluidos en un curso de introducción a la estadística, o el desarrollo del razonamiento de los estudiantes sobre temas introducidos con anterioridad a la covariación; Zieffler (2006) nos plantea las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuál es la naturaleza o el patrón de razonamiento de los estudiantes en cuanto a los datos bivariados?
2. La secuenciación de conocimientos en un curso de introducción a la Estadística, ¿influye en el razonamiento covariacional?
3. Los cambios que en cuanto al razonamiento, sufren los estudiantes al adquirir nociones estadísticas fundamentales como el de distribución estadística, ¿influyen en los patrones de razonamiento covariacional?

La investigación enmarcada en estas preguntas, pretende, en un primer nivel, caracterizar el desarrollo del razonamiento covariacional de los estudiantes en cuanto a datos bivariados cuantitativos, con la pretensión de encontrar algún patrón de desarrollo de este tipo de razonamiento; y en un segundo nivel, estudiar si los tópicos que la literatura de investigación ha sugerido como factores explicativos del razonamiento covariacional, realmente lo son.

Los resultados de esta investigación se obtuvieron en un curso semestral de introducción a la Estadística en un nivel universitario compuesto por 113 estudiantes en el estudio de datos bidimensionales de variables cuantitativas. Parten además de evaluaciones de la evolución del razonamiento de los estudiantes mediante la enseñanza y el estudio de las nociones referidas a la distribución de una variable estadística.

Tras la enseñanza de la distribución univariante, previo análisis de diseño de muestras (muestreo) y AED, los dos instructores ordenaron al azar los bloques referentes al análisis bidimensional. Un instructor siguió el temario con la enseñanza de los datos referidos a dos variables estadísticas y luego concluyó con temas relacionados con distribuciones muestrales, probabilidad e inferencia y el otro instructor invirtió el orden, el tema de variables bidimensionales se enseñó al final de curso.

En cuanto a la primera cuestión planteada, se observó un desarrollo lineal y cuadrático en cuanto al razonamiento covariacional, obviamente marcado por la idiosincrasia de cada individuo. El término de significación cuadrática negativa indica que aunque los alumnos muestran inicialmente un gran avance en su razonamiento, con el tiempo decrece su intensidad en cuanto a r azonamiento covariacional, incluso retrocediendo. "*Cuáles son las variables exactas que rigen el grado en que los recuerdos se degradan no se conoce,* […]" (Wixted, 2004, p.264). Zieffler indica que estos resultados "*podrían sugerir la presencia de una saturación en nuestros estudiantes en cuanto al razonamiento sobre datos bivariados que provoca una decadencia que impide su avance durante el curso.*" (Zieffler, 2006, p. 86).

Un hallazgo interesante es que la mayor parte del cambio en el desarrollo en el razonamiento covariacional ocurre al inicio de la instrucción, previa a l a enseñanza formal de este tema, evidenciando, pues, la existencia del significado personal de este objeto matemático en sí mismo, más que ser producto de una instrucción formal sobre la enseñanza de la variable bidimensional. De todos modos, Zieffler indica que, es posible que la brevedad de la unidad en el curso de introducción a la estadística, afecte en el pobre desarrollo posterior de este razonamiento.

En cuanto a la segunda cuestión planteada, no se observó una influencia en el desarrollo del razonamiento covariacional marcada por la secuenciación del tema referido a la variable estadística bidimensional. De cualquier modo, y aún no habiendo sido probado en su estudio, Zieffler remarca la influencia, obvia, de la enseñanza de este tema, previa a otros temas, como por ejemplo la inferencia, por anécdotas a que se enfrentó con los estudiantes.

Por último, en cuanto a la tercera cuestión planteada, se encuentra una marcada influencia del estudio de la variable estadística unidimensional en el desarrollo del razonamiento covariacional.

Respecto a estas dos últimas cuestiones, Sánchez Cobo advierte que: "*Aunque a toda nube de puntos podamos hacerle corresponder una curva de regresión, carecería de interés hallarla si las características de la variable estadística no estuvieran correlacionadas o si nos diera predicciones poco fiables e información de escasa trascendencia*" (Sánchez Cobo, 1999, p. 29 1), de este modo se defiende la secuenciación de trabajar en primer lugar la correlación y luego abordar la regresión. Además, este autor insiste en que, no s e introduzca la noción de variable estadística bidimensional a partir de dos variables estadísticas unidimensionales, ya que podría favorecer el que los alumnos sean poco conscientes de que dichas variables unidimensionales tienen que estar referidas al mismo individuo (Sánchez Cobo, 1999).

El estudio descriptivo del razonamiento covariacional es objeto de interés en la investigación educativa, y preguntas similares a las planteadas por Zieffler son respondidas por Sánchez Cobo (1999) donde se plantean dos objetivos básicos: analizar los contenidos incluidos en el estudio descriptivo de la correlación y regresión tanto en Bachillerato como en los cursos introductorios de universidad; y caracterizar el significado personal que los alumnos universitarios (un total de 193 estudiantes de diferente titulaciones: 104 en la Diplomatura de Empresariales y 89 de la Diplomatura de Enfermería de la Universidad de Jaen) dan a la correlación y regresión al finalizar un curso de introducción de Estadística en la Universidad.

En lo que se refiere al razonamiento covariacional, esta investigación muestra que la mayoría de los alumnos conocen que el signo de la covarianza denota la dirección de la correlación existente entre las componentes de la variable bidimensional, así mismo, un pequeño porcentaje de alumnos no t oma en consideración el decrecimiento de la intensidad de dependencia al disminuir el valor absoluto de la covarianza, además de la posibilidad de que la relación entre las variables sea no lineal (aunque se presente una covarianza positiva).

Dificultades del razonamiento covariacional

En cuanto a las dificultades generales que presenta un adecuado razonamiento covariacional, Moritz (2004) destaca las siguientes:

- considerar tan sólo la correspondencia de datos bidimensionales aislados, en lugar de considerar la tendencia global de éstos;
- considerar las correspondencia de las dos variables implicadas en el estudio de modo conjunto, en lugar de considerar cada una de las variables de modo aislado;
- la existencia de teorías o creencias previas en cuanto a las variables de estudio y su asociación.

Su investigación se centra en el estudio de tres destrezas importantes como son: a) generar datos especulativos mediante el desarrollo de gráficos que reflejen los juicios de asociación textuales, b) interpretar gráficos tales como diagramas de dispersión con la correspondiente emisión de juicios de asociación, y por último, c) interpretar tablas de frecuencias. Respecto a cada una de las dificultades que se manifiestan en su estudio, Moritz ofrece sugerencias en cuanto al desarrollo del razonamiento covariacional, entre las que destacan:

- la lectura progresiva punto a punto hasta una posterior generalización con los datos disponibles;
- la utilización de un enfoque de variación temporal que permita a los estudiantes centrarse en el cambio de una variable mediante la variación implícita de la variable tiempo para una posterior correspondencia entre variables no temporales, así como
- alentar la aparición de las creencias y teorías previas para ser poco a poco equilibradas mediante la información proporcionada por el estudio, a este aspecto añadir tareas que impliquen un razonamiento covariacional contraintuitivo donde, entre otros objetivos, se cuestione de modo natural, la fiabilidad del conjunto de datos de que se dispone.

Esta última implicación didáctica, es de gran importancia dado que influye directamente en nuestro diseño y planificación de la enseñanza. Como indican McKenzie y Mikkelsen, (2007), aunque las creencias y teorías previas son imprecisas e incluso inexactas, son de interés en sí mismas, dado que cuestionan cómo debiese ser la relación de dichas teorías y la información de la tarea desde una perspectiva bayesiana, categorizando éstas creencias previas no como un error, sino como útil de enseñanza.

Una actividad curiosa que Moritz (2004) propone, es el uso de gráficos manuales desarrollados de modo anónimo (con idea de prevenir posibles amenazas emocionales en cuanto a la crítica desfavorable de algunos compañeros) por los estudiantes, similares a los de los propios estudiantes, para su estudio en el aula.

4.3. LAS NOCIONES DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN EL MARCO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

En cuanto al desarrollo de habilidades y destrezas referentes al razonamiento covariacional, hemos de evidenciar la presencia de objetos matemáticos relacionados con el análisis de datos bivariados, tanto cuantitativos como categóricos, que intervienen directamente en las tareas a que se enfrentan nuestros alumnos. Como señala Zieffler en su investigación (Zieffler, 2006, pp.6-7):

> *Los problemas a que se enfrentan los estudiantes referidos al razonamiento covariacional aparecen a lo largo del plan de estudios de introducción a la estadística. Estos a menudo incluyen examinar la relación entre dos variables cuantitativas (por ejemplo, la correlación y la regresión) o dos variables categóricas (por ejemplo, las tablas de doble entrada, el test de chi-cuadrado).* […] [por lo que conlleva al profesorado] *a interesarse por el razonamiento de los estudiantes en cuanto a la lectura diagramas de dispersión, a la interpretación de la correlación y otras destrezas que son utilizadas en el estudio e interpretación de los datos bivariados.*

Es por ello de nuestro interés, centrarnos en el estudio de las nociones de correlación y regresión, en su dualidad unitaria y sistémica (Capítulo 2), para: conocer mejor el proceso de enseñanza y aprendizaje asociado a estas nociones, con el fin de aportar conocimiento a la concepción del proceso de significación de nuestros alumnos en su relación con estos objetos matemáticos.

Podemos destacar dos utilidades del presente estudio, que se hacen notar año tras año en nuestras aulas. En primer lugar, el diseño del proceso de enseñanza y su implementación en el aula, y en segundo lugar, la necesidad de evaluar la capacidad de nuestro alumnado en el desempeño de las nociones tratadas. Para el desempeño de estas funciones docentes, es requisito indispensable conocer las dificultades que presentan nuestros alumnos, los sesgos que presentan en su desarrollo, así como las implicaciones didácticas que la investigación ha aportado hasta el momento. En concreto, la necesidad de evaluar el modo de razonar de nuestros alumnos, es un hándicap para el profesorado, que no se reduce a obtener una medida de calificación con objeto de promoción curricular, sino que debe ser entendido como medio de orientación en la consecución de las metas planteadas por el currículum para tal efecto. Como indica Zieffler: "*Junto con el desarrollo del currículum para la promoción del razonamiento del estudiante en la introducción a la estadística se debe proceder a la evaluación de este razonamiento.*" (Zieffler, 2006, p. 3). Aquí es donde se pone de relieve la formación didáctica del profesorado, donde se cuestione: *¿qué* evaluar?, *¿cómo* evaluar?, y por último pero no menos importante, *¿cuándo* evaluar?

La investigación desarrollada en el campo de la Psicología en torno al razonamiento covariacional, llevada a cabo en un amplio rango de edad (desde estudiantes de primaria hasta estudiantes universitarios), ha producido resultados muy sólidos en el estudio de la covariación (Zieffler, 2006). Y aunque las investigaciones didácticas se interesen más por cómo los estudiantes razonan en un contexto educativo específico, esto es "*la ciencia para resolver problemas*" (Zieffler, 2006, p.14), las tareas dadas a los sujetos en la investigación didáctica son similares a las descritas en Psicología. En cuanto a la investigación desarrollada sobre este tema, la mayor parte ha sido enfocada al estudio de la evaluación de la covariación de variables binarias (presencia-ausencia de cierto carácter en la población), evidenciándose en estos estudios la pobreza de razonamiento del ser humano en tareas relativas a su resolución (Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007).

Zieffler (2006), presenta una tabla resumen donde se recogen los diferentes estudios analizados, relativos al razonamiento covariacional y los juicios de asociación desarrollados en Psicología, Ciencia de la Educación, Didáctica de la Matemática y Didáctica de la Estadística, según su metodología (tamaño de muestra, nivel educativo, metodología de respuesta, número de variables y tipología de variables implicadas). En la mayoría de estos estudios, los sujetos deben determinar si existe relación entre las dos variables presentadas y después justificar esta decisión.

Aunque las tareas varíen ligeramente, Zieffler (2006) distingue un e squema común de investigación, que abarca de cuatro categorías codificación:

- Covariación mínima. Los sujetos utilizan la información de una sola celda.
- Covariación inadecuada. Los sujetos utilizan la información de dos celdas.
- Covariación adecuada. Los sujetos utilizan las cuatro celdas para justificar la covariación.
- Covariación avanzada. Los sujetos basan sus juicios en cálculos elaborados atendiendo a las cuatro celdas.

Además presenta, a modo de resumen, los principales resultados de la literatura estudiada en torno al razonamiento covariacional, a continuación presentamos estos resultados:

- las creencias o t eorías previas de los individuos sobre la relación entre las variables de estudio, tienen una gran influencia en sus juicios de covariación;
- existe una fuerte influencia de la intuición del sujeto en la emisión de juicios de asociación entre variables conocido como correlación ilusoria (Chapman y Chapman, 1967);
- los juicios de asociación parecen estar más influenciados por la presencia conjunta de las variables de estudio que por la ausencia conjunta de éstas (celda a frente a celda *d* de la tabla de contingencia de variables dicotómicas);
- existe una gran dificultad para el razonamiento covariacional negativo, esto es, para identificar la asociación inversa entre las variables de estudio; a este respecto, cabe destacar la existencia de una concepción unidireccional de la asociación (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996) en nuestros alumnos donde se percibe la dependencia sólo cuando ésta es positiva, y asignando independencia al caso de asociación inversa.
- los juicios de asociación tienden a evidenciar una correlación inferior a la que realmente presentan las variables de estudio; y
- existe una tendencia a establecer relaciones de causalidad en el estudio de la asociación de entre variables. A este respecto, hacer notar que existen alumnos que sólo consideran la existencia de asociación si se puede atribuir una relación causal entre las variables de estudio (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996).

A estos resultados hemos de añadir (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996):

- la concepción determinista de la asociación. Los alumnos tienden a asignar un único valor de la variable independiente a cada uno de los valores considerados de la variable dependiente. Esto es, la relación de las variables sólo es considerada desde un punto de vista funcional.
- La concepción local de la asociación. Los alumnos utilizan parte de los datos del estudio y se limitan a confirmar la asociación según un subconjunto de éstos que de algún modo justifique algún tipo de patrón, obviando la tendencia global de los datos.

A continuación se describen los resultados más relevantes que en torno a la enseñanza y aprendizaje de las nociones de correlación y regresión hemos analizado.

4.3.1. ESTIMACIÓN DE LA CORRELACIÓN A PARTIR DE DIFERENTES REPRESENTACIONES

El razonamiento sobre la covariación implica procesos de traducción entre los datos de la investigación, las representaciones gráficas, las descripciones verbales sobre la covariación estadística y la asociación causal, así como otros procesos tales como el cálculo, la interpretación de tests estadísticos, o el uso de modelos matemáticos para el ajuste de datos y con ello su traducción desde y hacia las expresiones algebraicas (simbólicas) utilizadas. Moritz (2004), presenta un cuadro resumen (Figura 9) donde se reflejan las formas más comunes de representar la covariación estadística junto a las destrezas o habilidades para su traducción.

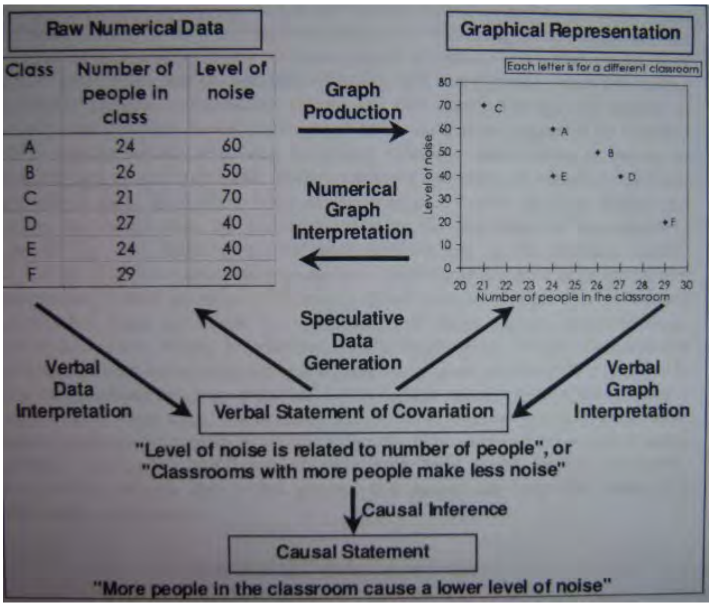

Figura 9. Formas de representar la covariación estadística junto a las destrezas o habilidades para su traducción (Moritz, 2004, p. 230).

El estudio desarrollado por Sánchez Cobo y cols. (2000), nos acerca un poco más a comprender el modo en que nuestros alumnos adquieren la noción de correlación, todo ello cimentado en los estudios previos desarrollados por diversos investigadores (Batanero, Estepa y Godino, 1997; Batanero y Godino, 1998; Batanero, Godino y Estepa, 1998; Estepa 1994; Estepa y Batanero, 1996; Estepa y Sánchez Cobo, 1998, entre otros), que se centran en el análisis de las concepciones de los estudiantes, el efecto sobre las estimaciones de variables aisladas o el análisis de la dificultad de tareas particulares (Sánchez Cobo y cols., 2000).

Dada la necesidad de disponer de (1) un análisis sistemático de las variables en las tareas de traducción de la correlación de una representación a otra, además de (2) un estudio de su efecto sobre la estimación de la correlación y las estrategias empleadas por alumnos que han estudiado el tema de la correlación, Sánchez Cobo y cols. (2000), abordan una investigación de gran implicación en la educación matemática que considera cuatro formas de representar la correlación entre dos variables cuantitativas:

a) *descripción verbal*, cuando describimos una distribución bivariada mediante el lenguaje natural

b) *tabla de valores*, o presentación de un conjunto de pares de valores numéricos de una distribución bivariada,

c) *diagrama de dispersión*, cuando el conjunto de pares de valores de una distribución bivariada se presentan mediante un diagrama cartesiano, y

d) *coeficiente de correlación*, cuando se da el coeficiente de correlación existente entre dos modalidades de una distribución bivariada.

Con las seis tareas, con cinco apartados (subtareas) cada una, se presentan diferentes tipos de covariación (Barbancho, 1973), en previsión de captar los juicios de asociación-causación de los alumnos. Estos son:

- *Dependencia causal unilateral*: Cuando la ocurrencia de una variable X (causa) influye en la ocurrencia de Y (efecto), y no al contrario, (subtarea t2d).
- *Interdependencia*: Cuando la ocurrencia de una variable X influye en la ocurrencia de una variable Y, y viceversa (como por ejemplo en la subtarea t1a).
- *Dependencia indirecta*: Dos variables pueden mostrar cierta covariación debido a la variación de una tercera variable que está correlacionada con ambas, produciendo una asociación aparente (como en la subtarea t2e).
- *Concordancia*: Correlación producida por la ordenación de un conjunto de datos por dos personas de forma independiente (por ejemplo, la subtarea t4b).
- *Covariación casual*: Cuando parece que en la covariación de dos variables hay cierta sincronía, lo cual podría interpretarse como la existencia de asociación entre ambas; sin embargo, ésta es casual o accidental (como en la subtarea t1e).

Atendiendo igualmente a la intensidad y dirección de la correlación, a la posible linealidad, y las teorías previas de los alumnos, así como a la precisión de las estimaciones, las estrategias empleadas, y la identificación de situaciones reales en que se presente un valor dado del coeficiente de correlación, a continuación se resumen los principales resultados que obtienen (Sánchez Cobo y cols., 2000):

- Los alumnos han mostrado una buena capacidad de estimación de la correlación, aunque en general, las tareas no siempre resultan sencillas, haciéndose más viable cuando mayor es la intensidad de ésta.
- Los alumnos comprenden con facilidad la adimensionalidad del coeficiente de correlación, corroborando los resultado de una investigación anterior por Sánchez Cobo (1999), así como la relación entre el signo de la correlación y el sentido en que covarían los valores de las componentes de una variable bidimensional, no obstante, presentan dificultades en la concepción de una covariación negativa, captada por menos del cincuenta por ciento de los sujetos.
- La estimación es más precisa al estimar el coeficiente de correlación a partir de un diagrama de dispersión así como la tarea inversa, haciéndose mayor esta precisión cuando la correlación es más intensa, corroborando con ello las investigaciones desarrolladas con anterioridad (Sánchez Cobo, 1999). Donde los errores son mayores al construir una nube de puntos a partir de una descripción verbal y estimar el coeficiente de correlación desde una tabla de valores numéricos.

- La capacidad de proponer situaciones factibles a un coeficiente de correlación dado es un t anto deficiente. Aunque los alumnos, en su mayoría, proponen variables bidimensionales consistentes, el 63’5% de los alumnos propone variables cuya correlación tiene el mismo signo que el dado en el problema, por lo que se observan dificultades en la identificación de la dependencia funcional y, en menor medida, de la independencia.

A los resultados de este estudio, sumamos los resultados de la investigación previa desarrollada por Sánchez Cobo (1999) en cuanto a las nociones de correlación y regresión como son:

- La dificultad que presentan los alumnos al comparar diferentes valores del coeficiente de correlación distintos de: -1, 0 y 1. Aunque tienen presente que la intensidad de la dependencia se obtiene a p artir del coeficiente de correlación, presentan dificultades en estas comparaciones.
- La dificultad de diferenciar la variable explicativa de la explicada en cuanto al cálculo de la recta de regresión. Dos de cada cinco estudiantes, aproximadamente, relacionan que ambas rectas de regresión son perpendiculares cuando el coeficiente de correlación es nulo, evidenciándose que se considera casi en exclusiva, la modelización de ajuste lineal. En concreto, casi la mitad de los sujetos del estudio consideran que si existe correlación positiva, ésta se deduce en una dependencia lineal.

Todos estos resultados ponen de manifiesto la complejidad de estas nociones, incluso al finalizar la secuencia de enseñanza. Todo esto unido a la escasez de definiciones que de tipo instrumental-relacional incluyen los textos, siendo en su mayoría de tipo instrumental, pudiéndose con ello “*transmitir una visión de las matemáticas como disciplina conformada por una colección de reglas y hechos que deben ser recordados y que se refieren sobre todo al cálculo*” (Sánchez Cobo, 1999, p. 287). Además, las demostraciones se presentan con una marcada función explicativa y de convicción, obviando la necesidad de desarrollar en nuestros alumnos la capacidad de argumentar de un modo lógico

Como complemento a esta investigación, Lavalle y cols. (2006) se acercan al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones de correlación y regresión atendiendo a tres perspectivas fundamentales de análisis como es el análisis del contenido, el análisis de la enseñanza y el análisis del aprendizaje; además, se proponen situaciones de enseñanza acompañadas de cada uno de estos análisis.

En cuanto al análisis del contenido de las nociones de correlación y regresión, estas autoras precisan los conceptos que necesitan ser incorporados en la enseñanza y aprendizaje de estas nociones para favorecer su comprensión así como los procedimientos con los que se vincula, y sus relaciones entre ellos (Lavalle y cols., 2006). Estas nociones, junto con los procedimientos que implican son:

- *Variable estadística*, tanto unidimensional como bidimensional: variable explicativa (X) y variable explicada/respuesta (Y); los procedimientos son:
  - Identificar las variables en estudio.
  - Distinguir entre una variable respuesta y una variable explicativa.
  - Identificar las unidades de medida
  - Calcular la media y la desviación.

- *Datos*, los datos bidimensionales que se tratan para ser comparados, analizados e interpretados son pares ordenados que pueden ser representados mediante puntos del plano cartesiano; los procedimientos son:
  - Identificar los valores de las variables como pares ordenados
  - Graficar la nube de puntos/diagrama de dispersión
  - Identificar si hay relación entre las variables a partir del gráfico (existe o no relación, es lineal o no, etc.)
  - Observando el gráfico de dispersión de una relación lineal, indicar aproximadamente qué tipo y grado de relación lineal existe (directa, inversa)
- *Gráfico de dispersión o nube de puntos*, representación en un sistema cartesiano de los datos recolectados en nuestro trabajo.
- *Coeficiente de correlación lineal*, el coeficiente de correlación lineal cuantifica la asociación o relación lineal de dos variables; los procedimientos son:
  - Calcular la covarianza.
  - Calcular el coeficiente de correlación.
  - Interpretar valores del coeficiente de correlación.
- *Recta de regresión*, investigar para obtener una relación funcional entre las variables que sean estudiadas, que contemple la componente aleatoria y determinista del fenómeno de estudio. En particular, el propósito del análisis de regresión lineal, es obtener un ajuste de la variable respuesta/explicada (Y) mediante una función lineal; los procedimientos son:
  - Verificar a partir del gráfico la conjetura de relación lineal entre las variables de estudio.
  - Calcular los coeficientes de la recta de regresión.
  - Graficar la recta
  - Interpretar los coeficientes de la recta
  - Observando la nube de puntos y la recta, indicar aproximadamente el grado de relación lineal existente.
- *Estimación de los valores*, los procesos de interpolación y extrapolación una vez hallada la recta de ajuste mínimo cuadrática, serán estimados mediante la sustitución en la recta de regresión obtenida de sus correspondientes valores asociados en la variable explicativa (X). Si el valor de X que será sustituido en la recta de ajuste mínimo cuadrática se encuentra en el rango de valores observados de dicha variable, ocurre una interpolación. Si el valor de X se encuentra fuera del rango de valores, ocurre una extrapolación; los procedimientos son:
  - Calcular valores estimados de y.
  - Indicar gráficamente el error de estimación
  - Interpretar el error como desviación

En cuanto al análisis de enseñanza de las nociones de correlación y regresión, estas autoras analizan siete libros de texto, centrándose en el enfoque con que se presentan las nociones tratadas, el nivel de profundidad, si se deducen las fórmulas referentes a las nociones del apartado anterior, el tipo de situaciones problemáticas y si se utiliza ó se sugiere el uso de herramientas tecnológicas.

En cuanto al enfoque de presentación del tema, seis de los 7 manuales introducen las nociones mediante problemas, y desde un aprendizaje socio constructivista:

> *Muestran una intención explícita por desarrollar los conceptos, haciendo énfasis en la construcción crítica de las habilidades del pensamiento, no en el enfoque tradicional de la enseñanza de la estadística, donde se pone de manifiesto el interés por el manejo de fórmulas y ecuaciones*" (Lavalle y cols., 2006, pp.390-391).

Mientras que, en cuanto al nivel de profundidad, se trabaja de modo intuitivo sin formalizar ningún concepto ni cálculo (la aproximación se realiza mediante gráficos y tablas de datos); se lleva a cabo un desarrollo profundo del tema, realzando los aspectos significativos para la comprensión; se desarrolla el concepto de correlación y de modo intuitivo la regresión lineal; y se desarrollan los conceptos de correlación, regresión lineal y coeficiente de correlación con buena selección de problemas y enfocados a la comprensión.

En cuanto a la deducción de fórmulas, sólo uno de los textos de los últimos años de la enseñanza secundaria, deduce la fórmula de cálculo de la covarianza aplicando propiedades de sumatoria, explicando que el método para obtener la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión tiene como premisa minimizar la expresión del error del modelo. La deducción de la fórmula de cálculo no se desarrolla aunque el método se sustenta en un desarrollo gráfico.

Las situaciones problemáticas que proponen en los textos presentan mayor cantidad de actividades donde se utiliza la relación lineal directa que la inversa. Y en cuanto al uso de los ordenadores como herramienta de trabajo, ningún texto propone actividades para el uso de ordenadores.

En cuanto al análisis del aprendizaje, en general, las autoras proponen realizar un nivel de enseñanza de tipo descriptivo, donde no se pretende tratar las nociones de modelo ni de inferencia estadística. Con un marcado cuidado por disponer de información previa a la secuencia de enseñanza relativa a los conocimientos matemáticos y estadísticos de los alumnos (función, ecuación lineal, variación, etc.), y haciendo presente en su enseñanza los resultados de la literatura en torno a los errores y dificultades del aprendizaje de los alumnos referidos a las nociones de correlación y regresión. Se presentan una serie de actividades en el tratamiento de datos bivariados y la dependencia y predicción de las variables de estudio, con un esquema común basado en tres pasos fundamentales: (1) tratamiento intuitivo, (2) aproximación gráfica y (3) análisis numérico.

4.3.2. EXPERIENCIAS DE AULA

Previo a cualquier experiencia de aula, Reid y Pecotcz (2002) aconsejan realizar un estudio previo que permita informar de las concepciones que los estudiantes tienen acerca de la Estadística. Los puntos de vista de los estudiantes son limitados y fragmentados y en cierta medida esto puede influir en su capacidad de comprender las potenciales aplicaciones de esta disciplina. Por lo que, investigar el modo en que los estudiantes aprenden Estadística, cómo la entienden y cómo perciben su trabajo en cuanto a esta disciplina, ayudará a describir las concepciones que poseen los estudiantes, así como dilucidar cuál es la función o el desempeño de esta "carrera profesional".

Uno de los principales ámbitos en que resulta importante considerar las concepciones de los estudiantes lo encontramos en la planificación de la enseñanza. Los profesores suponen que el trabajo realizado en el aula (explicación de los contenidos por parte del profesor, actividades de clase, tareas de evaluación o examen, etc.), debe centrarse en la explicación del contenido, y que éste será fácilmente extrapolable a la práctica por parte del estudiante en un futuro. Una solución alternativa a esta situación es planificar actividades de aprendizaje y de evaluación cercanas al contexto teórico-práctico del estudiante en contra de alentar un alto resultado de contenidos sin una práctica real y realizable. Es importante considerar el aprendizaje y la enseñanza ligados a la situación-problema que se trate (Reid y Pecotcz, 2002).

El llamamiento de diversos autores está referido a la importancia de generar situaciones de aprendizaje ricas en que el alumno se apropie del significado del objeto matemático mediante experiencias cercanas a su ámbito de interés. A modo de ejemplo, el uso de proyectos es una experiencia de aprendizaje muy motivadora (Reid y Pecotcz, 2002).

El estudio realizado por Reid y Pecotcz (2002), muestra cómo estudiantes del grado de matemáticas (Universidad de Sydney), con una supuesta especialización en Estadística, Economía o Investigación Operativa; perciben la Estadística tanto como estructura lógicamente organizada secuenciada para un propósito de investigación y casi sin entidad propia: como ciencia de apoyo a diversas disciplinas, todo esto se extiende a la profesión del estadístico. Estos autores distinguen seis concepciones diferentes divididas en tres bloques, que pueden considerarse independientes pero que desde un enfoque general son en sí inclusivos.

Enfoque basado en las técnicas. En cuanto a la concepción de la Estadística como conjunto de técnicas, y como parte de la ciencia matemática se encuentran:

C1. <u>Actividad numérica individualizada</u>. Donde el alumno concibe la Estadística como una “especie de matemática” caracterizada por “cálculos aburridos”, “números”, o “probabilidad” utilizando esta terminología en sus transcripciones que usualmente es referida al título de los temas de la asignatura de Estadística que están tratando.

C2. <u>Técnicas estadísticas individualizadas</u>. Donde cada una de las técnicas que ofrece la Estadística para el estudio de cualquier fenómeno, es tratada en conjunto y servible para “mirar los datos”. Es considerada la Estadística como un “análisis de datos” La diferencia entre la C1 estriba en que no es la Estadística una parte individualizada o fragmento de la matemática sino que alcanza en sí misma una individualización o fragmentación propiamente estadística en lugar de matemática.

C3. <u>Colección de técnicas estadísticas</u>. Donde la Estadística es como un historial o recetario de técnicas que se pueden utilizar en algún momento para tratar los datos. La diferencia con la concepción anterior deriva de la consideración de la Estadística como un cúmulo de técnicas y no tanto como una única en cuanto al tratamiento de datos.

De algún modo, C2 y C3 establecen una jerarquía donde un individuo puede presentar experiencias en cada una de las concepciones de modo específico y dependiendo de la situación a que se enfrente.

Enfoque basado en el uso de los datos. En cuanto a la interpretación de los datos mediante el uso de las técnicas estadísticas, se manifiestan las siguientes concepciones:

C4. <u>La Estadística es el análisis y la interpretación de los datos</u>. Se concibe la Estadística como el medio para comprender, interpretar y en definitiva, dar sentido a los datos dando a esta disciplina un carácter unificado y coherente con el fin que se pretende de analizar e interpretar los datos (considerando la Estadística como una colección de datos).

C5. La Estadística como forma de entender la vida real mediante modelos estadísticos. La Estadística se concibe como un medio para entender situaciones de la vida real utilizando para ello modelos estadísticos. La diferencia con la concepción anterior deriva en considerar la Estadística no tanto como un medio para analizar e interpretar datos como considerando una amplia variedad de modelos que permitan comparar datos en cuanto al estudio de la conveniencia de ciertas conjeturas sobre la realidad existente.

Enfoque basado en el significado que aporta.

C6. La Estadística es una herramienta que da sentido al mundo y al desarrollo de los significados personales. La generalidad de esta concepción supera a la concepción anterior en el sentido de que engloba el pensamiento del ser humano.

Las concepciones que se han presentado, admiten una estructura jerárquica. Diversos estudiantes presentan a su vez concepciones de la Estadística desde un extremo totalmente fragmentado hasta uno totalmente global en el cual la Estadística forma parte de la realidad que vivimos (C1 y C6).

Este estudio evidencia la idea tan generalizada en el ámbito docente de que los estudiantes en poseen diferentes percepciones de la Estadística como disciplina y de su uso en la resolución de tareas. La información que arroja este estudio permitirá adaptar nuestras programaciones de enseñanza y aprendizaje al entorno del alumno con objeto de ampliar su comprensión en cuanto a la Estadística, así como su enfoque del tema que se trate.

Una primera aproximación a esta problemática, que permite categorizar las técnicas requeridas para propiciar una correcta interpretación de la ciencia Estadística, es presentada por Watson (2000) y resumida en tres pasos:

1. Comprensión básica de la terminología estadística.
2. Comprensión del lenguaje y conceptos estadísticos cuando son empleados en un contexto de extensa discusión social.
3. Una cuestión de actitud puede permitir conceptos más sofisticados para contradecir afirmaciones realizadas sin un fundamento estadístico propio.

Watson presenta una experiencia de aula en que se hace cuestionar a los alumnos la información que presenta un artículo y su titular en prensa. Esto ofrece una oportunidad para discutir cómo una "casi perfecta relación" gráfica es cuestionada según la relación causa-efecto que implica el titular. El artículo del periódico ayuda a trabajar la necesidad de reorganizar los conceptos estadísticos en el contexto, así como la información que presenta, que carece de una justificación adecuada. El titular implica una causa y efecto entre las muertes y los coches. Si este artículo se ha realizado sobre el número de víctimas de muertes en carretera, el titular no debe sorprendernos, pero sin embargo, trata sobre la relación entre el incremento en los infartos y el incremento del uso del automóvil

Las propuestas didácticas de diferentes investigadores (Watson, 2000; Joram y cols., 2004; Horton y cols., 2004), comienzan por la necesidad de que los alumnos tomen ellos mismos los datos que vayan analizar posteriormente, haciendo además preguntas que respondan al por qué de las relaciones que se evidencian.

Es de notar el hecho de que las ideas estadísticas se encuentran presentes en las concepciones de nuestros alumnos. Como manifiestan Joram y cols. (2004), sin tratar de modo concreto la noción de medida de tendencia central, ni ser introducidos términos como media o moda, con sólo pedir a los alumnos que decidiesen entre dos datos, cuál de ellos era más similar a la mayoría, conforme la unidad ha ido progresando, han podido comprobar cómo muchas ideas estadísticas básicas han ido emergiendo del debate, a menudo por iniciativa de los alumnos. Es de destacar además que varios de sus comentarios revelan percepciones en ideas como la variabilidad estadística.

Sacando partido a las diferentes representaciones que sobre la regularidad de un conjunto de datos se pueden realizar (verbalmente, tablas, gráficos ó diagramas). Estos autores pretenden fomentar la implicación en la tarea propuesta, abarcar los posibles enfoques que sobre cualquier tema surjan y ayudar a tomar decisiones comprometidas. Es importante, para todo este desarrollo, considerar contextos cercanos al alumno (Joram y cols., 2004).

Aunque la mayoría de los alumnos han observado la edad y la estatura en su vida cotidiana, las situaciones problema planteadas en este contexto, ayudan a los estudiantes a vincularlas a un contexto matemático. Cierto es que verbalmente podemos manifestar la relación funcional entre dos variables, pero establecer la "regla" o función de dicha relación es más difícil.

Muchas de las investigaciones realizadas en torno al razonamiento covariacional, incorporan medios tecnológicos, como programas de ordenador, con el objeto de estudiar si su inclusión produce una mejora en su enseñanza y aprendizaje. Batanero y Godino, 1998; Batanero y cols. 1997, 1998) sugieren que la tecnología mejora las estrategias de covariación.

Un aspecto interesante a co nsiderar en este apartado es la investigación desarrollada en torno al Diseño de Experimentos y su relación con el razonamiento covariacional. La metodología de estas investigaciones incluye tres etapas principales: la preparación para el experimento, donde se propone una trayectoria de aprendizaje (actividades de aprendizaje) donde los estudiantes participan de modo activo con una meta definida; la experimentación propiamente dicha, marcada por la interacción profesor-alumno ó alumno-alumno y la observación; y un análisis retrospectivo, donde se analiza propiamente la instrucción llevada a cabo para futuras implementaciones de enseñanza (Zieffler, 2006).

Como Sánchez Cobo (1999) manifiesta, es de gran importancia ofrecer a nuestros alumnos situaciones de aprendizaje que muestren la diversidad de tipos de covariación (dependencia, intensidad, signo), y que de algún modo contribuyan a eliminar las concepciones erróneas que manifiestan nuestros estudiantes.

A continuación se presentan diferentes experiencias de aula que, dado el buen resultado que propugnan sus investigadores, cabría la necesidad de ser consideradas e incluso implementadas, siempre que sea posible, en nuestra secuencia de enseñanza.

La Estadística en contexto.

Es importante que las tareas que se presenten a l os alumnos sean dadas en contexto y con datos reales (Sánchez Cobo, 1999), tal es el caso de la noción de variación, una de las ideas fundamentales del pensamiento estadístico (Shaughnessy y Pfannkuch, 2002). Diversos investigadores presentan experiencias de aula, evidenciando la necesidad de implementar las nociones de correlación y regresión mediante el uso de proyectos que integren un contexto real, y que traten, entre otros aspectos:

- la noción de variación;
- la necesidad de toma de datos;
- el proceso de transnumeración (proceso de transformación de los números para facilitar su comprensión); y
- la modelización estocástica;

Una de estas experiencias es la llevada a cabo por Shaughnessy y Pfannkuch (2002), donde, mediante el proyecto de estudio de la actividad del volcán *Old Faithful*, se promueven todos estos aspectos, situando la *estadística en contexto*.

Según la experiencia de estos autores, el hecho de trabajar con una situación real, motiva la necesidad de recolectar datos reales dado que no podría ser llevada a cabo de otro modo. Un riesgo que advierten estos investigadores es la presencia de alumnos que no necesiten tomar datos por su seguridad de respuesta dada por las ideas previas. De cualquier modo, se puede evidenciar la pobreza de las teorías previas que manifiesten, o bien de los datos que han aproximado. Por otra parte, observan que se propicia el proceso de transnumeración dado que el alumno debe interpretar los datos y trabajar con ellos en diferentes representaciones para obtener conclusiones y hacer predicciones. Al respecto, estos investigadores proponen el intercambio de gráficos entre alumnos para enriquecer su trabajo y provocar el desarrollo de ciertas nociones, tal es el caso de la noción de variación. Estos autores observan cómo los alumnos ejercitan la noción de variabilidad en el intercambio de sus trabajos dado que se motiva la búsqueda de patrones y tendencias.

Cuando los alumnos evidencian la presencia de una variación no aleatoria (condiciones geológicas) en los datos, se aportan razones para considerar la modelización del estudio de la actividad del volcán mediante una modelización bidimensional. Como se expuso en la Sección 4.1.1, trabajar con gráficas de series temporales permitirá a nuestros estudiantes considerar la asociación bivariada de un modo natural (Moritz, 2004).

El hecho de considerar la Estadística en un contexto apropiado, permite a los alumnos involucrarse en la tarea, invitando a algunos estudiantes a hacer gráficas de tiempos de espera sucesivos modelizando la distribución de los datos de un modo intuitivo.

Otra experiencia que propicia el uso de un modelo estadístico de ajuste a los datos recolectados es descrita por Obremski (2008) en cuanto a la toma de decisión sobre el precio de cierto producto (objeto, servicio, etc.).

Utilizando los datos de los medios de comunicación (prensa ó internet), referidos a objetos o servicios similares con sus respectivos precios, podemos plantearnos determinar un precio justo para dicho objeto o servicio atendiendo a las características de cada uno de ellos mencionadas en esta publicidad (edad, condición, calidad, etc.). De este modo es considerando el precio de un artículo como variable dependiente del resto de variables de la cuestión tratada. Los ejemplos planteados por Obremski (2008) en el aula son: la toma de decisión del precio al que ponemos en venta un coche que poseemos con objeto de poder venderlo (un precio no excesivo) y no salir perdiendo en la venta (un bajo precio) pudiendo relacionarlo por ejemplo con la edad de dicho vehículo; o bien decidir el precio de compra de una vivienda atendiendo a los metros cuadrados que ésta posea.

Planteando preguntas como: "*¿por qué algunos de los objetos en venta en esta categoría son relativamente costoso, mientras que otros son relativamente baratos?*" (Obremski, 2008, p.44), introduce a los alumnos en el tema de la variabilidad del precio de mercado. De este modo podemos fijar alguna variable explicativa como puede ser por ejemplo: la edad, el tamaño del objeto…

Una vez recogidos los datos, nos planteamos las relaciones entre las variables recogidas para poder estudiar con ello su posible relación creando así un modelo de precios.

Con los datos tomados por ellos mismo pueden realizarse cuestiones referidas a la regularidad y a dispersión adaptadas a la situación planteada, de este modo, las preguntas referidas a estos conceptos serán mucho más significativas en su aprendizaje. Preguntas como "*¿Estos puntos representan posibles "gangas" o elementos sobrevalorados?*" (Obremski, 2008, p.45) ayudarán a comprender la dispersión de los datos.

Por otro lado, el hecho de que cada alumno tome sus propios datos sobre el tema tratado arrojará variaciones en las estimaciones muy enriquecedoras. Por ejemplo, en el caso de la vivienda, las dimensiones de ésta influirán en el precio de venta pero esta dependencia será más evidente en barrios donde todas las casas tengan un aspecto similar (barrios muy pobres o barrios muy ricos) debilitándose esta dependencia en barrios donde existan variedad de estilos de vivienda: edad de sus propietarios/inquilinos, acondicionamiento del hogar, etc.

Otra propuesta es la presentada por Joram y cols. (2004), donde tras registrar las mediciones de altura y edad de los alumnos de segundo y cuarto grado, en una tabla de cuatro columnas (dos columnas por cada curso que registraban las mediciones de la edad y de la altura), a los alumnos se les preguntaba por las regularidades que ellos encontraban.

Al preguntar por patrones en la edad era claro que entre los cursos la diferencia era básicamente de un año y que dentro del curso escolar la diferencia no llegaba a variar ni un año, pudiendo destacar las edades más frecuentes en cada uno de los cursos. Al preguntar por patrones de la altura, fue cuando surgió la necesidad de representar los datos gráficamente.

Tras representar el profesor un par de datos de cada curso, y pedir voluntarios a la tarea, fueron representados gráficamente todos los resultados. Sólo con los datos de estos primeros voluntarios ya fue suficiente para evidenciar las regularidades en el gráfico de dispersión.

Rápidamente se evidencia la relación de que a mayor edad mayor altura. El hecho de separar, a modo de clúster, mediante dos círculos la edad/altura de cada uno de los dos grupos permitió evidenciar la idea de ajustar una función lineal.

La idea de predecir la altura de los estudiantes de cursos previos y/o posteriores según todas las observaciones hechas de los datos tomados, permitió observar cómo eran capaces a situarse en el lugar adecuado de la porción de recta que alargaban. Tras llevar al aula dos alumnos de cada uno de los cursos en los cuales debían predecir sus alturas, surgió la idea de tomar como predicción el promedio de las alturas que midieran estos individuos. Este comentario permitió al profesor introducir el concepto de variabilidad dado que si se dispone de un gran conjunto de medidas se obtiene una mejor y más ajustada predicción mediante la media.

Aprendizaje colaborativo

Roseth, Garfield y Ben-Zvi (2008), plantean la enseñanza y aprendizaje de la estadística como un aprendizaje colaborativo ofreciendo una serie de consejos prácticos y materiales para implementar con éxito los métodos de aprendizaje cooperativo en el aula de Estadística.

Ante la cuestión de cómo gestionar las diferencias existentes entre los distintos grupos de trabajo (aprendizaje entre iguales, aprendizaje activo, aprendizaje cooperativo y trabajo grupal), señalan que, para sacar el máximo partido aprendizaje cooperativo, los profesores deben distinguir entre los diferentes grupos que podemos formar en el aula, entre los que destacan los grupos de estudio, grupos de laboratorio, o/y grupos de discusión, ya que no necesariamente todos ellos propiciarán un aprendizaje colaborativo. De hecho, algunos grupos permitirán facilitar el aprendizaje de los estudiantes y aumentar el clima de convivencia mientras que otros, pueden obstaculizar el aprendizaje de los estudiantes además de poder generar problemas en el aula.

Debemos señalar que aprendizaje activo y colaborativo son a menudo utilizados indistintamente parta describir las interacciones entre los estudiantes (participación en actividades, discusión de contenidos…). De acuerdo con Roseth, Garfield y Ben-Zvi (2008), una gran diferencia la encontramos en que en un aprendizaje colaborativo, involucramos en el proceso de aprendizaje a varios individuos eliminando el sentido marcadamente individualizado del acto de comprensión de un individuo. Los objetivos individuales de los estudiantes son vinculados al grupo del que forman parte generando un compromiso e interés dado el vínculo que se establece entre ellos dentro del grupo. Es un potencial motivador la inclusión en un grupo del cual la responsabilidad de la tarea es de todos. Un ejemplo de estos autores es dado por la comparación de histogramas en cuanto a la noción de desviación estándar. El trabajar cooperativamente con la responsabilidad de poder, en cualquier momento, representar al grupo de trabajo al que pertenecen, les hace ocupar un lugar individualmente paralelo al aprendizaje adquirido en el grupo.

Es difícil decidir cuándo proporcionar un aprendizaje colaborativo y además cómo evaluar dicho aprendizaje. Estos autores proporcionan sugerencias para llevar a cabo el proceso de instrucción dedicado a este tipo de aprendizaje. Se reconocen, como acción del profesor en la estructura de una lección fundamentada en un aprendizaje colaborativo, las siguientes fases:

- la toma de decisiones previas a la instrucción en cuanto al tema a exponer.
- explicitar la estructura de la tarea dadas las actividades colaborativas a realizar (asignar los grupos y su tamaño, especificar los criterios para completar con éxito la tarea, marcar pautas de responsabilidad grupal y comportamiento, etc.)
- supervisar y en su caso intervenir en cada grupo colaborativo cuando sea necesario, (asignar funciones a los miembros del grupo si no existe iniciativa o se produce un silencio ante el “cómo empezamos”), y
- evaluar el aprendizaje adquirido por los estudiantes, (pedir a los estudiantes que

identifiquen al menos dos comportamientos que hayan sido útiles al grupo y algunas propuestas de mejora pueden ayudar en la evaluación de la labor desempeñada).

Como los autores indican, se trata de atenuar el aislamiento existente en la enseñanza tradicional del profesor con una marcada interacción profesor-alumno, reconociendo la importancia de las interacciones entre los alumnos en el proceso de resolución de las tareas. Se trata de conseguir una práctica escolar lo más similar a la práctica estadística que se realiza en cualquier investigación a modo de grupo de trabajo.

El trabajo colaborativo no se reduce al trabajo que realizan los alumnos sino que implica un trabajo conjunto y en colaboración de los docentes implicados en la enseñanza del tema en cuestión. Una implicación del profesorado potenciará la reflexión sobre la enseñanza llevada a cabo, cuestionar la práctica realizada, además de unificar una metodología de trabajo que de consistencia al curso escolar que va dirigido. Por tanto es de gran utilidad disponer de equipos de enseñanza con un propósito de aprendizaje colaborativo.

Hemos de destacar la necesidad de disponer de tiempo para desempeñar de un modo efectivo esta propuesta de enseñanza, destacando que una vez establecida la fase inicial de toma de contacto de los integrantes del grupo y en segundo lugar de los individuos con la tarea, este tiempo se minimiza obteniendo máximos resultados.

La Estadística en la Historia de la Ciencia.

Una curiosa propuesta didáctica es la presentada por Ruiz Garzón (2003), en relación al significado físico del concepto estadístico de centro de gravedad de una distribución bidimensional. Como sabemos, las coordenadas del centro de gravedad de una distribución de frecuencias bidimensional son las medias aritméticas de cada una de las variables unidimensionales que componen la variable bidimensional y por la investigación desarrollada por Sánchez Cobo (1999), podemos concluir la dificultad que presentan nuestros alumnos en interpretar e incluso descubrir este hecho.

Según Ruiz Garzón (2003), los conceptos matemáticos suelen ser presentados a los alumnos de un modo aséptico y como hechos consumados sin un mero bagaje que explique su denominación y su génesis histórica. Con esta propuesta didáctica se permite visualizar algunas de las propiedades de la media aritmética, así como presentar de un modo contextualizado el concepto de intersección de las dos rectas de regresión, con el objetivo de que éste se afiance de un modo más significativo en nuestros alumnos para un posterior desarrollo de éstos.

La relación entre Mecánica y Matemáticas data de la época de Arquímedes de Siracusa (287-212 a. de C.). Con su célebre frase: "*Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra*", se muestra la inquietud y necesidad de buscar y demostrar las leyes de la palanca, que forman parte de su tratado "*Sobre equilibrios de planos*", en el cual se ocupa también del cálculo de centros de gravedad de diversas figuras planas.

Con objeto de indagar sobre el punto de intersección de las dos rectas de regresión lineal (recta de regresión de Y sobre X y recta de regresión de X sobre Y), la cuestión que se plantea es estudiar por qué denominar a este punto *centro de gravedad de la distribución*.

Dada la similitud entre el concepto físico de centro de gravedad de un sistema de masas bidimensional y el concepto de punto de corte de las dos rectas de regresión de una distribución bidimensional. Definiendo para cada uno de los ejes de coordenadas un centro de masas o de gravedad: x_G e y_G respectivamente, estos autores concluyen que las coordenadas del centro de gravedad (x_G, y_G), coinciden con sendas medias aritméticas ($\bar{x}, \bar{y}$). Luego, el centro de masas (o centro de gravedad) es el punto (x_G, y_G) = ($\bar{x}, \bar{y}$), que coincide con el punto de corte de las dos rectas de regresión, es decir, el centro de la distribución de frecuencias.

Los resultados de la investigación desarrollada por Sánchez Cobo (1999) indican que los alumnos encuentran dificultades para interpretar convenientemente los parámetros de la recta de regresión tales como la pendiente y los puntos de corte con el eje de coordenadas. La siguiente experiencia de aula resulta por tanto de igual interés.

Los parámetros del modelo de regresión lineal.

Numerosas propuestas didácticas surgen como respuesta a las dificultades que presentan los alumnos a la interpretación de los parámetros del modelo de regresión lineal.

Como muestran Groth y Powell (2004), una vez identificada la pendiente de la recta de regresión mínimo cuadrática como una tasa de cambio, existen dificultades en especificar las unidades en que se produce dicha razón de cambio, así como confundir la pendiente de la recta de regresión con el coeficiente de correlación manifestando éste, la fuerza de la relación lineal entre las dos variables. Varios estudiantes en este estudio, manifestaron la idea de que dos variables pueden tener una correlación cercana a 1 ó -1 y no tener que ser una causa de de la otra. Además, varios estudiantes utilizaron en su experiencia el término formal *outlier* para referirse a los datos extraños ó atípicos en una variable bidimensional, aun no habiendo sido presentado de un modo formal ó habiendo sido tratado este concepto tan sólo en las variables unidimensionales.

Horton y cols. (2004) presentan una propuesta didáctica basada en una hoja de cálculo con la que, realizando cálculos, se consigue concretar tanto la pendiente como la ordenada en el origen de la recta de ajuste mínimo cuadrático. Todd y cols. describen una herramienta de simulación que proporciona un práctico método para desarrollar en el alumno la relación entre los parámetros y los estadísticos muestrales.

Como Todd y cols. (2004) indican, la mayor dificultad se encuentra en distinguir los conceptos residuo del modelo de regresión lineal y residuos observados. Por residuo del modelo: ε_i para cada observación $i \in \{1,...,n\}$, nos referimos a la variable aleatoria que es añadida al modelo lineal) y por residuo observado: $Y_i - \hat{Y}_i$ para cada observación $i \in \{1,...,n\}$, nos referimos a la diferencia entre los resultados estimados y los resultados reales de la variable dependiente.

Obviamente, una dificultad añadida es la representación simbólica de los parámetros dado que, por un lado tratamos los parámetros del modelo de regresión lineal y por otra la de sus estimaciones. Es decir, si denotamos por β_0 y β_1 a los parámetros del modelo: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon_i$; donde *Y* es una variable dependiente de la variable independiente *X*; y sus estimaciones: $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, son los parámetros del modelo obtenidos mediante una estimación mínimo-cuadrática.

Explicar cómo estas estimaciones se basan en datos de la muestra, y exactamente cómo estas estimaciones se refieren al modelo que intentamos ajustar, no resulta, en general, fácil para los estudiantes.

En el proyecto de simulación llevado a cabo por Todd y cols. (2004), se destaca, entre otros comentarios de los estudiantes, la mención a la utilidad de ver cómo varían los parámetros del modelo de regresión al variar una muestra de la población: "*Es especialmente útil el poder utilizar la tecla F9 para cambiar las muestras*" (Todd y cols, 2004. p. 41), o también cómo influyen los datos extremos en la estimación de los parámetros del modelo: "(…) *Me gustó el hecho de que fui capaz de usar diferentes conjuntos de datos y observar cómo éstos podía alterar la regresión. Me pareció muy útil ver cómo los negativos y los números altos frente a números bajos cambiaban el resultado. Me alegro de que haya creado este programa y creo que ayudará a otros estudiantes en el aprendizaje de los conceptos.*" (Todd y cols. p. 41, 2004).

En la experiencia presentada por Horton y cols. (2004), tras cuestionar a los alumnos si existe una relación entre la altura y el tamaño del pie y ser debatida, se ofrece una tabla de datos con el objetivo de que sean capaces de obtener patrones o conclusiones. Tras una necesidad de ordenación de los datos, los estudiantes evidenciaron una relación entre ambas variables de dependencia positiva. El hecho de realizar el diagrama de dispersión de los datos, permitió a los alumnos plantearse un ajuste lineal a dicha nube de puntos, y se les planteó el obtener la expresión de dicha recta de regresión lineal del modo: $y = m \cdot x + b$, donde con *x* representamos la altura y con *y* el tamaño del zapato. Destacar la observación de éstos en cuanto a la ordenada en el origen de la recta de regresión, dado que corresponde a un tamaño de pie de un individuo de altura 0.

Como muestran estos autores, es costoso que los alumnos consideren la pendiente de la recta de ajuste mínimo cuadrático como el promedio del aumento en el tamaño del zapato por aumento de pulgadas en la altura. Siendo sus cálculos en principio algebraicos, (obtenían la pendiente mediante dos puntos de dicha recta), les sugirieron seleccionar un valor para *b* previamente por tanteo y posteriormente por ajuste y estimación ajustando dichos parámetros con objeto de obtener un mejor modelo de ajuste a los datos gracias a la hoja de cálculo. Es muy importante cómo deducían poco a poco el sentido y la utilidad de realizar un ajuste de regresión lineal, además de comprender las operaciones de las que parte dicho ajuste y posterior predicción.

Con la ayuda de una hoja de cálculo podían comparar los datos predichos por el modelo planteado y los verdaderos valores registrados para el tamaño del zapato. Una vez registrados estos valores, sintieron la necesidad de calcular el error de predicción. Al pedirles que pensasen en el error total del modelo de predicción fue difícil que considerasen el promedio de los errores. Pero fueron capaces de responder a las preguntas sobre lo que hicieron, por qué lo hicieron, lo que significaba. De este modo, las hojas de cálculo, entre muchas otras contribuciones, permiten a los estudiantes desarrollar la comprensión de sofisticados modelos matemáticos.

A modo de reflexión, como indica Sánchez Cobo: "*los ejercicios que realicen los alumnos deben plantear ajustes tanto lineales como no lineales, lo cual ayudará a que los estudiantes no establezcan relaciones inadecuadas entre el tipo de ajuste y otros conceptos estadísticos -covarianza, coeficiente de correlación, etc.-.*" (Sánchez Cobo, 1999, p.292).

Horton y cols. (2004) plantearon a sus alumnos un problema diferente para ser modelizado. La cuestión no era practicar la enseñanza planteada en el proyecto anterior, sino comprender que el modelo debe ajustarse a los datos y no al contrario, como en ocasiones es planteada la regresión o correlación en nuestra enseñanza. El modelo de ajuste a los datos presentados era en este caso exponencial, e intuitivamente, los datos del diagrama de dispersión hacían sospechar no tanto en una línea sino en una curva. Tras plantear el siguiente modelo $y = a \cdot b^x + c$, donde *x* representa el número de minutos que el líquido se ha estado enfriando e *y* representa la temperatura en grados Fahrenheit.

La mayor parte de las propuestas ofrecidas en los diferentes medios de difusión científica, tienen como objetivos comunes (1) tratar de justificar la elección del modelo de ajuste y (2) simular el proceso de paso de los datos a los resultados con ayuda del software disponible. Para alcanzar este objetivo Moritz indica que : "*Si queremos fomentar la perspectiva de los gráficos como herramientas para el análisis y no como fines en sí mismo (por ejemplo, NCTM 2000), necesitamos permitir e incluso fomentar una variedad de representaciones gráficas para alcanzar el propósito de confrontar los datos y el razonamiento covariacional*" (Moritz, 2004, p.249), para ello, el ordenador constituye una ayuda de gran valor al poder ofrecer a nuestros alumnos una autonomía en la resolución de la tarea, susceptible de implicar datos reales (los cuales suelen contener gran cantidad de datos), que provoquen e incluso desarrollen una intuición para la metodología de regresión (Todd y cols. 2004).

Aproximación a los coeficientes de correlación: Pearson, Kendall y Spearman.

La noción de correlación debe ser introducida de modo intuitivo a una temprana edad considerando patrones en el diagrama de dispersión, para posteriormente utilizar las fórmulas conocidas para tal efecto, la propuesta didáctica de Holmes (2001), persigue este propósito.

Partiendo del diagrama de dispersión y dividiendo éste en cuatro cuadrantes (mediante las rectas perpendiculares referidas a las medianas o a las medias de cada variable unidimensional, ver Figura 10) es posible distinguir aquellos puntos que varían conjuntamente tanto en sentido positivo como en sentido negativo.

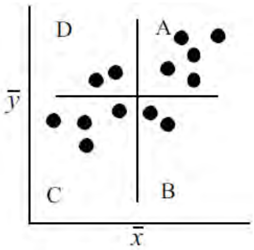

Figura 10. Diagrama de dispersión dividido en cuatro cuadrantes (Holmes, 2001, p.68).

Supongamos que existen n puntos y denotamos por n(A), n(B), n(C) y n(D) al total de puntos que caen en la región A, B, C y D, respectivamente.

Si damos un valor de $\frac{1}{n}$ a todo punto de A ó C y $-\frac{1}{n}$ a todo punto de B ó D y los sumamos, obtenemos:

$$cor = \frac{n(A) + n(C) - n(B) - n(D)}{n}$$

¿Qué propiedades posee dicho término definido como *cor*?

i) si todo punto se encuentra en las regiones A y C, *cor* toma el valor 1.

ii) si todo punto se encuentra en B y D, *cor* toma el valor -1.

iii) si todo punto se encuentra indistintamente en 3 ó 4 regiones *cor* se encuentra entre -1 y 1.

iv) si los puntos son predominantes en A y C *cor* será positivo.

v) si los puntos son predominantes en B y D *cor* será negativo.

Ante la imposibilidad de abarcar con el término *cor* la distinción de los diagramas de dispersión de la siguiente Figura 11:

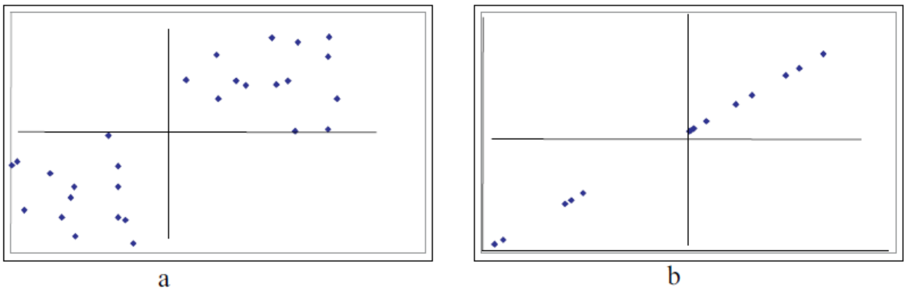

Figura 11. Diferentes diagramas de dispersión propuestos (Holmes, 2001, p.68)

Surge la necesidad de asignar más peso a los puntos que se encuentren más lejos de las líneas divisorias para así elaborar una fórmula más útil. Después de todo, los puntos cercanos a las líneas podrían cambiar ligeramente de signo pero son los más cercamos los que establecen la correlación positiva más firme. Las distancias de las líneas son dadas por las diferencias: $(x-\bar{x})$ y $(y-\bar{y})$ mostradas en la siguiente Figura 12:

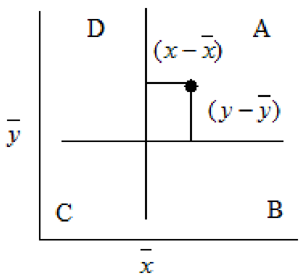

Figura 12. Distancia a la media de cada dato (Holmes, 2001, p.68).

De este modo, y realizando los productos que corresponden a cada valor se obtiene una tabla como la que se muestra en la Figura 13:

	A	*B*	*C*	*D*
$(x-\bar{x})$	+	+	−	−
$(y-\bar{y})$	+	−	−	+
$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	+	−	+	−

Figura 13. Tabla de signos (Holmes, 2001, p.68).

Y utilizando como medidas estándar las dadas por: $\frac{(x-\bar{x})}{sd\,(x)}$ y $\frac{(y-\bar{y})}{sd\,(y)}$, donde *sd* representa a la desviación típica de cada variable. Y dividiendo todos estos productos entre en total de datos, implica el siguiente cálculo que facilita el coeficiente de correlación de Pearson:

$$\frac{1}{n}\frac{\sum(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{sd(x)\cdot sd(y)} = \frac{\sum(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2\sum(x-\bar{x})^2}}$$

donde es fácil mostrar que cuando los puntos permanecen sobre la línea recta, el coeficiente será 1 ó -1.

Para el caso del coeficiente por rangos de Spearman, cuya fórmula es: $r_S = 1-\frac{6\sum d_i^2}{n(n-1)(n+1)}$ donde $d_i = r(x_i)-r(y_i)$ siendo $r(x_i)$ y $r(y_i)$ el rango de los valores de x_i y de y_i respectivamente, se puede utilizar igualmente el diagrama de dispersión del siguiente modo: Si a un ajuste lineal perfecto (Figura 14, (a)) con una correlación positiva entre las variables, vamos restando un múltiplo de dichas posibles diferencias d_i al cuadrado: $\sum d_i^2$, (Figura 14, (b)), el objetivo es llegar al valor -1 (Figura 14, (c)):

Figura 14. Ajustes mediante diferencias (Holmes, 2001, p.68)

Esto es, tomamos $r_S = 1-c\sum d_i^2$ y elegimos c tal que cuando exista una perfecta correlación negativa, se verifique que $r_S = -1$. ¿Cómo calcular *c*? La prueba difiere dependiendo de si n es par ó impar, veamos para el caso en que el número de datos sea impar:

Partiendo de la siguiente Figura 15, que muestra las líneas de una correlación positiva y negativa perfectas, se puede observar que para una correlación negativa perfecta:

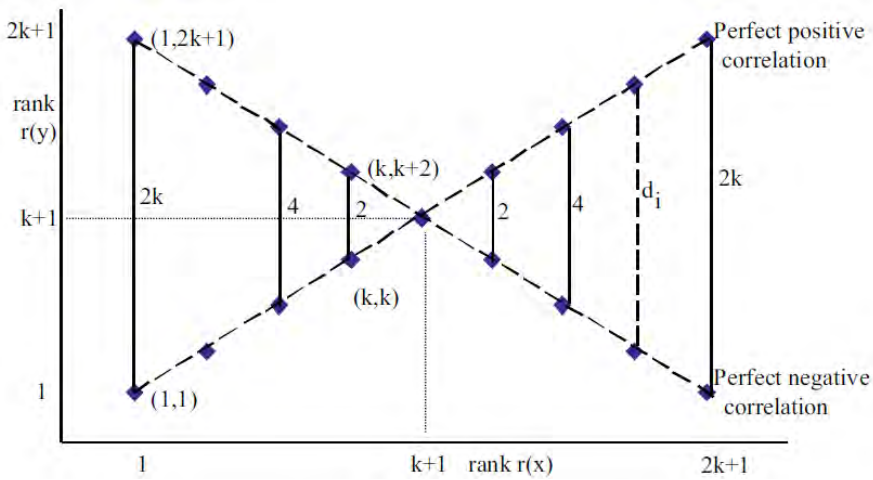

Figura 15. Relación positiva y negativa en la correlación (Holmes, 2001, p.68)

$$\sum d^2 = 2\cdot\left\{2^2+4^2+...+2^2(k-1)^2+(2k)^2\right\} = 8\cdot\left\{1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2\right\} = 8\sum_1^k r^2 = 8\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Luego, para $k=\dfrac{n-1}{2} \quad \rightarrow \quad \sum d^2 = \dfrac{(n-1)(n+1)(n)}{3}$

Por tanto, para una perfecta correlación negativa tenemos que:

$$1-c\frac{(n-1)(n+1)(n)}{3} = -1 \quad \rightarrow \quad c=\frac{6}{(n-1)(n+1)(n)}$$

y por tanto el coeficiente de correlación por rangos de Spearman queda del modo:

$$r_S = 1-\frac{6\sum d_i^2}{n(n-1)(n+1)}$$

Para el caso del coeficiente por rangos de Kendall, cuya fórmula es: $r_S = 1-\dfrac{6\sum d_i^2}{n(n-1)(n+1)}$ donde $d_i = r(x_i)-r(y_i)$ siendo $r(x_i)$ y $r(y_i)$ el rango de los valores de x_i y de y_i respectivamente, se puede utilizar igualmente el diagrama de dispersión del siguiente modo: Mirando en el diagrama de dispersión original, podemos comparar todo posible par de puntos. Si no hay valores relacionados, cada pareja está en una posición relativa de modo concordante (haciendo parecer una correlación positiva) ó discordante (haciendo parecer una correlación negativa.

Al existir $\dfrac{n(n-1)}{2}$ parejas en total, si tenemos un total de C parejas concordantes y D parejas discordantes, podemos utilizar la expresión $\dfrac{C-D}{n(n-1)/2}$. Esta expresión será 1 cuando todo par de puntos sea concordante y será -1 cuando todo par de puntos sea discordante, en cualquier caso, el valor de esta expresión se encuentra entre los extremos -1 y 1. De este modo hemos conseguido con la expresión $\dfrac{2(C-D)}{n(n-1)}$, un modo de calcular el coeficiente de correlación de Kendall. Otras aproximaciones a este coeficiente se pueden encontrar en Noether (1981).

El coeficiente de determinación y el coeficiente de correlación lineal.

Es común el uso de programas de ordenador capaces de calcular diferentes coeficientes de correlación, así como el coeficiente de determinación del modelo de ajuste. Los estudiantes se enfrentan en las tareas a diagramas de dispersión, al cálculo de ecuaciones de regresión, donde la mayor parte de los software de ajuste de curvas ofrece a los estudiantes información adicional cuando se realiza una aproximación mínimo cuadrática. El problema radica, en general, en el desconocimiento que nuestros alumnos presentan ante la información disponible (Barrett, 2000). Como señala Sánchez Cobo: "*algunos alumnos confunden los coeficientes de correlación y de determinación*" (Sánchez Cobo, 1999, p. 211).

En cuanto al coeficiente de correlación lineal, detonado por r, mide la intensidad ó fuerza de la asociación lineal entre dos variables. Cuando se manifiesta una fuerte relación lineal positiva ocurre entre dos variables, el r-valor será próximo a 1, y cuando una fuerte relación lineal negativa ocurre entre dos variables, el r-valor será próximo a -1. Un valor de r cercano a cero ocurre cuando una pequeña ó casi nula relación lineal existe entre las variables. Que aparezca este número junto a la regresión lineal es razonable, puesto que el r-valor informa sobre la intensidad de la relación lineal. Ahora bien, la confusión la encontramos entre el valor de r^2 y el coeficiente de determinación: R^2, que representa la proporción de varianza en la variable respuesta que es explicada por el modelo de regresión en cuanto a la variable explicativa.

La mayor parte de los libros de texto de introducción a la estadística no incluyen una definición de coeficiente de determinación. Aun así, estos libros de texto informan a los estudiantes de que el cuadrado del coeficiente de correlación, r^2, da la proporción de la varianza en la respuesta de la variable, Y, que es explicada por el modelo de regresión lineal de esta variable en la variable explicativa, X. Como vemos, esta interpretación de r^2 es la propia definición de R^2 aplicada específicamente al caso de la regresión lineal, un resultado que no es obviamente intuitivo, (Barrett, 2000). En la propuesta didáctica de esta autora, en un primer paso, se discute cómo cuantificar la variación en la variable respuesta. Los estudiantes normalmente encuentran la respuesta por sí mismos, aún así, ella guía sus razonamientos.

Una curiosidad de su estudio es que los alumnos, que previamente no han sido invitados a una demostración algebraica, piensan más fácilmente en la variación que no es explicada por la regresión mínimo cuadrática. Partiendo del modelo de regresión lineal que minimiza la suma de los residuos al cuadrado, los estudiantes tienen una noción intuitiva sobre la relación entre la variación en los residuos y la variación de los valores de la variable y que el modelo no explica. Este resultado permite obtener la expresión de la proporción de variación en los valores de la variable y que justifica el modelo de regresión:

$$\text{Coeficiente de determinación} = R^2 = \frac{\Sigma\left(y_i - \overline{y}\right)^2 - \Sigma\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\Sigma\left(y_i - \overline{y}\right)^2}$$

Aunque el valor de R^2 no siempre es calculado, la expresión puede ser utilizada para ser calculada en cualquier modelo de regresión. Mediante la resolución de actividades, los alumnos van desarrollando estas nociones, donde se introducen modelos no lineales para poder evidenciar la información de r^2 frente a R^2.

"Es necesario que nosotros como educadores hagamos todo lo posible por comprender y mejorar la capacidad de razonar y entender la covariación en nuestros alumnos"
(Zieffler, 2006, p. 36)

CAPÍTULO 5.

CONCLUSIONES

Como se ha ido mostrando a lo largo de los capítulos de este libro, el papel que juega la Estadística en la sociedad de cualquier país, constituye un elemento clave para mantener la cultura esencial de todo ciudadano y, como señala Wallman (1993), una potente herramienta de gobierno.

Investigadores como Ballman (1997), McClain y Cobb (2001) ó Shaughnessy y Pfannkuch (2002) evidencian la necesidad de hacer un mayor énfasis en el desarrollo del pensamiento estadístico frente a la hasta ahora habitual manera de presentar los conceptos estadísticos de un modo formal, y con un marcado sentido operacional. Es momento de plantear nuestro proceso de enseñanza, no tanto desde el punto de vista de *hacer Estadística* sino de *cómo pensar Estadística*. Surge entonces la cuestión de cómo poder desarrollar en nuestros alumnos el pensamiento estadístico. Como señala Nicholson (2003), hemos de plantearnos identificar una estructura jerárquica que nos permita, como docentes, desarrollar las habilidades interpretativas de nuestros alumnos con mayor eficacia.

Los profesores tienen objetivos particulares referidos al modo en que les gustarían que los alumnos percibiesen la estadística como consecuencia de la instrucción: importancia del uso de la estadística para comprender mejor la realidad, uso de diferentes formas de resolver un problema estadístico, reconocer las distintas conclusiones que pueden surgir a partir de un mismo conjunto de datos habiendo formulado diferentes hipótesis o usado diferentes métodos de análisis, etc. (Garfield, 1995a), y de algún modo, se olvida la importancia de la práctica que desarrolla el alumno en el aula.

El hecho de prestar atención al proceso de la recolección de datos, la comprensión del modelo en uso, la variación de éste en función de los datos, la representación gráfica, el diseño de experimentos y encuestas, la resolución de problemas reales, son entre otras, iniciativas que posibilitarán una mayor comprensión de los conceptos estadísticos que se pretende que sean adquiridos por nuestros alumnos. Fomentar el pensamiento estadístico en nuestro alumnado no es una tarea fácil e implica, en última instancia, la necesidad de involucrar a los estudiantes en todas las fases del ciclo de investigación estadístico, incluida la recogida de datos, análisis de datos y la inferencia (Groth y Powell, 2004).

Podemos destacar, entre otras, las aportaciones que varios autores han sugerido en cuanto a la enseñanza de los conceptos de regresión y correlación como son la negociación de significados (Ballman, 1997; McClain y Cobb, 2001), el uso de proyectos de investigación (Groth y Powell, 2004), la inclusión en la enseñanza del AED (Batanero, Estepa y Godino, 1991; Estepa, 1993; Batanero, Godino y Estepa, 1998), la simulación (Ballman, 1997), la utilización del desarrollo histórico de estas nociones (Estepa y Sánchez Cobo, 1994).

Presentar los conceptos estadísticos desde un enfoque formal, enseñanza llevada a cabo por la mayoría del profesorado, es privativo de una inferencia innata que posee el ser humano, que ha de ser tratada por el docente en pro del desarrollo en el individuo de un adecuado pensamiento. En este sentido, destacar el hecho de que conceptos como el de recta de regresión mínimo cuadrática, o propiedades como la influencia de datos extremos/dispersos en la recta de ajuste mínimo cuadrática, se manifiesten sin ni haber sido definidos por el profesor en clase.

Son numerosas las investigaciones que manifiestan la importancia de impartir una enseñanza basada en la práctica. Trabajar en equipo, comunicarse, son elementos poco aprovechados en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. El profesor debe abandonar su clase tradicional marcadamente magistral y dar paso a alternativas tales como proyectos, prácticas de laboratorio/informática, ejercicios de grupo de resolución de problemas o actividades de discusión, entre otras (Roseth, Garfield y Ben-Zvi, 2008).

La implicación del alumno en las tareas y o proyectos planteados posibilitará desarrollar una mejor comprensión de los conceptos estadísticos así como capacitarles en la tarea de producir análisis y argumentos adecuados al contexto de investigación, además de ayudarles a comunicar los resultados, como por ejemplo, si el alumno elabora un informe, resumen o reflexión sobre una tarea planteada referida a un contexto real, y posteriormente discute y debate en el aula dichos resultados. En el caso de la correlación y regresión, permitirá rescatar todas las ideas y concepciones que éstos poseen sobre nociones como la causalidad y la asociación estadística, y todas ellas nos serán de gran utilidad para diseñar nuestro proceso de instrucción (Groth y Powell, 2004) donde la presencia del docente es fundamental en su desarrollo. Como se ha mostrado en las investigaciones que atañen al razonamiento covariacional, las ideas del individuo suelen ser sesgadas e incluso carentes de fundamento cuando, en su mayoría, ni tan siquiera ofrecen cabida a la existencia de una correlación inversa.

Es por ello que se ha utilizado la concepción de aprendizaje de las matemáticas como una actividad humana de dominio personal ("*actividad de resolución de problemas*"), mediada por el lenguaje en los procesos de comunicación e interpretación ("*como lenguaje simbólico*"), desplegada en una institución ("*socialmente compartida*") desarrollado en el EOS, como marco de investigación que nos permitirá llevar a cabo la investigación que desarrollaremos en cuanto a las nociones de regresión y correlación en la enseñanza de Bachillerato.

REFERENCIAS

Alloy, L. B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: The joint influence of prior expectations and current situational information. *Psychological Review, 91* (1), 112-149.

Ballman, K. (1997). Greater emphasis on variation in an introductory statistics course. *Journal of Statistics Education, 5* (2). Disponible en: www.amstat.org/publications/jse/.

Barbancho, A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ariel.

Barret, G. B. (2000).The coefficient of determination: understanding r^2 y R^2. *Mathematics Teacher, 93* (3), 230-234.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO, 59,* 9-17.

Batanero, C., Díaz, C. y Gea, M. M. (2011). Estadísticas de la pobreza y desigualdad. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estadística con Proyectos* (pp. 73-96). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C. y Godino, J. D. (1998). Understanding graphical and numerical representations of statistical association in a computer environment. En L. Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee y W. Wong, (Eds). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*, vol. *2,* (pp. 1017-1024). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, *9*, 25-31.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill, (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers* (pp. 191-205). Voorburg, The Netherlands: Internacional Statistical Institute.

Batanero, C., Godino, J. D., y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities (Research Forum). En A. Olivier y K. Newstead, (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 221-236). Stellembosch, South Africa: Universidad de Stellenbosh.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 151-169.

Benzecri, J. P. (1982). *Histoire et prehistoire de l'analyse des données*. París: Bordás.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et methods de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990.* London: Kluwer.

Castro, C. H. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN, 11,* 59-77.

Chamorro, M.C. (2003a). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En M.C. Chamorro (coord.). *Didáctica de las Matemáticas. Colección Didáctica Primaria,* (pp. 69-94). Madrid: Ed. Pearson.

Chamorro, M.C. (2003b). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ed. Pearson.

Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1967). Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology*, *72* (3), 193-204.

Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, *74* (3), 271-280.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Consejería de Educación. (2007a). *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.* Sevilla: Autor.

Consejería de Educación. (2007b). *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.* Sevilla: Autor.

Consejería de Educación. (2007c). *LEY 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía.* Sevilla: Autor.

Consejería de Educación. (2008a). *Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía.* Sevilla: Autor.

Consejería de Educación. (2008b). *Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía*. Sevilla: Autor.

Contreras, A., Font, V. Luque, L y Ordoñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25* (2), 151-186.

Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers. *Psychological Bulletin 90* (2), 272-292.

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10* (2) 191-218.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, XXVIII* (2), 49-77.

Duval (1993). *Semiosis et Noesis*. Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela francesa. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Estepa, A. (1993). *Algunas notas sobre la didáctica de la estadística*. Centro de Profesores de Jaén.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución* *como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 4,* 25-41.

Estepa, A. y Gea, M. M. (2010). El origen de la noción de correlación y la enseñanza. En J. Berral, M. de la Fuente y España, F. (Eds.) *Actas al XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (pp. 202-212). Córdoba: Sociedad Matemática Andaluza de Educación Matemática Thales

Estepa, A. y Gea, M. M. (2011). La enseñanza-aprendizaje de la asociación estadística. *Actas 15 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Gijón: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). ISBN

Estepa, A. y Gea, M. M. (2012). Conocimiento para la enseñanza de la asociación estadística. En J. J. Ortiz (Ed.), *Investigaciones actuales en educación stadística y formación de profesores* (pp. 23-40). Melilla: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación y Humanidades. Universidad de Granada

Estepa, A., Gea, M. M., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números, 81*, 5-14.

Estepa, A. y Sánchez Cobo, F. T. (1994). Desarrollo histórico de la idea de asociación estadística. *Épsilon*, *30,* 61-74.

Estepa, A. y Sánchez Cobo, F. T. (1998). Correlation and regresión in secondary school text books. En Pereira-Mendoza, L., Seu, L., Wee, T. y Wong, W. (Eds), *Proceedings of the Fifth Internacional Conference on Teaching of Statistics* (pp. 671-676). Voorburg, The Netherlands: Internacional Statistical Institute.

Estrada, M. A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilitics thinking in children*. Dordrecht, Holland: Reidel.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27* (2), 2-7.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en Educación Matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33* (2), 89-105.

Garfield, J.B. (1995a). How Students Learn Statistics. *International Statistical Review, 63* (1), 25-34.

Garfield, J.B. (1995b). La evaluación del aprendizaje de la estadística. *UNO, 5,* 5-14.

Gea, M. M. (2012). Correlation and regression in the training of teachers. En L. Gaiser y D. Curcic (Eds.), *Bridging gaps in the Mediterranean research space : 4th EMUNI Research Souk. The Euro-Mediterranean Student Research Multi-conference* (pp.153-159. El. Knjiga. - Portoroz: EMUNI University.

Gea, M.. Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (En prensa). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *SUMA*

Gea, M. M., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Un estudio empírico de los problema de correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato. En J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho y P. F. Correia (eds.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 71-81). Braga: Centro de Investigação em Educação (CIEd). Universidade do Minho.

Gea, M., Batanero, C., Cañadas, G. y Arteaga, P. (2013). La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada: SEIEM.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Gea, M., Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2013) La estimación de la correlación: variables de tarea y sesgos de razonamiento. En A. Salcedo (Ed.), *Educación estadística en América Latina: Tendencias y* perspectivas (pp. 361-384). Caracas; Universidad Central de Venezuela.

Gea, M., Contreras, J. M., Cañadas, G. y Arteaga, P. (2012). Comprendiendo la correlación a partir de sus representaciones. *XIV Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: "Diversidad y Matemáticas"*. Thales. Málaga. 2012.

Gea, M. M., Contreras, J. M., Arteaga, P. y Cañadas, G. R. (2012). El lenguaje sobre la correlación y regresión: un estudio de dos libros de texto. En H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre y C. Nunes (Eds.). *Atas do XXIII Seminário de Investigaçao Matemática* (pp. 415-428). Lisboa: Associaçao de Professores de Matemática.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2003a). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. En J.D. Godino, (Ed.). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D. (2003b). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/. Visitado el 30/7/2010.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina Tecnocientífica*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf. Visitado el 15/10/2010.

Godino, J. D. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia en el *VI CIBEM*, Puerto Montt, Chile, Enero, 2009. Disponible en: www.ugr.es/~jgodino/.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico*. Publicaciones, 38,* 25-49.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII* (2), 221–252.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf. Visitado el 15/10/2010.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27* (1), 59-76.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia.* Centro de Profesores y Recursos de Murcia. Disponible en: www.ugr.es/~jgodino/.

Groth, R. E y Powell, N. N. (2004). Uso de los proyectos de investigación para ayudar al desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes. *Mathematics Teacher*, *97* (2), 106-109.

Gutiérrez, C. S. (1994). *Filosofía de la estadística*. Valencia; Servicio de publicaciones de la Universidad de Valencia.

Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics. From 1750 to 1930*. New York: John Wiley.

Holmes, P. (2001). Correlation: From Picture to formula. *Teaching Statistics*, *23* (3), 67-71.

Horton, M.R. Phillips, V y Kenelly, J.(2004). Construir tu propio modelo de regresión. *Mathematics Teacher*. *97* (4), 284-289.

Joram, E., Hartman, C. y Trafton, P.R. (2004). As People Get Older, They Get Taller. *Teaching Children Mathematics*. *10* (7), 344-351.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación* *en Matemática Educativa, 9* (3), 383-406.

Mcclain, K. y Cobb, P. (2001). Supporting students' ability to reason about data. *Educational Studies in Mathematics*, *45* (1-3), 103-129.

McKenzie, C. R. M., y Mikkelsen, L. A. (2007). A Bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology, 54* (1), 33-61.

Ministerio de Educación (ME) (2006). *LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (2007b). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Moore, P. G. (1990). The skills challenge of the nineties. *Journal of the Royal Statistical Society*, *153* (3), 265-285.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 221-255). Dordrecht: Kluwer.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA.

Newman, J. R. (1956). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Barcelona: Grijalbo.

Nicholson, J. (2003).GCSE statistics coursework, and dealing with multy-dimensional data. *Mathematics in School*, *32* (5), 8-22.

Noether, G.E. (1981). Why Kendall Tau? *Teaching Statistics*, *3* (2), 41-43.

Obremski, T. (2008). Pricing Models Using Real Data. *Teaching Statistics*, *30* (2), 44-48.

Ottaviani, M. G. (1998). Induzioni: The Italian journal on teaching statistics. En: Pereira-Pendoza, L., Seu, L., Wee, T. y Vong, W.-K. (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching of Statistics*, vol. 1, (pp. 495-500). Voorburg: International Statistical Institute.

Reid, A. y Petocz, P.(2002). Students' Conceptions of Statistics:A Phenomenographic Study. *Journal of Statistics Education*, *10* (2). Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse. Visitado el 15/10/2010.

Roseth, C.J., Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). Collaboration in Learning and Teahcing Statistics. *Journal of Statistics Education*, *16* (1). Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse. Visitado el 15/10/2010.

Ruiz Garzón, G. (2003). El concepto estadístico de centro de gravedad. *Números*, *53*, 43-53.

Ruiz Higueras, L. (2003). Aprendizaje y matemáticas. En M.C. Chamorro (coord.). *Didáctica de las Matemáticas. Colección Didáctica Primaria* (pp. 32-68). Madrid: Ed. Pearson.

Ruiz Higueras, L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas. Colección Didáctica Infantil* (pp. 2-38). Madrid: Ed. Pearson.

Sánchez Cobo, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *18* (2), 297-310.

Shaughnessy, J. y Pfannkuch, M. (2002). How Faithful is Old Faithful? Statistical Thinking: A Story of Variation and Prediction. *Mathematics Teacher*, *95* (4), 252-259.

Seal, H. L. (1967). The historical development of the Gauss linear model. *Biometrika*, *54*, 1-24.

Tanur, J. M., Mosteller, F., Kruskal, W. H., Link, R. F., Pieters, R. S. y Rising, G. R. (1972). (Eds.) *Statistics: a guide to the unknown.* San Francisco: Holden Day.

Todd, J.G. Hagtvedt, R y Jones, K. (2004). A VBA-based Simulation for Teaching Simple Linear Regression. *Teaching Statistics, 26* (2), 36-41.

Tukey, J. (1962). The future of data analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, *33,* 1-67.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. New York: Addisson Wesley.

Vergnaud, G. (1995). Au fond de l'apprentissage, la conceptualization. En R. Noirfalise (ed.) *Actes VIII Ecole de ETE sur la Didáctique des Mathématiques* (pp. 174-186). París: DIDIREM- París VII.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88* (421), 1-8.

Watson, J. M. (2000). Statistics in Context. *Mathematics Teacher, 93* (1), 54-58.

Wixted, J. T. (2004). The Psychology and neuroscience of forgetting. *Annual Review of Psychology*, *55*, 235-269.

Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral. Universidad de Minnesota.