

El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria

Elena Hernández Salmerón



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Tutores: Carmen Batanero Bernabeu

María del Mar López Martín

Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

2015



El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Memoria realizada por D^a Elena Hernández Salmerón bajo la dirección de los Doctores Carmen Batanero Bernabeu y María del Mar López Martín del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, para optar al Máster Oficial en Didáctica de la Matemática impartido por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Trabajo realizado dentro del Proyecto EDU2013-41141-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

La autora

Firma manuscrita de Elena Hernández Salmerón en tinta azul.

VºBº de los Directores

Firma manuscrita de Carmen Batanero Bernabeu en tinta azul.

Firma manuscrita de María del Mar López Martín en tinta azul.

Dra. Carmen Batanero Bernabeu

Dra. María del Mar López Martín

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer enormemente a la Dra. Carmen Batanero y la Dra. María del Mar López su implicación, tiempo y esfuerzo dedicado en la realización de este trabajo, así como su apoyo y constancia durante el mismo.

Para poder llevarlo a cabo, agradecer al personal y al alumnado del IES Mediterráneo de La Línea de la Concepción (Cádiz) toda su colaboración y, en especial, a Clemente y a Esther, compañeros del Dpto. de Matemáticas, que me han abierto las puertas de sus aulas para la obtención de los datos del estudio.

Y por último, agradecer a todos aquellos que me han apoyado durante este año para la consecución del Máster, especialmente, a mi hermana Inmaculada por su experiencia, y a mi compañero Jesús Bernal, que ha sido un gran pilar en todo el proceso.

Trabajo realizado como parte del proyecto EDU 2013-41141-P (MEC) y Grupo FQM-126

EL LENGUAJE DEL AZAR EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Introducción	3
Capítulo 1. Planteamiento y justificación de la investigación	5
1.1. Introducción	5
1.2. Objetivos de la investigación y su interés	5
1.3. Marco curricular	7
1.3.1. La probabilidad en la educación primaria	8
1.3.2. Educación secundaria obligatoria	11
1.4. Análisis del contenido matemático	15
1.4.1. Fenómenos aleatorios y deterministas	16
1.4.2. Lenguaje verbal asociado a la probabilidad	17
1.4.3. Graduación intuitiva de probabilidades	18
Capítulo 2. Investigaciones previas	21
2.1. Introducción	21
2.2. Desarrollo de la idea de azar en los niños	21
2.3. Desarrollo de la idea de probabilidad	24
2.4. Comprensión del lenguaje probabilístico	25
2.5. El lenguaje probabilístico en los libros de texto	27
2.6. Conclusiones de las investigaciones	29
Capítulo 3. Planteamiento y justificación de la investigación	31
3.1. Introducción	31
3.2. Contexto educativo	31
3.3. Descripción de la muestra	34
3.4. Metodología	36
3.5. Análisis a priori del cuestionario y conocimientos evaluados	37
3.6. Resultados	42
3.6.1. Fenomenología del azar	42
3.6.2. Lenguaje del azar	49
3.7. Síntesis y discusión del estudio de evaluación	60
3.7.1. Comparación por curso	60

3.7.2. Puntuación total	65
Capítulo 4. Conclusiones	71
Referencias	75
Anexo I. Cuestionario	77

INTRODUCCIÓN

Al ser la enseñanza de la probabilidad un tema relativamente reciente en la Educación Primaria, se plantea el encaje de los conocimientos previos de los alumnos que inician la Educación Secundaria Obligatoria con los contenidos que, sobre este tema se recogen en los documentos curriculares.

En este trabajo nos hemos interesado por evaluar el conocimiento de estos alumnos sobre el lenguaje relacionado con el azar y la probabilidad. Los niños adquieren este lenguaje no sólo en la escuela, sino en sus juegos de azar y en sus actividades escolares y sociales. Además, puesto que en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria se ha recomendado un enfoque frecuencial de la probabilidad, los niños han de tener experiencia con experimentos aleatorios.

La mejora de la enseñanza de la probabilidad en la Educación Secundaria requiere una evaluación de sus conocimientos iniciales; sobre todo cara al currículo marcado por la LOE (MECD) en que ya desde 1º y 2º curso de este nivel educativo se plantea un amplio conjunto de ideas de probabilidad.

En concreto nuestro estudio se orienta a la evaluación del conocimiento de los términos verbales asociados con los sucesos aleatorios y la probabilidad en los alumnos de 1º y 2º curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

La Memoria se organiza en cuatro capítulos; el primero de los cuáles recoge los objetivos concretos del trabajo y sus fundamentos curriculares y matemáticos. El segundo resume los principales antecedentes de investigación sobre el desarrollo de las ideas de azar y probabilidad de los niños hasta los 13- 14 años. En el tercero se describe el estudio empírico, incluyendo el contexto escolar y la muestra, el cuestionario utilizado y los resultados obtenidos. Y por último en el cuarto, obtenemos las conclusiones de nuestro estudio de evaluación y algunas sugerencias sobre líneas de investigación para continuar el trabajo.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

- 1.1. Introducción
- 1.2. Objetivos de la investigación y su interés
- 1.3. Marco curricular
 - 1.3.1. La probabilidad en la Educación Primaria
 - 1.3.2. La probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria
- 1.4. Análisis del contenido matemático
 - 1.4.1. Fenómenos aleatorios y deterministas
 - 1.4.2. Lenguaje verbal asociado a la probabilidad
 - 1.4.3. Graduación intuitiva de probabilidades

1.1.INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo describimos con mayor precisión el problema que abordamos en esta investigación, presentando en primer lugar los objetivos concretos que perseguimos con el mismo y justificando su interés didáctico. Seguidamente, analizamos las orientaciones curriculares sobre la enseñanza de la probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria, que es la etapa educativa en que nos centramos. Para ello analizamos los contenidos sugeridos en los Decretos de Enseñanzas Mínimas y los cambios previstos por la LOMCE.

Finalmente hacemos un análisis conceptual de los contenidos que evaluamos en nuestro trabajo. Se realiza desde un punto de vista elemental, teniendo en cuenta los alumnos a los que se dirige el estudio.

1.2.OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN Y SU INTERÉS

Como hemos indicado en la introducción, el objetivo principal del trabajo es realizar un estudio de evaluación del lenguaje y fenomenología que asocian a los fenómenos aleatorios y la probabilidad los niños de los primeros dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria.

Nos apoyamos en el importante papel dado a las diversas representaciones de los objetos matemáticos por Duval (1993) quien sugiere que estas no sólo son indispensables para la comunicación del trabajo matemático, sino también necesarias para el desarrollo de la misma actividad matemática. Recomienda que en la enseñanza se utilice un amplio conjunto de representaciones de los objetos matemáticos, atendiendo siempre a la diferencia entre el objeto y su representación.

La doble función, representacional e instrumental, del lenguaje matemático es igualmente resaltada por Godino, Batanero y Font (2007). El lenguaje permite designar objetos abstractos que no podemos percibir y ayuda a operar con objetos abstractos. Estos autores, en su teorización, asumen que los objetos matemáticos emergen de las prácticas realizadas para resolver problemas. También indican que el lenguaje matemático es la parte perceptible (ostensiva) de las prácticas. Además, dicho lenguaje matemático tiene un gran poder de comunicación, al ser conciso y preciso y tener una amplia variedad (notaciones, palabras y expresiones, símbolos, tablas, etc.).

De acuerdo a Godino, Batanero y Font (2003) el lenguaje matemático permite representar informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve relaciones no directamente observables y permitiendo realizar predicciones. Por ello los alumnos deben tener suficiente dominio del lenguaje para entender los problemas que se les plantean, resolver las tareas, comunicar las soluciones encontradas y justificarlas a otras personas o al profesor.

El interés de alcanzar este objetivo proviene también de nuestra propia labor docente, ya que trabajamos con alumnado proveniente de 6º de Primaria, que en numerosos casos no tiene un conocimiento adecuado en materia de Probabilidad y desconocemos si los nuevos cambios en la legislación va a provocar una mejora en este conocimiento. En consecuencia, tratamos de evaluar cuál es el nivel que en este lenguaje se alcanza en los alumnos, que han seguido la normativa actual LOE. Los resultados serán un punto de comparación para poder analizar posteriormente la posible mejora con el nuevo currículo promovido por la LOMCE. Este objetivo principal se desglosa en los siguientes:

1. *Desarrollar un cuestionario sencillo que permite evaluar la comprensión de la fenomenología y el lenguaje del azar y la probabilidad de los alumnos de primero y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria.*

El interés de este objetivo se debe a que la mayor parte de investigaciones sobre el tema se ha llevado a cabo en un periodo en que la probabilidad no se enseñaba en la escuela primaria. Estas investigaciones se han realizado en muchos casos con entrevistas; en otras, como las de Green (1983) y Cañizares (1997) se han utilizado cuestionarios escritos. Pero estos cuestionarios estaban centrados en un contenido más amplio y el conocimiento del lenguaje se evaluaba en pocos ítems, no evaluando la fenomenología asociada. Además, estaba pensado para niños desde los 10 años a 14; no

concretamente en los de 12-15 que sería la edad en que se centra nuestro estudio.

En consecuencia de estas consideraciones nos ha parecido interesante construir un cuestionario propio, que tenga en cuenta las características de nuestros alumnos, los contenidos que han cursado de probabilidad y que también se incluya algunas tareas no usadas en la investigación previa.

2. *Realizar un estudio exploratorio, con una muestra de alumnos de 1º y 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria, utilizando este cuestionario, que nos permita evaluar si los alumnos cuentan con un vocabulario y comprensión de algunas expresiones numéricas de la probabilidad suficiente para cursar los contenidos previstos en los primeros años de Educación Secundaria Obligatoria.*

Este objetivo también tiene un interés didáctico, pues la información sobre las posibles dificultades de los niños con el lenguaje de la probabilidad permitirá proponer estrategias formativas para subsanarlas. Además, esperamos complementar con nueva información la investigación previa.

3. *Igualmente trataremos de identificar las características que estos alumnos asignan a los sucesos aleatorios y deterministas, la fenomenología que le asocian y cómo gradúan sus probabilidades.*

Mientras la enseñanza tradicional de la probabilidad se ha centrado en la regla de Laplace, y el trabajo con sucesos equiprobables, actualmente se recomienda también una aproximación a la estimación de la probabilidad mediante frecuencias y una fenomenología más amplia. En el proceso de cambio actual, este objetivo es interesante para prever las posibles dificultades de los alumnos con los nuevos contenidos propuestos en la LOMCE.

1.3.MARCO CURRICULAR

A continuación, vamos a realizar un recorrido por los currículos de matemáticas de la Educación Obligatoria en España seleccionando el tema que nos ocupa, la Probabilidad, para conocer cuáles son los contenidos que teóricamente debe conocer nuestro alumnado una vez finalizado el sexto curso de Primaria y el que se va a abordar en la Educación Secundaria Obligatoria. Utilizaremos esta información, junto con el análisis conceptual que se incluye al final del capítulo, poder determinar el significado

de referencia del lenguaje de la probabilidad que incluiremos en nuestro cuestionario.

1.3.1. LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Hasta este curso pasado, la Ley Orgánica de la Educación (LOE) y el Real Decreto 1513/2006 (MEC, 2006), establecían los contenidos mínimos a trabajar en los niveles de Educación Primaria. Dentro de los bloques en los que se dividían los contenidos (Números y operaciones, Medida, Geometría, Tratamiento de la información y la probabilidad), nos centramos en este último para identificar los contenidos probabilísticos en cada ciclo, que son los siguientes (MEC, 2006, p. 43098-99):

- *Primer ciclo:*
 - Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.
 - Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta y utilizando los algoritmos básicos correspondientes u otros procedimientos de resolución. Explicar oralmente el proceso seguido para resolver un problema.
 - Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.
- *Segundo ciclo:*
 - Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto.
 - Introducción al lenguaje del azar.
 - Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos.
- *Tercer ciclo:*
 - Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
 - Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.
 - Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.

En este documento se indica la intención al incluir la probabilidad para niños tan pequeños:

Además de las características tradicionalmente asignadas a las matemáticas, éstas también implican el tratamiento de la incertidumbre y mejoran la capacidad de enfrentarse a situaciones sin solución única y cerrada. La valoración del grado de certeza asociado a los resultados derivados de razonamientos válidos es uno de los logros de competencias básicas esperados en matemáticas. (MEC, 2006, p. 43059).

El Real Decreto propone los siguientes criterios de evaluación referidos a azar o probabilidad dentro de cada ciclo:

- *Primer ciclo:* Se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible” (MEC, 2006, p.

43098).

- *Tercer ciclo:* Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado (MEC, 2006, p. 43101). Se comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia.” (MEC, 2006, p. 43101)

Recientemente el desarrollo de la LOMCE ha conllevado un cambio sustancial en los contenidos mínimos que se establecen para nuestra materia y los objetivos en la misma. Para su desarrollo, se han modificado la legislación nacional y la de nuestra comunidad para potenciar la adquisición de las competencias clave elaboradas por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte en la LOMCE, siguiendo los estándares europeos. En la ley, se definen las competencias clave como aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo (MECD,2014).

Tabla 1.1. *Contenidos de probabilidad en MECD (2014) para Educación Primaria*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
- Carácter aleatorio de algunas experiencias. -Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.	- Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. - Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. - Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas.	- Identifica situaciones de carácter aleatorio. - Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería...). -Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.

En esta normativa se distribuyen las enseñanzas en áreas de conocimiento. Nuestra área, el de las Matemáticas, tiene una gran importancia y es recalcada en este documento, incidiendo en su carácter práctico y experimental. Además de definirse los

contenidos a trabajar con el alumnado, y los criterios para la evaluación, en la nueva legislación se incluyen también unos “estándares de aprendizaje”, que son concreciones de lo que el alumno debe saber, comprender y saber hacer en cada materia. Son medibles, y evaluables para poder identificar el nivel de logro alcanzado (MECD, 2014).

Dentro del Real Decreto 126/2014 (MECD, 2014, p.19393), publicado el 28 de febrero como concreción de la LOMCE donde se plasman los contenidos a estudiar en la Educación Primaria, identificamos los relacionados con la Probabilidad (Tabla 1.1).

El currículo de la Junta de Andalucía

La organización y el currículo de la Educación Primaria en Andalucía se rige actualmente según el Decreto 97/2015 (Consejería de Educación, 2015a) publicado el 3 de marzo, que será puesto en práctica en las escuelas a partir del curso 2015/16.

Para concretar los contenidos de cada área, analizamos la Orden del 17 de marzo de 2015 (Consejería de Educación, 2015b), una concreción del anterior Decreto, donde el área de las Matemáticas se divide en 5 grandes bloques como en el Real Decreto (Procesos, Métodos y actitudes matemáticas, Números, Medida, Geometría, Estadística y Probabilidad). Los contenidos de Probabilidad pertenecientes a este último bloque son los siguientes:

- *Primer ciclo:* Los contenidos a estudiar del bloque de Estadística y Probabilidad únicamente se centran en los gráficos estadísticos y el registro de información y datos.
- *Segundo ciclo (Consejería de Educación, 2015b, p.277):*
 - Sucesos posibles y sucesos imposibles.
 - Realización de estimaciones sobre algunos juegos y sucesos.
 - Confianza en las propias posibilidades y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica.
 - Curiosidad por comparar los resultados de las estimaciones y la realidad en algunos sucesos.
- *Tercer ciclo (Consejería de Educación, 2015b, p.296):*
 - Carácter aleatorio de algunas experiencias.
 - Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.
 - Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos.

Como podemos observar, el cambio a la LOMCE en nuestra comunidad va a propiciar un retraso en el comienzo del estudio de los contenidos probabilísticos al segundo ciclo. Las repercusiones que esto pueda acarrear en el desarrollo del alumno podrán ser cuantificados en unos años cuando podamos analizar las diferencias que muestran con el

alumnado actual. No obstante, los contenidos que los niños deben alcanzar al finalizar la educación primaria son muy similares en ambas legislaciones.

1.3.2. EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Una vez descritos los contenidos en el nivel de Primaria, pasamos a enumerar los del nivel de Educación Secundaria Obligatoria. En los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Secundaria (MEC, 2006, pp. 754-760) se incluyen los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, *Estadística y probabilidad*:

- *Primer Curso.*
 - *Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.*
- *Tercer Curso.*
 - *Experiencias aleatorias.*
 - *Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.*
- *Cuarto curso. Opción A*
 - *Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.*
- *Cuarto curso. Opción B*
 - *Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.*

En este currículo, se nos presenta el estudio de probabilidad principalmente a partir de 3º ESO, puesto que el curso de 1º ESO se limita a recordar lo que los niños ya saben y es demasiado denso para poder alcanzar a tiempo el temario de Estadística y Probabilidad. En tercer curso, el alumnado, más maduro y con mayor conocimiento en experiencias aleatorias que en Primaria, se enfrenta a una nueva terminología, contenidos de cálculo de probabilidades y uso de diagramas que no han trabajado desde 6º curso de Educación Primaria.

Respecto a los criterios de evaluación, se incluyen los siguientes (MEC, 2006, pp. 754-760):

- *Primer curso: Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica. Se trata de valorar la capacidad para diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios y, en estos últimos, analizar las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces una experiencia aleatoria y hacer predicciones razonables a partir de los mismos.*

Además, este criterio pretende verificar la comprensión del concepto de frecuencia relativa y, a partir de ella, la capacidad de inducir la noción de probabilidad.

- *Tercer curso:* Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos. Se pretende medir la capacidad de identificar los sucesos elementales de un experimento aleatorio sencillo y otros sucesos asociados a dicho experimento. También la capacidad de determinar e interpretar la probabilidad de un suceso a partir de la experimentación o del cálculo (regla de Laplace), en casos sencillos. Por ello tienen especial interés las situaciones que exijan la toma de decisiones razonables a partir de los resultados de la experimentación, simulación o, en su caso, del recuento.
- *Cuarto curso, opciones A y B:* Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Se pretende que sean capaces de identificar el espacio muestral en experiencias simples y en experiencias compuestas sencillas, en contextos concretos de la vida cotidiana, y utilicen la regla de Laplace, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia para calcular probabilidades. Se pretende, además, que los resultados obtenidos se utilicen para la toma de decisiones razonables en el contexto de los problemas planteados.

Volviendo al contenido de la LOMCE y su legislación asociada, observamos distintos cambios en los bloques de Probabilidad para la Educación Secundaria Obligatoria. Estos cambios van a hacerse efectivos a partir del curso 2015/16 para los cursos de 1º, 3º ESO y para 1º Bachillerato, y en el curso 2016/17 para 2º, 4º ESO y 2º Bachillerato. Aun no se ha publicado el Decreto que establece el currículo básico en Andalucía, por lo que nos centramos en la normativa estatal para seleccionar los contenidos de probabilidad distribuidos en cada curso.

En el Real Decreto 1105/2014 (MECD, 2015) por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato, se especifican tanto contenidos como criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. A continuación, seleccionamos los contenidos de probabilidad del Real Decreto para los cuatro niveles de la educación secundaria (en la materia de matemáticas aplicadas de 3º ESO no existen contenidos de probabilidad). Estos contenidos se presentan en las Tablas 1.2 a 1.5. En este caso los criterios de evaluación son bastante más detallados, especificándose también los estándares del aprendizaje que se espera del alumno.

Los contenidos de primer y segundo curso son similares a los presentados en el anterior currículo, aunque ahora no se especifica directamente cuáles se darán en cada curso, por lo que dependerá de la exposición en los libros de texto o los centros educativos. La principal diferencia es la especificación de los estándares de aprendizaje, donde se recoge parte de lo que antes se indicaba como criterios de evaluación. Por

ejemplo, ahora se requiere que el alumno sea capaz de calcular la frecuencia relativa y calcule la probabilidad tanto en forma exacta, como estimándola a partir de la frecuencia, mientras antes quedaba implícito.

Tabla 1.2. *Contenidos de probabilidad en MECD (2015, p.413) para 1º y 2º ESO*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none">- Fenómenos deterministas y aleatorios.- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.- Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.- Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.- Espacio muestral en experimentos sencillos.- Tablas y diagramas de árbol sencillos.- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.	<ul style="list-style-type: none">- Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.- Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.	<ul style="list-style-type: none">- Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.- Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación.- Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación.

Tabla 1.3. *Contenidos de probabilidad en MECD (2015, p.394) para 3º ESO (académicas)*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none">- Experiencias aleatorias.- Sucesos y espacio muestral.- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.- Diagramas de árbol sencillos.- Permutaciones, factorial de un número.- Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	<ul style="list-style-type: none">- Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.	<ul style="list-style-type: none">- Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.- Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.- Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales.- Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las

distintas opciones en situaciones de incertidumbre.

En tercer curso tenemos dos posibles orientaciones de la enseñanza y observamos que sólo se introduce la probabilidad en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Para estos alumnos el contenido propuesto y es similar al anterior contenido de tercero, aunque se añaden contenidos combinatorios, tales como las permutaciones y el factorial de un número. Estos contenidos no aparecen en los criterios de evaluación o estándares de aprendizaje, sino indirectamente en el cálculo de probabilidades.

Tabla 1.4. *Contenidos de probabilidad en MECD (2015, p.398) para 4º ESO (académicas)*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none">- Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones.- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.- Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes.- Experiencias aleatorias compuestas.- Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.-	<ul style="list-style-type: none">- Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.- Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	<ul style="list-style-type: none">- Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.- Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos.- Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana.- Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones.- Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.- Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias de recuento sencillas y técnicas combinatorias.- Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.- Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada.- Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas.

En cuarto curso igualmente se contemplan las dos orientaciones anteriormente citadas y aparece la probabilidad en ambas opciones, pero el contenido es bastante más

detallado en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Por ejemplo, la combinatoria aparece explícitamente en el primer caso, incluso en los estándares de aprendizaje y no en el segundo. Esto parece indicar que se quiere hacer más énfasis en el tema para estos alumnos. Hacemos notar que en todos los cursos se hace mención del lenguaje del azar y la probabilidad que es el tema principal de nuestro estudio.

Tabla 1.5. *Contenidos de probabilidad en MECD (2015, p.407) para 4º ESO (aplicadas)*

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none">- Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio. Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.- Probabilidad simple y compuesta.- Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.	<ul style="list-style-type: none">- Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.- Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.	<ul style="list-style-type: none">- Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos.- Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.

1.4. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

En este apartado, realizamos un pequeño resumen sobre el contenido matemático al que hacemos referencia en nuestro estudio, y por tanto, el que vamos a analizar a través de nuestro cuestionario. Nos basamos en los textos de Batanero y Godino (2002) y Godino, Batanero y Cañizares (1987) y únicamente se presenta una exposición intuitiva que podría utilizarse más tarde con los mismos alumnos.

En un primer lugar, hacemos referencia a los fenómenos presentes en nuestro día y a la diferencia entre fenómenos aleatorios o deterministas. A partir de los diferentes resultados que estos puedan acarrear, tendremos que analizar si el alumnado es consciente de las distintas probabilidades que se le pueden asignar, aunque sea de forma intuitiva, ya que el cálculo será trabajado en años posteriores. Y por último, veremos brevemente el lenguaje asociado a la probabilidad, que es la base de la comprensión de los conceptos por parte del alumnado y que será el principal objetivo de evaluación en nuestro cuestionario, donde trataremos de evaluar si es conocido por el alumno o no.

1.4.1. FENÓMENOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS

El primer punto que aborda nuestro cuestionario es la discriminación de fenómenos aleatorios y deterministas e indirectamente las características y fenomenología que los alumnos atribuyen al azar.

El alumnado en general, independientemente de su nivel de conocimiento en nuestra materia, suele interesarse por los contenidos de probabilidad para abordar situaciones que le son familiares en su día a día, pues como señala Batanero (2006), el azar es inherente a nuestras vidas.

Incluso antes de que los alumnos puedan identificarlos con un nombre determinado, los fenómenos aleatorios están presentes en nuestra vida, y con unos sencillos ejemplos, el alumnado es capaz de comprender fácilmente las principales diferencias entre estos y aquellos que son deterministas. La diferencia más simple de observar es que estos últimos, tienen la peculiaridad de desarrollarse de forma previsible, sabiendo de antemano cómo se van a producir, mientras que los aleatorios se encuentran en un ambiente de incertidumbre, por lo que no sabemos a priori en qué concluirán.

Como situaciones a utilizar en el aula, por su relación con el hombre, tenemos las indicadas por Batanero y Godino (2002), que las dividen en cuatro grandes bloques “El mundo biológico”, “El mundo físico”, “El mundo social” y “El mundo político”. Normalmente, los alumnos identifican situaciones inciertas en contextos cotidianos, como los concursos de la televisión que se basan en sorteos, las predicciones meteorológicas, diagnóstico médico, características genéticas hereditarias, los resultados en los sorteos nacionales o elecciones, o los dados que utilizan en sus juegos de mesa. Este tipo de situaciones se pueden introducir dentro del aula de matemáticas; y para dotarla de interés, se puede pedir la opinión sobre la verosimilitud del suceso para la persona que asigna la probabilidad.

Por otro lado, Batanero (2015) recuerda que el concepto de aleatoriedad no es sencillo; a lo largo de la historia ha tenido diferentes significados y está asociado a discusiones de tipo filosófico. Podemos encontrar incluso actualmente diferentes definiciones y en el aula usualmente se define a través de algunas propiedades como “impredecibilidad”, “posibilidad de varios resultados”, “no controlable” y en forma más avanzada “con frecuencia relativa estable en una serie larga de experimentos”. Por ello existe una diversidad de concepciones, ya sean centradas en los juegos de azar, o bien dándole un enfoque más de accidental o fortuito al suceso, pero siempre relacionándose

con este carácter imprevisible del fenómeno.

Una vez que trabajamos con un fenómeno aleatorio determinado, tendremos que realizar observaciones sobre lo que ocurre en determinados momentos, para poder identificar los resultados posibles y poder concluir si un resultado es más previsible que ocurra que los demás. Cada observación se considera un experimento, ya sea realizado de forma artificial en un laboratorio u observado en la naturaleza, y podemos identificar a su vez dos tipos de experimentos: aleatorios o deterministas. Un *experimento* será *determinista*, si al realizarse varias veces, bajo las mismas condiciones, se obtienen siempre los mismos resultados, mientras que un *experimento* será *aleatorio* si varía su salida cada vez que se produce.

El conocimiento de esta diferencia es fundamental para el alumnado, ya que el estudio de los fenómenos deterministas no es de interés para el campo de la probabilidad, mientras que, este desconocimiento sobre el resultado a obtenerse en los experimentos aleatorios, provoca un amplio interés en su estudio. En el mismo el interés se centra no en la predicción de un único resultado (no es posible) sino intentando concluir de alguna forma alguna ley matemática que deduzca con qué frecuencia se distribuyen los resultados en una serie larga de repeticiones del experimento.

1.4.2. LENGUAJE VERBAL ASOCIADO A LA PROBABILIDAD

Un segundo punto es conocer el vocabulario que los alumnos asocian a las situaciones aleatorias y la probabilidad. Gómez, Ortiz de Haro, Batanero y Contreras (2013) en su estudio sobre el lenguaje de la probabilidad en los libros de texto, sugieren que el lenguaje es fundamental para la construcción del conocimiento matemático en el niño. Por ello recomiendan utilizar en clase un lenguaje cercano al utilizado por el alumnado, para ir poco a poco adquiriendo mayor nivel de abstracción.

Este lenguaje no está formado simplemente por las palabras o expresiones verbales que se utilizan para plantear cuestiones, sino también por los símbolos matemáticos y las distintas representaciones gráficas, diagramas y tablas que los conceptos de probabilidad requieren para su comprensión por parte del alumnado.

Como se ha visto, en los diseños curriculares, tanto para primaria como para secundaria se insiste en la necesidad de familiarizar al alumno con el vocabulario y en general, el lenguaje del azar. Ello también ayudará al desarrollo de competencia en comunicación lingüística, mediante la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual y su uso adecuado en la descripción de razonamientos y procesos en

la resolución de problemas.

Respecto al lenguaje verbal, en el que nos centramos en este estudio, Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías:

1. En primer lugar encontramos en Matemáticas palabras específicas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Un ejemplo, en el caso de la probabilidad sería el “espacio muestral” que no encontramos fuera del aula; por tanto el alumno ha de aprender su significado.
2. Otras palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos; por ejemplo, cuando hablamos de seguro en matemáticas es algo que siempre ocurre, pero en la vida diaria a veces hablamos de seguro para algo que no sabemos con certeza si ocurrirá, pero tiene una gran probabilidad.
3. Otras palabras tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.; un ejemplo, sería la palabra probabilidad; en el sentido coloquial se asemeja al significado matemático, aunque este es más formal. En el lenguaje coloquial, probabilidad sería un valor numérico que indica la verosimilitud de que un suceso ocurra. Matemáticamente la probabilidad es una función definida en el espacio muestral (o más bien en un espacio de probabilidad) sobre el intervalo $[0,1]$. Pero también acá mide la verosimilitud de ocurrencia de un suceso. En los primeros cursos de educación secundaria será suficiente este significado para el niño.

1.4.3. GRADUACIÓN INTUITIVA DE PROBABILIDADES

Finalmente tratamos de ver cómo los alumnos asignan probabilidades cualitativamente y de modo intuitivo. El estudio de la probabilidad se puede realizar desde diferentes enfoques, siendo algunos complementarios a otros. En Batanero y Díaz (2007) se hace un repaso de cada uno de estos enfoques (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, lógico, axiomático) según el periodo en el que ha tenido más auge en la educación. Para la educación primaria y comienzo de la secundaria se prioriza el enfoque intuitivo por su estudio en situaciones cercanas a la realidad del alumnado.

Como se ha indicado, los fenómenos aleatorios tienen la peculiaridad de producir resultados diferentes para un mismo experimento tras varias repeticiones del mismo, aún realizándose con las mismas condiciones. Al conjunto de los distintos posibles resultados en un experimento se le denomina espacio muestral y se representa con la letra E . Por ejemplo, si realizamos el experimento de tirar una moneda, el espacio

muestral sería $E=\{\text{cara, cruz}\}$.

Cada uno de los resultados obtenidos tras un experimento se denomina suceso, y podemos identificar dos tipos principales: *elementales o compuestos*. Como ejemplo, si trabajamos con un experimento sencillo, como tirar un dado, los sucesos elementales o simples serían, “obtener un 1”, “obtener un 2”, etcétera, mientras que un suceso compuesto se trataría de un suceso formado por al menos dos sucesos simples, como por ejemplo, “obtener un número par”, “obtener 3 o 6”, etcétera.

Además de estos sucesos, también consideramos dos tipos especiales que deben tenerse muy en cuenta por su carácter determinista, nos referimos a los *sucesos imposibles* y a los *sucesos seguros*. Un suceso será imposible cuando no se pueda obtener nunca en la realización de un experimento. Siguiendo el ejemplo de antes, “obtener un 9” al lanzar un dado sería un suceso imposible (en un dado no trucado) y por tanto, nunca se obtendría como resultado. En cambio, el suceso seguro es aquel que siempre ocurre, es decir, es el suceso que está formado por todos los posibles resultados que se pueden dar tras un experimento, y como consecuencia siempre se corresponde con el espacio muestral del experimento considerado.

Asociado a cada suceso aleatorio tratamos de buscar una probabilidad. Batanero (2006) recuerda que en estas situaciones la probabilidad no es una propiedad física tangible de los sucesos a los que asignamos probabilidad. Más bien se trata de un grado de creencia en la verosimilitud de que ocurra o no. Todos los sucesos no tienen la misma probabilidad de ocurrir, como intuitivamente podemos observar, por lo que es fundamental determinar alguna función que nos relacione de forma exacta un suceso determinado con la probabilidad de su aparición, para así, entre otros, poder comparar la probabilidad de ocurrir un suceso con respecto a otros y sacar conclusiones sobre el fenómeno.

Para la asignación de la probabilidad a cada suceso, se ha decidido dar un valor entre 0 y 1 según sea menos o más probable que se dé. Los dos casos extremos son los señalados anteriormente como sucesos imposibles y seguros. A los sucesos seguros se le asigna probabilidad 1 puesto que se sabe con certeza que el resultado de un experimento se encuentra dentro de este conjunto, mientras que a los sucesos imposibles se le asigna la probabilidad 0 puesto que jamás se podrán obtener tras un experimento (Godino, Batanero y Cañizares, 1998).

En el resto de sucesos asignaremos un valor de probabilidad entre 0 y 1 pero sin ser ninguno de estos dos valores enteros. En muchas ocasiones, la experiencia nos puede

dar una creencia certera sobre qué valor darle a un suceso, como es en el caso de tirar una moneda. Si se le pregunta a cualquier alumno qué es más probable obtener cara o cruz, claramente admiten que ambos tienen igual probabilidad, y es cierto que se le asigna el valor 0.5 indicando que ambos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Investigaciones previas han determinado que los niños son capaces de apreciar la frecuencia de aparición de un suceso y que este mejora con la edad gracias a las experiencias acumuladas durante su vida (Batanero y Godino, 2002).

Sin embargo, no es tan claro cuando el espacio muestral es más amplio, ya que se deben tener conocimientos más profundos sobre el fenómeno para poder identificar el valor fraccionario, y la intuición puede no llegar a ser tan fina. Una forma sencilla de calcular esta probabilidad es utilizando la Regla de Laplace, que relaciona para un suceso el número de veces que puede ocurrir el suceso según el número total de casos posibles:

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Aunque esta regla no es utilizada en algunos problemas de cálculo de probabilidad por ser limitada, es cierto que para el alumnado de secundaria es sencillo de entender y aporta una herramienta sencilla, que está incluida como contenido mínimo en la ley educativa vigente.

Como hemos comentado anteriormente, poco a poco el estudio de la probabilidad a partir de las frecuencias es más habitual. Para ello, se puede comenzar con un experimento aleatorio que el alumnado pueda repetir muchas veces, por ejemplo, tirar un dado 100 veces. Una vez anotados los resultados, el alumnado puede calcular la frecuencia absoluta y relativa del suceso para acercarse al valor de la probabilidad que la regla de Laplace aporta. Esto es posible gracias a la “Ley de los grandes números” que nos indica que tras la realización de infinitos experimentos, el valor que obtendríamos de frecuencia relativa de cada suceso sería una estimación de la probabilidad de ese suceso.

CAPÍTULO 2. INVESTIGACIONES PREVIAS

- 2.1. Introducción
- 2.2. Desarrollo de la idea de azar en los niños
- 2.3. Desarrollo de la idea de probabilidad
- 2.4. Comprensión del lenguaje de probabilidad
- 2.5. El lenguaje probabilístico en los libros de texto
- 2.6. Conclusiones de las investigaciones previas

2.1.INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos una síntesis de algunas investigaciones previas de las cuáles hemos tomado ideas para nuestro trabajo y que ayudan a fundamentarlo. Para llevar a cabo nuestro estudio nos hemos basado en otros trabajos previos de síntesis, como los incluidos en la tesis de Cañizares (1997), el libro de Godino, Batanero y Cañizares (1997), y en el artículo de Batanero (2013).

Puesto que el lenguaje de la probabilidad está relacionado con las ideas de azar y aleatoriedad, comenzamos describiendo algunas investigaciones sobre el desarrollo que los niños tienen sobre dichos conceptos. Más concretamente, analizamos los trabajos de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1987) sobre esta problemática. Seguidamente nos centramos en algunos estudios que se han enfocado específicamente en la comprensión del lenguaje asociado al azar y la probabilidad en los niños, analizando también este lenguaje en los libros de texto. Se finaliza el capítulo señalando las conclusiones más destacadas de esta investigación.

2.2.DESARROLLO DE LA IDEA DE AZAR EN LOS NIÑOS

El estudio de las matemáticas desde la infancia proviene en gran medida de las experiencias acumuladas por el niño durante su vida. Ir a la compra, realizar alguna manualidad o contar ingredientes para una receta, son experiencias que desarrollan su razonamiento matemático (numérico, geométrico y sobre magnitudes y su medida). Además, pueden ser repetidas tantas veces como sea necesario obteniéndose el mismo resultado, por lo que favorece la asimilación de estos procedimientos. Son situaciones *reversibles* de acuerdo a Batanero (2013); por ejemplo si se juntan dos colecciones de objetos se pueden volver a separar obteniendo las colecciones iniciales.

Sin embargo, según esta autora, el azar y la probabilidad conllevan otro tipo de

experiencias, donde en cada experimento el resultado varía, por lo que no son reversibles. Esto influye en la dificultad que tiene el niño para reconocer las leyes de probabilidad que rigen estas situaciones ya que el niño necesita apoyo empírico en las primeras fases de construcción de su pensamiento matemático. La observación de este hecho provocó que, en los currículos anteriores, los estudiantes tuviesen su primera toma de contacto con la probabilidad al finalizar el nivel de Primaria. Por tanto no fue potenciado de la misma manera que los contenidos relacionados con medida, números o geometría los cuales son tratados desde la infancia. Actualmente, como se vio en el Capítulo 1, se introducen estas cuestiones en la Educación Primaria, pero en ocasiones, por falta de tiempo no se llegan a tratar con suficiente amplitud.

Investigación de Piaget e Inhelder

El desarrollo del razonamiento matemático en los niños aparece desde etapas muy tempranas, siendo Piaget uno de los investigadores que mejor ha sabido describir las distintas fases por las que pasan los niños para desarrollar este razonamiento en relación a diferentes contenidos de Ciencias y Matemáticas.

Estas etapas se diferencian sólo en el ritmo que cada uno necesita para pasar de una fase a otra, es decir, la edad en que se alcanza cada una, no es la misma para todos los niños. En Inhelder y Piaget (1955), se identifican los periodos madurativos del niño según su edad incluyendo para cada uno de ellos los progresos a alcanzar en materia matemática (Ver Figura 1).

Período sensorio-motor (0-2 años)
Período pre operacional (2-7 años)
Período de las operaciones concretas (7-11 años)
Período de las operaciones formales (11-15 años)

Figura 2.1. Etapas de desarrollo del razonamiento matemático según Piaget e Inhelder (1955)

Batanero (2013) describe estas etapas del modo siguiente:

- **Período sensorio motor (0-2 años).** Se caracteriza por el movimiento y las sensaciones y describe el razonamiento de los bebés, que manipulan objetos y

percibe sus propiedades,

- Período pre operacional (2-7 años). El niño necesita manipular objetos reales para el aprendizaje de un cierto concepto. Llega a comprender en forma elemental la idea de espacio y posición de los objetos, tiempo, distancia o cantidad. Puede completar tareas aditivas sencillas.
- Período de las operaciones concretas (7-11 años). Aparecen conceptos que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta, aunque esta es todavía un apoyo importante en su aprendizaje. Comprende las operaciones aritméticas reversibles y conceptos geométricos, así como el sistema de numeración.
- Período de operaciones formales (11-15 años). Describe el razonamiento del adulto y la lógica de operaciones, representaciones simbólicas y otras operaciones abstractas.

Los alumnos a los que hemos pasado el cuestionario se encontrarían dentro del denominado “Periodo de operaciones formales” (entre los 11 y 15 años), donde se supone se encontraría el niño con la madurez necesaria para comprender los contenidos abstractos relativos a la probabilidad, la combinatoria y la correlación.

Piaget e Inhelder (1951) pensaron que hasta la etapa de las operaciones formales no se puede comprender la idea de azar. Este supuesto es debido a su concepción del azar; para ellos el azar se produce cuando aparece una combinación de una serie de causas independientes que producen un resultado inesperado. Por tanto, para comprender la idea de azar, primero hay que comprender las de causa y efecto, independencia y combinación. Todas ellas son propias de las operaciones formales; al llegar a esta etapa según los autores, se comprendería espontáneamente la idea de azar.

En las dos primeras etapas de su teoría los niños tendrían un pensamiento muy determinista; en la etapa de las operaciones concretas, se comienza a aceptar la imprevisibilidad de los fenómenos aleatorios, pero la idea de convergencia y distribución que son complementarias a la de aleatoriedad no se adquiere hasta la etapa de las operaciones formales según los autores.

Investigaciones de Fischbein

Estas investigaciones, han sido discutidas por Fischbein (1987) creando su propio marco teórico mediante el concepto de *intuición*, que Batanero (2013) describe como “procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales”

teniendo como principales características: “inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad, y auto-evidencia”.

Por tanto, las intuiciones surgen de forma natural en el sujeto para formar estructuras e ideas a partir de la información que obtiene a través de sus sentidos. No necesitan justificación, al ser autoevidentes; además son muy difíciles de cambiar una vez adquiridas. Fischbein (1987) divide estas intuiciones en *primarias*, las que provienen a partir de la experiencia y *secundarias*, las que se forman a través de la formación en los centros educativos. Un ejemplo de intuición primaria es que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta; un ejemplo de intuición secundaria sería que la probabilidad de un suceso nunca puede ser mayor que la unidad.

Las ideas de Fischbein contrastan con las de Piaget e Inhelder, en cuanto al momento de desarrollo de los conceptos de aleatoriedad y probabilidad. Puede que un niño en edades anteriores a los 11 años no conozca todavía contenidos matemáticos suficientes como para establecer el valor de probabilidad de un suceso, o como para diferenciar los fenómenos aleatorios y los deterministas, pero es posible que intuya y compare ya la probabilidad de dos sucesos por simple experiencia, como intuición primaria. Fischbein sitúa esta intuición previa en relación a la aleatoriedad a los 7 años de edad, algo que contrasta fuertemente con los estudios de Piaget e Inhelder, que lo centran en edades a partir de los 11 años.

2.3.DESARROLLO DE LA IDEA DE PROBABILIDAD

Son muchos los psicólogos e incluso educadores que han analizado cómo los niños adquieren diferentes conceptos relacionados con la probabilidad. A continuación resumimos los resultados de estas investigaciones.

Intuiciones sobre la frecuencia relativa

La idea de probabilidad está relacionada con la idea de frecuencia relativa de un suceso, por lo que tanto Piaget e Inhelder (1951) como Fischbein (1975) realizaron experimentos para ver si los niños son capaces de estimar la frecuencia relativa de un resultado al repetir varias veces un experimento aleatorio.

Un sujeto que observe que un determinado resultado se obtiene con mayor frecuencia, determinará que en un futuro próximo ese resultado será más probable que cualquier otro que se pueda llegar a dar. Esta intuición innata en la persona ha sido investigada por muchos autores para estimar en qué momento un niño es capaz de

estimar la frecuencia relativa de los sucesos, aun sin ofrecer un valor exacto para la misma.

Batanero (2013) muestra el ejemplo de un semáforo en el que se encienden dos luces con distinta frecuencia: 30% y 70%. Los niños del período pre-operacional ya son capaces de distinguir la luz que aparece con mayor frecuencia en una serie larga de experimentos; por tanto, si se les pide adivinar cuál luz se enciende a continuación se inclinan por la más frecuente.

En el período de operaciones concretas mejoran este resultado al desarrollar su intuición, siendo capaces de acertar la más frecuente cuando la diferencia de frecuencias no es tan grande. En el periodo de las operaciones formales son capaces incluso de pensar estrategias relacionadas con la diferente frecuencia; por ejemplo, decir 30% de veces un color y 70% el otro.

Comparación de probabilidades

Como inicio del cálculo de probabilidades, los niños del período de pre-operacional son capaces de distinguir en urnas con bolas de distinto color cuál es la más probable que aparezca al elegir una. También comienzan a ser capaces de comparar entre dos urnas con bolas de dos colores, cuál tiene más probabilidad de dar una bola de un color dado, si se les da el mismo número de casos desfavorables. Esto es posible porque los niños solo comparan los casos favorables.

En el periodo de operaciones concretas pueden comparar probabilidades en dos urnas con bolas de colores si los casos favorables son iguales y los casos desfavorables diferentes. Lo hacen eligiendo la urna con menor número de casos desfavorables.

Cuando se encuentran en el período de operaciones formales ya identifican la probabilidad como fracción y consiguen compararlas. En una primera etapa lo pueden hacer cuando la composición de las urnas es proporcional; por ejemplo, 2 bolas azules en una y 3 rojas y en la otra 4 azules y 6 rojas; hacia los 14-15 años, pueden comparar probabilidades aunque las fracciones correspondientes tengan distintos denominadores.

Además de las bolas en urnas, se han realizado muchas otras investigaciones donde se pide a los niños comparar probabilidades en contextos relacionados con dados, ruletas o incluso contextos escolares o familiares para ellos (para más información véase Cañizares, 1997 y Batanero, 2013).

2.4. COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE PROBABILÍSTICO

Como hemos indicado anteriormente, Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías de lenguaje verbal en matemáticas, y en nuestro estudio necesitamos centrarnos en la segunda categoría. Es decir, consideramos aquellos términos que aun formando parte del lenguaje cotidiano, también tienen un significado probabilístico bien marcado, y que muchas veces el alumnado confunde con el atribuido en la vida real, no tan preciso. Esta dificultad ha sido remarcada por los siguientes investigadores a raíz de sus estudios con diferente alumnado en Inglaterra y España.

Comenzamos con Green (1983), que elaboró y puso en práctica un cuestionario a un conjunto de alumnos ingleses durante los años 1978-1981 para conocer su grado de conocimiento en conceptos probabilísticos e intuiciones aleatorias. El test, planteado a alumnos de 11 a 16 años, constó de 26 ítems con un total de 50 puntos, y se descomponía en varios apartados: razonamiento combinatorio, razonamiento verbal y razonamiento probabilístico. Muchos de sus ítems eran versiones de papel y lápiz de los experimentos de Piaget e Inhelder (1951) y otros recogían sesgos de razonamiento descritos en otros trabajos.

El apartado de razonamiento verbal evaluaba el conocimiento del lenguaje verbal probabilístico del alumnado y su uso en situaciones de incertidumbre. Se podía alcanzar hasta 15 puntos en este apartado que constaba de 5 ítems diferentes; algunos de ellos han sido adaptados para nuestra investigación. Estos ítems evalúan la comprensión de los siguientes términos: “muy probable”, “improbable”, “probable”, “poco probable”, “imposible”, “posible”, “poca posibilidad”, “igual posibilidad”, “sucede al azar” y “seguro”. En unos ítems se pide al niño explicar con sus propias palabras qué significa el término; en otros dar sinónimos de las palabras o escribir una frase utilizándola; o finalmente indicar cuántas veces entre 10 o entre 100 ocurrirá el suceso calificado con dicha palabra.

Como réplica de esta investigación, Cañizares (1997), identifica el grado de comprensión del lenguaje probabilístico de un grupo de alumnos de varios centros públicos de Jaén utilizando el test de Green indicado anteriormente. Cañizares obtiene resultados positivos comparándolos con los obtenidos por Green en Inglaterra en algunos ítems, siendo los resultados en otros ligeramente inferiores. En la mayoría de los ítems obtiene más del 50% de respuestas correctas. La puntuación media en el componente verbal del cuestionario fue 8,3 en los chicos de 12 años, 9,3 en los de 13 y 9,4 en los de 14 años; es decir, siempre por encima de la media teórica (7.5).

Como principal dificultad destaca la diferenciación entre “imposible” e

“improbable” y entre “muy probable” y “seguro” o la comprensión de “sucede al azar” y donde se obtuvieron peores resultados que en el trabajo de Green (1983). También desacata un alto porcentaje de respuestas confusas, debido a poca capacidad de comunicación escrita de los niños o a la confusión entre suceso y experimento.

2.5.EL LENGUAJE PROBABILÍSTICO EN LOS LIBROS DE TEXTO

El estudio del lenguaje probabilístico en los libros de texto en España se ha llevado a cabo diferenciando el nivel educativo en el que están planteados los documentos de consulta.

Comenzando con el nivel de educación primaria, en el trabajo elaborado por Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) se estudian dos series de libros de las editoriales Anaya y S.M. Para los cursos de 2º a 6º de primaria, se identifican los términos relacionados con la probabilidad y se seleccionan las siguientes variables para el análisis: expresiones verbales, símbolos, expresiones numéricas, representaciones tabulares y gráficas. A lo largo de los cursos, la riqueza en el vocabulario usado y la complejidad de las representaciones aumenta, aunque en los libros de texto se observa un uso continuado de expresiones cotidianas. Se ofrece además consejo al docente para decidir correctamente las actividades a plantear y los recursos a utilizar para conseguir el mejor aprovechamiento de las clases.

Respecto al lenguaje verbal, que es el que nos ocupa en este trabajo, los autores identifican y clasifican muchas palabras y expresiones ligadas a la probabilidad en los textos analizados. Estas palabras se usan para referenciar conceptos, propiedades procedimientos o para sugerir un significado específico de la probabilidad. Por ejemplo, los términos *caso favorable* o *juego equitativo* están ligados al significado clásico, mientras que *frecuencia*, *repetición* están ligados al frecuencial. La mayoría de los términos se usan con el mismo sentido en el lenguaje ordinario, pero no siempre y hay otros específicos (como regla de Laplace, fracción) propios de la matemática. Los autores sugieren que la diversidad de términos pudiera aumentar la dificultad del tema. Los conceptos que tienen asociado mayor número de términos son el experimento aleatorio, los sucesos y sus tipos, y la aleatoriedad.

Respecto a los textos de educación secundaria encontramos el trabajo de Ortiz (2002), el autor analiza el lenguaje verbal en 22 libros de 1º curso del antiguo Bachillerato (alumnos de 14 años) en el periodo 1975-1991, clasificándolo en tres tipos
a) Expresiones referidas a la aleatoriedad; b) Expresiones referidas a la idea de

experimento aleatorio o sus resultados y c) relacionadas con los dispositivos generadores de resultados aleatorios. Las primeras son o bien sinónimos de la palabra azar o expresiones que sirven para describir sus características, como *incierto* o *imprevisible*. Aunque en los libros analizados por el autor no se proponían a los estudiantes realizar experimentos aleatorios, si encontró muchas descripciones de estos experimentos y sus resultados con un amplio vocabulario, tanto técnico (como *suceso*, o *experimento aleatorio*), como coloquial (sorteo, elección, etc.). Finalmente encontró una gran variedad de generadores aleatorios descritos a través del lenguaje, incluyendo dados, ruletas, urnas, pero también números aleatorios o calculadoras que los generan.

Posteriormente, Serradó y Azcárate (2006) analizan los libros de cuatro editoriales en los cuatro niveles de la Educación Secundaria Obligatoria. En su trabajo, hacen un desglose de los apartados presentes en las unidades didácticas relativas a la probabilidad, obteniendo los distintos elementos presentes en el mismo clasificados por modelos de intervención educativa. Plantean posteriormente las tendencias didácticas que se infieren de cada editorial, obteniendo que Bruño y Santillana son de corte tradicional mientras que Guadiel y McGraw-Hill son de corte innovador.

Siguiendo esta línea de trabajo, Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) identifican en cada texto las distintas caracterizaciones del concepto de probabilidad obteniendo en casi todas una definición clásica, mediante el uso de la regla de Laplace y sólo McGraw-Hill propone introducir el concepto mediante experimentos y utilizar otras representaciones que facilitan la comprensión de los conceptos como diagramas de árbol o tablas de contingencia.

Posteriormente a este estudio, Ortiz, Batanero y Serrano (2001) analizan el lenguaje de dos libros de texto en nivel de 1º curso Bachillerato actual, de las editoriales Bruño y Anaya. En su análisis, diferencian dos tipos de lenguaje principales encontrados en estos libros de texto, el lenguaje de lo aleatorio y el lenguaje de la probabilidad. El lenguaje de lo aleatorio es referente a expresiones relacionadas con los fenómenos aleatorios, el azar, y con los dispositivos generadores de secuencias aleatorias, como pueden ser dados, chinchetas, o cartas. En el apartado de lenguaje de la probabilidad se incluyen los términos que se utilizan para hablar sobre definiciones de la probabilidad, cálculo de su función o para establecer el grado de probabilidad de un suceso. Una de las editoriales obtiene mayor número de elementos referentes a la probabilidad, por lo que es interesante conocer este análisis a la hora de elegir como docentes una editorial u otra por el aporte adicional de vocabulario que puedan aportar

en los textos. Otro estudio sobre tres libros de texto distintos con niveles de 1º Bachillerato y 3º ESO es el de Ortiz y Serrano (2001) con similares conclusiones.

2.6. CONCLUSIONES DE LAS INVESTIGACIONES

En los anteriores apartados, hemos podido observar algunas de las numerosas investigaciones que se han realizado sobre los principales elementos que favorecen el aprendizaje de los contenidos probabilísticos. Más concretamente hemos analizado los estudios de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) sobre el desarrollo de las ideas de azar y probabilidad.

El alumnado con que el que estamos trabajando se encuentra, por su edad, en el período de las operaciones formales, por lo que deberá haber adquirido por su experiencia las principales intuiciones necesarias para comprender la diferencia entre fenómeno aleatorio y determinista, así como poder discernir un valor cercano a la probabilidad de un suceso.

Igualmente se ha analizado las investigaciones sobre lenguaje probabilístico con niños y en los libros de texto, que son en ambos casos muy pocos, por lo que nuestro trabajo puede contribuir a obtener nuevos resultados. La mayoría de los ítems sobre el lenguaje probabilístico que utilizaremos en nuestro cuestionario serán tomados de los utilizados por Cañizares (1997) en su Tesis doctoral, a fin de identificar si nuestro alumnado alcanza los mismos resultados en su comprensión que los obtenidos por su muestra. Aunque la edad de los alumnos es similar, los nuestros deben haber tenido algún contacto con la probabilidad en la educación primaria, según la normativa actual, mientras los suyos no la tuvieron. Por otro lado se incluye algún nuevo ítem no utilizado por Cañizares, con el fin de complementar su investigación.

La investigación sobre libros de texto nos servirá para comparar el lenguaje adquirido por los alumnos con el presentado en los libros y servirá al profesor para organizar actividades formativas, en caso de que se observe una gran discrepancia entre ambos lenguajes.

CAPÍTULO 3. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Introducción
3.2. Contexto educativo
3.3. Descripción de la muestra
3.4. Metodología
3.5. Análisis a priori del cuestionario y conocimientos evaluados
3.6. Resultados
3.6.1. Fenomenología del azar
3.6.2. Lenguaje del azar
3.7. Síntesis y discusión del estudio de evaluación

3.1.INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados del estudio de evaluación realizado con una muestra de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. Se comienza describiendo el contexto educativo y la muestra de alumnos que han participado en la investigación. Seguidamente se analiza el cuestionario utilizado y el contenido que se pretende evaluar. Finalmente, presentamos los resultados obtenidos y las conclusiones del estudio.

3.2.CONTEXTO EDUCATIVO

Esta investigación se ha llevado a cabo en los niveles de 1º y 2º de la ESO y han participado en la misma los alumnos de un instituto público de enseñanza obligatoria de la provincia de Cádiz. Se ha seleccionado el mismo por ser el centro donde llevamos dos años trabajando en un puesto de Apoyo curricular a alumnado con necesidades educativas especiales y conocer tanto el contexto como los alumnos.

Perfil de la localidad

El centro se encuentra ubicado en la localidad gaditana de La Línea de la Concepción, situada en la parte meridional de la Península Ibérica, y bañada por el mar Mediterráneo tanto en su costa de levante como en su costa de poniente. Se encuentra dentro de la Comarca del Campo de Gibraltar, que está compuesta por siete municipios. Cuenta con una población de 64.595 habitantes, de entre ellos 32.648 son mujeres y 31.947 son varones, y tiene una extensión de 2.510 hectáreas (25 Km² aproximadamente).

El hecho que dio origen a esta comarca es la proximidad a Gibraltar, una constante que también define la evolución de la ciudad. La mayoría de su población, en sus comienzos se dedicaban al comercio con la colonia Británica o trabajaban en ella. Actualmente algunos linenses se dedican a la agricultura, en algunos huertos situados en la zona del Zabal, y otros a la pesca, localizándose en la barriada de la Atunara. A pesar de ser una ciudad que está, prácticamente en su totalidad, rodeada por el mar, con unos once kilómetros de playas, el turismo tiene escasa relevancia.

En cuanto al contexto socioeconómico en la Línea de la Concepción hay un índice de paro muy alto, lo que fomenta el desinterés y la motivación de nuestros alumnos por el estudio, pues no ven una relación directa entre formación y expectativas de empleo. Hay una parte de economía sumergida, no cuantificada, pero que contribuye a aliviar la economía de la región.

Perfil del Centro

El Instituto Mediterráneo cuenta con unas instalaciones preparadas para el estudio de la Educación Secundaria Obligatoria, el Bachillerato y los ciclos formativos de Grado Medio y Superior. Este último de las familias profesionales de Informática y comunicaciones, Imagen personal, Administración y gestión, y Química (ver imagen del centro en la Figura 3.2.1).



Figura 3.2.1. Puerta principal del I.E.S. Mediterráneo

El IES Mediterráneo es centro de integración, preferentemente de alumnos deficientes auditivos, y desde el curso 93/94 viene escolarizando este alumnado. Dichos

alumnos están distribuidos por las diferentes etapas educativas y procedentes de las diferentes localidades del Campo de Gibraltar.

Además se han puesto en marcha programas para potenciar las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (considerado centro TIC), el aprendizaje de los idiomas (Bilingüismo) y el fomento del deporte (Escuelas Deportivas). También tiene en marcha el programa de Compensación Educativa, participando desde el curso 2009/2010 en los programas de “Lectura y Biblioteca” y “Escuela, Espacio de Paz”. Con todo ello se pretende proporcionar mayores oportunidades futuras a los estudiantes e interesarlos en su formación.

Perfil del profesorado

En cuanto al profesorado, el centro cuenta con una plantilla de unos 75-80 profesores que se actualiza cada año. La estabilidad de la plantilla supone una gran dificultad en lo que concierne a las posibilidades de trabajar de manera coordinada en el tiempo en la mejora del Centro. La plantilla del Departamento de Matemáticas es estable y cuenta con seis miembros. A los docentes hay que sumar los/las intérpretes de lenguajes de signos que dan apoyo a los alumnos/as sordos en determinadas clases, y oscilan dependiendo del número de alumnado sordo a atender, entre dos y cinco.

Perfil del alumnado

Centrándonos en el alumnado de la E.S.O., el centro mantiene nueve grupos de unos 20-30 alumnos distribuidos en los niveles de 1º- 4º ESO (3 grupos de 1º y 2 grupos de 2º, 3º y 4º). Se detecta un escaso nivel en el esfuerzo y en el trabajo, rendimiento académico deficitario, aumento del alumnado con desfases curriculares, falta de motivación y comportamientos disruptivos, y un elevado índice de absentismo escolar y abandono. Aun así, dentro del plan Bilingüe se destaca un alumnado que contrasta con el resto de los grupos, ya que muestran un nivel de exigencia personal y trabajo destacado. Estos grupos, normalmente distribuidos en los niveles de letra “B”, suelen ser más numerosos teniendo problemas a principios de curso por falta de cupo en 1ºESO para entrar en el plan.

Perfil de las familias

Según el último Plan de Centro, las familias de nuestro alumnado son mayoritariamente familias estructuradas formadas por parejas casadas con 2 hijos o más con un nivel socioeconómico medio – bajo, en muchos casos con unos niveles de ingresos inferiores a los 800 € y con algunos miembros de la familia en paro. La principal ocupación de las madres es la de ama de casa o trabajadora del sector servicios, y la de los padres es la industria, que está muy presente en el Campo de Gibraltar con empresas petroquímicas y relacionadas con la construcción.

3.3.DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

En nuestro estudio, hemos seleccionado una muestra de 89 alumnos en cinco grupos de 1º y 2º de la ESO. En total 56 alumnos de 1º curso y 33 de 2º curso, como sigue:

- 1º ESO (grupo A): 18 alumnos.
- 1º ESO (grupo B): 20 alumnos
- 1º ESO (grupo C): 18 alumnos
- 2º ESO (grupo A): 18 alumnos
- 2º ESO (grupo B): 15 alumnos

Aunque los grupos analizados cuentan con más alumnos por aula, en el momento de la realización del cuestionario muchos se encontraron ausentes por diversos motivos: enfermedad, absentismo escolar o presencia en el aula de pedagogía terapéutica por ser alumnos con adaptación curricular significativa.

Dentro de los grupos de alumnos que realizaron el cuestionario, se encuentra una distribución de chicos y chicas tal y como se muestra en la Tabla 3.3.1. Podemos observar como hay una mayor presencia de chicas en los grupos de letra A y en 2º ESO B. Durante este curso escolar todos los grupos bilingües han tenido una proporción de chicos mayor que de chicas, sin embargo, el día en el que realizamos el cuestionario, faltaron bastantes chicos por enfermedad. En cuanto a las edades de los chicos que participaron en la investigación, todos se encuentran entre los 12 y los 15 años de edad, como se puede observar en la Tabla 3.3.2. El alumnado que tiene 15 años en 2º ESO es aquel que ha repetido algún curso anteriormente. Del mismo modo, el alumnado que en 1º ESO tiene 14 años, es porque en los niveles de primaria no han superado satisfactoriamente algún curso, y han debido volver a repetirlo.

Tabla 3.3.1. Número de chicos y chicas por curso

Género	Chicos	Chicas
1º ESO A	5	13
1º ESO B	11	9
1º ESO C	13	6
2º ESO A	8	10
2º ESO B	7	8

Tabla 3.3.2. Edad de los alumnos por curso

Edad	12	13	14	15
1º ESO A	8	10	0	0
1º ESO B	10	9	1	0
1º ESO C	8	9	1	0
2º ESO A	0	5	6	7
2º ESO B	0	3	11	1

Los alumnos de 1º ESO provienen de 3 centros educativos de Educación Primaria distintos de la ciudad, y por tanto, el estudio en matemáticas ha sido diverso en nuestro alumnado. Una vez acceden al instituto, se les ubica en cada grupo según el centro de procedencia, para facilitar la adaptación con los mismos compañeros, y poder iniciar así los contenidos reconociendo un nivel de conocimiento similar en todos ellos. En este caso, en los distintos grupos hemos detectado niveles de razonamiento matemático y de identificación de conceptos ya estudiados en 6º de primaria que difieren de unos a otros. Por ello, algunos alumnos reconocen no haber estudiado contenidos de probabilidad en cursos anteriores, mientras que otros sí, algo que tendremos en cuenta a la hora de analizar los resultados.

Los alumnos de 2º ESO también muestran dos tendencias divididas por haber tenido dos profesoras distintas en cursos anteriores. Uno de los grupos completó los contenidos a estudiar en 1º ESO mientras que el otro no llegó a comenzar las unidades de Probabilidad y Estadística; por tanto, los cuestionarios han sido completados según los conocimientos sobre el azar que su propia experiencia les ha provisto. El grupo de 2º ESO A, no trabajó estos contenidos y obtuvo un 56% de aprobados en 1º ESO, mientras que el grupo de 2º ESO B, que si los trabajó obtuvo un 60,6% del número total de alumnos aprobados. Como ya se ha comentado antes, en general, los grupos bilingües,

denominados con la letra B, son académicamente mejores que los demás grupos del centro. Sin embargo, el inicio en 1º ESO suele ser complicado para todos los alumnos que comienzan, ya que supone un cambio en el ritmo habitual de las clases y tareas de primaria, con un sistema bilingüe con materias en inglés y en español (matemáticas entre ellas) que requieren una mayor dedicación a la que no están acostumbrados.

El cuestionario se pasó a los estudiantes entre los meses de abril y mayo según la disponibilidad del grupo para no interferir en su ritmo habitual de clase. Con la colaboración de los docentes de estos grupos, se realizó al alumnado una síntesis de la importancia de la investigación hoy en día, máxime en un centro educativo y se les explicó cómo ellos iban a ser protagonistas de un estudio en su misma aula. Entendida esta importancia, se continuó ofreciendo el cuestionario a todos los alumnos que se encontraban en la clase y se les dio todo el tiempo necesario hasta completarlo. La mayoría finalizó en 30 minutos o antes, necesitando algunos más de 40 minutos. Los resultados se discutieron con los alumnos en la siguiente sesión, sirviendo como actividad formativa.

3.4.METODOLOGÍA

Este trabajo se encuentra, según Bisquerra (1989) dentro de la investigación descriptiva y aplicada siendo un estudio exploratorio, pues no se trata de confirmar estadísticamente hipótesis.

Más concretamente, se plantea un estudio de evaluación de los conocimientos básicos en lenguaje y fenomenología del azar en el alumnado de matemáticas de 12 a 15 años de edad. Para ello se toma una muestra de alumnos intencional, aunque elegida de forma que represente adecuadamente otros estudiantes andaluces para los cursos participantes.

Con el fin de alcanzar los objetivos de la investigación, contamos, como instrumento principal, con un cuestionario que hemos elaborado basándonos en ítems tomados de investigaciones en el campo del lenguaje matemático y textos dedicados a la formación del profesorado.

La investigación ha sido realizada siguiendo tres fases principales, que corresponden con los objetivos de nuestra investigación:

- *Fase de construcción del cuestionario:* 9 de abril al 24 de abril. Tuvo como objetivo seleccionar aquellas preguntas que, sin ser demasiado complejas para el alumnado, nos permitieran esclarecer el nivel de conocimiento sobre fenomenología y lenguaje

del azar. Previamente fue necesario la familiarización con el tema, a partir de la lectura de algunos artículos de investigación. Igualmente en esta fase se llevó a cabo el análisis previo del cuestionario para comprobar si serviría para nuestros fines.

- *Fase de recogida de datos:* 24 de abril al 17 de mayo. Posteriormente, llevamos a cabo la selección de la muestra contando con los alumnos de 1º y 2º ESO de nuestro centro que voluntariamente quisieron participar en la investigación, como ya hemos indicado en el apartado 3.3. Se llevó a cabo con la autorización del centro y la información y colaboración de los participantes y formó parte de actividades de enseñanza.
- *Fase de análisis de los datos y obtención de resultados:* Durante el mes de Julio se realizó el análisis y parte del mes de Agosto se ha dedicado a comparar con las investigaciones previas y obtener nuestras conclusiones.
- *Escritura de la Memoria:* Se ha llevado a cabo en los meses de Junio a Agosto y en paralelo con el resto de fases.

Análisis de datos

Una vez realizado el cuestionario de forma anónima, ordenamos por curso y completamos en una hoja Excel las columnas necesarias para codificar cada una de las ocho preguntas del cuestionario, enumerando al alumnado y anotando su edad y género. En cada ítem del cuestionario, codificamos de forma numérica la respuesta para facilitar así el análisis estadístico, pero diferenciando según el tipo de ítem:

- En el ítem que se pedía dar dos palabras o frases se graduó el acierto con 2, 1 o 0 puntos según fuera el número de respuestas correctas.
- En los ítems con respuesta requerida de Sí o No: se anotó la respuesta.
- En los ítems que piden vocabulario con múltiples respuestas posibles se anota el número de respuestas correctas e incorrectas.
- En el último ítem donde se pide graduar la probabilidad en forma cualitativa, se han considerado cinco posibles opciones; imposible y posible, 50% de probabilidad y las probabilidades intermedias entre 50% y posible o imposible. Se asigna una de estas cinco respuestas, teniendo en cuenta la expresión utilizada por el alumno.

3.5. ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO Y CONOCIMIENTOS EVALUADOS

El cuestionario que hemos utilizado se ha construido para esta investigación, con el fin de cumplir uno de nuestros objetivos. Los ítems se han tomado de investigaciones previas o libros de texto. El cuestionario se compone de dos grandes bloques: en el primero tratamos de ver si los alumnos discriminan sucesos aleatorios y no aleatorios y si son capaces de reconocer situaciones aleatorias en diferentes contextos.

El segundo bloque de preguntas se orienta a analizar el vocabulario que los alumnos han adquirido en relación con los fenómenos aleatorios y la valoración cualitativa de probabilidades. En todo el cuestionario se ha evitado usar un lenguaje formal, puesto que los alumnos sólo tendrán unos primeros conocimientos del tema intuitivos, adquiridos en la Educación Primaria. A continuación se analizan los ítems que se han organizado en varios apartados.

Fenomenología del azar

Ítem 1, ¿Qué quiere decir que una cosa ocurre al azar? Explícalo con un ejemplo.

Ítem 2, Pon ejemplos de juegos en que interviene el azar.

Ítem 3, Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.

Las primeras tres preguntas son similares a las que aparecen con frecuencia en libros de texto de Educación Primaria o Secundaria al inicio del tema de probabilidad. También se incluyen en algunos textos dedicados a la formación del profesorado, por ejemplo, en Batanero y Godino (2004) o Godino, Batanero y Cañizares (1987).

En la primera se pide al alumno dar una definición intuitiva con sus propias palabras de fenómeno aleatorio. Esperamos que en su definición se pueda ver las características que les asocian, por ejemplo, ser imprevisible o tener varios resultados posibles. Se les deja usar un ejemplo para que sea más sencillo.

Los ítems 2 y 3 están dirigidos a evaluar el reconocimiento de la aleatoriedad en distintos contextos; en el 2 se tratará de ver los juegos de azar que conocen los niños, que no tienen por qué ser solo juegos de mesa. En el tercero se espera que den algún ejemplo fuera de los juegos y se clasificarán los ejemplos, teniendo en cuenta los contextos considerados en las pruebas PISA (OCDE, 2009; Ministerio de Educación, 2013):

- Personales: relacionadas con las actividades diarias del alumno, su familia o amigos o el contexto escolar.
- Profesionales: se centran en el mundo laboral
- Sociales: ejemplos que el alumno puede encontrar en su comunidad (comunidad de vecinos, ayuntamiento o ciudad, su país, etc.).
- Científicos: aplicación de las matemáticas en ciencia y tecnología.

Ítem 4. Indica con una cruz (X) en cuáles de las siguientes situaciones interviene el azar y en cuáles no:		
	SI	NO
Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros		
Observar si mañana sale el sol		
Observar si mañana llueve o no		
Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados		
Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra		
Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo		

En el ítem 4 se propone una serie de situaciones para que el alumno las clasifique de aleatorias o no. Las situación *Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros* es un juego de azar típico; *Observar si mañana sale el sol*, *Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados* y *Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo* son deterministas; *Observar si mañana llueve o no* y *Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra* son aleatorias en contextos diferentes de los juegos. En este ítem simplemente calcularemos el porcentaje de alumnos que da respuesta positiva o negativa en cada apartado.

Lenguaje del azar

Todos los ítems que siguen tratan de valorar el vocabulario adquirido por el alumno sobre los fenómenos aleatorios. Nos hemos inspirado en la mayoría de ellos en los trabajos de Green (1983) y Cañizares (1987) quienes plantearon preguntas similares a niños de entre 10 y 14 años, observando que algunos niños daban un significado inapropiado a algunas palabras relacionadas con el azar.

Ítem 5. Haz una lista lo más larga posible de palabras que uses para hablar del azar.
--

En este ítem trataremos de ver el número de palabras que el alumno propone y de ellas, cuáles podría corresponder a un vocabulario elemental sobre los fenómenos aleatorios (el alumno podría también proponer otras inapropiadas).

Ítem 6. Escribe dos palabras o frases que signifiquen lo mismo que:

1. Imposible	1.
	2.
2. Posible	1.
	2.
3. Igual posibilidad	1.
	2.
4. Poca posibilidad	1.
	2.
5. Seguro	1.
	2.
6. Inseguro	1.
	2.
7. Imposible	1.
	2.
8. Muy posible	1.
	2.

Este ítem está adaptado de las investigaciones de Green (1983) y Cañizares (1987). Para cada una de las palabras queremos ver si el alumno es capaz de dar un sinónimo correcto o una frase con el mismo significado. También se verá cuáles de todas las expresiones se comprenden correctamente y si en alguna hay una confusión respecto a su significado.

Ítem 7. Indica con una cruz (X) aquellas frases que quieren decir lo mismo que “**tiene un cincuenta por ciento de posibilidades**”:

	SI	NO
Puede ocurrir o no		
Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso		
Sucedirá 50 veces de cada 50		
Puede suceder algunas veces		
Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir		
Sucede más o menos 5 de cada 10 veces		

Este ítem también está adaptado de las investigaciones de Green (1983) y Cañizares (1987). Se trata de ver si el alumno comprende la expresión “cincuenta por ciento de posibilidades”, por tanto su comprensión y discriminación de los conceptos de porcentaje y probabilidad. Las respuestas correctas serían la *Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso*, *Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir* y *Sucede más o menos 5 de cada 10 veces*. Pero algunos alumnos podrían interpretarlo como alguna de las otras frases o bien considerar incorrecta *Sucede más o menos 5 de cada 10 veces* al esperar una ocurrencia exacta del 50%.

Ítem 8. El profesor ha pedido a Daniel que prepare un pronóstico del tiempo que hará mañana en La Línea de la Concepción ofreciéndole varias opciones:

- Lloverá todo el día
- Lloverá solo un rato
- La temperatura a mediodía será 40 grados o mayor
- Habrá una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados
- Mañana nevará en La Línea
- Lloverá tanto que habrá inundaciones

Completa cada frase según la posibilidad que crees de que ocurra (o usando las frases de la actividad 6). Usa como ejemplo la siguiente: “**Es poco probable** que llueva todo el día”.

- a. _____ que llueva solo un rato.
- b. _____ que la temperatura a mediodía sea 40 grados o mayor.
- c. _____ que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.
- d. _____ que mañana nieve en La Línea.
- e. _____ que llueva tanto que haya inundaciones.

Este último ítem ha sido adaptado de un ejercicio propuesto en Batanero y Godino (2004) y pide a los alumnos usar el vocabulario que ya conocen para dar una valoración cualitativa de probabilidades. Los alumnos han de utilizar su conocimiento del contexto (su experiencia con la meteorología en su ciudad), junto con el vocabulario para completarla. Puesto que la prueba se pasó en los meses de abril y mayo (primavera) los alumnos reconocerán algunos sucesos como muy poco probables (por ejemplo el b) o el d)). Sin embargo, en La Línea de la Concepción suele llover de forma muy abundante debido a la cercanía con el estrecho de Gibraltar, por lo que el apartado e), aunque difícil, puede que sea considerado por los alumnos como posible.

3.6.RESULTADOS

Una vez codificados los resultados aportados por los cuestionarios, vamos a analizar, en cada bloque ya diferenciado, el nivel de acierto que ha mostrado el alumnado a la hora de completarlo, comparando con las investigaciones previas.

3.6.1. FENOMENOLOGÍA DEL AZAR

Item 1. ¿Qué quiere decir que una cosa ocurre al azar? Explicalo con un ejemplo.

Item 2. Pon ejemplos de juegos en que interviene el azar.

Item 3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.

En la tabla 3.6.1 se comparan los porcentajes de respuestas correctas en cada curso, donde lo primero que destaca es que hubo muy pocos alumnos que dejaron la respuesta en blanco, de lo que se deduce la motivación para completar el cuestionario.

Tabla 3.6.1. *Porcentaje de respuestas al ítem 1*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Respuesta y ejemplo correctos	71,4	78,8
Respuesta correcta y ejemplo incorrecto	5,4	6,1
Respuesta incorrecta y ejemplo correcto	10,7	3,0
Incorrecto	8,9	12,1
No responde	3,6	0,0

En general, la mayoría de los alumnos aciertan al distinguir cuando interviene el azar en un suceso y localizan un ejemplo adecuado que les es familiar, en casi todos los casos haciendo uso de los juegos de azar. En unos pocos casos, aunque explican lo que es un fenómeno aleatorio, aportan un ejemplo inadecuado, como la alumna 18 (1ºESO A) cuando indica que al azar significa “a suerte”, pero indica como ejemplo que “eliges algo pensando exactamente qué quieres”. En otros casos dan una definición incorrecta debido a la dificultad con el lenguaje y falta de precisión, pero al dar un ejemplo correcto, se deduce que comprenden el concepto.

Son pocos los que presentan definición y ejemplo incorrectos, por lo que observamos lo que ya habíamos indicado anteriormente, el azar es algo que forma parte de sus vidas y son capaces de describirlo aunque sea a base de un ejemplo. A continuación reproducimos y analizamos algunos ejemplos de respuestas de los

alumnos. En la Figura 3.6.1 y 3.6.2. se muestran la aportadas por el alumno 16, y por la alumna 19, ambos de 1º ESO, quien deja entrever que concibe el azar como impredecible.

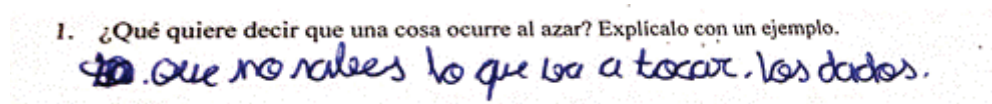


Figura 3.6.1. Respuesta al ítem 1 del alumno 16 (1ºESO A)

En la Figura 3.6.1 se observa como el alumno no utiliza un término sinónimo de aleatorio, si no que muestra con una frase que comprende la diferencia entre fenómeno aleatorio y determinista. Al mostrar el ejemplo de los dados, entendemos que se refiere a que no sabemos qué va a obtenerse al tirar los dados, por lo que se trataría de una respuesta correcta con un ejemplo correcto, como hemos indicado en la Tabla 3.6.1. Como se indica en la tesis de Cañizares (1997) en ocasiones el alumno no diferencia verbalmente entre el experimento aleatorio (tirar los dados en el ejemplo) y el suceso (resultado).

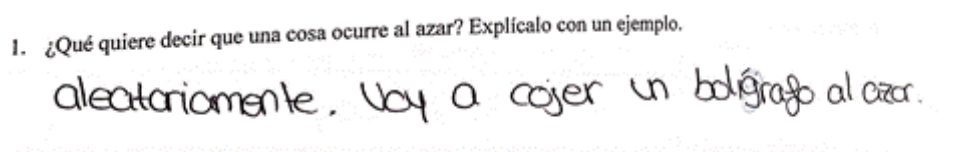


Figura 3.6.2. Respuesta al ítem 1 de la alumna 22 (1º ESO B)

En el caso mostrado en la Figura 3.6.2, la alumna utiliza el término “aleatorio”, que corresponde a un lenguaje más formalizado y propio del aula para descripción del azar. Utiliza un ejemplo de su vida cotidiana para aclarar lo que quiere decir. La respuesta es también correcta, pero muy imprecisa.

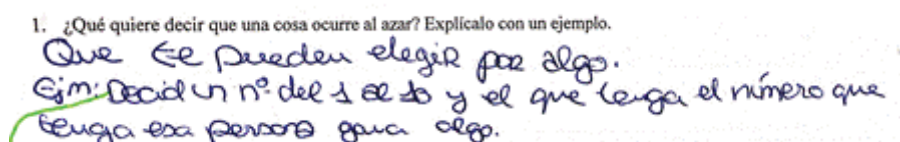


Figura 3.6.3. Respuesta al ítem 1 de la alumna 1 (1º ESO A)

Según la respuesta que se muestra en la Figura 3.6.3. esta alumna da un ejemplo correcto y describe lo que es para ella el azar. Sin embargo, no da una descripción satisfactoria, ya que el hecho de que algo sea posible no infiere que deba ocurrir por azar. Por eso, hemos codificado la anterior respuesta en la Tabla 3.6.1. como respuesta

incorrecta y ejemplo correcto. Hacemos notar que en el trabajo de Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) con futuros profesores también se observaron casos en que al definir la probabilidad condicional se obtiene una definición correcta con ejemplo incorrecto o al contrario.

Muchos alumnos, relacionan los sucesos aleatorios con la suerte y la imprevisibilidad, característica de los fenómenos aleatorios citada por Batanero (2015). En otros casos, algún alumno que describe el azar como “que ocurre sin hacerlo aposta” (alumna 20), o “que ha ocurrido sin ser planeado” (alumno 27). Aunque estas definiciones son un poco más confusas, una vez descrito su ejemplo, se observa que comprenden bien el concepto. Además aparece otra característica importante también descrita por Batanero (2015): la imposibilidad de controlar los fenómenos aleatorios.

Como resumen de los datos analizados, aportamos la Figura 3.6.4 donde podemos observar que el porcentaje de ambas respuestas correctas en 2º ESO es mayor, pero hay más alumnos en 1º ESO que no responden a ninguna de las preguntas, lo que debe deberse al desconocimiento previo sobre la materia de los mismos, más que a la falta de conocimiento en describir qué es el azar con sus propias palabras que se observa en el otro curso.

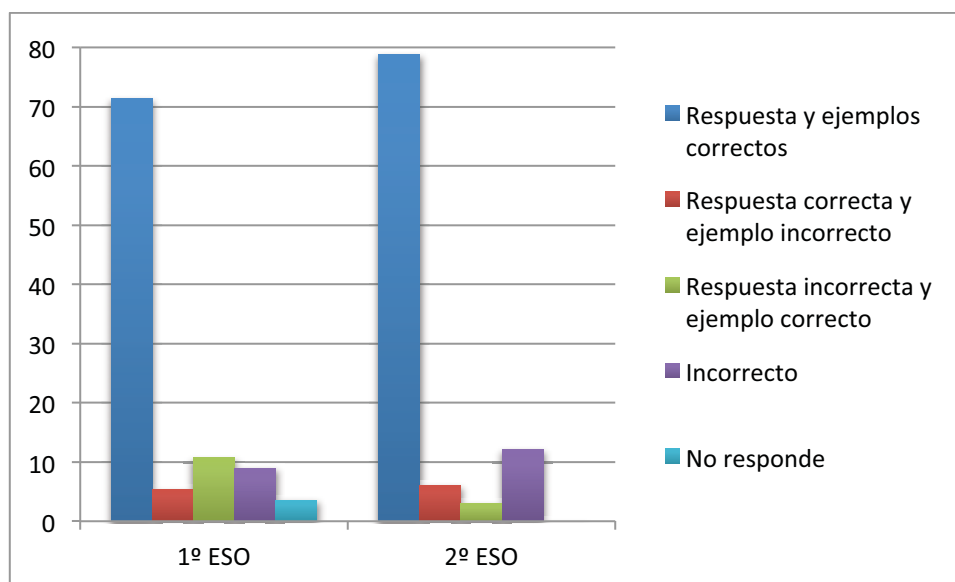


Figura 3.6.4. Porcentaje de respuestas al ítem 1

La Tabla 3.6.2. recoge el número de ejemplos correctos e incorrectos proporcionados por los alumnos en el ítem 2. Resaltamos el hecho de que sólo tres alumnos han dejado el apartado sin contestar. Los demás compañeros han completado

con 1 o más respuestas obteniendo en un estudiante hasta 7 juegos de azar correctos. El número medio de respuestas correctas por alumno fue 2,3, siendo muy cercano a cero el número medio de respuestas incorrectas. Al comparar por curso se obtuvo un número medio de 2,26 ejemplos correctos en 1º curso y 2,33 en segundo con poca diferencia por curso.

Tabla 3.6.2. *Resumen de respuestas al ítem 2*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Número de ejemplos correctos	127	77
Número de ejemplos incorrectos	4	3

Los ejemplos propuestos por los estudiantes son mayormente los relacionados con juegos de azar. Entre otros hemos encontrado, el bingo, juegos de cartas, y en algunos casos, videojuegos presentes en los teléfonos móviles como aplicaciones; en estos casos indican que el azar aparece en las preguntas que deben responder, la puntuación obtenida o a la hora de encontrar con quién jugar en la red. Además, en varios casos han determinado como juego de azar “los huevos kínder” como elemento de entretenimiento donde no se conoce qué juguete aparecerá dentro del huevo. Algunos ejemplos de respuestas correctas se presentan en las Figuras 3.6.5 y 3.6.6, donde los chicos presentan ejemplos de sus juegos cotidianos.

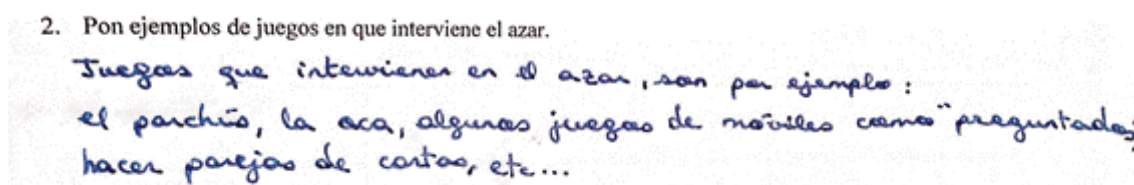


Figura 3.6.5. Respuesta al ítem 2 de la alumna 19 (1ºESO B)

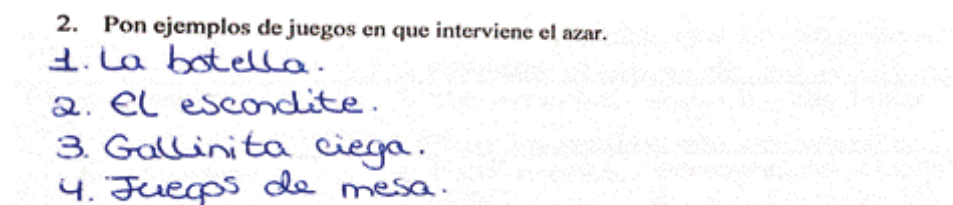


Figura 3.6.6. Respuesta al ítem 2 de la alumna 20 (1ºESO B)

Lo que más ha llamado nuestra atención es la respuesta de algunos alumnos en relación con los deportes, donde han reconocido un elemento aleatorio (Figuras 3.6.7 y 3.6.8). Suponemos que la aleatoriedad se encuentra en saber el ganador, el número de puntos o tantos de cada jugador, etc. También, en un caso encontramos que el alumno

explica que “no sabes a donde irá la pelota” y de ahí que lo considere juego de azar:

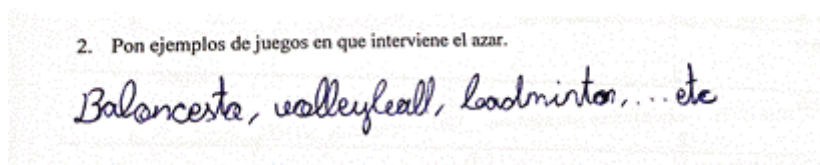


Figura 3.6.7. Respuesta al ítem 2 de la alumna 65 (2ºESO A)

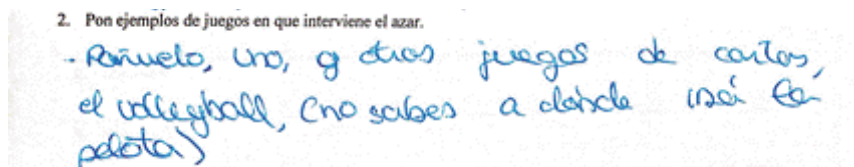


Figura 3.6.8. Respuesta al ítem 2 de la alumna 66 (2º ESO A)

En el apartado 3 (Tabla 3.6.3), la proporción de respuestas correctas por alumnado es similar entre ambos cursos con un número medio de ejemplos (0,94 en 1º y 0,93 en 2º curso) que no llega a la unidad. Muchos alumnos han seguido contestando con ejemplos de juegos de azar, y casi un 30% de los alumnos en ambos cursos no han sabido contestar con ningún ejemplo de su vida cotidiana. Sería importante que los alumnos lleguen a reconocer los numerosos ejemplos de situaciones aleatorias diferentes a los juegos de azar y donde puede aplicarse el cálculo de probabilidades.

Tabla 3.6.3. *Resumen de respuestas al ítem 3*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Número de ejemplos correctos	52	31
Número de ejemplos incorrectos	14	2
No responden	15 alumnos	10 alumnos

Sin embargo, los que han completado el apartado proporcionan una variedad de ejemplos que hemos identificado dentro del contexto “Personales” o “Escolares” que anteriormente hemos enumerado de las pruebas PISA (OECD, 2009; Ministerio de Educación, 2013). La mayoría indica situaciones donde no saben qué va a ocurrir pero siempre en contextos que ellos viven diariamente. Como ejemplo, los indicados en las Figuras 3.6.8, 3.6.9, 3.6.10, y 3.6.11, donde se muestran situaciones obtenidas de la experiencia de nuestros alumnos en los que claramente inferimos que comprenden el significado del azar y que son capaces de determinar ejemplos en los que intervienen.

3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
1. Cuando se elige quien friega los platos.
 2. Cuando el maestro elige un alumno para salir a pizarra.
 3. Cuando se sortea algo.
 4. Cuando se elige quien cocina.

Figura 3.6.9. Respuesta al ítem 3 de la alumna 20 (1ºESO B)

3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
- Por ejemplo, salgo a la calle y no sé a quién me voy a encontrar; no sé si llueve o no; etc...

Figura 3.6.10. Respuesta al ítem 3 de la alumna 12 (1º ESO A)

3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
- Por ejemplo, cuando un profesor pregunta y no ~~trata~~ elige por orden de lista, cuando vas a coger un caramelo de un tarro y cierras los ojos para elegir...

Figura 3.6.11. Respuesta al ítem 3 del alumno 33 (1ºESO B)

3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
- Si traen a la cafetería patatas nueva, pero también están tus patatas preferidas escajo al azar

Figura 3.6.12. Respuesta al ítem 3 del alumno 21 (1ºESO B)

En el curso de 2º ESO hemos encontrado situaciones también relacionadas con la vida cotidiana del alumnado, pero con mayor detalle en algunas respuestas, como observamos en la Figura 3.6.13. En todos los ejemplos presentados los alumnos han dado varios correctos. El mayor número de respuestas correctas en un alumno fue de 5 ejemplos de la alumna 19 (1ºESO B), pero hay 17 alumnos de 1º ESO que sólo aportan 1 ejemplo correcto, y 8 alumnos que aportan 2, por lo que el número final de ejemplos es bastante inferior a lo esperado.

3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
- Por la mañana no sabes si te vas a levantar hoy bien.
- no sabes si te van a regalar algo.
- no sabes que día va a llover.
- no sabes si te van a poner un examen sorpresa o si te van a mandar muchos deberes
- Si en cuáles de las siguientes situaciones interviene el azar y en cuáles no:
- | SI | NO |
|----|----|
| | |

Figura 3.6.13. Respuesta al ítem 3 de la alumna 78 (2ºESO B)

Item 4. Indica con una cruz (X) en cuáles de las siguientes situaciones interviene el azar y en cuáles no:		
	SI	NO
Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros		
Observar si mañana sale el sol		
Observar si mañana llueve o no		
Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados		
Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra		
Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo		

En este apartado, se pretendía que el alumnado discriminara los sucesos aleatorios de los deterministas con ejemplos, bastantes sencillos de comprender, de su vida diaria. En la Tabla 3.6.4 se muestran los alumnos que han considerado aleatorio los diferentes sucesos, siendo algunos de ellos deterministas, por lo que se puede apreciar una variación muy marcada en los porcentajes de las distintas respuestas.

Tabla 3.6.4. Porcentaje de alumnos que considera aleatorio diferentes sucesos

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros	87,5	93,9
Observar si mañana sale el sol	23,2	9,1
Observar si mañana llueve o no	57,1	54,6
Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados	12,5	12,1
Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra	87,5	93,9
Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo	17,9	18,2

Aunque pocos, dos alumnos han dejado la respuesta en blanco. El resto, parece que ha resuelto la tarea relativamente bien, aunque, como vemos, aplican elementos subjetivos en algunos casos e incluso errores, como el pequeño porcentaje que considera aleatorio el hecho de que el agua se congele a cero grados o que se rompa un huevo si lo lanzamos desde un tercer piso. Podría ser que estos alumnos no comprendiesen bien el significado de la palabra aleatorio.

En los juegos de azar (sacar una carta) y de deportes (tirar a una canasta) hay una gran mayoría de coincidencia en ser aleatorio. Los ejemplos de meteorología (salir el sol, llover) han estado influenciados por el tiempo que había el día que pasó la prueba,

ya que se pedía el pronóstico para el día siguiente.

Por lo demás, podemos ver en la Figura 3.6.14 una comparación entre ambos cursos, donde concluimos que las diferencias entre cursos son pequeñas y que, salvo el pequeño número que no diferencia bien los dos ejemplos de situaciones deterministas, la mayoría da respuestas apropiadas.

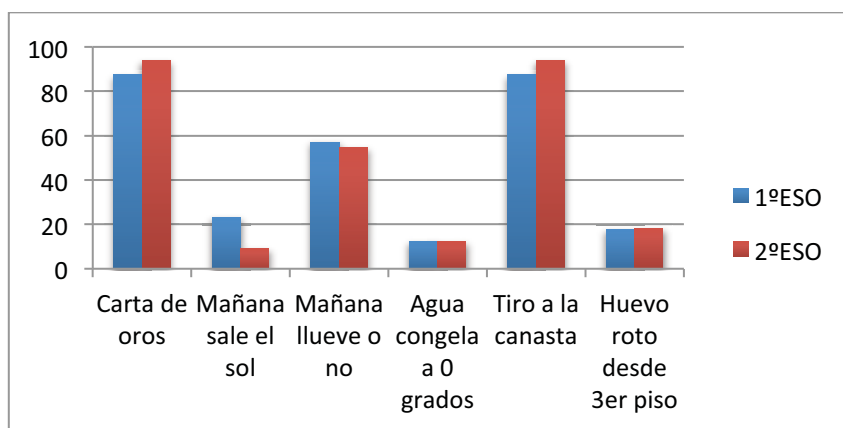


Figura 3.6.14. Porcentaje de acierto de cada elemento del ítem 4 del cuestionario

3.6.2. LENGUAJE DEL AZAR

Ítem 5. Haz una lista lo más larga posible de palabras que uses para hablar del azar.

Tabla 3.6.5. *Resumen de respuestas al ítem 5*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Número de palabras correctas	88	28
Número de palabras incorrectas	11	23
No responden	25 alumnos	13 alumnos

Este apartado ha sido de especial dificultad para el alumnado, lo que indica la necesidad de mejora de la competencia lingüística y de expresión escrita que muestran. El 44,6 % de los alumnos de 1ºESO no ha sido capaz de responder con alguna palabra, siendo para 2ºESO el 39,4 % el que no responde, porcentaje ligeramente menor.

De la lista de palabras aportadas por el alumnado, destacan el uso continuado de los términos “suerte”, “casualidad” y “aleatorio”, las expresiones de probabilidad “seguro”, “poco probable”, “muy probable” (Figura 3.6.15) y, en algunos casos, los objetos utilizados en experimentos aleatorios como dados o cartas. Hay una coincidencia acá con los resultados obtenidos por Cañizares (1997).

5. Haz una lista lo más larga posible de palabras que uses para hablar del azar.

Improbable, poco posible, es muy seguro, probablemente, posiblemente,
imposible, posible, inseguro, muy poco probable y muy
posible.

Figura 3.6.15. Respuesta al ítem 5 del alumno 29 (1º ESO B)

Algún alumno ha incluido frases como “elegir sin pensar”, “espontáneo”, “rápido”, que demuestran la dificultad para expresar un concepto que conocen, pero del que no tienen vocabulario suficiente para describir. El primer ejemplo, lo podríamos considerar como correcto pero poco preciso, pero los dos últimos son claramente incorrectos. En la Figura 3.6.16 el alumno utiliza en el tercer elemento una frase como descripción de algún término que tiene que ver con el azar, pero sin saber identificar claramente una palabra, por lo que lo hemos considerado incorrecto.

5. Haz una lista lo más larga posible de palabras que uses para hablar del azar.

1- Suerte
2- probabilidad
3- si hay mas tanto por ciento de una cantidad que de
otra es mas probable que salga el que tiene mayor
porcentaje.

Figura 3.6.16. Respuesta al ítem 5 del alumno 36 (1º ESO B)

Entre otros elementos erróneos de este ejercicio, muchos han utilizado elementos como “personas”, “cosas”, “dados”, o frases como “por la cara”, que no conllevan un significado relacionado con azar. En todo caso, al hablar de “dados” puede ocurrir, como ya se ha comentado, que se confunda el objeto con el experimento consistente en lanzar los dados, pero en todo caso la respuesta es deficiente.

En general, el alumnado de 1º ESO ha completado con un mayor número de palabras la tarea, 1,6 palabras por alumno en contraste con el 0,8 palabras de 2º ESO. Por tanto los resultados esta vez son peores en los alumnos mayores, teniendo en cuenta también que el número de ejemplos incorrectos casi se iguala en este grupo a los correctos.

Item 6. Escribe dos palabras o frases que signifiquen lo mismo que:

9. Imposible	1.
	2.
10. Posible	1.
	2.
11. Igual posibilidad	1.
	2.
12. Poca posibilidad	1.
	2.
13. Seguro	1.
	2.
14. Inseguro	1.
	2.
15. Imposible	1.
	2.
16. Muy posible	1.
	2.

Para este apartado, vemos en la Tabla 3.6.6 que las palabras en que los alumnos han encontrado en mayor proporción 1 o 2 sinónimos han sido imposible y posible, encontrando acá una diferencia con el estudio de Cañizares (1997) quien indicó que el término imposible fue muy difícil para sus estudiantes. En el resto, son mayoría los que no son capaces de completar la tarea.

Tabla 3.6.6. *Porcentaje de alumnos según número de respuestas correctas al ítem 6*

Respuestas correctas	1º curso (n=56)			2º curso (n=33)		
	2	1	0	2	1	0
1. Imposible	21,4	30,4	48,2	18,2	48,5	33,3
2. Posible	10,7	28,6	60,7	6,1	57,6	36,4
3. Igual posibilidad	3,6	21,4	75,0	0,0	39,4	60,6
4. Poca posibilidad	8,9	32,1	58,9	0,0	33,3	66,7
5. Seguro	10,7	16,1	73,2	9,1	30,3	60,6
6. Inseguro	16,1	25,0	58,9	0,0	42,4	57,6
7. Muy posible	8,9	21,4	69,6	0,0	24,2	75,8

A la hora de responder, muchos alumnos han decidido usar palabras sinónimas o incluso cambiar palabras como “inseguro” a “no es seguro”, lo que conlleva un significado parecido de forma sencilla. También se ha observado algunas expresiones coloquiales como “sí o sí” para un suceso “seguro” o “puede que sí o puede que no”

para “inseguro”.

Sin embargo, no han sido todos los casos así, y hay otros alumnos que ofrecen un vocabulario más complejo con el uso de palabras como “factible”, o “inviable” para describir “posible” e “imposible”. Además, algunos han hecho uso de los términos probabilísticos “50% de probabilidades” o “10 de cada 20” para expresar “igual probabilidad”. Mostramos en la Figura 3.6.17 el ejemplo de un alumno que finaliza la tarea añadiendo un experimento para representar el mismo significado de la frase.

i. Escribe dos palabras o frases que signifiquen lo mismo que:

a. Imposible	1. No posible 2. Nunca va a salir (una bola verde, si todas son rojas)
b. Posible	1. Casi seguro 2. Probable
c. Igual posibilidad	1. Mismo porcentaje de que sí y no. 2. Misma probabilidad
d. Poca posibilidad	1. Más probable que no salga 2. Menos probabilidad de que salga
e. Seguro	1. Sale (una bola roja, si todas son rojas). 2. No va a salir otra cosa
f. Inseguro	1. Puede que sí o puede que no 2. Crees pero no estás seguro de que salga

Figura 3.6.17. Respuesta al ítem 6 del alumno 24 (1º ESO B)

Pocos han sido los alumnos que han obtenido 2 expresiones correctas para los términos solicitados, y hay numerosos alumnos que han dejado el ejercicio en blanco, como muestra de lo ya indicado anteriormente, que el alumnado encuentra muy difícil expresar conceptos conocidos y utilizar diferentes expresiones de las que está habituado.

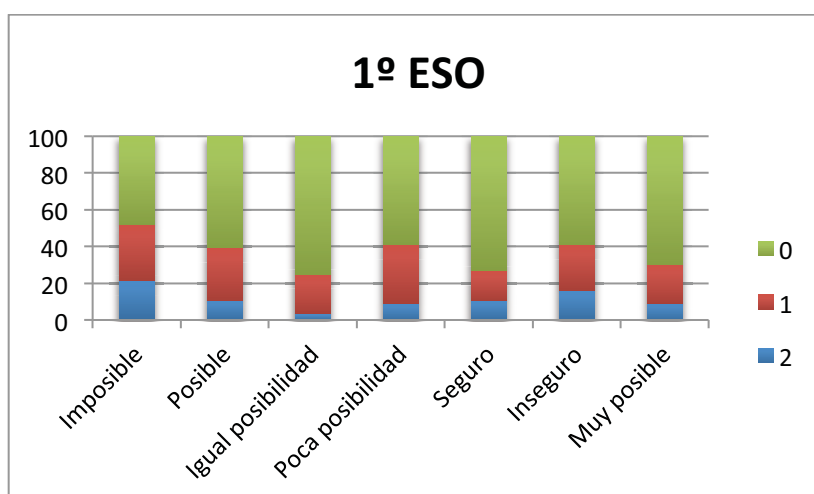


Figura 3.6. 18. Porcentaje de obtención de 0,1 y 2 sinónimos correctos en 1º ESO

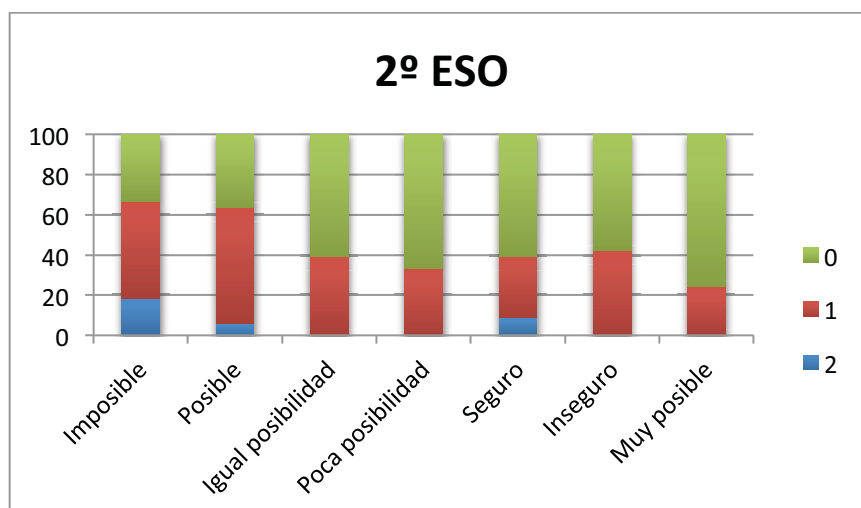


Figura 3.6.19. Porcentaje de obtención de 0,1 y 2 sinónimos correctos en 2º ESO

Como resumen, en las Figuras 3.6.18 y 3.6.19 podemos observar la comparación de los resultados en cada apartado en ambos cursos, que son variables. En primer lugar, la proporción de respuestas correctas (1 o 2) en 2º ESO es mayor en casi todos los apartados. Sin embargo, la proporción de 2 respuestas correctas en todos los apartados es mejor en 1º de ESO, por lo que intuimos que el alumnado de 1º ESO, que comprende las expresiones indicadas, es capaz de encontrar otros sinónimo con mayor facilidad que los de 2º ESO, que sólo es capaz de obtener 1.

Item 7. Indica con una cruz (X) aquellas frases que quieren decir lo mismo que “tiene un cincuenta por ciento de posibilidades”:		
	SI	NO
Puede ocurrir o no		
Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso		
Sucedirá 50 veces de cada 50		
Puede suceder algunas veces		
Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir		
Sucede más o menos 5 de cada 10 veces		

En la Tabla 3.6.7 presentamos los resultados del ítem 7. Observamos que de las tres únicas respuestas correctas (2, 5 y 6) la mayoría de 1º curso y todos los de 2º dan por cierta la 5, y la mayoría la 2, mientras que algunos no reconocen la expresión 6 como equivalente, sobre todo en 1º curso. El resto de las expresiones son incorrectas; aun así, la mayoría encuentra correcta la expresión 1.

En este apartado, llama la atención que el alumnado toma como sinónimo “Puede

ocurrir o no” infiriendo de la frase que la probabilidad de ocurrencia es del 50% cuando no es conocida. Muchos alumnos, aun teniendo todas las demás opciones correctas, han errado en este apartado, siendo una de las principales dificultades encontradas.

Tabla 3.6.7. *Porcentaje de alumnos que toma como sinónimo de “50% de posibilidades” diferentes frases*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
1. Puede ocurrir o no	85,7	84,9
2. Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso	82,1	87,9
3. Sucederá 50 veces de cada 50	33,9	9,1
4. Puede suceder algunas veces	37,5	12,1
5. Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir	78,6	100,0
6. Sucede más o menos 5 de cada 10 veces	58,9	78,8

En las demás opciones, se han obtenido unos resultados que varían de un curso a otro, obteniéndose unos mejores resultados en 2º ESO, como se puede observar en la Figura 3.6.20. pudiendo deberse por ser un alumnado que utiliza este tipo de frases en contextos como el fútbol o el baloncesto, que son deportes con mucha afición en el centro.

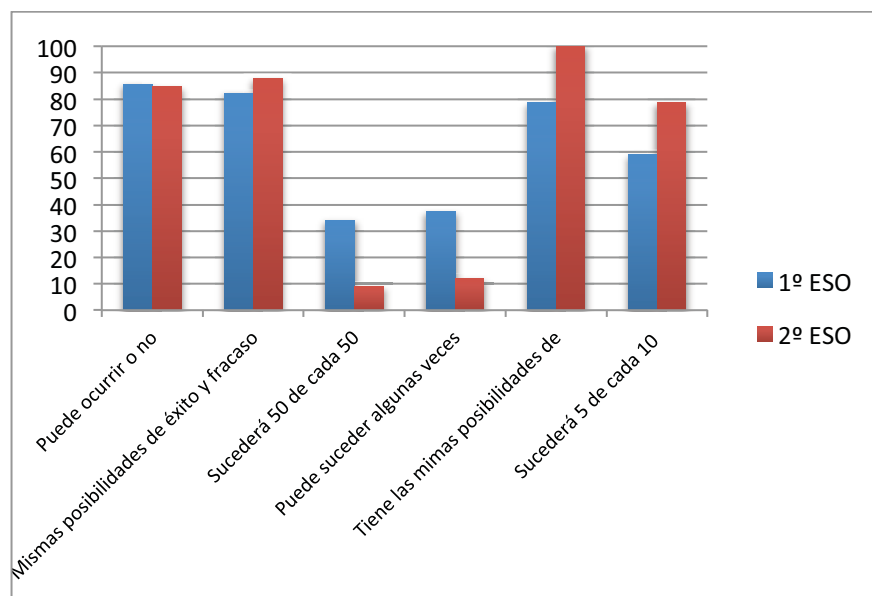


Figura 3.6.20. *Porcentaje de alumnos que toman como sinónimo de “50% de posibilidades” las frases*

Item 8. El profesor ha pedido a Daniel que prepare un pronóstico del tiempo que hará mañana en La Línea de la Concepción ofreciéndole varias opciones:

- Lloverá todo el día
- Lloverá solo un rato
- La temperatura a mediodía será 40 grados o mayor
- Habrá una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados
- Mañana nevará en La Línea
- Lloverá tanto que habrá inundaciones

Completa cada frase según la posibilidad que crees de que ocurra (o usando las frases de la actividad 6). Usa como ejemplo la siguiente: “**Es poco probable** que llueva todo el día”.

_____ que llueva solo un rato.

_____ que la temperatura a mediodía sea 40 grados o mayor.

_____ que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.

_____ que mañana nieve en La Línea.

_____ que llueva tanto que haya inundaciones.

Este apartado requería de los alumnos que asignaran una de las frases utilizadas anteriormente a un suceso de contexto meteorológico en su ciudad. Cada una de las frases marca un nivel distinto a la probabilidad de ese suceso, por lo que para hacer la asignación deben comprender las diferencias entre cada una de ellas y utilizarlas correctamente.

En la Tabla 3.6.8 podemos ver los resultados obtenidos para cada una de las expresiones en los dos cursos, clasificadas según el grado de probabilidad que el alumnado ha incluido en sus respuestas.

Las expresiones más habituales para calificar los sucesos han sido “Puede”, o “Es posible”, pero también encontramos “Es difícil” o su contrario, y “Seguramente que no” o “Es muy poco probable” como expresiones cercanas a imposible. Tras dar una primera lectura a todos los cuestionarios, nos encontramos que muchos de los alumnos diferencian principalmente entre tres niveles de probabilidad: “Probable”, “Imposible” o “Seguro”. Para clasificarlas hemos tenido en cuenta cinco posibles probabilidades asignadas (con diferentes sinónimos o expresiones): seguro, imposible y probable a medias (50% de probabilidad) y los valores intermedios entre este último y posible o imposible. Por ejemplo, si un alumno indica “podría ser pocas veces” o “puede ocurrir alguna vez” lo asignamos a poco probable; mientras que si sugiere “casi seguro que pasa” o “pasa la mayor parte de las veces” lo consideramos muy probable. Hemos codificado las respuestas dadas por “Probable” o “Puede” como “50%”.

En general, los resultados han sido bastante similares entre los dos cursos excepto en contados apartados, y el alumnado, salvo cinco alumnos que no han rellenado el ejercicio, ha completado la tarea haciendo uso de estas expresiones o de otras que ellos mismos han elegido.

Tabla 3.6.8. *Porcentaje de alumnos que califica cada suceso con diferente probabilidad*

	Imposible		Poco probable		50%		Muy probable		Seguro	
	1ºES O	2ºES O	1ºES O	2ºES O	1ºES O	2ºES O	1ºES O	2ºES O	1ºES O	2ºES O
Llover un rato	13,7	18,2	21,6	30,3	52,9	48,5	9,8	3,0	0,0	0,0
Más de 40 grados	54,9	48,5	29,4	24,2	5,9	27,3	0,0	0,0	5,9	0,0
10-20 grados	5,9	9,1	11,8	9,1	54,9	57,6	19,6	15,2	7,8	9,1
Nevar	88,2	100,0	9,8	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0
Inundaciones	45,1	51,5	35,3	18,2	13,7	30,3	2,0	0,0	3,9	0,0

Al haberse realizado el cuestionario en primavera, generalmente se espera lluvia. Pero al haber sido un año bastante seco, el alumnado no ha graduado la probabilidad al suceso “Llover un rato” siendo más de la mitad de los alumnos de 1º ESO y casi la mitad de 2º ESO los que han dado como respuesta “Puede” sin precisar el grado. Ninguno de los alumnos da como seguro que llueva un rato, y son pocos los que deciden que es muy probable. En la Figura 3.6.21. podemos ver una comparación de los resultados obtenidos en los dos cursos de la ESO, donde vemos que los de 2º curso usan más las expresiones “poco probables” e incluso “imposible” para esta frase. Mientras, dado que el año fue seco consideramos “poco probable” como la mejor opción en este ítem, “imposible” sería para nosotros una respuesta incorrecta.

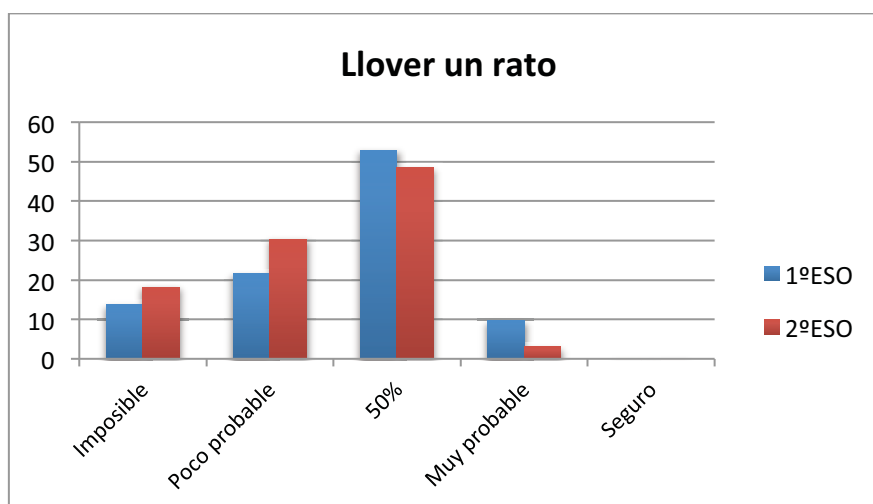


Figura 3.6.21. Porcentaje de alumnos que califican la expresión “Llover un rato”

En la Figura 3.6.22. se observan los resultados para el apartado de temperatura mayor a 40°. Más de la mitad de los alumnos de 1º ESO lo dan por imposible, lo que de nuevo es incorrecto y muestra la confusión entre imposible y poco probable en estos alumnos, en coincidencia con Cañizares (1997). Los alumnos tienen en cuenta las temperaturas de la ciudad de La Línea, que son muy tranquilas por su cercanía al mar. El 5,9% que responde seguro en 1ºESO debe ser debido a mala comprensión del ejercicio o de la frase. Es llamativo que en 2ºESO den por posible la situación en un 27,3%, lo que muestra la diferenciación de imposible y poco probable.

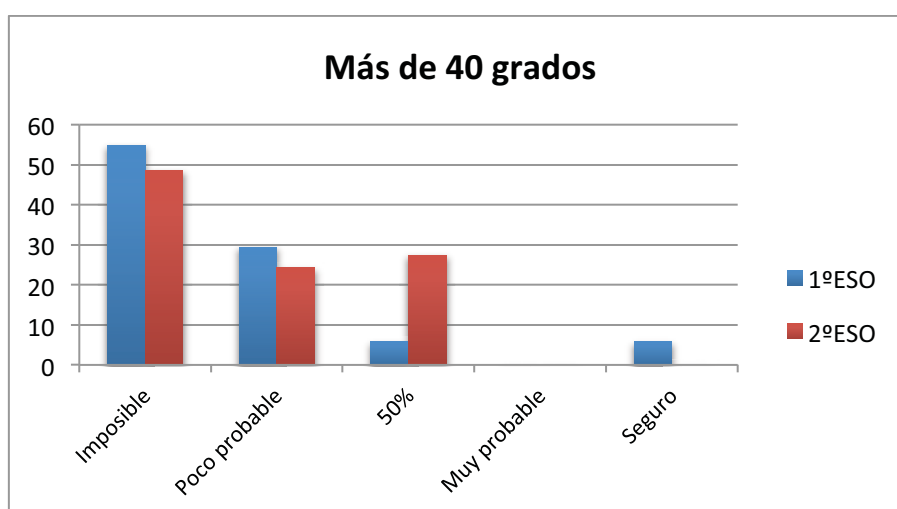


Figura 3.6.22. Porcentaje de alumnos que califican la expresión “Más de 40°”

En el siguiente apartado del cuestionario, los alumnos de 1º y 2º ESO han obtenido unos resultados muy similares. En la Figura 3.6.23. se encuentra la gráfica con los

resultados de ambos cursos, siendo todos bastante similares. Al tratarse de una temperatura media agradable, han optado más de la mitad de los alumnos por darla por “probable” más que a aventurarse a darle otro grado de probabilidad. En este apartado nos encontramos con el único caso de una alumna que ha decidido utilizar la expresión “medianamente probable” como vemos en la Figura 3.6.24. En contraste con el resto de sus respuestas, parece indicar que le parece que hay un 50% de posibilidades de que ocurra siendo la única alumna que ha mostrado una expresión semejante.

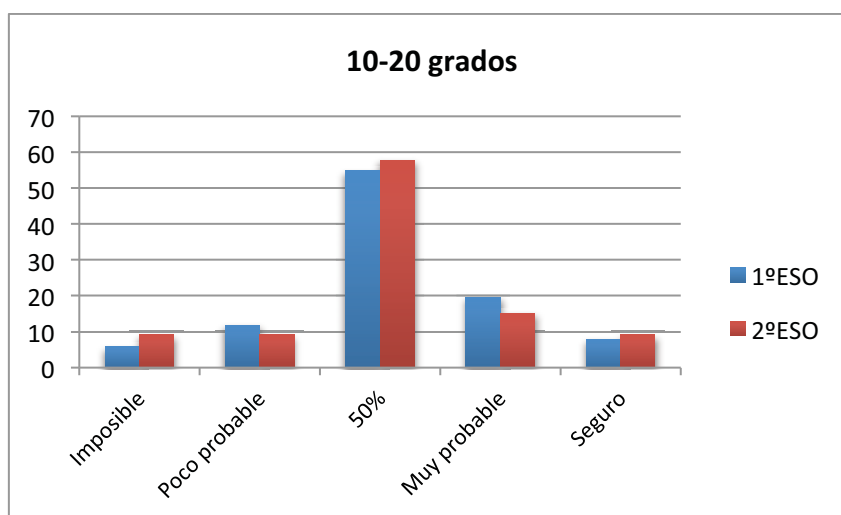


Figura 3.6.23. Porcentaje de alumnos que califican la expresión “10-20”

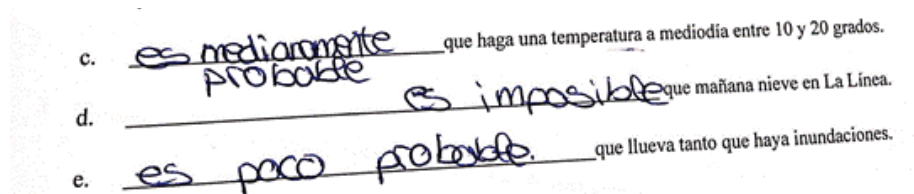


Figura 3.6.24. Respuesta al ítem 8 de la alumna 44 (1ºESO C)

Para el suceso “Nevar en La Línea”, la gran mayoría de los alumnos de 1º ESO y el 100% de los de 2ºESO lo dan como una situación imposible, mostrando de nuevo la “confusión de suceso improbable por suceso imposible” que Cañizares(1997) encontró en algunos alumnos de su investigación. Sin embargo, en alguna respuestas, como en la de la Figura 3.6.25 nos hemos encontrado con la expresión “improbable” debido a la

- c. Es probable que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.
- d. Es improbable que mañana nieve en La Línea.
- e. Es poco probable que llueva tanto que haya inundaciones.

Figura 3.6.25. Respuesta al ítem 8 del alumno 11 (1ºESO A)

En general, pocos alumnos han comprendido el significado de la palabra imposible para determinar la probabilidad de que nieve en La Línea, puesto que lo han confundido con muy improbable, debido al hecho que hace más de 60 años que no sucede. En la Figura 3.6.26. se encuentran los resultados obtenidos por los dos cursos.

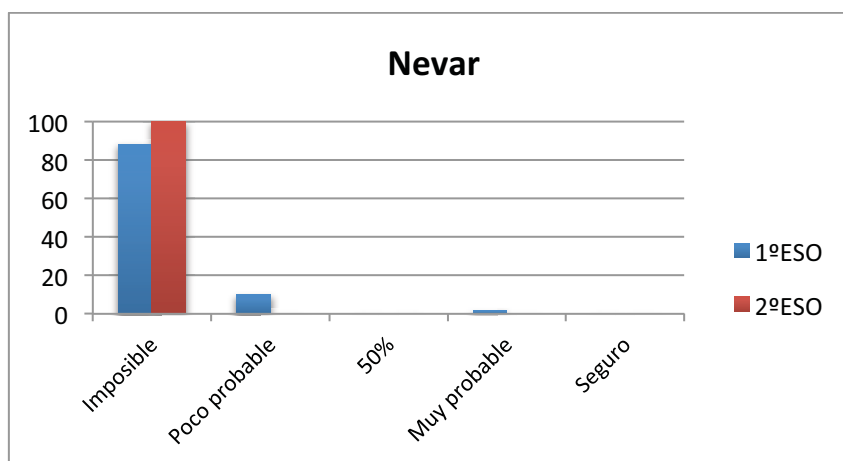


Figura 3.6.26. Porcentaje de alumnos que califican la expresión “Nevar”

Por último, en la Figura 3.6.27. se encuentran los resultados para el apartado en el que se introduce la situación de inundación en la ciudad. La mayoría de los alumnos de 2º ESO colocan la situación como imposible (de nuevo confusión con muy poco probable) y casi la mitad de los alumnos de 1º ESO así lo corroboran. Sin embargo, hay alumnado que lo sitúa como una situación muy probable o segura. Ya hemos comentado que en algunos días y debido a la situación específica del campo de Gibraltar, puede llover con tanta fuerza que mucho de nuestro alumnado no acude a clase por miedo de las familias a la lluvia. Aun así, no es algo habitual.

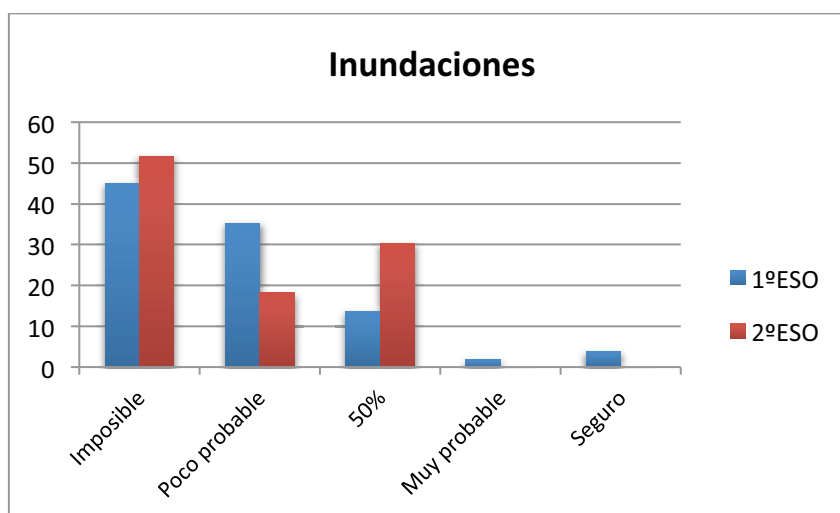


Figura 3.6.27. Porcentaje de alumnos que califican la expresión “Inundaciones”

3.7.SÍNTESIS Y DISCUSIÓN DEL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

Para finalizar nuestro trabajo, incluimos en esta sección una síntesis de los resultados obtenidos. En general, los ítems que han resultado más difíciles en el cuestionario han sido: el 3, donde se pedían ejemplos de aleatoriedad en la vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar (con un 26,8% en 1º ESO y un 30,3% en 2ºESO de alumnos sin responder); el 5, en que se pedía una lista de palabras utilizadas para aludir al azar (con un 44,6% en 1ºESO y un 39,4% en 2º ESO), y el 6, donde se piden sinónimos de ciertas palabras (con el 21% en 1ºESO y 12,1% en 2º ESO de respuestas en blanco). Los demás ítems, por el contrario, han sido resueltos por más del 90% del alumnado con un mayor o menor acierto dependiendo del apartado y el curso.

En lo que sigue vamos a comenzar comparando cada ítem para finalmente comparar la puntuación total que han obtenido el global de la muestra y diferenciada por curso.

3.7.1. COMPARACIÓN POR CURSO

Para poder observar las diferencias entre ambos cursos, vamos a valorar cada ítem entre 0 y 2 puntos.

En la valoración del ítem 1 se ha tenido en cuenta los dos aspectos que se preguntaban, es decir, que el alumnado haya elaborado una definición personal de lo que es el azar, y que haya aportado un ejemplo adecuado. Aquellos alumnos con ambas

respuestas correctas obtienen 2 puntos, mientras que los que sólo han acertado una parte obtendría 1 punto.

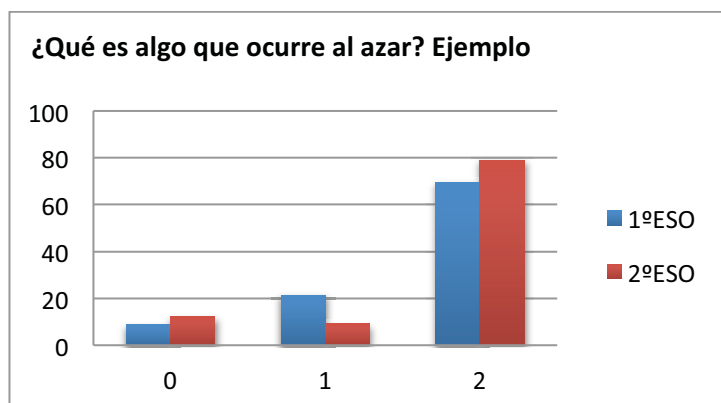


Figura 3.7.1. Porcentaje de alumnos que obtiene cada puntuación del ítem 1 por curso

En la figura 3.7.1 comparamos el porcentaje de alumnos con cada puntuación por curso. Como era de esperar en 2ºESO se han obtenido más resultados correctos que en 1ºESO, aunque también se obtiene un mayor número de errores presentes en las respuestas.

En el segundo apartado, valoramos de la misma forma de 0-2 puntos, según tengan algún ejemplo correcto (1) o hayan obtenido más de uno (2). En este caso podemos ver en la Figura 3.7.2 que los alumnos de 2º ESO obtienen un mayor número de valoraciones completas que en 1ºESO y un menor número de valoraciones parciales o incorrectas.

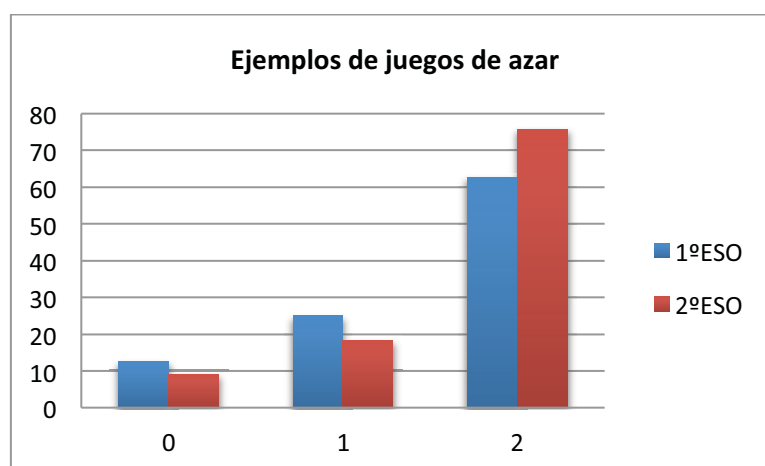


Figura 3.7.2. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 2 por curso

En el ítem 3 cambia la tendencia, como se observa en la Figura 3.7.3, siendo una de las preguntas con mayor número de respuestas incorrectas. En este caso, se ha obtenido la puntuación teniendo en cuenta el número de respuestas correctas pero valorando

negativamente las incorrectas. Aquellos alumnos que han obtenido más de 1 ejemplo correcto se les han valorado con 2 puntos como en el apartado anterior.

El grupo de 1ºESO obtiene unos resultados muy negativos con un 50% de alumnado que responde de forma errónea, aunque en 2º también se tiene un 39,4% de alumnado con 0 puntos. Los ítems que requerían creatividad por parte del alumnado para generar ejemplos han sido los que han tenido peores puntuaciones, lo que nos da la clave para identificar los contenidos que necesitan profundizar desde los cursos iniciales de la ESO.

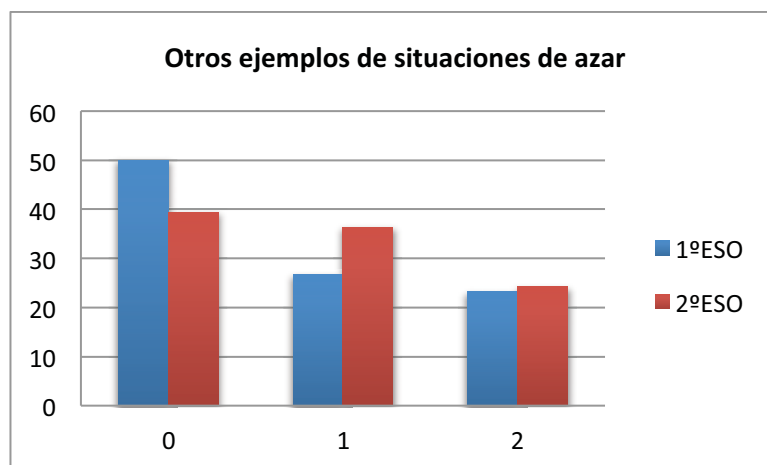


Figura 3.7.3. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 3 por curso

Para el ítem 4 hemos ponderado de 0 a 2 puntos según el número de respuestas correctas a los distintos apartados (6 en total), viendo que todos responden al menos la mitad. En general, los puntos obtenidos por los alumnos de 2º ESO han sido más altos que los de 1º ESO, véase Figura 3.7.4. En 1º ESO encontramos alumnos que han obtenido puntuación cercana a 0 y es indicativo de no saber diferenciar fenómenos aleatorios de deterministas.

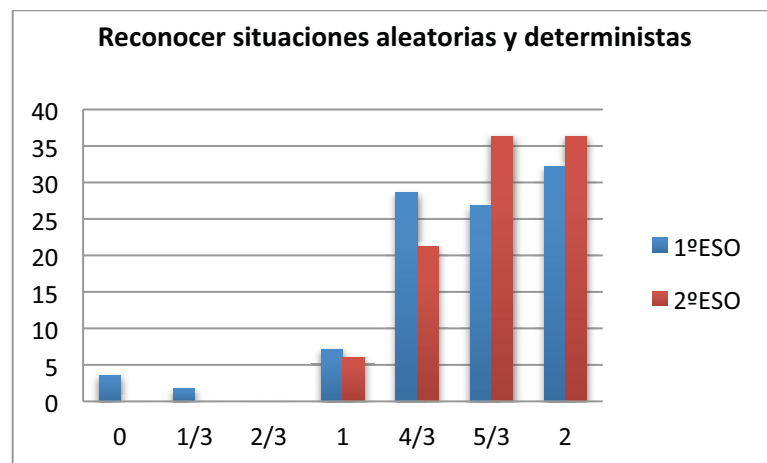


Figura 3.7.4. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 4 por curso

Para el siguiente ítem, encontramos otra variación en los resultados a negativo. Los alumnos de 1ºESO son los que más respuestas resuelven positivamente, pero hay más de la mitad del alumnado que obtiene 0 puntos en ambos cursos, siguiendo la tendencia del ítem 3 que también requería de invención por parte del alumnado. En la Figura 3.7.5 podemos ver como se obtienen en 2ºESO más respuestas incorrectas que correctas, resultados que no mejoran al tratarse de alumnos mayores.

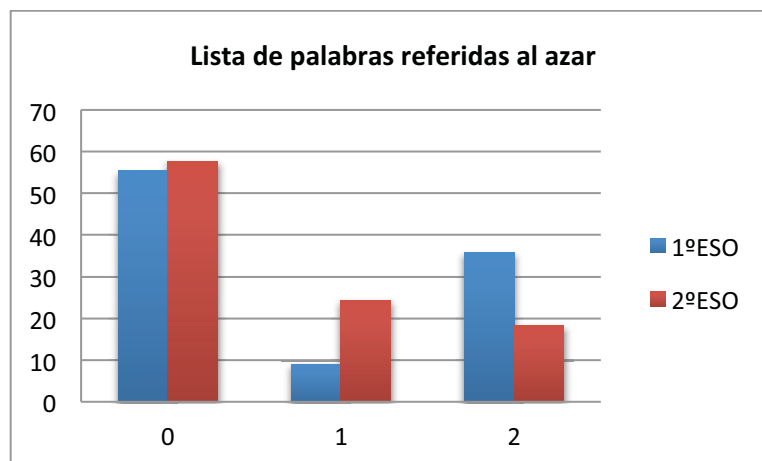


Figura 3.7.5. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 5 por curso

En el ítem 6 reflejado en la Figura 3.7.6 encontramos puntuaciones que varían desde los 0 puntos hasta los 2 valorando los 7 apartados que forman parte del ítem, dependiendo del número de palabras o frases sinónimas introducidas. Ya vimos la dificultad de este apartado en el alumnado, que contrastando los dos grupos se refleja de mayor forma. 1ºESO obtiene muy malos resultados con un 37,5% de alumnos con puntuación 0, pero también cuenta con algunos alumnos que se desmarcan del resto y obtienen resultados superiores al 1,4. En 2ºESO los resultados son mejores, pero también centrados en la primera mitad de la gráfica con puntuaciones de 0 a 8/7.

El siguiente ítem, que representamos en la Figura 3.7.8, contaba con 6 apartados a indicar si eran sinónimos de “50% de probabilidad”. El significado de esta frase ha sido comprendido en mayor medida por los alumnos mayores, obteniendo el 60,6% de ellos una puntuación de 1,6, es decir, a falta de un apartado correcto para la máxima puntuación. En 1ºESO algunos alumnos aún encuentran dificultades para entender las frases mostradas y presentan puntuaciones de 0. La mayoría del alumnado de 1º obtiene al menos tres apartados bien con una puntuación de 1 punto o más.

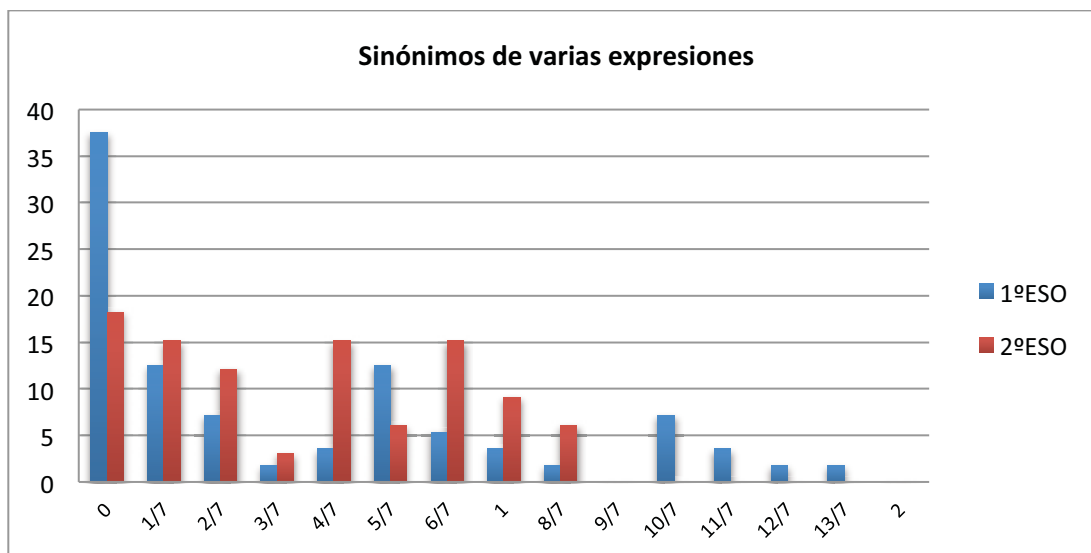


Figura 3.7.6. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 6 por curso

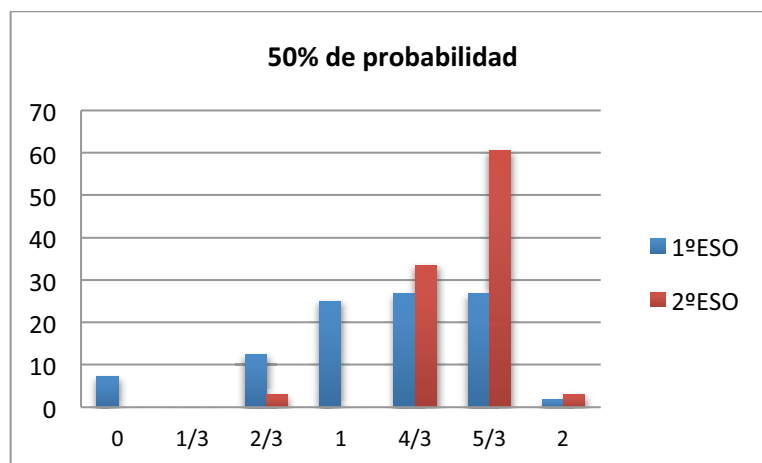


Figura 3.7.8. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 7 por curso

El último apartado ha sido valorado de 0-2 según el número de respuestas correctas obtenidas en sus predicciones. Como podemos ver en la Figura 3.7.9 el mayor porcentaje de alumnos de ambos cursos obtiene una puntuación positiva similar, y la única variación entre ambas es que ningún alumno de 2º ha obtenido 0 puntos, mientras que en 1º sí.

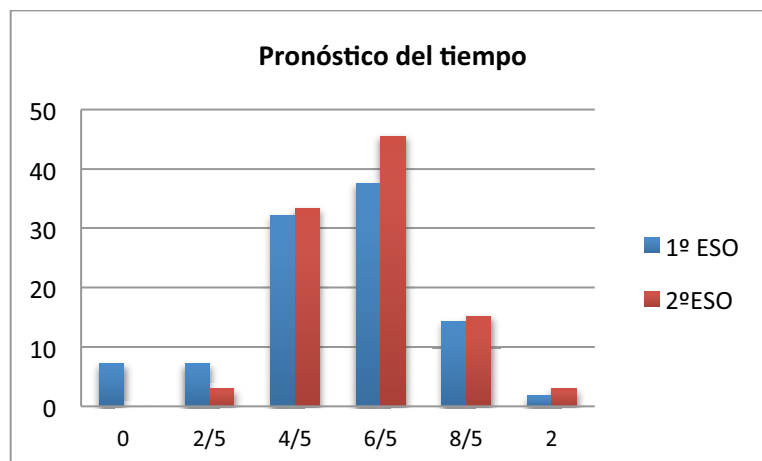


Figura 3.7.9. Porcentaje de alumnos según puntuación en el ítem 8 por curso

3.7.2. PUNTUACIÓN TOTAL

Para evaluar el cuestionario en su totalidad, hemos optado por sumar las valoraciones de cada apartado (0-2 puntos, en función de la completitud de la respuesta) para obtener un total de 16 puntos en el cuestionario.

Los resultados del total de los alumnos se muestran en la Figura 3.7.10, donde podemos observar el número de alumnos que ha obtenido cada rango de puntuación y vemos que, en general, los resultados son buenos, pues la media teórica sería de 7 puntos. Un 30,3% obtiene una puntuación de 10-12 y el 27% de 8-10, por lo que más de la mitad del alumnado ha superado el test satisfactoriamente. Sin embargo, un 29,2% obtiene un resultado inferior a 8 puntos, un porcentaje muy alto todavía que nos hace ver que hay muchas carencias en el alumnado en este bloque de contenidos matemáticos.

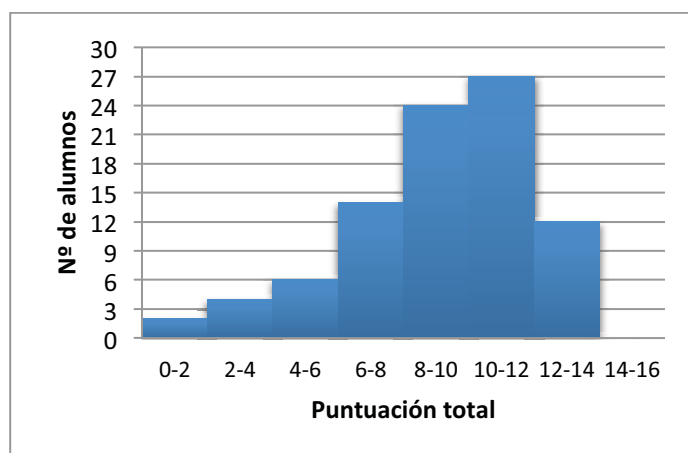


Figura 3.7.10. Histograma con la puntuación total del alumnado

Para hacernos una idea de la distribución de los resultados, en la Tabla 3.7.1. podemos observar los estadísticos más importantes. El alumnado ha obtenido una puntuación media de 9,1, siendo mejor en 2º ESO que en 1º ESO como veremos más adelante. El valor de la media, mediana y moda son muy cercanos, lo que nos indica que el alumnado ha obtenido unos resultados bastante cercanos sin muchos datos discordantes o alejados. Asimismo, la desviación típica es de 2,8, lo que indica que los resultados han seguido una distribución poco dispersa.

Tabla 3.7.1. *Estadísticos de la puntuación total de ambos cursos*

Media	9,1
Mediana	9,7
Moda	9,9
Desviación típica	2,8

En la Figura 3.7.11 se muestran el diagrama de caja de los resultados totales, y, como se puede observar, la rama o bigote inferior es mucho más larga que la superior, lo que indica que los alumnos con mayor puntuación se encuentran más concentrados que los de menor puntuación como veíamos en el histograma.

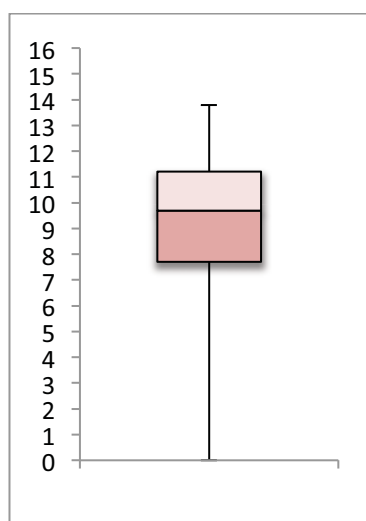


Figura 3.7.11. Diagrama de caja de la distribución

Los límites inferior y superior se encuentran en los cuartiles Q1 (7,7) y Q3 (11,2), estando entre ellos el 50% del alumnado. El 25% del alumnado obtiene una puntuación por debajo del límite inferior y el 25% obtiene una puntuación por encima del límite superior.

Puntuación total en cada curso

Como resumen de los resultados entre ambos cursos, hemos obtenido los estadísticos mostrados en la Tabla 3.7.2. La media de puntuación de 1ºESO es inferior a 2º ESO como era de esperar tras los resultados mostrados anteriormente, pero también se encuentra una desviación típica de 3,3, comprensible al obtener puntuaciones en algunos apartados bastante distantes entre 0 y 2. Encontramos por tanto en 1ºESO alumnos que tienen problemas para comprender la fenomenología del azar y para utilizar el lenguaje probabilístico y otros que no muestran tantas dificultades. En 2º ESO los resultados son ligeramente mejores y muestran además una desviación típica menor. Algunos alumnos de 2ºESO han trabajado contenidos probabilísticos y se ha podido comprobar en los resultados positivos de este curso.

Tabla 3.7.2. Estadísticos comparativos entre 1º y 2º ESO

	1ºESO	2ºESO
Media	8,8	9,6
Mediana	9,3	9,9
Moda	9,3	10,6
Desviación típica	3,3	1,8

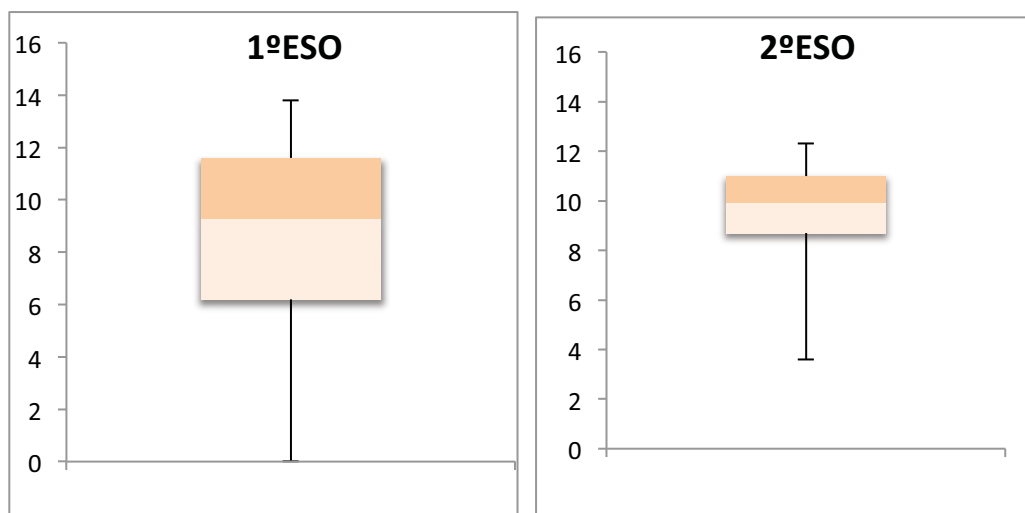


Figura 3.7. 13. Diagramas de caja de los resultados de 1º y 2º ESO

Los diagramas de cajas de la Figura 3.7.13 muestran claramente la diferencia entre ambos cursos. Cuando el diagrama de 1ºESO muestra una distribución más dispersa y con datos más aislados en 2ºESO se encuentran los datos mucho más compactos y

cercanos, no encontrándose alumnos con 0 puntos y concentrándose el 50% de los resultados entre las puntuaciones de 8,7 y 11(las de 1º entre 6 y 11).

Comparación dentro de cada grupo del mismo curso

Para finalizar, comparamos dentro de cada curso los resultados por grupos, dividiendo la puntuación total en cuatro intervalos. Podemos observar los resultados obtenidos en total entre los 3 grupos de 1ºESO y los dos grupos de 2ºESO en las Figuras 3.7.14. y 3.7.15.

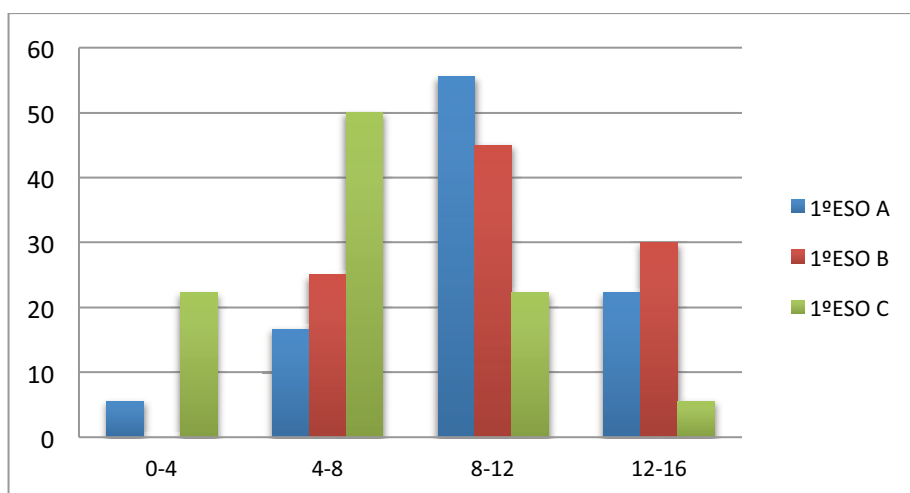


Figura 3.7.14. Porcentaje de alumnos según puntuación en cada grupo de 1ºESO

El grupo de 1ºESO C obtiene unos resultados peores que los otros dos cursos con una proporción de alumnos con menos de 8 puntos que supera el 70%. Esto se contrarresta en los resultados generales con los obtenidos por 1º ESO A que, aun siendo variable, muestra un 77% de resultados superiores a 8 puntos. El grupo de 1ºESO B también obtiene unos resultados satisfactorios superando el 75% del alumnado los 8 puntos.

En 2ºESO se obtienen unos resultados similares en los dos grupos participantes con más de un 80% de puntuaciones entre 8-12 en ambos cursos, con pequeñas diferencias en el resto de resultados. Los de 2º ESO B obtienen puntuaciones más altas en un pequeño porcentaje, mientras que los del grupo A tienen la tendencia a puntuaciones bajas.

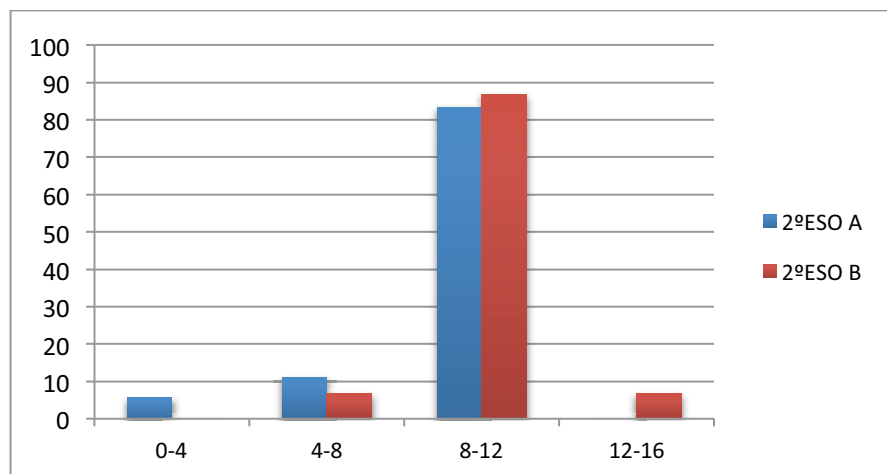


Figura 3.7.15. Porcentaje de alumnos con cada puntuación en cada grupo de 2ºESO

En definitiva, mientras los resultados en 1ºESO son variables, pues, como hemos dicho, los alumnos tienen diferente procedencia; estos resultados se igualan y mejoran en 2ºESO. Esto muestra que la enseñanza recibida en probabilidad, incluso aunque pocas sesiones ha influido en los conocimientos del alumnado.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

Para finalizar este documento, en este capítulo queremos resumir las principales conclusiones obtenidas, respecto a los objetivos planteados en el primer capítulo y respecto a las implicaciones del trabajo para la didáctica de la probabilidad y la formación de profesores. Finalmente reflexionamos sobre las limitaciones observadas en su desarrollo y a partir de ellas hacemos sugerencias para continuar esta investigación.

4.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

Como se expuso en el primer capítulo, este trabajo pretendía lograr dos objetivos principales que fueron los siguientes:

- 1. Desarrollar un cuestionario sencillo que permite evaluar la comprensión de la fenomenología y el lenguaje del azar y la probabilidad de los alumnos de primero y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria.*
- 2. Realizar un estudio exploratorio, con una muestra de alumnos de 1º y 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria, utilizando este cuestionario, que nos permita evaluar si los alumnos cuentan con un vocabulario y comprensión de algunas expresiones numéricas de la probabilidad suficiente para cursar los contenidos previstos en los primeros años de Educación Secundaria Obligatoria.*

Para completar el primer objetivo se partió del análisis del currículo de probabilidad en la Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria, que se resume en el Capítulo 1. Además presentamos un análisis elemental del contenido y un resumen de las investigaciones previas. Todo ello nos sirvió para elegir y adaptar algunos ítems que sirviesen para evaluar tanto la fenomenología como el lenguaje de la probabilidad en los alumnos de la muestra. El cuestionario ha resultado rico por la información proporcionada y sencillo de comprender y completar por los alumnos. Por ello pensamos que se ha alcanzado el primer objetivo.

Además, se ha llevado a cabo un estudio de evaluación con una muestra de tamaño razonable de alumnos de 1º y 2º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En el

Capítulo 3 describimos los resultados de este estudio que permite evaluar los conocimientos presentes en el alumnado participante sobre la fenomenología del azar y el lenguaje de la probabilidad, así como las carencias que éstos tienen principalmente en lo que a lenguaje probabilístico se refiere.

En general los resultados han sido buenos, mostrando los alumnos conocimiento de la fenomenología del azar, más allá de los juegos y haciendo uso de un lenguaje variado y bien aplicado. También se muestra el avance entre 1º y 2º curso, incluso en chicos que en 1º curso tuvieron peores resultados, lo que explicamos por la enseñanza recibida.

Las principales carencias en el alumnado que hemos podido constatar a través del cuestionario han sido:

- Errores en la distinción de fenómenos aleatorios y deterministas y ciertas dificultades para ofrecer ejemplos fuera de los juegos de azar. Pensamos que es necesario ofrecer en el aula una fenomenología más rica que permita al alumno valorar las aplicaciones de esta rama de las matemáticas.
- Carencia de vocabulario relativo al azar y dificultad en la búsqueda de sinónimos de expresiones relacionadas con la probabilidad a distintos niveles.
- Dificultades para proceder a valorar la probabilidad de diversas situaciones cotidianas con una especial confusión entre los términos “imposible” e “improbable” que tratan como sinónimos. Esta misma dificultad surgió en la investigación e Cañizares (1997).

4.2. IMPLICACIONES PARA LA DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

Los resultados citados nos dan pautas para mejorar la enseñanza de la probabilidad. Como ya hemos sugerido, será en primer lugar importante ofrecer a los alumnos ejemplos de fenómenos aleatorios en contextos más variados; por ejemplo, elecciones y votaciones, accidentes y riesgos, meteorología, coincidencias, etc. De este modo podrán valorar mejor la probabilidad como una parte de las matemáticas con múltiples aplicaciones.

Es importante reforzar su vocabulario del azar, aunque pensamos que la carencia de vocabulario puede no ser específica de este tema y sería importante mejorar en general la expresión verbal de los alumnos.

Las nuevas tecnologías presentes en el día a día de nuestros alumnos también van a modificar la forma que tienen de aprender nuevo vocabulario y contenidos sobre el azar

a través de los juegos y las aplicaciones móviles. Si hemos encontrado alumnos que ya aportan palabras relacionadas con la aleatoriedad por su aparición en algunos juegos, en el futuro seguro que este vocabulario se verá incrementado debido al mayor uso de los dispositivos móviles en el alumnado de estas edades. Será importante aprovechar en el aula la potencialidad de estos recursos para conseguir los fines educativos.

Es importante incidir también en la importancia de la labor del profesorado de matemáticas en la enseñanza de los contenidos del bloque de Probabilidad. Como hemos visto en los resultados, el alumnado de 2ºESO, y principalmente del grupo B, que había trabajado contenidos de probabilidad en el curso anterior, obtienen en general buenos resultados.

Para ello, los departamentos de Didáctica de la Matemática debieran ofrecer a los futuros profesores una buena formación en probabilidad y su didáctica.

Gracias a la realización del cuestionario y el análisis de sus resultados, hemos podido obtener información que nos puede llevar a mejorar la práctica docente. En este sentido, pensamos difundir con algunas publicaciones los resultados de nuestro trabajo, con el fin de dar a conocer entre el colectivo de profesores la problemática planteada.

4.3. LIMITACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS PARA PRÓXIMAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Como todo trabajo de investigación, es claro que existen limitaciones. Una de ellas es la muestra utilizada que, aunque amplia, está formada por alumnos de un mismo centro de enseñanza. No es posible entonces saber si se pueden generalizar los resultados a otros estudiantes. Una primera posibilidad de continuar el trabajo sería ampliar la muestra con alumnos de otros centros y analizar si se replican o no los resultados.

Pensamos también que es posible mejorar el cuestionario, pues hemos observado que en algunas preguntas es necesario una mayor explicación por parte del alumno para evaluar más claramente su comprensión del tema. Por otro lado, aun habiendo insistido en que debían escribir todo lo que quisieran, muchos han optado por ser escuetos en sus respuestas, quizás por la carencia de competencia verbal ya citada. Para poder resolverlo, sería recomendable añadir alguna sesión posterior a la realización del cuestionario en forma de entrevista con el alumnado para resolver estas dudas y permitir que expliquen oralmente algunas de sus respuestas más escuetas.

Por otro lado, el análisis que hemos realizado de las respuestas podría ampliarse. Nos hemos limitado a un análisis muy elemental, por la limitación de tiempo y espacio para la memoria. Pero nuestros datos permiten continuar comparando el vocabulario de los alumnos entre grupos y cursos y comparando el éxito en distintas preguntas por el mismo alumno.

Actualmente nos encontramos en un proceso de cambio de legislación educativa que indiscutiblemente va a hacer variar los objetivos y el aprendizaje de los futuros alumnos del primer ciclo de la ESO. Por ello sería interesante proceder a realizar otras investigaciones en este campo dentro de unos años para analizar el cambio producido con la nueva ley educativa que pretende mejorar los resultados de aprendizaje del alumnado español.

Asimismo, el interés de nuestro alumnado por las aplicaciones móviles nos sugiere otro medio para proporcionarles enseñanza de forma amena y divertida. Se podrían elaborar aplicaciones de juegos formado por distintas fases, en el que el alumno superará una fase si ha utilizado correctamente el vocabulario probabilístico asociado a los distintos sucesos. Hacer uso de las nuevas tecnologías como recurso para el aprendizaje puede mejorar los resultados académicos y ayudar al profesorado en su labor.

ANEXO I. CUESTIONARIO

PRUEBA DE COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD



Curso: _____ Fecha: ____/____/____

¿Chico o chica? _____ Edad: _____

Lee atentamente las preguntas y responde explicando con detalle tu respuesta.

Te agradecemos tu colaboración.

1. ¿Qué quiere decir que una cosa ocurre al azar? Explícalo con un ejemplo.
2. Pon ejemplos de juegos en que interviene el azar.
3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
4. Indica con una cruz (X) en cuáles de las siguientes situaciones interviene el azar y en cuáles no:

	SI	NO
Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros		
Observar si mañana sale el sol		
Observar si mañana llueve o no		
Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados		
Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra		
Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo		

5. Haz una lista lo más larga posible de palabras que uses para hablar del azar.

6. Escribe dos palabras o frases que signifiquen lo mismo que:

2. Imposible	1.
	2.
3. Posible	1.
	2.
4. Igual posibilidad	1.
	2.
5. Poca posibilidad	1.
	2.
6. Seguro	1.
	2.
7. Inseguro	1.
	2.
8. Imposible	1.
	2.
9. Muy posible	1.
	2.

7. Indica con una cruz (X) aquellas frases que quieren decir lo mismo que “**tiene un cincuenta por ciento de posibilidades**”:

	SI	NO
Puede ocurrir o no		
Tiene tantas posibilidades de éxito como de fracaso		
Sucedirá 50 veces de cada 50		
Puede suceder algunas veces		
Tiene igual posibilidad de ocurrir que de no ocurrir		
Sucede más o menos 5 de cada 10 veces		

8. El profesor ha pedido a Daniel que prepare un pronóstico del tiempo que hará mañana en La Línea de la Concepción ofreciéndole varias opciones:

1. Lloverá todo el día
2. Lloverá solo un rato
3. La temperatura a mediodía será 40 grados o mayor
4. Habrá una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados
5. Mañana nevará en La Línea
6. Lloverá tanto que habrá inundaciones

Completa cada frase según la posibilidad que crees de que ocurra (o usando las frases de la actividad 6). Usa como ejemplo la siguiente: “**Es poco probable** que llueva todo el día”.

- _____ que llueva solo un rato.
- _____ que la temperatura a mediodía sea 40 grados o mayor.
- _____ que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.
- _____ que mañana nieve en La Línea.
- _____ que llueva tanto que haya inundaciones.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. CD ROM.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (Eds.) *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação. Universidade Do Minho.
- Batanero, C. (2015). Understanding randomness. Challenges for research and teaching, Conferencia en el *Ninth Congress of European Research in Mathematics Education, CERME 9*. Praga, Febrero, 2015.
- Batanero, C., y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: P.P.U.
- Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Consejería de Educacion (2015a). Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación Primaria en la comunidad Autónoma de Andalucía. Sevilla; Autor.
- Consejería de Educación (2015b). *Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación Primaria en Andalucía*. Sevilla; Autor.
- Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. *Investigación en Educación Matemática XVII* 238-244
- Duval, R. (1993). *Semiosis et noesis. Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Gómez, E., Ortiz, J. Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35. 75-91.
- Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.
- Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: Presses Universitaires de France.
- Ministerio de Educación y Ciencias, MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.
- Ministerio de Educación y Ciencias, MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 126/2014 de currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2001). Reflexiones sobre el lenguaje probabilístico en los libros de texto de Educación Secundaria. *Jornadas Europeas de Estadísticas*.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.
- Serradó, A., Azcárate, P. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 38, 91-112.
- Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.