

Comprensión de las hipótesis del análisis de varianza por estudiantes de psicología

OSMAR VERA¹, CARMEN DÍAZ², CARMEN BATANERO³

Educação Matematica Pesquisa 18(3), 1365-1388, 2016

Resumen

En este trabajo analizamos la forma en que los estudiantes universitarios establecen las hipótesis el análisis de varianza. Para ello realizamos un análisis semiótico de las respuestas dadas por un grupo de 224 estudiantes de Psicología de la Universidad de Huelva, España en un problema abierto, usando como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Este análisis nos permite identificar los objetos y procesos matemáticos utilizados, y los conflictos semióticos relacionados con los objetos que intervienen en el planteamiento de las hipótesis estadísticas.

Palabras claves: *Análisis de varianza, planteamiento de hipótesis, estudiantes universitarios.*

Resumo

Em este artigo se analisa como os estudantes universitários estabelecem as hipóteses em análise de variância. Realizamos um análise semiótico das respostas dadas por um grupo de 224 estudantes de psicologia da Universidade de Huelva, Espanha, em uma questão em aberto, utilizando como quadro teórico el enfoque ontosemiótico da cognição matemática. Esta análise permite-nos identificar objetos e processos matemáticos utilizados e os conflitos semióticos objetos envolvidos no planejamento de hipóteses estatísticas relacionadas.

Palavras-chave: *Análise de variância, abordagem das hipóteses, estudantes universitários*

Abstract

In this paper we analyse how undergraduate students establish the hypotheses in analysis of variance. We carry out a semiotic analysis of the answers given by 224 psychology students at the University of Huelva, Spain to an open problem, using as theoretical framework the ontosemiotic approach to mathematical cognition. This analysis allows us to identify the mathematical objects and processes used, and the semiotic conflicts related to the objects involved in the setting of statistical hypothesis.

¹ Universidad Nacional de Quilmes, Departamento de Ciencia y Tecnología - overa17@gmail.com

² Universidad de Huelva, España, Departamento de Psicología - carmen.diaz@dpsi.uhu.es

³ Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática - batanero@ugr.es.

Keywords: *Analysis of variance, setting of hypotheses, undergraduate students.*

Introducción

La inferencia estadística tiene un papel destacado en las investigaciones en ciencias humanas, incluyendo educación y psicología. Sin embargo, el uso e interpretación de la estadística en estas investigaciones no son siempre adecuados, como se muestra en diversas revisiones (por ejemplo, en Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Batanero y Díaz, 2006).

Muchas investigaciones describen errores en la comprensión de la inferencia en estudiantes universitarios (ver, por ejemplo, Cañadas, Batanero, Díaz y Roa, 2012; Castro Sotos, Vanhoof, Van den Nororgate y Onghena, 2007; Krauss y Wassner, 2002; Vallecillos, 1994 o Vera, Díaz y Batanero, 2011). Como sugieren Harradine, Batanero y Rossman (2011), mientras la realización de los cálculos asociados con los contraste de hipótesis es hoy día muy sencilla gracias al software estadístico, los estudiantes continúan teniendo dificultades en la comprensión de los conceptos asociados.

Uno de estos conceptos es el de hipótesis nula y su diferencia con la hipótesis alternativa. El correcto planteamiento de las hipótesis es esencial para realizar un contraste, pues un fallo en su planteamiento puede derivar en la elección de un contraste inadecuado, o error en el cálculo de las regiones críticas y de aceptación y, finalmente, en una decisión errónea sobre el rechazo o no rechazo de la hipótesis nula (Vera, Díaz y Batanero, 2011).

En este trabajo realizamos un estudio cualitativo de la forma en que un grupo de 224 estudiantes de psicología españoles, que han estudiado el tema plantean las hipótesis en un problema de análisis de varianza elemental. Apoyándonos en nociones teóricas del enfoque onto-semiótico (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007), realizamos un análisis semiótico de las respuestas abiertas en dicha tarea, identificando las categorías más frecuentes de respuestas erróneas e identificamos diferentes conflictos semióticos que influyen en el correcto planteamiento de las hipótesis de un contraste para el análisis de varianza. Con ello completamos las escasas investigaciones previas sobre comprensión del análisis de varianza, y proporcionamos información de ayuda al profesor para planificar la enseñanza del tema.

A continuación presentamos los fundamentos del trabajo, el método, resultados y

discusión. Se finaliza con unas sugerencias para la mejora de la enseñanza del análisis de varianza.

Fundamentos del trabajo

Comprensión del análisis de varianza

Entre los pocos estudios relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del análisis de varianza, podemos citar el de Rubin y Rosebery (1990), quienes implementaron una enseñanza experimental con estudiantes universitarios, con objeto de estudiar las dificultades en la interpretación de algunas ideas básicas que también afectan la comprensión del diseño experimental. Los autores sugieren que los estudiantes no distinguen fácilmente la diferencia entre variables dependientes, independientes y extrañas; además de no comprender el rol de la aleatorización.

El concepto de interacción adquiere cierta importancia en el análisis de varianza multifactorial, puesto que la interpretación incorrecta de la interacción de un factor en los diferentes niveles de otro conduce a conclusiones erróneas. Rosnow y Rosenthal (1991) señalaron que la interacción es el concepto peor comprendido en el campo de la Psicología; además, Green (2007) observa las dificultades de los estudiantes universitarios en su interpretación. Por otro lado, varios de los autores que han analizado la interpretación que se realiza de la interacción en artículos publicados en prestigiosas revistas de investigación, han encontrado un alto porcentaje de errores relativos a la interpretación. Por ejemplo, Zukerman, Hodgins, Zuckerman y Rosenthal (1993) establecen que aproximadamente un tercio de los artículos tienen errores en la interpretación realizada, mientras que Pardo, Garrido, Ruiz y San Martín (2007) señalan que el porcentaje asciende aproximadamente al 75%.

En un trabajo previo (Vera, Díaz, Batanero y López-Martín, 2016) presentamos un estudio de evaluación de las dificultades de comprensión de algunas componentes del análisis de varianza. Utilizamos las respuestas a un cuestionario formado por ítems de opción múltiple de una muestra de estudiantes de psicología, después de finalizar un curso de análisis de datos. Analizamos la selección de un modelo de análisis de varianza, la comprensión de los supuestos de aplicación y del modelo lineal asociado, los cálculos necesarios para completar una tabla de análisis de varianza y la interpretación del análisis. El presente trabajo completa el anterior, al analizar respuestas a un problema abierto y centrarse en la forma en que los estudiantes plantean

las hipótesis del análisis de varianza, punto no tratado en la investigación previa.

Comprensión de las hipótesis en un contraste estadístico

El error más frecuente en la interpretación de las hipótesis estadísticas es confundirla con la hipótesis de investigación (Chow, 1996). La diferencia es clara pues, mientras que la hipótesis de investigación suele ser amplia y referirse a un rasgo inobservable (por ejemplo, que el rendimiento de los estudiantes es diferente en dos grupos), la hipótesis estadística, hace referencia a un parámetro de una distribución de probabilidad en una población de sujetos. Sin embargo muchos investigadores extrapolan un resultado significativo directamente a la hipótesis de investigación (Batanero, 2000). En el ejemplo, si se rechaza que la puntuación media de los dos grupos de estudiantes en la prueba de rendimiento es igual, se sobreentiende que el rendimiento de uno de los grupos es mayor que el del otro. Esto no es cierto, en general, puesto que la prueba podría favorecer a uno de los grupos y si se utiliza otra prueba diferente los resultados podrían variar.

Los estudiantes también confunden las hipótesis nula y alternativa (Vallecillos, 1994). La hipótesis nula o de no efecto se plantea para ser rechazada, mientras que la alternativa sería la negación de la anterior (Batanero, 2000). En el ejemplo, la hipótesis alternativa sería que la media de la distribución de puntuaciones en una prueba de rendimiento de uno de los grupos es diferente y la hipótesis nula que la puntuación media obtenida en la prueba de rendimiento de los dos grupos es la misma. La hipótesis nula se supone cierta y la distribución muestral del estadístico de contraste se determina con este supuesto. Estas diferencias no las comprenden los estudiantes, como se observó en el trabajo de Vallecillos (1994), quien encontró un 13% aproximadamente de 436 estudiantes que confundieron la hipótesis nula con la alternativa al plantear las hipótesis en problemas de contraste de hipótesis sencillos. Otro 20% de estudiantes en esta investigación no discriminaron si la hipótesis del contraste se refiere al parámetro de la población o bien al estadístico muestral y plantearon sus hipótesis usando los estadísticos muestrales. Mientras que el parámetro de la población (por ejemplo la media de una distribución normal) es un valor constante y desconocido, el correspondiente estadístico (en el ejemplo la media de una muestra tomada de dicha población) es conocido (pues obtenida la muestra, se puede calcular) pero variable (ya que diferentes medias tomadas de la misma población pueden dar lugar a valores

ligeramente distintos de las medias muestrales).

Vallecillos en su trabajo planteó un problema abierto a los estudiantes, encontrando que sólo el 26% de los participantes planteó correctamente las hipótesis. Por otro lado, entrevistó a 7 estudiantes considerados brillantes por sus profesores, indicando que todos ellos concebían el concepto de hipótesis como una afirmación sujeta a confirmación. Comprendían que las hipótesis nula y alternativa son complementarias pero tienen diferente papel en el contraste. Finalmente, aunque todos admitieron en la entrevista que la hipótesis se debe referir a un parámetro, algunos de ellos plantearon la hipótesis en función del estadístico muestral. Errores similares se describen asimismo en las investigaciones de Cañadas, Batanero, Díaz y Roa (2012), Castro Sotos *et al.* (2007) y en Vallecillos y Batanero (1997).

Interesados por estos resultados y por el hecho de que la comprensión y correcto planteamiento de las hipótesis en un contraste es un requisito necesario para finalizar e interpretar correctamente todo el procedimiento, el objetivo de este trabajo es ahondar un poco más en la comprensión de este tema por parte de los estudiantes. Más concretamente, y utilizando el marco teórico que se describe a continuación, queremos analizar con mayor profundidad los posibles planteamientos incorrectos de las hipótesis en un problema de contraste elemental para análisis de varianza.

En un trabajo previo (Vera, Díaz y Batanero, 2011) analizamos la formulación de hipótesis estadísticas en un contraste sobre la media de una población por estudiantes de psicología, apoyado en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, con la finalidad de identificar los conflictos semióticos relacionados con los objetos que intervienen en el planteamiento de las hipótesis estadísticas. Entre los conflictos identificados los más frecuentes fueron la confusión entre el contraste unilateral y bilateral, no reconocer que la hipótesis nula es puntual, definir hipótesis que no cubren el espacio paramétrico y usar el estadístico muestral en vez del parámetro poblacional para definir las hipótesis. En este trabajo tratamos de confirmar si aparecen los mismos o diferentes conflictos, cuando se plantean las hipótesis en un problema de análisis de la varianza.

Marco Teórico

En este trabajo nos basamos en ideas teóricas propuestas en el enfoque ontosemiótico

(Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) que concibe el significado de los objetos matemáticos o estadísticos (por ejemplo, los conceptos de hipótesis nula y alternativa) como un sistema complejo, formado por los siguientes tipos de objetos matemáticos:

- Situaciones-problemas, de donde surge el objeto: El concepto de hipótesis estadística surgirá de problemas de comparación de los parámetros de dos o más poblaciones.
- Lenguaje: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se usan en el trabajo matemático (por ejemplo los símbolos usados para denotar los parámetros μ , σ , o los usados para hipótesis nula H_0 y alternativa H_1)
- Conceptos: por ejemplo, población y muestra, estadístico y parámetro, región crítica y de aceptación, factor, niveles del factor, interacción.
- Propiedades: por ejemplo, que las hipótesis nula y alternativa son complementarias o que las hipótesis se formulan en función del parámetro asociado a alguna distribución.
- Procedimientos; como los requeridos para construir las regiones críticas y de aceptación.
- Argumentos y razonamientos: usados para justificar o explicar a otra persona las proposiciones y procedimientos.

Para un objeto matemático (en este caso la hipótesis estadística) en este marco teórico se distingue entre significado institucional y personal. El significado institucional incluye las prácticas matemáticas que se comparten en una institución, mientras que el significado personal estaría formado por las prácticas personales de un sujeto, alguna de las cuáles podrían no coincidir con las pretendidas en la institución.

Godino (2002) señala que, en las prácticas matemáticas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas); los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados). Estas representaciones tienen mucha importancia para facilitar la enseñanza y el aprendizaje, pero a veces causan dificultades en los estudiantes. Godino, Batanero y Font (2007) toman de Eco (1995) la noción de función semiótica como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);

- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia (esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido).

Esta idea de función semiótica sirve para explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes. Siguiendo este sentido Godino, Batanero y Font (2007) denominan *conflicto semiótico* a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las que el profesor trata de transmitir. Los autores indican que estos conflictos semióticos producen errores en los estudiantes, que no son debidos a falta de conocimiento, sino a una interpretación incorrecta de expresiones matemáticas.

En este trabajo utilizaremos el método de análisis semiótico propuesto por estos autores, para analizar las respuestas incorrectas de los estudiantes de psicología en el planteamiento de hipótesis en análisis de varianza. El análisis semiótico consiste en la identificación de los conflictos semióticos en las prácticas matemáticas de los estudiantes al tratar de plantear las hipótesis, así como de los objetos y procesos matemáticos implicados. Como resultado se identificarán algunos conflictos semióticos de estos estudiantes, que se producen al realizar una interpretación inadecuada desde el punto de vista institucional de una expresión matemática.

Método

La muestra estuvo formada por 224 estudiantes de segundo año de Psicología de la Universidad de Huelva (con edades de 19 y 20 años). Los datos fueron recogidos como parte de una evaluación en una asignatura de análisis de datos que cursaron el segundo año, en la que estudiaron muestreo, estimación de intervalos de confianza, contraste de hipótesis sobre medias y proporciones, y análisis de varianza. Los estudiantes habían cursado el primer año estadística descriptiva y probabilidad.

Con la finalidad de evaluar la comprensión del estudiante de los conceptos de hipótesis nula y alternativa y su competencia para identificar las hipótesis adecuadas en el análisis de varianza, se les propuso la tarea que se presenta en la Figura 1, que los estudiantes respondieron por escrito e individualmente.

Figura 1 - Problema planteado a los estudiantes

Problema. Se ha llevado a cabo una investigación para estudiar si ciertas técnicas tienen efecto sobre la ansiedad precompetitiva en atletas. Para ello se seleccionaron 5 atletas con alta ansiedad y les enseñaron estas técnicas. Se tomaron tres medidas de ansiedad: A1: antes de la enseñanza; A2: durante la enseñanza; A3: después de la enseñanza. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla que sigue.	Sujeto	A1	A2	A3
	1	8	7	5
	2	7	7	5
	3	7	6	4
	4	6	5	3
	5	9	7	4
Define las hipótesis estadísticas que se someten a contraste.				

En este problema se recogen medidas de ansiedad de cinco atletas para tres momentos distintos: antes, durante y después de la aplicación de ciertas técnicas, y se desea saber el efecto de este factor con tres niveles (momento en que se realiza la medición) sobre las respuestas. Puesto que la hipótesis nula en un contraste de hipótesis es siempre la hipótesis de no efecto, en este problema la hipótesis nula debe indicar que la respuesta media para los tres momentos de los sujetos no varía, y por tanto, las técnicas de reducción del estrés no producen efecto sobre la ansiedad. Una posible notación simbólica para expresar esta hipótesis sería la siguiente:

$$H_0: \mu_{antes} = \mu_{durante} = \mu_{despues}$$

La hipótesis alternativa es la que le interesa al investigador poner a prueba, en este caso, que las técnicas tienen un efecto sobre la ansiedad, o lo que es lo mismo, si se produce una diferencia en la ansiedad media en algún momento de la medición. Puesto que la hipótesis alternativa es el complemento de la nula, se debe expresar en forma general, sin indicar cuál de las tres medias es diferente de las otras. Una posible forma de hacerlo sería la siguiente:

$$H_1 \equiv \text{al menos una de las medias de la ansiedad en las tres medidas es diferente de las otras dos.}$$

Resultados y discusión

Recogidos los datos, se llevó a cabo un análisis cualitativo en que, mediante un proceso cíclico e inductivo se compararon las respuestas semejantes entre sí, para llegar a una categorización. El proceso se repitió varias veces, y fue revisado independientemente por los autores del trabajo, con ayuda de compañeros del grupo de investigación, discutiendo los casos de desacuerdo para mejorar la fiabilidad del proceso.

En primer lugar se clasificaron las respuestas como correctas, parcialmente correctas e incorrectas; estas últimas se clasificaron en seis categorías distintas, teniendo en cuenta los estudiantes que consideraron solo una ó dos poblaciones, los que no consideran el momento en que se mide la ansiedad, o si se establecen las hipótesis en función de los estadísticos muestrales.

En lo que sigue presentamos estas categorías, mostrando y comentando un ejemplo en cada una de ellas. Para las respuestas correctas e incorrectas, se muestra con detalle el análisis semiótico. Como se ha indicado, en dicho análisis semiótico se reconstruye el proceso de razonamiento matemático que ha seguido el estudiante para dar la respuesta, detallando las principales funciones semióticas establecidas por el estudiante, como parte de dicho proceso y resaltando cuáles de dichas funciones semióticas son incorrectas (desde el punto de vista institucional), poniendo de manifiesto un conflicto semiótico del estudiante. Finalmente presentamos y discutimos los resultados.

C. Respuesta correcta: En esta categoría el estudiante logra definir correctamente tanto la hipótesis nula, referida a la igualdad entre las medias poblacionales, como la alternativa, que debe indicar que hay diferencia en alguna de las medias. Usa también la notación aceptada al respecto. En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de esta categoría, desarrollado por uno de los estudiantes y se detalla un análisis semiótico.

Como observamos en el análisis semiótico, el estudiante ha de poner en relación diferentes conceptos, propiedades y procedimientos (población, muestra, estadístico, parámetro, hipótesis nula y alternativa) y aplicarlos al contexto del problema, teniendo en cuenta la lógica del contraste de hipótesis (razonamiento). Debe realizar procesos de interpretación del enunciado y de los datos, reconocimiento de conceptos y sus propiedades y particularización a la situación descrita en el enunciado. Ha de discriminar el papel de la hipótesis nula y alternativa y comprender que son complementarias entre sí. Ha de comprender que la hipótesis nula plantea la igualdad entre las medias poblacionales, pues es la hipótesis de no efecto al medir el nivel de ansiedad en tres momentos diferentes; mientras que en la alternativa se plantea que al menos un par de ellas sean distintas, pues es la hipótesis que interesa al investigador. La hipótesis nula se plantea para ser rechazada, ya que expresamos en ella lo contrario de lo que esperamos mostrar (Batanero, 2000).

Tabla 1. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría C

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante lee el enunciado (proceso de interpretación) e identifica correctamente los parámetros para contrastar, que son la medias de las tres variables (particularización de concepto y procedimiento). - Identifica el problema como un contraste de hipótesis de diferencias entre tres medias en muestras relacionada, es decir de análisis de varianza de medidas repetidas (reconoce el tipo de problema y las prácticas matemáticas involucradas en su resolución). - Identifica correctamente que son tres momentos distintos para comparar entre si las medias poblacionales; es decir los tres niveles del factor tiempo de medición (particularización de un concepto).
$H_1 \equiv$ al menos una μ_i es diferente	<ul style="list-style-type: none"> - Plantea una hipótesis nula y alternativa adecuadas al problema (conceptos y procedimiento). - Discrimina entre hipótesis nula y alternativa y las expresa en notación adecuada (particularización de conceptos y representación); toma como hipótesis alternativa la que el investigador quiere probar y como la nula la contraria (propiedades); por tanto sigue la lógica del contraste (razonamiento). - Traduce la expresión “antes, durante y después” a notación matemática (interpretación y cambio de representación), usa la idea de igualdad (concepto) al establecer la hipótesis nula y la de desigualdad (concepto) al establecer la alternativa. - Reconoce que la hipótesis nula y alternativa son complementarias; por ello plantea la hipótesis alternativa excluyendo el valor de la hipótesis nula (propiedades y procedimientos).

PC. Respuesta parcialmente correcta: El estudiante comete algunos errores menores, como en el ejemplo que mostramos en la Figura 2, que no analizamos pues el proceso seguido es muy similar al mostrado en la Tabla 1. Por un lado, la simbología no es adecuada; pues al usar letra *A* con respectivo subíndice no queda claro si el estudiante comprende que se realiza un contraste sobre la ansiedad media (parámetro) y no sobre el valor particular de la ansiedad para uno de los atletas (dato). Por otro lado, la forma en que plantea la hipótesis alternativa es incorrecta, puesto que no es complementaria con la hipótesis nula. Para que lo fuese es suficiente con que dos de las medias de las poblaciones sean diferentes; no se requiere que todas ellas lo sean.

En resumen, el estudiante identifica correctamente que la hipótesis nula se refiere a la igualdad (pero muestra un conflicto al no identificar claramente los parámetros que se deben contrastar). Traduce el enunciado y reconoce que se trata de realizar tres comparaciones; además discrimina la hipótesis nula y alternativa, pero no las establece de forma que sean complementarias.

Figura 2 - Ejemplo de respuesta parcialmente correcta

$$H_0: A_1 = A_2 = A_3$$

$$H_1: A_1 \neq A_2 \neq A_3$$

Respuestas incorrectas

Seguidamente se describen las respuestas incorrectas, que se han clasificado en seis categorías.

11. *Confunde las hipótesis en análisis de varianza con las correspondientes a un contraste de diferencia de medias en muestras relacionadas.* Estos estudiantes han considerado para el análisis sólo dos mediciones de la ansiedad; en concreto antes y después de aplicar el tratamiento, en lugar de comparar las tres mediciones que se indican en el enunciado y que se debieran especificar en las hipótesis. Hay, por tanto, una confusión en el campo de problemas que se debe utilizar en el problema, planteando hipótesis que serían adecuadas para un contraste de diferencia de dos medias pero no para el análisis de varianza.

Tabla 3. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría 11

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv \mu_{antes} > \mu_{después}$ $H_1 \equiv \mu_{antes} \leq \mu_{después}$	<ul style="list-style-type: none">- El estudiante lee el enunciado (proceso de interpretación), pero realiza una interpretación incorrecta. Aparece un <i>conflicto</i>, pues asume que únicamente existen dos poblaciones para comparar (ansiedad antes y después de aplicar el tratamiento). Por tanto falla en reconocer el campo de problemas y lo confunde con el correspondiente a una comparación de dos medias.- Para el problema asumido (comparación de dos medias), discrimina la hipótesis nula y alternativa y las expresa en notación adecuada usando el parámetro poblacional (particularización de concepto y expresión). Las hipótesis son complementarias y cubren el espacio paramétrico (propiedad).- Aunque la hipótesis nula debe ser puntual (propiedad) no la considera: aparece un conflicto al interpretar la expresión “tienen efecto sobre la ansiedad” como aumento o disminución, es decir, cambio en un único sentido (campo de problemas).- Plantea hipótesis correspondiente a un contraste unilateral <i>conflicto</i> (confunde el contraste unilateral y bilateral).- Otro <i>conflicto</i> es intercambiar las hipótesis nula y alternativa, pues se pone como hipótesis nula la que se quiere probar.

En la Tabla 3 se detalla un análisis semiótico, describiendo un ejemplo de esta respuesta. A pesar de este conflicto, estos estudiantes usan simbología adecuada, y el parámetro elegido de comparación (la media poblacional) es correcto. Observamos en la misma varios conflictos adicionales: por un lado interpretar como crecimiento o decrecimiento la expresión “tiene efecto sobre la ansiedad”, por lo que se plantean las hipótesis correspondientes a una prueba unilateral, confundiendo el contraste unilateral y bilateral que también apareció en Vera, Díaz y Batanero (2011) en un contraste sobre la media de una población. Por otro lado, intercambia el papel de las hipótesis, proponiendo como nula la que se desea probar; también aparece descrito en Cañadas,

Batanero, Díaz y Roa (2012) y Vallecillos (1994).

I2. Plantea las hipótesis en términos coloquiales, sin hacer referencia a los parámetros que se comparan. Algunos estudiantes plantean las hipótesis repitiendo los términos usados en el enunciado (se produce o no se produce efecto), sin hacer referencia a los parámetros de las poblaciones. Hay, además cierta confusión de la hipótesis estadísticas, que vendrá dada en término de diferencia en los parámetros poblacionales, con la hipótesis de investigación (Chow, 1996). Este tipo de planteamiento de hipótesis lo vemos en el trabajo de Cañadas *et al.* (2012) y los autores sugieren que dichos estudiantes pudieran no diferenciar la variable del parámetro (mostrando un conflicto de confusión de conceptos); tampoco es claro que comprendan que las hipótesis se plantean sobre un parámetro, puesto que no los nombran al plantearlas. Como vemos en el ejemplo analizado en la Tabla 3, el estudiante no especifica con claridad cuál es la variable que se compara y no usa los parámetros adecuados (medias poblacionales) para plantear las hipótesis. En lugar de ello las plantean en términos de tener o no tener “efecto”, sin indicar cuál es la variable independiente ni los momentos en que se mide la ansiedad.

Tabla 3. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría I2

Expresión	Contenido
H_0 : La VI no tiene efecto H_1 : La VI sí tiene efecto	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante establece correctamente una prueba bilateral (campo de problemas, procedimiento). - Usa el término <i>efecto</i> para explicar el contenido de las hipótesis (concepto y lenguaje). - Establece igualdad para la hipótesis nula (propiedad) haciendo referencia a un efecto nulo. - <i>Conflicto</i> ya que define las hipótesis relacionando con efectos sin referir cuantos son y qué relación tienen con la media muestral. (lenguaje y conceptos). No reconoce los tres momentos en los que se mide la ansiedad.

I3. Utiliza la media muestral para plantear las hipótesis estadísticas. Estos estudiantes plantean las hipótesis utilizando los resúmenes estadísticos muestrales (medias de las muestras) en lugar de los parámetros (medias de las poblaciones). Por tanto se confunde los niveles de análisis que se corresponden con la media poblacional y media muestral, distinción que es de difícil comprensión, de acuerdo a Schuyten (1991). En el trabajo con estadística descriptiva los estudiantes han manejado las medias de las muestras; en el cálculo de probabilidades las medias de la variable aleatoria en la población; al llegar

a la inferencia tienen que usar las dos simultáneamente e incluso una tercera (media de la distribución muestral), por lo que algunos estudiantes las confunden. Esta confusión en el planteamiento de hipótesis en la comparación de medias o proporciones ha sido encontrado en las investigaciones de Vallecillos (1994), y Cañadas *et al.* (2012) y otros trabajos descritos por Castro Soto *et al.* (2007), pero no lo hemos encontrado citado en relación al análisis de varianza. En la Tabla 4, se muestra un ejemplo de esta respuesta y se detalla un análisis semiótico, en que se muestran los conflictos que le surgen al estudiante.

Tabla 4. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría I3

Expresión	Contenido
$H_0 : \bar{x}_A = \bar{x}_B = \bar{x}_C$ $H_1 : \bar{x}_A \neq \bar{x}_B \neq \bar{x}_C$	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante realiza una interpretación correcta del enunciado, asumiendo que existen tres poblaciones (proceso de interpretación y particularización de conceptos). - Sin embargo, plantea las hipótesis en relación con las medias de las muestras y no con las medias de las poblaciones. Por tanto se produce un <i>conflicto</i> al confundir los estadísticos muestrales con los parámetros poblacionales (conceptos). Otro posible <i>conflicto</i> es la confusión entre población y muestra (conceptos). - Los símbolos que utiliza tanto en la hipótesis nula (igualdad) como en la alternativa (desigualdad) son los adecuados para representar las medias muestrales (concepto y representación). - El estudiante asimismo, discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar (propiedades). - La definición de la hipótesis alternativa es imprecisa, pues no es necesario que las tres medias sean diferentes; por tanto las dos hipótesis no cubren el espacio paramétrico.

I4. No identifica las variables implicadas en el contraste. Estos estudiantes no llegan a identificar claramente la variable dependiente del estudio (ansiedad) y los niveles del factor que se analizan (momentos en que se mide), lo que les lleva a mezclar en sus hipótesis variables, niveles del factor e incluso el tratamiento descrito en el enunciado. Así, en el ejemplo que se presenta en la Tabla 5, el estudiante mezcla en el establecimiento de las hipótesis la técnica de reducción de estés con la variable dependiente (ansiedad) del enunciado. Plantea además una hipótesis unilateral, en vez de bilateral, conflicto descrito en Vera, Díaz y Batanero (2011), y no usa los parámetros adecuados (medias de las variables); por otro lado, reconoce solo dos comparaciones, en vez de tres. Hacemos notar que la confusión entre variables dependiente e independiente aparece en la investigación de Rubin y Rosebery (1990) y en la de Arteaga (2011) en relación con la elaboración de gráficos estadísticos.

Tabla 5. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría I4

Expresión	Contenido
$H_0 \equiv T_1 \leq A$ $H_1 \equiv T_1 > A$	<ul style="list-style-type: none"> - El estudiante interpreta el enunciado (proceso de interpretación); sin embargo no identifica tres momentos de análisis. Por tanto aparece un <i>conflicto</i> pues no reconoce que debe usar algún modelo de análisis de varianza (campo de problemas). - Al establecer las hipótesis aparece otro <i>conflicto</i> al tratar de comparar la variable dependiente con el tratamiento (conceptos). - <i>Conflicto</i> al no establecer las hipótesis en función de algún parámetro adecuado, sino simplemente en función de las variables (concepto y procedimiento). - Plantea hipótesis complementarias que cubren el espacio paramétrico. - Otro <i>conflicto</i> es plantear un contraste unilateral (campo de problemas).

15. *Expresa las hipótesis como combinación lineal de los parámetros.* Los estudiantes que han sido agrupados en esta categoría no comparan la igualdad de medias poblacionales entre sí, sino la diferencia de dos de ellas con respecto a la tercera. En la Tabla 6, se detalla el análisis semiótico de un ejemplo; observamos que las hipótesis se parecen a las usadas en los contrastes a posteriori, que se suelen aplicar en análisis de varianza una vez que se ha rechazado la hipótesis nula, para descubrir cuáles son los niveles que causan las diferencias (Montgomery, 2005). Aparentemente estos estudiantes podrían confundir el análisis de varianza y los contrastes a posteriori, aunque para estos últimos, la suma de los coeficientes del contraste debe ser siempre la unidad, cosa que no se cumple en el ejemplo de la tabla.

Tabla 6. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría I5

Expresión	Contenido
$H_0 \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 \neq 0$	<ul style="list-style-type: none"> - Interpreta el enunciado e identifica correctamente que hay que realizar tres comparaciones (campo de problemas). - Establece las hipótesis en términos del parámetro (particularización de un concepto). - Establece la hipótesis nula en términos de igualdad y la hipótesis alternativa usando la desigualdad. - La hipótesis nula es puntual, contraria a la que se quiere probar y es complementaria con la nula. - <i>Conflicto</i>: No compara los tres momentos del análisis, sino que plantea la hipótesis como combinación lineal del parámetro. Otra consecuencia es que

las hipótesis no cubren el espacio paramétrico, aunque son complementarias.

16. *Establece las hipótesis de contraste de un único parámetro poblacional.* En este caso se plantean hipótesis sobre un solo momento de análisis, es decir una única variable, por lo que no se identifica el problema como de análisis de varianza. Como vemos en el ejemplo, mostrado en la Tabla 7, el estudiante establece un contraste para una media poblacional, en una única medición, que compara con el valor nulo. Hay un conflicto de identificación en la variable dependiente, pues considera como tal la “técnica de inoculación de estrés, TIE”, que de hecho es el tratamiento constante que se aplica a todos los atletas. Sin embargo, usa muchos conceptos correctamente, como el parámetro, hipótesis nula y alternativa, que son complementarias y cubren el espacio paramétrico.

Tabla 7. Análisis semiótico de un ejemplo en la categoría I6

Expresión	Contenido
$H_0: \mu_{TIE} = 0$ $H_1: \mu_{TIE} \neq 0$	<ul style="list-style-type: none"> - Al interpretar el enunciado no se identifica el campo de problemas “análisis de varianza”. Se produce un <i>conflicto</i> puesto que no puede identificar los tres momentos de análisis que debe comparar (particularización de un concepto). - Toma como variable dependiente las “TIE” (técnicas de inoculación de estrés); <i>conflicto</i> de confusión de la variable dependiente con el tratamiento realizado a los atletas. - Plantea las hipótesis en términos del parámetro; utiliza una simbología adecuada a través del símbolo: μ_{TIE}, - Reconoce la hipótesis nula como puntual y de no efecto y contraria a la que el investigador quiere probar (propiedades).

Además de las categorías descritas, encontramos estudiantes con respuestas imprecisas o que no completan la tarea. En la Tabla 8 se presentan los resultados, donde observamos que únicamente la cuarta parte de estudiantes completa correctamente el establecimiento de las hipótesis. Sumando las respuestas parcialmente correctas, donde el único problema es la simbología usada llegamos casi al 30%, de todos modos es muy escaso. El porcentaje, no obstante es muy similar al de respuestas correctas o parcialmente correctas en el establecimiento de hipótesis en un contraste sobre la media

de la población Vera, Díaz y Batanero (2011), pero menor que el obtenido en Cañadas *et al.* (2012) al establecer las hipótesis en un contraste de independencia en tablas de contingencia. Es también muy amplio el porcentaje de estudiantes que no dan una respuesta (25%) y mayor que en las dos investigaciones citadas (16% y 8%) lo que indica la dificultad de comprensión de las hipótesis en los problemas elementales de análisis de varianza.

Si tenemos en cuenta las respuestas correctas, así como las parcialmente correctas y las categorías I2, I3, I5, alrededor del 52,7% de estudiantes reconocen la existencia de tres momentos de comparación para el análisis, es decir identifica el enunciado como un problema de análisis de varianza, aunque cometan algunos errores en el planteamiento de las hipótesis. Un 13,4% (categorías I1 e I6) confunde el análisis de varianza con otro contraste de comparación de una o dos muestras y otro 2,7% (categoría I4) confunde el análisis de varianza en sí, con las comparaciones a posteriori.

Tabla 8. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas al planteamiento de Hipótesis

Categorías de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correctas	56	25,0
Parcialmente correctas; hipótesis correctas con simbología inadecuada	11	4,9
I1. Confunde el análisis de varianza con el contraste <i>t</i> de comparación de dos muestras	26	11,6
I2. Plantea la hipótesis en términos coloquiales sin referencia a los parámetros	45	20,1
I3. Plantea las hipótesis usando las medias muestrales	4	1,8
I4. Establece las hipótesis mezclando variables dependiente e independiente o tratamientos	10	4,5
I5. Plantea las hipótesis como combinación lineal de parámetros	6	2,7
I6. Establece las hipótesis de contraste de un único parámetro poblacional	4	1,8
I7. Respuesta imprecisa	6	2,7
No completa la tarea	56	25,0
Total	224	100,0

En un porcentaje pequeño (I3, con 1,8%) encontramos los que no pueden discriminar adecuadamente los conceptos de estadístico y parámetro, confusión que apareció en los trabajos de Vallecillos (1994) y Cañadas *et al.* (2012). Otro pequeño porcentaje no diferencia entre variable dependiente e independiente, al igual que en Rubin y Rosebery (1990) y Arteaga (2011).

Conflictos semióticos al establecer las hipótesis

En el análisis semiótico de las respuestas incorrectas que se han ido detallando a lo largo del apartado anterior de los registros escritos de los estudiantes, se han encontrado los siguientes conflictos semióticos (Godino, 2002):

- *Confusión en el campo de problemas, comparando una o dos medias, o realizando comparaciones a posteriori en vez de identificar el análisis de varianza* (aparece en las categorías I1, I4, I6; 17,9% de la muestra). Estos estudiantes no identifican la existencia de tres niveles del factor para ser comparados. La confusión del campo de problemas también se describe en Olivo (2008) en el cálculo de intervalos de confianza.
- *Establece hipótesis unilaterales en lugar de bilaterales*. Aparece en las categorías I1 e I4 para un 16,1% de la muestra y viene motivado por la confusión entre las técnicas (de reducción de estrés) con el resultado de la misma (nivel de ansiedad). Por ello, los estudiantes no usan la igualdad para definir la hipótesis nula, conflicto descrito en Vera, Díaz y Batanero (2011), que podría incidir en la generación de otros conflictos al momento de definir la distribución del estadístico de prueba.
- *Intercambiar la hipótesis nula y alternativa, pues se establece como nula la que se quiere probar*. Este conflicto supone la falta de comprensión de la lógica de un contraste de hipótesis y también fue descrito por Vallecillos (1999). Aparece en la categoría I1 (11,6%) y tiene menos incidencia que en el citado trabajo, pues sólo se da en el 4,8% de la muestra.
- *Establecer las hipótesis en términos de las medias muestrales*. Aparece en la categoría I3 (1,8%). Este conflicto implica una confusión entre *estadístico* y *parámetro*, pues confunden la media muestral y poblacional, debido a que no diferencian los niveles con que se usa en inferencia el concepto de media (Schuyten, 1991). Como hemos dicho, apareció en la investigación de Cañadas *et al.* (2012) y Vallecillos (1994).
- *Plantea las hipótesis en término de efectos, confundiendo variables dependientes e independientes* (aparece en la categoría I2 e I4; 24,6%). La confusión de variable dependiente e independiente la hemos encontrado en la investigación de Rubin y Rosebery (1990) y en Arteaga (2011) al comparar gráficos estadísticos. Algunos

estudiantes cuando establecen hipótesis, en términos de efectos sobre la ansiedad; si bien las hipótesis en un análisis de varianza, pueden generarse usando efectos, en esta categoría no describe cuales son, ni usa lenguaje adecuado para referirse a ellos. En otros casos (categoría I4) se compara el efecto que es un valor de la variable independiente con la variable dependiente.

- *Establecer las hipótesis como combinación lineal de los parámetros*, confundiendo el análisis de varianza con las comparaciones a posteriores del mismo (categoría I5; 2,7%).
- *Las hipótesis no cubren el espacio paramétrico*. Aparece en las categorías I3 e I5, 4,5% de estudiantes; este conflicto también se describe en Vallecillos (1994).

En consecuencia, estos conflictos se unen a los ya citados por otros autores sobre el planteamiento de hipótesis estadísticas en problemas de comparación de medias o el contraste chi-cuadrado. El uso de contrastes unilaterales en vez de bilaterales o de estadísticos muestrales al establecer las hipótesis o bien plantear hipótesis no complementarias confirman los encontrados en dichas investigaciones. También hemos identificado algunos específicos, como confundir el análisis de varianza con los contrastes a posteriori o combinar variables y tratamientos o efectos al establecer las hipótesis.

Todo ello sugiere la dificultad de este concepto, de acuerdo con Chow (1996) y Batanero (2000). Además, encontramos problemas en el uso de una simbología adecuada, que aparece en un 29,5% de estudiantes; otros como en I2 en un 20,1%, expresan las hipótesis en forma coloquial.

Conclusiones

En nuestro trabajo es escasa la confusión entre hipótesis nula y alternativa que Vallecillos (1994) encontró un 13% aproximadamente de estudiantes en su estudio, por lo que creemos estos estudiantes han comprendido la lógica del contraste, para el caso particular del análisis de varianza. Sin embargo si hemos encontrado estudiantes que plantean hipótesis alternativas puntuales o hipótesis que en su conjunto no cubren el espacio paramétrico, de modo que si hay coincidencia con la autora y otras

investigaciones ya citadas en que los estudiantes confunden algunas propiedades de las hipótesis nula y alternativa.

Uno de los conflictos que se presenta es la confusión entre estadístico y parámetro, así como no reconocer que el estadístico es una variable aleatoria. Como indican Harradine, Batanero y Rossman (2011), el concepto de distribución muestral es mucho más abstracto que los de distribución de una población o de una muestra, por lo que suelen ser muy difícil de comprender para los estudiantes. Esta debiera ser un punto para insistir en la enseñanza de la inferencia en general y del análisis de varianza en particular. Siguiendo la sugerencia de estos autores, sería importante una intervención animando a los estudiantes a razonar sobre los comportamientos hipotéticos de más de una muestra tomadas de la misma población (usando poblaciones conocidas por los estudiantes). Estas conjeturas podrían contrastarse con actividades que involucren la toma repetida de muestras aleatorias, utilizando alguna de las muchas aplicaciones interactivas disponibles en Internet.

En resumen, el presente trabajo aporta nueva información para apoyar la necesidad de revisar la enseñanza de la inferencia estadística y más concretamente, en lo relativo al planteamiento de hipótesis estadísticas en el análisis de varianza, un punto al cuál no se ha prestado la debida atención. Además de que, en sí mismos, estos errores son fundamentales, provocarían dificultades a la hora de profundizar el estudio de estos objetos estadísticos.

Por ejemplo, el hecho de plantear una hipótesis unilateral en lugar de una bilateral hará que las regiones de aceptación y de rechazo estén mal construidas y por tanto, la decisión que tome el estudiante en cuanto a la aceptación o rechazo de las hipótesis sea incorrecta. Sería entonces necesario ayudar a los estudiantes en su construcción del razonamiento inferencial, comenzando con el planteamiento de actividades informales de inferencia, como proponemos en Batanero y Brovcnik (2016) antes de iniciar el aprendizaje formalizado de los contrastes de hipótesis. Esperamos en consecuencia que nuestros resultados contribuyan a la mejora de la enseñanza del tema y animen a otros investigadores a proseguir analizando las dificultades de los estudiantes en la inferencia estadística en general y en el análisis de varianza en particular.

Referencias.

ARTEAGA, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

BATANERO, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 2, n. 1-2, p.75-98.

BATANERO, C. y BOROVCNIK, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

BATANERO, C. y DÍAZ, C. (2006). Methodological and Didactical Controversies around Statistical Inference. *Actes du 36ièmes Journées de la Societé Française de Statistique*. [CD ROM]. Paris: Societé Française de Statistique.

CAÑADAS, G., BATANERO, C., DÍAZ, C. y ROA, R. (2012). Psychology students' understanding of the chi-squared test. *Statistique et Enseignement*, v.3, n.1, p. 3-18.

CASTRO SOTOS, A. E., VANHOOF, S., VAN DEN NORORGATE, W. y ONGHENA, P. (2007). Student's misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistical education. *Educational Research Review*, v.2, n.2, p. 98-113.

CHOW, L. S. (1996). *Statistical significance: Rational, validity and utility*. London: Sage.

ECO, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.22, n.2-3, p. 237-284.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

GODINO, J. D. BATANERO, C. y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, v.39, n.1-2, p.127-135.

GREEN, K. E. (2007). Assessing understanding of the concept of interaction in analysis of variance. Trabajo presentado en la *IASE/ISI-Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics*. Guimarães, Portugal: International Statistical Institute.

HARLOW, L. L., MULAİK, S. A. y STEIGER, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

HARRADINE, A., BATANERO, C., Y ROSSMAN, A. (2011). Students' and teachers'

knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.

KRAUSS, S. y WASSNER, C. (2002). How significance tests should be presented to avoid the typical misinterpretations. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Recuperado el 20 de mayo de 2011, de: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

MONTGOMERY, D. (2005). *Diseño y análisis de experimentos*. México: Limusa.

OLIVO, E. (2008). *Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

PARDO, A., GARRIDO, J., RUIZ, M.A. y SAN MARTÍN, R. (2007). La interacción entre factores en el análisis de la varianza: error de interacción. *Psicothema* v.19, n.2, p.343-349.

ROSNOW, R. L. Y ROSENTHAL, R. (1991). If you're looking at the cell means, you're not looking at *only* the interaction (unless all main effects are zero). *Psychological Bulletin*, v.110, p.574-576.

RUBIN, A. Y ROSEBERY, A. S. (1990). Teachers' misunderstandings in statistical reasoning; evidence from a field test of innovative materials. En A. Hawkins (Ed.) *Training teachers to teach Statistics* (pp. 72-89). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

SCHUYTEN, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.). *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

VALLECILLOS, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

VALLECILLOS, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. In *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2, pp. 201-204). Helsinki: International Statistical Institute.

VALLECILLOS, A. y BATANERO, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.17, p.29-48.

VERA, O, DÍAZ, C. y BATANERO, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *UNION*, v.27, p.41-61.

VERA, O, DÍAZ, C., BATANERO, C. Y LÓPEZ-MARTÍN. M. M. (2016). Evaluación de dificultades en el análisis de varianza elemental por estudiantes de psicología.

Trabajo aceptado para presentación en el *XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Málaga, Septiembre, 2016.

ZUCKERMAN, M., HODGINS, H. S., ZUCKERMAN, A. Y ROSENTHAL, R. (1993). Contemporary issues in the analysis of data: A survey of 551 psychologists. *Psychological Science*, v.4, p.49-52.