Formas y medidas, el universo hecho números

R.Fernández

La geometría, que nació hace más de 2300 años en la próspera ciudad de Alejandría, continúa siendo en nuestros días una vía para entender el mundo que nos rodea. Pero en el departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, los investigadores van más allá, abriendo las puertas de universos que no alcanzamos siquiera a imaginar.

Cuenta la Historia que sobre la entrada a la Academia de Platón rezaba un cartel: "que nadie que no sepa geometría traspase mis puertas". En aquella época, cuando la cultura griega clásica florecía, la geometría, la *medición de la Tierra*, era una ciencia matemática que mucho tenía que ver con la mística y la filosofía. Pero al tiempo que ayudaban a mejorar la comprensión del mundo, los geómetras se ocupaban también de resolver problemas técnicos muy cercanos a la vida cotidiana, como diseñar un templo con unas determinadas dimensiones o hallar la extensión de un campo de cultivo. Hoy en día ese tipo de tareas las realizan ingenieros o arquitectos, y sin embargo la geometría sigue estando igual de vigente porque, como explica el catedrático Alfonso Romero, "seguimos estudiando objetos, pero si antes eran cubos o prismas, ahora son figuras que no se pueden ver, que existen matemáticamente en un papel, pero que no podemos percibir por los sentidos, porque tienen más dimensiones que el mundo en el que vivimos".

Así, la geometría sigue describiendo los objetos, caracterizándolos a través de sus aspectos medibles: longitudes, ángulos, áreas, volúmenes,etc., y por eso tal vez no se le da la importancia que realmente tiene, porque puede parecer que ya está todo hecho. Como pasa en muchas áreas de la matemática, estas investigaciones no tienen una aplicación inmediata, pero sí pueden ser en ocasiones potencialmente aplicables a otras disciplinas como la física. Por ejemplo, la Historia de la Ciencia nos enseña que, antes de que Edwin Hubble descubriera experimentalmente que las galaxias se expanden, otros dos científicos ya habían elaborado modelos no estáticos del universo, usando argumentos propios de la geometría. El físico ruso Alexander Friedmann y el matemático belga Georges Lemaître, en 1922 y 1927 respectivamente, afirmaron que las galaxias debían estar separándose unas de otras, aun cuando eso iba en contra de la intuición y la observación inmediata. Que un resultado teórico, a primera vista peculiar, se compruebe más tarde experimentalmente no es algo poco común, y por eso no es osado pensar que lo que estos investigadores granadinos estudian hoy, con lápiz y papel, pueda servir mañana para comprender mejor la estructura global del universo.

> Lo que no se ve con los sentidos puede deducirse de los resultados teóricos

> En la naturaleza se suelen dar superficies con formas óptimas, como las pompas de jabón

Agujeros negros

Otro ejemplo reciente de cómo ayuda la geometría a la física, lo tenemos en el físico Stephen Hawking, que se hizo popular al probar que las estrellas tienen una vida parecida a la de un ser vivo, es decir, que nacen, crecen y finalmente desaparecen. Pero, ¿cómo pudo llegar a estas conclusiones, si el tiempo de vida de una estrella supera cualquier observación humana? La respuesta está de nuevo en la geometría. De igual manera, no se puede observar un agujero negro, una estrella tan densa y con una gravedad tan intensa que la luz sale de su superficie para volver a caer en ella. Sin embargo, lo que no se puede ver con los sentidos sí se puede deducir de los resultados teóricos, y la primera prueba de la existencia de los agujeros negros fue puramente matemática. Lo que realmente hizo Hawking fue emplear una geometría muy aplicada.

La Teoría del Todo

La física de los siglos XX y XXI se apoya en dos grandes teorías: una de tamaños grandes, la Relatividad General de Einstein, y otra de tamaños pequeños, la Teoría Cuántica de Campos. El gran reto que se plantean los científicos a escala mundial es unirlas, desarrollando una Teoría Unificada que explique tanto las fuerzas que dominan a las partículas subatómicas (interacción fuerte, débil y electromagnetismo) como las que rigen a las grandes masas. Desde el punto de vista matemático, las dos teorías actuales presentan una gran diferencia: "mientras que la relatividad tiene un reflejo matemático en la geometría de Lorentz, la cuántica no usa una única teoría matemática", afirma el catedrático Manuel Barros. Una gran esperanza para salvar esta diferencia es la Teoría de Cuerdas, que nace en el seno de la geometría diferencial. En ella las partículas no se ven como un punto fijo, sino como una pequeña cuerda que vibra describiendo una especie de superficie. Esta indeterminación respecto al estado de la partícula en cada momento convierte a este enfoque en una herramienta matemática mucho más rigurosa y completa para la física cuántica. La geometría de Lorentz, que se emplea en la Teoría de la Relatividad, y la Teoría de Cuerdas, aplicable en la cuántica, son de esta forma dos valiosas armas que tienen estos investigadores para desarrollar intentos teóricos matemáticos que permitan lograr lo que vendrá en llamarse Teoría Cuántica de Gravitación, algo que se espera conseguir en este siglo.

Membranas biológicas

Pero estos modelos geométricos no sólo se aplican a la física del cosmos, sino que tienen utilidad en aspectos tan cercanos a nosotros como algunas formas que se dan dentro de nuestro cuerpo. Por ejemplo, las llamadas superficies de Willmore, que suscitaron gran interés en los años 90, explican la existencia en los organismos de membranas y vesículas biológicas en forma de *toro*, es decir, como un neumático o un donut. Una vez enunciada esta posibilidad matemática, se observó en la naturaleza que ciertos polímeros formaban efectivamente vesículas tóricas, en contra de la creencia general de que estas membranas eran esencialmente esféricas.

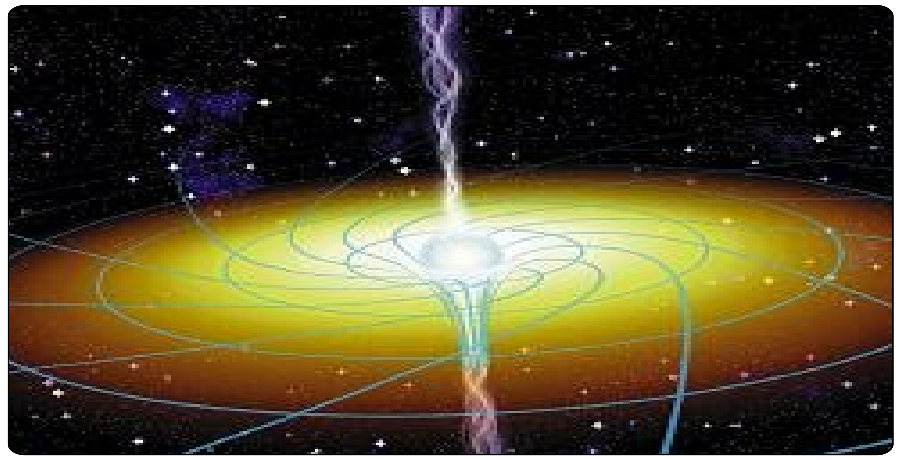
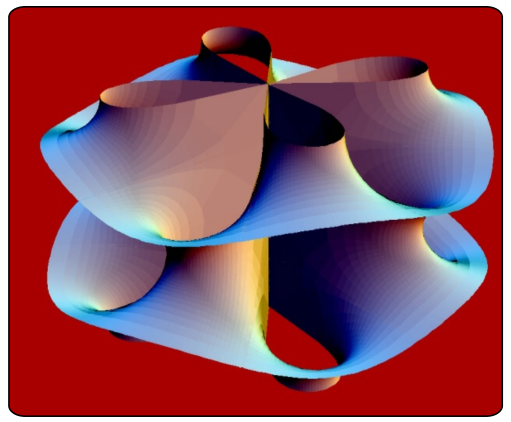


Imagen figurada de un agujero negro



Superficie minimal estudiada en la Universidad de Granada

Pompa doble esférica estándar
Computer graphics J.M. Sullivan, Univ of Illinois

> A nivel nanométrico algunos materiales presentan superficies minimales que se repiten periódicamente

Pompas de jabón

Volviendo a la geometría clásica, al espacio tridimensional que nos es familiar, son particularmente interesantes aquellas superficies cuya forma es óptima en algún sentido, ya que suelen darse en la naturaleza porque minimizan la energía de los sistemas físicos. Un ejemplo conocido son las pompas de jabón, que adoptan la forma que minimiza su área, y por tanto su energía, y por eso tienden a ser esféricas.

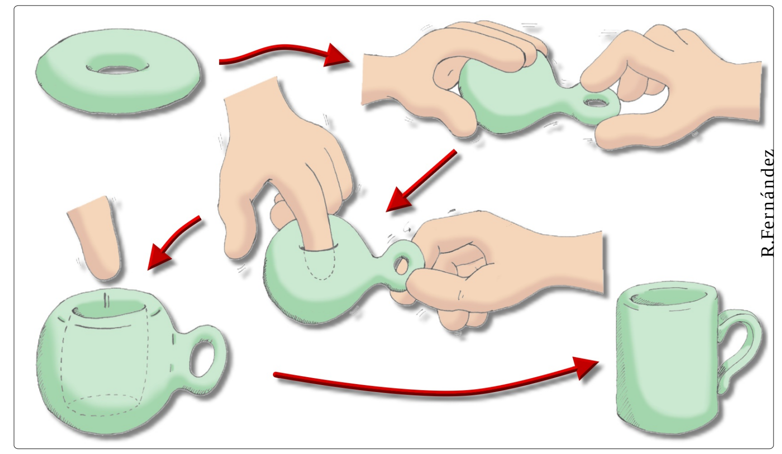
En la UGR varios geómetras se dedican a construir y estudiar estas películas jabonosas porque, por extraño que suene, tienen interés en Relatividad General, en el problema de la descripción de los espacios tridimensionales posibles y en muchas otras áreas.

Como explica el catedrático Antonio Ros, "el estudio de las pompas múltiples, muy complejo teóricamente, ha llevado a la conclusión de que la pompa doble usual, la que se forma cuando jugamos y dos pompas se unen, es la única configuración minimizante, algo que se podría deducir intuitivamente". Pero la intuición puede fallar, como ocurrió al decidir la forma óptima de las espumas (racimos con infinitas pompas), ya que durante un siglo se pensó que la solución debía ser una configuración muy simétrica conocida llamada *Espuma de Kelvin*, pero ahora se sabe que se da otra de menor energía, pero no tan simétrica.

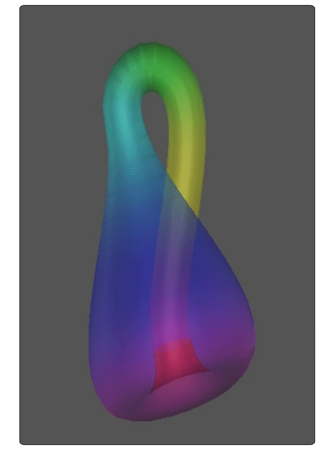
Superficies minimales

Las superficies mínimas o minimales, que han tenido usos tan pragmáticos como el diseño óptimo de carpas y techumbres de edificios, tienen también aplicaciones interesantes en campos como la cristalografía o la ciencia de materiales, donde aparecen superficies análogas a las pompas de jabón, que se repiten periódicamente, como si de un mosaico se tratara. Estas superficies, sólo apreciables a escala nanométrica, separan dos materiales no miscibles y están finamente entrelazadas unas con otras. La clasificación y descripción de estas interfases periódicas tiene un gran interés, tanto teórico como práctico, y sus aplicaciones en el diseño de materiales alcanzan a la nanotecnología, una ciencia en auge a la que se le augura un próspero desarrollo en las próximas décadas.

Un objeto, dos puntos de vista



De donuts y tazas. Estirando y deformando un donut, sin llegar a romperlo, podemos obtener una taza. Por eso, para un topólogo, ambos objetos, donut y taza, son la misma cosa.



La Botella de Klein es una popular y curiosa figura topológica

Pero si la geometría es medir, ¿qué es la topología?. Los topólogos estudian las formas de los objetos, de manera que si para un geómetra un cilindro y un aro son cosas diferentes al tener distintas dimensiones, para un topólogo son lo mismo porque a partir de uno se puede obtener el otro, mediante deformaciones de su superficie. Igualmente, si tenemos dos figuras planas, por ejemplo, dos triángulos, el geómetra dirá que son iguales si moviendo uno podemos hacerlo coincidir sobre el otro, de manera que veamos que tienen los mismos ángulos y longitudes (congruencia o igualdad de triángulos). Pero un topólogo podrá decir también que el triángulo se puede estirar hasta conseguir un círculo, de manera que ambas figuras son la misma superficie.

Así, la geometría y la topología se complementan y ven los mismos objetos desde puntos de vista diferentes: los geómetras estudian sus propiedades más métricas o mensurables, los topólogos las más cualitativas.

Pero la topología se plantea también otros problemas importantes, como la denominada topología de las cuatro variedades, que ayudaría a entender mejor un posible universo con cuatro dimensiones, o problemas de clasificación, como saber cuántas variedades compactas son posibles en múltiples dimensiones.

El mundo plano de Euclides

Geometría diferencial, geometría de Lorentz y otros términos similares nos sugieren algo que puede parecernos extraño pero que no deja de ser cierto: hay más de un tipo de geometría. Cuando Euclides escribió su obra *Elementos de geometría*, dio como ciertos cinco postulados, cinco ideas que se aceptan sin demostración porque resultan evidentes y a partir de las cuales se deducen todas las consecuencias y teoremas posibles. En los siglos venideros, la geometría euclídea se convirtió en básica para cualquier matemático, pero al mismo tiempo muchos dedicaron sus esfuerzos a demostrar que el quinto postulado, que no gustaba demasiado al propio Euclides, podía deducirse de los otros cuatro.

El postulado de las paralelas, como se le conoce normalmente, dice que "dada una recta y un punto que no pertenece a ella, se puede trazar una única línea paralela a la primera que pase por ese punto". Esto, que puede parecernos perfectamente lógico, sólo define un tipo de universo muy particular: el universo plano en el que nos movemos y con el que estamos familiarizados.

No fue hasta 1817 cuando el brillante matemático Karl F. Gauss descubrió que si negaba el quinto postulado, permitiendo que se trazaran más de una paralela por un punto dado, se obtenía una geometría totalmente consistente. Esta idea, olvidada durante un siglo, fue retomada por Albert Einstein en 1915, quien con su Teoría General de la Relatividad explicó no sólo cómo actúa la gravedad, sino qué es: la curvatura que ejerce una masa en el espacio, deformándolo, y que hace que otros cuerpos se sientan atraídos hacia ella. De esta manera, la geometría nos enseña que nuestro universo no es plano, sino con una forma similar a la de una silla de montar.

Cómo enseñar-aprender matemáticas

Profundizar en el conocimiento de los procesos de construcción, adquisición y descubrimiento del pensamiento matemático; construir instrumentos válidos y eficaces para el diagnóstico y la evaluación del aprendizaje, y establecer técnicas y recursos apropiados para mejorar los resultados en los procesos de enseñanza-aprendizaje, son algunos de los objetivos que persiguen los investigadores que, en diversas universidades andaluzas, se dedican al estudio de la didáctica de las matemáticas.

En la Universidad de Málaga, el grupo dirigido por José Luis González Marí busca dar respuesta a una serie de cuestiones que giran en torno al proceso educativo de las matemáticas. "Para mejorar sensiblemente los resultados de la educación matemática formal, es imprescindible averiguar qué es el aprendizaje y el desarrollo cognitivo en esta materia, cuáles son las características y las dificultades del aprendizaje matemático, cómo evoluciona el pensamiento individual y colectivo y, en definitiva, qué y cómo piensa el alumno en matemáticas y porqué piensa de esa manera" afirma el profesor. El análisis de estos aspectos servirá para establecer el método de enseñanza más adecuado, definir el papel del docente en el aula de matemáticas, o saber porqué se da el fracaso escolar, entre otras cosas.

Ver para aprender

También en la línea de mejorar la enseñanza y el aprendizaje, en el departamento de Matemática Aplicada de la Hispalense, se ha desarrollado el *Dibuscan*, un programa informático que se podría adaptar a esta tarea pedagógica.

La idea del grupo *Seminario de Topología Computacional y Matemática Aplicada*, dentro del III Plan Andaluz de Investigación y dirigido por Pedro Real, es que los chavales vean en la pantalla la relación entre imágenes digitales y los números que las explican. La figura de una curva o un dibujo más sofisticado, como la hoja de un helecho, se pueden comprender a la perfección jugando con los números y las funciones matemáticas. El objetivo final sería la creación de una asignatura para Educación Primaria y Secundaria que se llamaría *Matemáticas e imágenes digitales*.

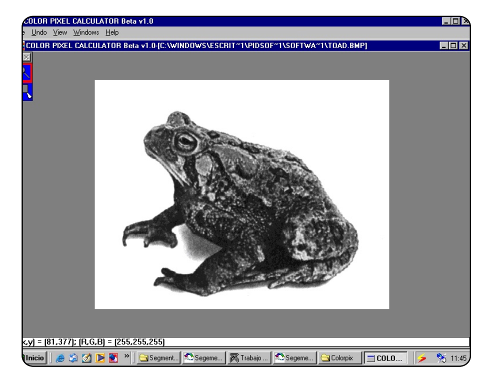


Imagen de una rana vista en el *Dibuscan*

El proyecto permitiría también transmitir ideas como la de continuidad-discreccionalidad o conceptos estadísticos como media, varianza o mediana, que más de una vez se *atragantan* a los estudiantes. La idea última es que las matemáticas no son un ente indeterminado que se estudia en las escuelas y que no sirve para nada. Los cálculos de población, las encuestas o el desarrollo científico son algunos de las materias que no pueden prescindir de los números bajo ningún precepto.

Corrientes oceánicas

El grupo de *Análisis Teórico y Numérico de Modelos de las Ciencias Experimentales* lleva a cabo varios proyectos relacionados con el análisis de situaciones complejas que se plantean en la naturaleza. Los fenómenos que estudian comprenden modelos de oceanografía, de mecánica de fluidos y de electromagnetismo. Una de las investigaciones de estos matemáticos de la Universidad de Cádiz, en colaboración con grupos de Sevilla y Málaga, es la descripción de la dinámica de las corrientes oceánicas del Estrecho de Gibraltar, una zona con una compleja dinámica oceánica que influye, entre otras cosas, en la generación de caladeros de pesca con gran interés económico.

Entre sus proyecto de futuro se encuentra un estudio sobre el transporte de radionucleidos, aplicable al depósito de residuos radiactivos a gran profundidad. La complejidad del subsuelo impide conocer directamente cómo se produce la migración de estas partículas radiactivas hacia la biosfera, por lo que es necesario incorporar variables aleatorias y desarrollar modelos estocásticos que permitan predecir su comportamiento.

Localización regional

La línea de trabajo más consolidada del grupo *TELOYDISREN* se enmarca dentro de la investigación operativa, un área de la matemática dedicada a la optimización de costes y procedimientos. Estos investigadores gaditanos tratan de resolver problemas de localización, concretamente localización regional, aplicable a los casos en los que un servicio se demanda desde una región, o no se conoce exactamente la situación de la persona o entidad que solicita el servicio, y se busca la localización más adecuada del servidor que permita minimizar el costo, el tiempo de llegada, etc.. En concreto, han estudiado el caso de una ambulancia que debe prestar servicio a un área determinada. La cuestión planteada es: ¿cómo se puede conseguir que el tiempo medio que tarda en llegar a cualquier punto sea mínimo?, ¿dejándola en un punto o manteniéndola circulando? La solución es que, si se elige bien el punto, el tiempo de llegada se minimiza cuando el vehículo está fijo. Esta conclusión es aplicable a cualquier servicio que pueda mantenerse fijo o móvil, siempre que el único criterio a considerar sea el tiempo que se tarda en llegar.