

# Fundamentos Matemáticos de la Relatividad General. Cosmología.

Alfonso Romero Sarabia  
Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada

## 1. Introducción

Hacia 1900 ya se contaba con más de dos siglos de buen funcionamiento de la Mecánica Newtoniana. La Física, por aquél entonces, se encontraba dividida en dos teorías profundamente incompatibles:

**Mecánica** (incluyendo Termodinámica)                      y                      **Electromagnetismo** (Electricidad, Magnetismo y Óptica)

El problema era que la luz no consiste en una corriente de partículas sujetas a las leyes de la Mecánica, más bien la luz es una onda electromagnética (Maxwell).

Desde un punto de vista matemático, ocurría que mientras que las ecuaciones de la Mecánica eran invariantes por el grupo de Galileo, no pasaba lo mismo con las ecuaciones de Maxwell. Tenían cabida, entonces, dos posibilidades: o bien las ecuaciones de Maxwell no eran correctas, lo cual parecía inaudito, pues aunque se tardó quince años en aceptarlas plenamente, ahora estaban sustentadas por muchos y muy precisos hechos experimentales; o bien la forma de cambio de coordenadas Galileana no era correcta, afirmación esta asombrosa si se tiene en cuenta que la Mecánica Newtoniana se había mostrado muy acertada, incluso a nivel planetario (¡ aún existiendo una serie de fenómenos que era incapaz de explicar !).

Fue en 1905 cuando A. Einstein publicó *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*. En este artículo estableció sus dos postulados: el de la Relatividad y el de la constancia de la velocidad de la luz, que le condujeron a una nueva forma de cambio de coordenadas, que no es otra que las transformaciones de Lorentz. Esta ya era conocida por Lorentz, Minkowski y Poincaré, aunque en un ambiente científico diferente: el de las Geometrías No Euclídeas. Once años más tarde, Einstein publicó su definitivo trabajo donde introdujo la Relatividad General. Aquí utilizó como herramienta la Geometría de Lorentz en notación tensorial clásica y con carácter local. Más recientemente, la necesidad del estudio de “problemas globales” en Física hizo que métodos globales, bien conocidos de la Geometría de Riemann, comenzaran a ser usados (con las correspondientes dificultades técnicas) en Relatividad General. Por ejemplo, para analizar la estructura del Universo

(el más grande de los sistemas físicos) en trabajos de Robertson-Walker, Friedmann, Kerr, Kruskal, Raychaudhuri,..., y cómo no, los famosos trabajos de Hawking y Penrose (1972) sobre singularidades (los dos hechos fundamentales que se derivaban de su teoría eran la existencia de un "Big Bang" en nuestro pasado y el anuncio de un "Black Hole", como preocupante futuro que nos espera). Insistamos en que Hawking y Penrose lograron teoremas de Geometría de Lorentz global y que lo anterior es una interpretación física (razonable) de dichos resultados.

La idea de esta charla consiste en explicar algunas de las herramientas matemáticas que se utilizan en Relatividad General.

El material aquí utilizado se puede encontrar, y mucho más, en las referencias citadas al final. Principalmente las dos últimas, ambas de Sachs y Wu, han servido de base para estas notas.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los profesores Angel Ferrández, Pascual Lucas y Miguel Angel Meroño por su amable invitación, en nombre del Departamento de Matemáticas, para impartir esta charla. Y asimismo, por su inestimable colaboración y esmerado cuidado en la transcripción y corrección del manuscrito original.

## 2. Construcción de un modelo relativista simple

Imaginemos un cuerpo puntual, que se mueve siguiendo una línea recta, no sometido a fuerza gravitatoria alguna. Sea  $m > 0$  su masa. El movimiento está descrito por una función  $C^\infty$ ,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $x(t)$  el vector de posición, en el instante  $t$ , desde un punto fijo. Sea  $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  su velocidad, que supondremos cumple  $|v(t)| < 1, \forall t \in \mathbb{R}$ . Entiéndase que el "1" que aparece en la acotación anterior no es otra cosa que la velocidad de la luz, es decir, hemos elegido convenientemente las unidades de medida para que la velocidad de la luz sea 1 (las unidades donde esto ocurre se suelen llamar unidades geométricas). Para construir un "modelo relativista" de  $(x, m)$  seguiremos los siguientes pasos:

(a) Dotar a  $\mathbb{R}^2$  de dos estructuras (íntimamente ligadas): una "métrica de Lorentz" y "un sentido de futuro";

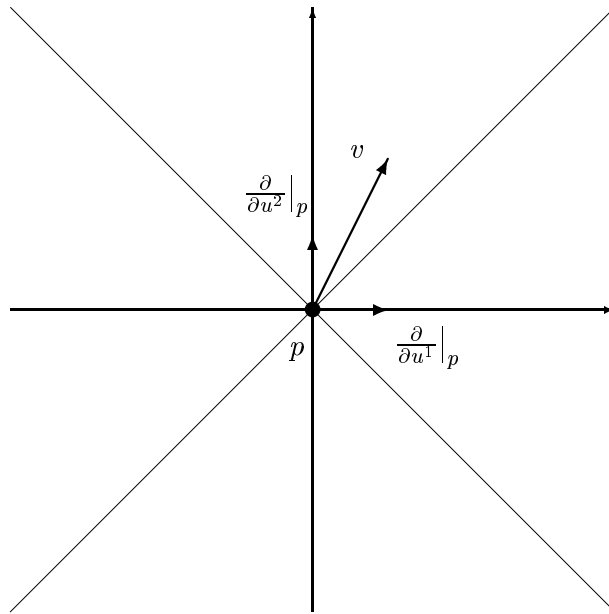
(b) Con la ayuda de esas nuevas estructuras, reemplazar  $(x, m)$  por una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siendo  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ ;

(c) Olvidar cualquier otra estructura de  $\mathbb{R}^2$  (en particular, la existencia de un origen y unos ejes privilegiados).

Se considera la siguiente métrica de Lorentz sobre  $\mathbb{R}^2$

$$g^0 = du^1 \otimes du^1 - du^2 \otimes du^2,$$

siendo  $(u^1, u^2)$  las coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $v$  un vector tangente a  $\mathbb{R}^2$  en un punto  $p \in \mathbb{R}^2$ . Se dice que  $v$  señala al futuro si  $g^0(v, v) \leq 0$  y  $g^0(v, \frac{\partial}{\partial u^2}) < 0$ .



Obsérvese que

$$g^0(v, \frac{\partial}{\partial u^2}|_p) = -(\text{segunda coordenada de } v \text{ en la base } \frac{\partial}{\partial u^1}|_p, \frac{\partial}{\partial u^2}|_p).$$

El par  $(\mathbb{R}^2, g^0)$ , junto con este sentido de futuro, se conoce como el Espaciotiempo de Lorentz-Minkowski de dimensión 2. Para evitar ambigüedades, supondremos que cada curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es inextensible,  $0 \in I$  y  $\gamma^2(0) = 0$ , donde  $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$ .

A la vista de este planteamiento se tiene lo siguiente. Para cada  $(x, m)$ , en las condiciones anteriores, existe una única curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $\text{Im}(\gamma)$  cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , tal que

- (1)  $\gamma^1 = x \circ \gamma^2$ ,
- (2)  $g^0(\gamma'(u), \gamma'(u)) = -m^2, \forall u \in I$ ,
- (3)  $\gamma'(u)$  señala al futuro,  $\forall u \in I$ .

En efecto, basta definir  $\gamma(u) := ((x \circ s^{-1})(u), (s^{-1})(u))$ , siendo  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$s(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \sqrt{1 - v(y)^2} dy.$$

Es decir, basta reparametrizar convenientemente el grafo  $t \rightarrow (x(t), t)$  de  $x$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Recíprocamente, si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es tal que  $\text{Im}(\gamma)$  es cerrado y cumple que

- (i)  $g^0(\gamma'(u), \gamma'(u)) = -m^2, \forall u \in I, m > 0$ ,
- (ii)  $\gamma'(u)$  señala al futuro,  $\forall u \in I$ ,

entonces existe una única curva  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

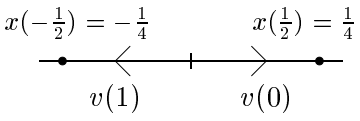
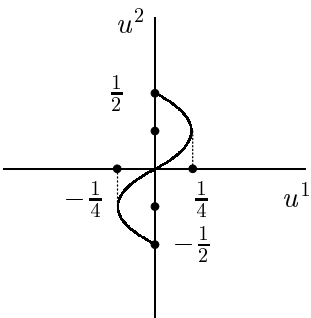
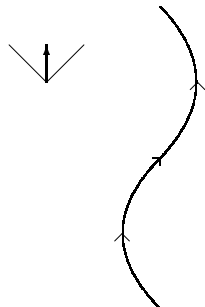
$$\gamma^1 = x \circ \gamma^2$$

y además,

$$|\frac{dx}{dt}| < 1$$

en todo punto de  $\mathbb{R}$ .

El siguiente diagrama esquematiza tres descripciones de un movimiento sobre una recta. (En la última etapa  $M = \mathbb{R}^2$  visto como variedad diferenciable y por tanto desprovisto de "puntos y ejes privilegiados").

NEWTONIANO	ETAPA INTERMEDIA	RELATIVISTA
$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; m = 1$ $x(t) = \frac{1}{4} \text{sen } \pi t$ 	$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 	$\gamma : I \rightarrow M$ 

### 3. Espaciotiempos

En el modelo anterior, la condición  $g^0(\gamma'(u), \gamma'(u)) < 0$  es la traducción matemática de que  $\gamma$  *viaja a una velocidad menor que la de la luz*. Por otro lado,  $g^0$  reemplaza al Potencial Gravitatorio Newtoniano. En efecto, si tenemos un cuerpo pequeño sobre el que sólo actúan fuerzas gravitatorias, Galileo fue el primero en descubrir que su movimiento depende sólo de su posición inicial y su velocidad inicial (no de su composición ni de cualquier otra propiedad). Las geodésicas inextensibles de una variedad de Lorentz tienen una propiedad semejante. Einstein sugirió que tales cuerpos en caída libre podrían ser modelados como algunas de esas geodésicas (las que “viajan” a una velocidad menor que la de la luz). Notemos que en el caso límite, donde no existe campo gravitatorio alguno, ocurre que  $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = 0$ , y esta condición es necesaria y suficiente para que la correspondiente  $\gamma$  sea una geodésica de  $g^0$ .

Una *métrica de Lorentz* sobre una variedad diferenciable  $M$ , y  $\dim M \geq 2$ , es un campo de tensores covariante  $g$  de grado dos tal que  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es un producto escalar no degenerado de *índice uno*, para cualquier punto  $p$  de  $M$ . No es siempre cierto que  $M$  admita una métrica de Lorentz. Para que la admita es condición necesaria y suficiente que exista una distribución 1-dimensional sobre  $M$ . Sabemos que cualquier variedad no compacta admite una métrica de Lorentz; sin embargo, si  $M$  es compacta, resulta que  $M$  se puede equipar con una tal métrica si, y sólo si, la característica de Euler de  $M$  es cero. Una variedad de Lorentz es, pues, un par  $(M, g)$ , siendo  $g$  una métrica de Lorentz sobre  $M$ . Como ejemplo más inmediato se tiene  $(\mathbb{L}^n, g^0)$ , el espacio de Lorentz-Minkowski  $n$ -

dimensional, con  $n \geq 2$ , donde se toma como espacio ambiente  $\mathbb{R}^n$  con la métrica definida por  $g^0 = \sum_{i=1}^{n-1} (du^i)^2 - (du^n)^2$ .

Cada espacio tangente  $T_p M$  es un espacio vectorial lorentziano. Y en él se distinguen tres clases de vectores. Un vector  $v \in T_p M$  se dice *espacial* si  $g_p(v, v) > 0$  o  $v = 0$ ; *temporal* si  $g_p(v, v) < 0$ ; y *nulo* o *isótropo* si  $g_p(v, v) = 0$  y  $v \neq 0$ .

Dos hechos merece la pena destacar:

(1) Si  $v$  es temporal, entonces  $T_p M = L\{v\} \oplus L\{v\}^-$ , donde  $L\{v\}$  representa la recta vectorial generada por el vector  $v$ ; y  $g_p$  sobre  $L\{v\}^-$  es euclídea (diremos entonces que  $L\{v\}^-$  es un subespacio espacial en  $T_p M$ ).

(2) El conjunto de los vectores temporales  $\mathfrak{T}_p$  se divide en dos partes disjuntas (no importa la dimensión de  $M$ ), cada una de las cuales se llama *un cono temporal*. Dos vectores  $u, v \in \mathfrak{T}_p$  están en el mismo cono temporal si, y sólo si,  $g_p(u, v) < 0$ .

Una *orientación temporal* en una variedad de Lorentz  $(M, g)$  es una aplicación  $\tau$  que asigna a cada punto  $p \in M$  un cono temporal  $\tau(p)$  en  $T_p M$ , de manera que  $\tau(p)$  varíe diferenciablemente con respecto a  $p$  (en un sentido natural, que se puede precisar con todo detalle, pero que ahora no sería el caso). Se dice que  $(M, g)$  es *orientable temporalmente* cuando admite una orientación temporal. Este es un concepto métrico, y no topológico (en principio, independiente de la orientabilidad topológica). Se cumple que  $(M, g)$  es orientable temporalmente si, y sólo si, existe un campo temporal de vectores  $X$  (i.e.,  $g(X, X) < 0$ ) sobre  $M$ .

Un *espaciotiempo* es un triple  $(M, g, \tau)$ , donde  $(M, g)$  es una variedad de Lorentz, de dimensión cuatro, que sea orientable temporalmente y  $\tau$  una de sus dos posibles orientaciones temporales. Como ejemplo más sencillo tómesese  $(\mathbb{L}^4, g)$ , con  $g = \sum_{i=1}^3 (du^i)^2 - (du^4)^2$ , y la orientación temporal definida por el campo temporal  $\frac{\partial}{\partial u^4}$ . Es el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski. Si uno mira los puntos de un espaciotiempo  $M$  como sucesos, entonces  $\tau$  nos da la posibilidad de “distinguir” sucesos en el futuro y en el pasado de cada punto. Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  se dice que *señala al futuro* cuando  $\gamma'(u)$  pertenece a la clausura de  $\tau(p)$  en  $T_p M$ . En particular,  $g(\gamma'(u), \gamma'(u)) \leq 0, \forall u \in I$ .

## 4. Observadores

Una *partícula de masa*  $m \geq 0$  en un espaciotiempo  $(M, g, \tau)$ , es una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  tal que  $g(\gamma'(u), \gamma'(u)) = -m^2$  y  $\gamma'(u)$  señala al futuro, para cualquier  $u$  de  $I$ . Una partícula de masa  $m = 0$  se llama *un fotón*. Si  $m = 1$  diremos que es *un observador*. El conjunto imagen,  $\text{Im}\gamma$ , se conoce como *la línea del universo de*  $\gamma$ . Su campo velocidad  $\gamma'(u)$  se llama *el momento-energía* (o 4-velocidad) y  $\frac{D\gamma'(u)}{du}$  *la 4-aceleración de*  $\gamma$ . Se dice que  $\gamma$  *cae libremente* cuando  $\frac{D\gamma'(u)}{du} = 0$ , es decir, cuando  $\gamma$  es una geodésica de  $(M, g)$ .

Sea  $\gamma : I \rightarrow M$  un observador. Entonces  $\forall u_0, u \in I$ ,

$$\int_{u_0}^u \sqrt{-g(\gamma'(u), \gamma'(u))} = u - u_0,$$

ya que el integrando es igual a 1. Por esta razón, a  $u \in I$  se le llama *el tiempo propio de*  $\gamma$ ; y es el tiempo que marca un reloj que viaja con  $\gamma$ .

Un *observador instantáneo* (uno cualquiera de nosotros “aquí y ahora”) es un par  $(z, Z)$ , donde  $z \in M$  y  $Z \in T_z M$ , y tal que  $g(Z, Z) = -1$  y  $Z$  señala al futuro. Asociada a  $(z, Z)$

se tiene la siguiente descomposición ortogonal

$$T_z M = L\{Z\} \oplus L\{Z\}^-,$$

donde  $L\{Z\}$  es el espacio 1-dimensional generado por  $Z$  y  $(L\{Z\}^-, g|_{L\{Z\}^\perp})$  es un espacio Euclídeo 3-dimensional, que llamaremos *el espacio físico observado por*  $(z, Z)$ .

Sea  $\gamma : I \rightarrow M$  una partícula con  $\gamma(u) = z$ . Según la descomposición anterior, escribiremos

$$\gamma'(u) = eZ + P.$$

Entonces  $e = -g(\gamma'(u), Z)$ , que es positivo (aunque  $m = 0$ ). A  $e$  se le llama *la energía que*  $(z, Z)$  *mide de*  $\gamma(u)$  *y a*  $P$  *el 3-momento relativo a*  $(z, Z)$ . Además, se define  $v := \frac{1}{e}P$  como *la velocidad de*  $\gamma(u)$  *medida por*  $(z, Z)$ .

Ocurre que

$$0 \leq \|v\| := \sqrt{g(v, v)} \leq 1$$

y

$$\|v\| = 1 \iff m = 0.$$

Si  $m > 0$  (y por tanto  $\|v\| < 1$ ) obtenemos  $-m^2 = -e^2 + e^2\|v\|^2$ , de donde se sigue que

$$e = \frac{m}{\sqrt{1 - \|v\|^2}}.$$

Además,  $e = m \iff v = 0$  (recordemos que en nuestras unidades se tiene que  $c = 1$ ). Ahora bien, en el sistema CGS (cegesimal) se tiene que

$$e = mc^2$$

si, y sólo si, la velocidad de  $\gamma(u)$  medida por  $(z, Z)$  es cero.

Si ahora  $\alpha : I \rightarrow M$  es un observador, se tiene

$$T_{\alpha(u)} M = L\{\alpha'(u)\} \oplus L\{\alpha'(u)\}^-, \forall u \in I.$$

Por tanto, *el espacio físico 3-dimensional que*  $\alpha$  *percibe* “cambia a medida que transcurre su tiempo propio”. Imaginemos que  $\alpha$  observa un vector  $v \neq 0$  en el instante  $u_1$  de su tiempo propio, es decir,  $v \in L\{\alpha'(u_1)\}^-$ . Si en el instante  $u_2 > u_1$  observa  $\bar{v} \in L\{\alpha'(u_2)\}^-$ , ¿cómo puede averiguar que  $\bar{v}$  se ha obtenido al rotar  $v$ ? Si  $\alpha$  estuviese en caída libre, el transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$  desde  $u_1$  hasta  $u_2$  lleva  $L\{\alpha'(u_1)\}^-$  en  $L\{\alpha'(u_2)\}^-$  y puede decir si  $v$  y  $\bar{v}$  tienen la misma dirección espacial. Si  $\alpha$  no está necesariamente en caída libre, la herramienta matemática apropiada es “la conexión a lo largo de  $\alpha$ ”; concretamente, es *la conexión de Fermi-Walker de*  $\alpha$ , que esencialmente es la derivada covariante usual en el caso de que  $\alpha$  esté en caída libre. Naturalmente, el transporte paralelo respecto de esta conexión ha de conservar esta última descomposición ortogonal.

## 5. Campos electromagnéticos. Ecuaciones de Maxwell

La teoría electromagnética relativista (no cuántica) es una de las partes más elegantes de la Física. Se le califica de “formalmente simple”y, por supuesto, desde el punto de vista humano el electromagnetismo es la más importante de las interacciones.

Si  $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$  y  $\vec{B} = \vec{B}(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , son los clásicos campos eléctrico y magnético;  $\sigma(x, t)$  es la densidad de carga eléctrica (carga por unidad de volumen) y  $\vec{j} = \vec{j}(x, t)$  es la densidad de corriente eléctrica (carga por unidad de área y unidad de tiempo) entonces las ecuaciones de Maxwell (clásicas) se escriben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Ley de Biot-Savart})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma \quad (\text{Ley de Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{j} \quad (\text{Ley de Ampère-Maxwell})$$

en nuestras unidades ( $c = 1$ ,  $8\pi G = 1$ ). Notemos que  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{j}$  son campos de vectores sobre  $\mathbb{R}^3$  dependiendo del parámetro  $t$ . Si  $g_u$  representa la métrica Euclídea usual de  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  son las funciones  $\text{div}\vec{B}$  y  $\text{div}\vec{E}$  (relativas a  $g_u$ ) que dependen de  $(x, t)$ ;  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{Rot}\vec{E}$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{Rot}\vec{B}$  y si  $\vec{B} = \sum_{i=1}^3 B^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ,  $\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ , entonces  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u^i}$ , y  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial E^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u^i}$ . Pongamos  $u^4 = t$  y consideremos la 2-forma  $F$  sobre  $\mathbb{R}^4$  definida por

$$F = 2 \sum_{i=1}^3 E^i du^i \wedge du^4 + 2(B^1 du^2 \wedge du^3 + B^2 du^3 \wedge du^1 + B^3 du^1 \wedge du^2).$$

Notemos que  $F$  contiene la misma información que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  juntos.

Sea  $J = \sum_{i=1}^4 J^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$ , donde  $\vec{j} = \sum_{i=1}^3 J^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  y  $J^4 = \sigma$ . Entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \iff \quad dF = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\sigma \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\vec{j} \quad \iff \quad \text{div}\hat{F} = 4\pi J,$$

siendo  $\hat{F}$  el campo de tensores 2-contravariante equivalente con  $F$  respecto de la métrica de Lorentz usual de  $\mathbb{R}^4$ ,  $g = \sum_{i=1}^3 (du^i)^2 - (du^4)^2$ , y  $\text{div}\hat{F}$  es el campo de vectores sobre  $\mathbb{R}^4$  dado por

$$\phi(\text{div}\hat{F}) = \sum_{i=1}^4 (\nabla_{X_i} \hat{F})(\phi, \omega^i),$$

siendo  $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ , y  $\phi$  cualquier 1-forma sobre  $\mathbb{R}^4$ .

De modo que con este truco escribimos las ecuaciones de Maxwell sobre  $\mathbb{R}^3$  mucho más sencillas sobre el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski. Más generalmente, dado un

espaciotiempo  $(M, g, \tau)$ , con  $M$  orientable, definimos un *campo electromagnético* sobre él como una 2-forma  $F$  sobre  $M$ . Veamos cómo cada observador instantáneo  $(z, Z)$  deduce dos “cantidades” relativas a  $F$ . Representemos por  $\tilde{F}_z \in \text{End}(T_z M)$  dado por

$$g(X, \tilde{F}_z(Y)) = F_z(X, Y) \quad \forall X, Y \in T_z M$$

entonces  $E := \tilde{F}_z(Z) \in L(\{Z\})^-$  se llama el *vector eléctrico que mide*  $(z, Z)$  de  $F$ . En el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski si  $z \in \mathbb{R}^4$  y  $Z = \frac{\partial}{\partial u^4}|_z$ , el vector eléctrico del campo electromagnético  $F$  que hemos construido es precisamente

$$\vec{E}(z) = \sum_{i=1}^3 E^i(z) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_z.$$

Sea ahora  $\Omega$  el elemento de volumen métrico correspondiente a  $g$  (por ejemplo,  $\Omega = du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \wedge du^4$  en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski). Teniendo en cuenta que la aplicación

$$\begin{aligned} L(\{Z\})^- &\longrightarrow A_z(L(\{Z\})^-) \\ V &\longmapsto \Omega_V, \end{aligned}$$

donde  $\Omega_V(X, Y) := 4!\Omega(X, Y, V, Z)$ , para todo  $X, Y \in L(\{Z\})^-$ , es un isomorfismo de espacios vectoriales; y si  $F'_z = F_z|_{L(\{Z\})^\perp}$ , entonces existe un único  $B \in L(\{Z\})^-$  tal que

$$\Omega_B = F'_z.$$

Entonces a  $B$  se le llama el *vector magnético que*  $(z, Z)$  mide de  $F$ . En el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski, para  $z \in \mathbb{R}^4$  y  $Z = \frac{\partial}{\partial u^4}|_z$ , tenemos que  $B$  es

$$\vec{B}(z) = \sum_{i=1}^3 B^i(z) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_z.$$

El concepto de campo electromagnético unifica los conceptos prerrelativistas de campo eléctrico y campo magnético. Estos dos son ahora conceptos relativos. De hecho, en el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski si  $F = 2Adu^3 \wedge du^1$  y suponemos  $A(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{R}^4$ , se tiene lo siguiente:



Vectores observados de $F \rightarrow$ Observador $\downarrow$	Vector eléctrico	Vector magnético
$\left(z, \frac{\partial}{\partial u^4} \Big _z\right)$	0	$A(z) \frac{\partial}{\partial u^2} \Big _z$
$\left(z, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial u^1} \Big _z + \frac{5}{3} \frac{\partial}{\partial u^4} \Big _z\right)$	$\frac{4}{3} A(z) \frac{\partial}{\partial u^3} \Big _z$	$\frac{5}{3} A(z) \frac{\partial}{\partial u^2} \Big _z$

La colección de todos los vectores eléctricos en  $z$  determina completamente  $F_z$ . En efecto, si todo observador instantáneo  $(z, Z)$  encuentra que  $\hat{F}_z Z = 0$ , entonces un argumento sencillo de álgebra lineal permite decir que  $F_z = 0$ .

El objeto básico de interés en las matemáticas de la Relatividad General es el concepto de *modelo relativista*. Se define como tal una terna  $(M, \mathcal{M}, F)$  donde  $M$  es un espaciotiempo (orientable),  $F$  es un campo electromagnético sobre  $M$  y  $\mathcal{M}$  es un *modelo material* sobre  $M$ , es decir

$$\mathcal{M} = \{(m_i, \varepsilon_i, P_i, \eta_i) : i = 1, \dots, N\}$$

es una colección de  $N$  campos de vectores  $P_i$  de manera que  $g(P_i, P_i) = -m_i^2$  y  $P_i$  señala al futuro (en cada punto),  $\eta_i : M \rightarrow [0, \infty)$  es una función diferenciable y  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$  sujeto a la condición de que si  $m_i = 0$  entonces  $\varepsilon_i = 0$ .

Cada  $(m_i, \varepsilon_i, P_i, \eta_i)$  se llama *flujo de partículas* de masa  $m_i$  (las curvas integrales de  $P_i$  son todas partículas en  $M$  de masa  $m_i$ ,  $\eta_i$  es la densidad y  $\varepsilon_i$  la carga eléctrica).

Asociado a  $\mathcal{M}$  podemos definir un campo de tensores

$$T = \sum_{i=1}^N \eta_i P_i^\flat \otimes P_i^\flat,$$

donde  $P_i^\flat$  es la 1-forma  $P_i^\flat(X) := g(P_i, X)$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Ocurre que  $T(Z, Z) \geq 0$  para todo observador instantáneo  $(z, Z)$ ; y que  $T(Z, Z) = 0$ , para todo  $(z, Z)$ , si y sólo si  $T_z$  es nulo.  $T$  se llama el tensor *tensión-energía* de  $\mathcal{M}$ . Por otro lado el campo de vectores  $J = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \eta_i P_i$  se llama la *densidad de carga-corriente* de  $\mathcal{M}$ .

La ley básica para estudiar la influencia de  $M$  y  $\mathcal{M}$  sobre  $F$  son las famosas *ecuaciones de Maxwell*:

$$dF = 0, \tag{5.1}$$

$$\text{div} \hat{F} = 4\pi J, \tag{5.2}$$

donde  $\hat{F}$  es el tensor 2-contravariante canónicamente asociado a  $F$  mediante  $g$ , y  $\text{div}\hat{F}$  representa el campo de vectores definido por

$$\phi(\text{div}\hat{F}) = \sum_{i=1}^4 (\nabla_{X_i}\hat{F})(\phi, \omega^i),$$

siendo  $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ , y  $\phi$  cualquier 1-forma sobre  $M$ .

Diremos que  $(M, \mathcal{M}, F)$  obedece las *ecuaciones materiales simples* cuando

$$\begin{aligned} \nabla_{P_i} P_i &= \varepsilon_i F^l P_l \text{ si } m_i \neq 0; \\ \nabla_{P_i} P_i &= 0 \text{ si } m_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{div}(\eta_i P_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

La primera se llama la ecuación de la *fuerza de Lorentz* y para una curva integral  $\gamma$  de  $P_i$  se pone  $\frac{D\dot{\gamma}}{du} = \varepsilon_i F^l \dot{\gamma}$ . La segunda es una ley de conservación.

Tanto las ecuaciones de Maxwell como las ecuaciones materiales simples son ecuaciones diferenciables que tienen solución fijadas unas condiciones iniciales. En el caso de 5.1 y 5.2 se llaman las ecuaciones de ligadura. En ambos casos el subconjunto de  $M$  donde se escriben esas condiciones iniciales es una hipersuperficie espacial y la solución está definida en un abierto de  $M$  que contiene dicha hipersuperficie. Intuitivamente los datos que se conocen sobre la hipersuperficie espacial son “el presente”, y la evolución con “el tiempo” de la solución encontrada. Es costumbre llamarles a estos resultados “el presente determina el futuro”.

## 6. Ecuación de campo de Einstein

Veamos la forma concreta en que Einstein postuló cómo materia y electromagnetismo influyen en el espaciotiempo. Apuntemos primeramente el diferente punto de vista que sobre los espaciotiempos podríamos tener los matemáticos y los físicos. Para un matemático la métrica  $g$  existe a priori y es en  $(M, g)$  donde se desenvuelve su estudio: la geometría de  $(M, g)$ . A veces para un físico hay algún tipo de evidencia de cómo se distribuyen la masa y la radiación en una región del universo. La pregunta es entonces, ¿qué modelo geométrico me puede representar dicha región? De una forma más sencilla: conocida la masa y la radiación determinar la métrica de Lorentz  $g$ . Esta estrategia es la misma que cuando en teoría Newtoniana si se conocía la masa, dada por una densidad  $\rho$ , se trataba de hallar el potencial gravitatorio  $\Phi$ , para luego obtener el campo gravitatorio  $-\nabla\Phi$ . La herramienta era la clásica ecuación de Poisson  $\Delta\Phi = \frac{1}{2}\rho$  con condiciones iniciales convenientes.

Sea  $(M, \mathcal{M}, F)$  un modelo relativista. El modelo material determina un campo de tensores  $T$  llamado el tensor tensión-energía de  $\mathcal{M}$ . Asociado a  $F$  también hay un tensor tensión-energía  $E$  ( $E$  es de tipo (0,2), simétrico y  $E(X, X) \geq 0$  para todo  $X$  causal en  $T_p M$ , para todo  $p \in M$ ). Decimos que  $(M, \mathcal{M}, F)$  obedece la *ecuación de campo de Einstein* si

$$G(g) = T + E,$$

donde  $G(g) := \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg$  es el tensor de Einstein de  $g$  ( $S$  representa la curvatura escalar de  $g$ ). Puede uno mirar esta ecuación como un sistema de diez ecuaciones diferenciales en  $g_{ij}$ ,

$1 \leq i \leq j \leq 4$ , de segundo orden y no lineal. Primero se determina, si existe, la métrica  $g$  localmente. Luego se estudia la prolongabilidad hasta una solución maximal. La ecuación de campo de Einstein se puede reescribir como

$$Ric = T - \frac{1}{2}(\text{traza}_g T)g + E$$

de donde se deduce que  $Ric(X, X) \geq 0$ , para todo  $X$  causal en  $T_p M$ , para todo  $p$  de  $M$ . Esto da una condición geométrica delimitando así qué métricas de Lorentz pueden ser “soluciones” de la ecuación de campo de Einstein. Por otro lado, si  $Q \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $U$  abierto de  $M$ ,  $g(Q, Q) = -1$ ,  $Q$  señala al futuro en todo punto y  $\nabla_Q Q = 0$ ,  $-\frac{1}{3}Ric(Q, Q)$  tiene la interpretación de aceleración media relativa de los observadores ‘integrales’ de  $Q$ , que estarían en caída libre. Por tanto,  $Ric(Q, Q) \geq 0$  significa que, en media, la gravedad atrae. Por otro lado, si  $(M, \mathcal{M}, F)$  obedece a la ecuación de campo de Einstein, entonces

$$Ric = 0 \iff T = 0 \text{ y } F = 0,$$

es decir, un modelo relativista con  $Ric = 0$  representa una región del universo en donde no hay masa ni radiación, ¡una región vacía! Por eso, un espaciotiempo con  $Ric = 0$  se dice *una solución de la ecuación de campo de Einstein para el vacío*. El espaciotiempo de Lorentz-Minkowski  $(\mathbb{R}^4, g^0)$ , con  $g^0 = \sum_{i=1}^3 (du^i)^2 - (du^4)^2$ , es llano y, por tanto, cumple  $Ric^0 = 0$ . Si

$$M = \{(t, r) / t \in \mathbb{R}, r > 2m\} \times \mathbb{S}^2,$$

con  $m > 0$ , y

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

siendo  $dr^2$  la métrica usual de  $\mathbb{S}^2$ , entonces  $(M, g)$  es un espacio tiempo, descubierto por Schwarzschild en 1916 al estudiar el campo gravitatorio en el exterior de un cuerpo esférico simétrico. Se cumple  $Ric = 0$ , pero  $(M, g)$  no es llano. Nótese que usando coordenadas esféricas podemos escribir  $g^0 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\sigma^2$ , con lo que, intuitivamente hablando, para  $r \rightarrow \infty$ ,  $g$  se aproxima a  $g^0$  ( $r$  se puede interpretar como distancia al cuerpo esférico). Con el espaciotiempo de Schwarzschild se ha podido calcular el ángulo que forma la luz cuando pasa cerca del Sol y es atraída por la gravedad. También se obtiene una estimación de la precesión del perihelio de Mercurio. Ambas cantidades han sido confirmadas con bastante exactitud por datos experimentales.

Finalmente vamos a dar dos ejemplos del uso de la ecuación de campo de Einstein. Supongamos un modelo relativista  $(M, \mathcal{M}, F)$  con  $F = 0$  y  $\mathcal{M} = \{(m > 0, \varepsilon = 0, P, \eta)\}$  (*una nube de polvo*). Supongamos que verifica la ecuación de campo de Einstein. Ponemos  $Z = \frac{1}{m}P$ , entonces para todo  $x$  de  $M$ ,  $(x, Z_x)$  es un observador instantáneo y la densidad de energía que mide de  $\mathcal{M}$  es  $\rho := \eta m^2$ , y  $\rho$  coincide con la curvatura escalar de  $M$ . La ecuación de campo de Einstein nos da

$$\text{div}(\rho Z) = 0 \text{ y } \nabla_Z Z = 0,$$

es decir,  $\mathcal{M}$  satisface las ecuaciones materiales simples. Supongamos, además, que  $Z$  es irrotacional (esto junto con  $\nabla_Z Z = 0$  nos da la posibilidad de sincronizar uniformemente

los observadores que son curvas integrales de  $Z$ ). Raychaudhuri demostró en 1955 lo siguiente: Si  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  es un observador en  $Z$  tal que  $(div Z)_{\gamma(0)} = b \in (-\infty, 0)$ , entonces  $a \leq \frac{3}{|b|}$ . Además, si se da la igualdad entonces  $\lim_{u \rightarrow a = \frac{3}{|b|}} \rho(\gamma(u)) = \infty$ .

La función  $div(Z)$  se interpreta como la 3-velocidad media relativa de los observadores en  $Z$ . Decir que  $div(Z) < 0$  se interpreta como que los observadores están, en media, aproximándose. La hipótesis  $(div Z)_{\gamma(0)} < 0$  implica  $(div Z)_{\gamma(u)} < 0$  para todo  $u$ , como consecuencia de la ecuación de campo de Einstein.

Este resultado nos dice que al observador  $\gamma$  le espera un futuro bastante horrible. En un tiempo propio finito  $\gamma$  ‘desaparece’ (en particular,  $M$  no es geodésicamente completo). Además, en los últimos instantes de su vida,  $\gamma$  percibirá que sobre él actúa una densidad de energía enorme, no acotada.

Finalmente señalamos el siguiente resultado debido a Hawking, 1967, que aunque no es el más relevante si es quizás el más sencillo de entender de entre los que obtuvo sobre “singularidades”.

Sea  $(M, g, \tau)$  un espacio tiempo y supongamos que se verifican:

1.  $Ric(X, X) \geq 0$  para todo  $X$  causal;
2. Existe una hipersuperficie espacial  $S$  embebida y compacta;
3. La segunda forma fundamental de  $S$  relativa a la orientación temporal  $\tau$  tiene traza positiva en todo punto de  $S$ .

Entonces cada geodésica temporal que señale al futuro e interseque ortogonalmente a  $S$ , digamos  $\gamma : (-b, 0] \rightarrow M$ ,  $b > 0$ ,  $\gamma(0) \in S$  y  $\dot{\gamma}(0) \perp T_{\gamma(0)}M$  con  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$  cumple  $-b \geq -\frac{1}{c}$ , siendo  $3c$  el mínimo de la traza de la segunda forma fundamental sobre  $S$ .

Mientras que en el teorema de Raychaudhuri se predice un colapso hacia un “agujero negro”, el teorema de Hawking afirma que alguna vez, hace ya mucho, existió un “big bang”. Comentemos que (1) es una condición que ocurre si el espacio tiempo es uno de los componentes de un modelo relativista que satisface la ecuación de campo de Einstein. (2) es la forma matemática de describir un universo espacialmente cerrado. Si representamos por  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de  $M$ ,  $\xi$  el normal unitario de  $S$  señalando al futuro y  $v \in T_pM$  entonces  $Av := -\nabla_v \xi \in T_pM$  y la segunda forma fundamental relativa a  $\xi$  es  $h(u, v) = -g(Av, w)$ ,  $v, w \in T_pM$ . Llamamos  $H = -\frac{1}{3}traza(A)$ , que se llama curvatura media de  $S$  relativa a  $\xi$ . (3) nos dice que  $H > 0$  y  $H \geq c$  sobre todo  $S$ , donde  $c$  representa el mínimo sobre el compacto  $S$ . Si movemos  $S$  por direcciones normales usando la variación normal  $F_u(p) = \exp_p(u\xi_p)$ , entonces para  $u$  pequeño  $F_u(S)$  es una hipersuperficie espacial compacta con

$$vol(F_u(S)) = vol(S) + u \left. \frac{d}{du} \right|_{u_0} vol(F_u(S)).$$

Ahora bien,  $\left. \frac{d}{du} \right|_{u_0} vol(F_u(S)) = 3 \int_S H dV$ , de manera que  $\left. \frac{d}{du} \right|_{u_0} vol(F_u(S)) > 0$ , lo que implica que  $\left. \frac{d}{du} \right|_u vol(F_u(S)) > 0$ , para  $u$  próximo a  $u_0$ . Así para  $u \geq 0$  próximo a cero,  $vol(F_u(S)) \geq vol(S)$ , que se interpreta como una expansión del Universo. Brevemente, un universo en expansión y espacialmente cerrado es “singular” en el pasado.

# Bibliografía

- [1] Beem, J.K. and Ehrlich, P.E. *Global Lorentzian Geometry*. Dekker, New York, 1981.
- [2] Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R. *The Large Scale Structure of Spacetime*. Cambridge Univ. Press, 1973.
- [3] Misner, C.W., Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, 1973.
- [4] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Manifolds with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [5] Parrot, S. *Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [6] Penrose, R. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Regional Conf. Ser. in Applied Math. **7**, Siam, 1972.
- [7] Sachs, R.K. and Wu, H. *General Relativity for Mathematicians*. Grad. Text. in Math., 48. Springer-Verlag, 1977.
- [8] Sachs, R.K. and Wu, H. *General Relativity in Cosmology*. Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 1101–1164.