



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática Aplicada

LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS DE
UNA ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE
CON DISIPACIÓN

TESIS DOCTORAL

Aureliano Matías Robles Pérez

Granada, Septiembre 2000

Tesis doctoral realizada, en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, bajo la dirección del *Profesor Dr. Rafael Ortega Ríos*. Fue leída, el día 8 de Septiembre de 2000, ante el tribunal formado por los *Profesores Drs.:*

*Jean Mawhin (U. Católica de Lovaina),
James R. Ward, Jr. (U. de Alabama-Birmingham),
Julián López Gómez (U. Complutense de Madrid),
José C. Sabina de Lis (U. de La Laguna),
Juan Campos Rodríguez (U. de Granada).*

Obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

A Conchi.

One may be a mathematician of the first rank
without being able to compute. It is possible to be
a great computer without having the slightest idea
of mathematics.

Novalis.

But sometimes,
only sometimes,
it is good to do some calculations,
only a few ones.

M. Selbor.

Prólogo: Algunas reflexiones en voz alta

En el origen de esta memoria hay dos hechos que yo considero desconcertantes. El primero quizás no sea calificado de esta forma por el co-protagonista. Sí lo fue por mí entonces. Ahora no reniego de ello. Pero no es este el instante y lugar para hablar más.

La segunda circunstancia ha sido la culpable del rumbo tomado por esta memoria. En mi inocencia y por mi “aritmética” visión de las Matemáticas, intenté buscar un principio del máximo para una ecuación hiperbólica. En este momento creo que haría un estudio más convencional. Afortunadamente existen algunos principios del máximo para ecuaciones de ondas y yo tuve la suerte de dar con uno de ellos. Y al decir suerte digo bien y no me arrepiento de ello. Sobre todo cuando este comienzo me ha proporcionado la posibilidad de desarrollar bastante trabajo. Que dicho trabajo sea mejor o peor es algo que tú lector eres quien debe decidir.

Quisiera hacer a continuación una serie de puntualizaciones sin las cuales estimo que no sería muy adecuado que yo siguiera escribiendo (ni tú leyendo) esta memoria.

1. He decidido escribir como si estuviera impartiendo una clase. Esto significa que alterno la primera con la segunda persona. Tú como lector no tienes que considerar este acto como una falta de respeto. Al contrario, pensé que al dirigirme a ti de esta forma captaría mejor tu atención y así, si en algún momento el trabajo hecho no te resultaba muy interesante, al menos no te sería distante y “pesado” de leer. Por otra parte, también me surgió la idea tras leer algún capítulo de [13]. En este libro el autor utiliza muchas veces este estilo directo que me llamó bastante la atención y, la verdad sea dicha, me hizo comprender mejor algunos conceptos matemáticos.

2. A la hora de referirme a la ecuación de sine-Gordon he preferido utilizar la denominación inglesa antes que la castellana (lo cual hubiera sido, sin duda, mucho más castizo). Quizás me tacharás de no preservar la pureza del idioma castellano, pero puedes estar muy seguro de que no es así (de hecho, aparte de aceptar todas las críticas que me puedas hacer tras leer la memoria con respecto a la parte científica del trabajo, también aceptaré todo lo referente a la parte literaria del mismo). La principal razón de mantener sine-Gordon es conservar la idea inicial de su nombre. Como seguramente conocerás, en el mundo de la física hay una importante ecuación denominada ecuación de Klein-Gordon y que viene dada por la expresión

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = 0.$$

Puedes observar que formalmente se parece bastante a la ecuación de sine-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda \sin u = 0.$$

Además, fíjate en que, si los pronuncias en sus respectivos idiomas, los vocablos “sine” y “Klein” riman.

3. Como penúltima nota quiero hacer referencia al “tono” científico de la memoria. Evidentemente no soy yo la persona más adecuada para juzgar este punto pero creo que muchos posibles lectores considerarán que algunas cuentas están de más o que algunas ideas demasiado simples ocupan un espacio un tanto amplio. También puede ocurrir lo contrario: algunas ideas quizás estén concentradas. Puede que dentro de unos años yo también piense de igual forma pero, hoy por hoy, mi idea es que, si uno ha tenido que emplear un tiempo en comprender o justificar algo, es mejor que no haga que los demás gasten otra vez ese tiempo. Ahora bien, todo lo dicho vale siempre que no haya una referencia adecuada. Espero que si llegas al final no te contraríe esta actitud mía.

4. En conexión con el punto anterior, podrás observar que en el capítulo 1 hay más “cuentas” que en el capítulo 2. Esto es fiel reflejo del proceso de aprendizaje que he tenido durante la elaboración de los trabajos que han dado lugar a la memoria. Me reitero en que nunca negaré mi espíritu un tanto calculista. Es cierto que siempre pensé que las matemáticas no eran otra cosa que un juego en el que ganaba quien supiera operar mejor. Posteriormente acepté que no era así, pero seguía resistiéndome a que no pudiera hacer matemáticas sólo con cuentas. Hoy día creo que lo acertado es estar de acuerdo con Novalis y aceptar la matización de Selbor, todo en su justa medida es lo mejor. Espero que en esta tesis doctoral aprecies la evolución.

Llega el momento de los agradecimientos. Es ésta una tarea que nunca me ha sido fácil. Por tanto creo que lo adecuado es que señale mi más sincero agradecimiento a todo aquél que se considere (de manera razonable) deudor de este trabajo.

Índice

Prólogo: Algunas reflexiones en voz alta	v
Introducción	1
Capítulo 1. Un principio del máximo para las soluciones periódicas de la ecuación del telégrafo	3
1.1. Introducción al capítulo 1	3
1.2. Algunos ejemplos	5
1.3. Concepto de solución y regularidad	10
1.4. Un principio del máximo en el toro	13
1.5. Algunos resultados sobre operadores lineales positivos	14
1.6. Demostraciones	18
1.7. El método de sub-super-soluciones	35
Capítulo 2. El índice de las soluciones periódicas de ciertas ecuaciones de evolución de segundo orden	39
2.1. Introducción al capítulo 2	39
2.2. Operadores de tipo α -contractivo y teoría de grado	41
2.3. La ecuación lineal	45
2.4. La ecuación no lineal	48
2.5. Dos definiciones de índice	55
2.6. El teorema de dualidad	58
Capítulo 3. La ecuación de sine-Gordon forzada	71
3.1. Introducción al capítulo 3	71
3.2. Algunas consideraciones previas	71
3.3. Sub y super-soluciones	75
3.4. Multiplicidad e inestabilidad de las soluciones periódicas	77
3.5. Otra forma de atacar el problema	80
Epílogo: ¿Y ahora qué?	83
Bibliografía	85

Introducción

Cuando comenzó el trabajo que ha dado lugar a esta memoria, mi director de tesis tenía en mente la idea de desarrollar un estudio de la ecuación de sine-Gordon forzada y con rozamiento

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + cu_t(t, x) + a \sin u(t, x) = f(t, x),$$

de forma que tú lector pudieras reconocer extensiones a una ecuación en derivadas parciales de varios resultados conocidos para la ecuación del péndulo forzado

$$x''(t) + cx'(t) + a \sin x(t) = f(t).$$

Más concretamente, estos resultados se centrarían en las soluciones doblemente periódicas, esto es, soluciones que satisfacen

$$u(t, x) = u(t + 2\pi, x) = u(t, x + 2\pi), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

El principal problema era que en ecuaciones en derivadas parciales no estaban desarrolladas todas las herramientas necesarias para tal estudio. Así pues, tenía que diseñarlas.

La primera idea de mi director era utilizar el método de la alternativa (Liapunov-Schmidt) para deducir los resultados. En el capítulo 3 haré algunos comentarios sobre esto. Sin embargo, cuando comencé a estudiar la ecuación lineal asociada a la ecuación de sine-Gordon, la denominada ecuación del telégrafo,

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + cu_t(t, x) + \lambda u(t, x) = f(t, x),$$

“vi” que había un principio del máximo. Como habrás adivinado con tal principio tenía a mano el método de sub-super-soluciones. Es este método una de las armas fundamentales para el estudio del péndulo. Puedes consultar [38] para ver como actúa.

El siguiente paso fue intentar generalizar los resultados de [45]. La herramienta en este caso era la extensión del Teorema de Dualidad que puedes ver en [26]. Esto conllevó la revisión de los conceptos relativos a la definición de grado para una determinada clase de operadores introducida en [43] y [44].

El trabajo para establecer la teoría relativa a estos dos escalones previos alcanzó un volumen mayor de lo esperado en un principio. Es por esto que, en esta memoria, ocupa una mayor extensión la parte dedicada a la construcción de los pilares que la parte dedicada a las consecuencias para la ecuación de sine-Gordon. No te dejes engañar por el título propuesto.

Pudiera parecer que hay algún tipo de arrepentimiento por mi parte. En absoluto, si uno quiere ser consecuente en un futuro con su trabajo, primero ha de estar asentado sobre una sólida base. Si este asentamiento necesita de un tiempo y un

espacio, mejor es que lo “pierdas” al inicio que cuando no puedas evitar la catástrofe agobiado por la situación. Te pido disculpas pues este párrafo quizás debería haber estado en el prólogo.

De acuerdo con todo lo dicho, la estructura que te propongo en esta memoria es la siguiente. En el capítulo 1 presento el principio del máximo para la ecuación del telégrafo y, como principal consecuencia, desarrollo el método de sub-soluciones para esta ecuación. En el capítulo 2 pruebo una extensión del Teorema de Dualidad al caso infinito-dimensional. Finalmente, en el capítulo 3 aprovecho las herramientas de los dos primeros capítulos para obtener los resultados deseados para una ecuación algo más general que la ecuación de sine-Gordon.

Para finalizar este prólogo es conveniente que justifique la elección del tema. No una justificación de contenidos, que creo ya hecha en las líneas anteriores, sino una justificación de la elección hecha de la ecuación a estudiar. Bien, la ecuación de sine-Gordon tiene relación con diversos fenómenos físicos. Como una breve muestra de esto:

- a) La referencia más antigua que he encontrado en relación con la ecuación de sine-Gordon sin rozamiento y autónoma, en concreto como modelo del fenómeno de fluxión de Josephson en superconductores, ha sido [54]. En este trabajo aún se identifica a la ecuación de sine-Gordon con un caso no lineal de la de Klein-Gordon.
- b) En [28] encontrarás distintas situaciones cuyo modelo matemático es la ecuación de sine-Gordon.
- c) En [42] aparece un análogo mecánico. Aquí ya se da una interpretación del caso con rozamiento y fuerza externa periódica.
- d) En [29] puedes ver cómo se relacionan físicamente las ecuaciones de sine-Gordon y del péndulo.
- e) Como ejemplo de trabajo más reciente te doy [32].

A partir de todo esto, puedo señalar al problema planteado como perteneciente al tipo de problemas que deben interesar a los que, como yo, quieren hacer unas matemáticas conectadas con la física.

Finalmente me atrevo a decir que, como consecuencia de las propiedades que he obtenido, sine-Gordon con disipación está en la frontera entre los mundos hiperbólico y parabólico. Por tanto se merece un estudio propio ... y yo espero haber contribuido al mismo.

Concluyo aquí esta introducción global. Al comienzo de cada uno de los capítulos encontrarás una introducción local. Creo que de esta forma quedan más claras las propuestas y resultados de cada capítulo.

CAPÍTULO 1

Un principio del máximo para las soluciones periódicas de la ecuación del telégrafo

1.1. Introducción al capítulo 1

Para comenzar, considera un operador lineal diferencial $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}u$ actuando sobre funciones

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que están definidas sobre una variedad prefijada Ω . Estas funciones pertenecerán a una cierta familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Además, la definición de \mathcal{B} puede incluir condiciones de contorno u otros requerimientos que deben ser satisfechos por cualquier función $u \in \mathcal{B}$. Diré que \mathfrak{L} satisface el principio del máximo si la inecuación diferencial

$$\mathfrak{L}u \geq 0, \quad u \in \mathcal{B}$$

implica

$$u \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

En el libro [51] tienes un detallado estudio de los principios del máximo para operadores de segundo orden. También puedes ver otros resultados en [50], [11], [27], [49], [15], [4], [34], etc.

A partir de este momento estudiaré el principio del máximo para las soluciones periódicas de la ecuación del telégrafo. El operador a considerar es

$$\mathfrak{L}_\lambda u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u$$

con $c > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Las funciones u en la clase \mathcal{B} están definidas en todo el plano

$$u = u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

y son doblemente periódicas en el siguiente sentido,

$$u(t + 2\pi, x) = u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

El principal resultado del capítulo dirá que \mathfrak{L}_λ satisface el principio del máximo si y sólo si λ pertenece a un cierto intervalo de la forma

$$(0, \nu],$$

donde $\nu = \nu(c)$ es una cantidad positiva que depende de c . He sido incapaz de calcular explícitamente dicho número ν aunque sí daré una estimación. En una primera aproximación diré que

$$\frac{c^2}{4} < \nu \leq \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

La positividad del coeficiente de fricción c es esencial como podrás comprobar en un ejemplo posterior para el caso $c = 0$.

Te preguntará en este instante (en el caso de no haberlo hecho hace rato) cuál es la importancia de los principios del máximo y su relación con el tema de esta memoria. A la primera pregunta te pueden responder los trabajos [51] y [3]. En ellos verás algunas de las aplicaciones más clásicas a las teorías lineal y no lineal de ecuaciones diferenciales. En cuanto a la segunda pregunta, en este capítulo presentaré dos consecuencias del principio del máximo obtenido. Primero, y juntamente con la teoría de operadores lineales positivos (que puedes consultar, por ejemplo, en [24]), obtendré varios corolarios para la ecuación del telégrafo con coeficientes variables. En particular, te mostraré que el principio del máximo sigue siendo válido para el operador

$$\mathfrak{L}_\alpha u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \alpha(t, x)u$$

si α es una función doblemente periódica que satisface

$$0 < \alpha(t, x) < \nu, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Como una segunda aplicación verás un método de sub-super-soluciones para el problema de contorno asociado a la ecuación no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t = F(t, x, u), \quad (1.1)$$

donde F es una función que verifica

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t, x, u) \leq \nu.$$

La existencia de soluciones periódicas de (1.1) ha sido considerada en bastantes trabajos. Puedes consultar [52], [37], [16], [9], [57], [23] y las referencias que aparecen en ellos. En la mayoría de estos trabajos los autores utilizan técnicas locales o teoría del grado. Sin embargo, comprobarás que el método de sub-super-soluciones puede ser útil para extender a la ecuación del telégrafo algunos resultados que son bien conocidos para ecuaciones ordinarias y parabólicas. Quizás sea oportuno en este momento que te señale que el problema periódico para la ecuación del telégrafo se parece a un problema de tipo parabólico. En la sección 1.4 aclararé esta idea.

El resto del capítulo está organizado en seis secciones. En la sección 1.2 verás algunos ejemplos sencillos pero, a mi juicio, bastante ilustrativos. En la sección 1.3 doy el concepto de solución que has de considerar y algunos resultados preliminares sobre la regularidad de soluciones. El principio del máximo se establece en la sección 1.4. En estas dos secciones no doy ninguna demostración. Puedes encontrarlas en la sección 1.6. Recordaré varios resultados sobre operadores lineales positivos en la sección 1.5. Además, en esta misma sección incluyo una aplicación para operadores con coeficientes variables. Por último, en la sección 1.7 desarrollo el método de sub-super-soluciones.

1.2. Algunos ejemplos

Hablando de una manera informal, puedes considerar que el operador \mathfrak{L}_λ verifica un principio del máximo si satisface la siguiente condición

$$\mathfrak{L}_\lambda u = f, \quad f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0.$$

Observa que puedes considerar que este principio es en realidad un principio de positividad para el operador inverso de \mathfrak{L}_λ .

Considero interesante que antes de continuar veas algunos ejemplos fáciles que te den una idea sobre qué se puede esperar. Ten en cuenta que, cuando no se indique nada concreto, las funciones auxiliares que aparezcan serán tan regulares como sea necesario. Es preferible que tengas clara la idea de cada ejemplo a que te pierdas en detalles “sin importancia” en este momento. Importante: no olvides que las soluciones que buscas son periódicas.

EJEMPLO 1.1. No puedes obtener un principio del máximo para la ecuación sin fricción ($c = 0$). En efecto, dado cualquier $\lambda \neq 0$, puedes encontrar una fuerza positiva f tal que

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = f(t, x) \tag{1.2}$$

tiene una solución doblemente periódica que cambia de signo.

Primero has de observar que si $\lambda = 0$ entonces ni siquiera tienes soluciones para f positiva. Para esto es suficiente que integres en la ecuación sobre la región $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y llegarás a un absurdo.

En el caso $\lambda > 0$ voy a construirte un ejemplo explícito. Considero la función

$$u_0(t, x) = 1 - \cos t \cos x.$$

Esta función es no negativa (se anula en unos “pocos” puntos) y es solución de la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = f_0(t, x)$$

con $f_0(t, x) = \lambda u_0(t, x)$ y, por tanto, no negativa. Ahora la idea es perturbar u_0 de forma que la nueva función tenga cambios de signo mientras que el segundo término de la ecuación continúe siendo positivo. Sea

$$u_\varepsilon(t, x) = 1 - \cos t \cos x - \varepsilon \cos nt \cos x.$$

Esta función cambia de signo si ε es positivo,

$$u_\varepsilon(0, 0) = -\varepsilon, \quad u_\varepsilon(t, -\pi/2) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

y es solución de (1.2) para f_ε dada por

$$f_\varepsilon(t, x) = \lambda(1 - \cos t \cos x) + (n^2 - 1 - \lambda)\varepsilon \cos nt \cos x.$$

En este instante tú mismo puedes seleccionar los parámetros ε y n de forma que f_ε sea (estrictamente) positiva si $\lambda > 0$. Como sugerencia te diré que en mis cálculos tuve que considerar n impar.

Cuando $\lambda < 0$ se repite el proceso considerando las funciones

$$u_0(t, x) = -1 + \cos t \cos x, \quad u_\varepsilon(t, x) = -1 + \cos t \cos x + \varepsilon \cos t \cos nx.$$

EJEMPLO 1.2. El objetivo de este segundo ejemplo es que tengas una primera estimación de los valores de λ para los que se cumple el principio del máximo cuando $c > 0$. Para ello voy a considerar que \mathfrak{L}_λ actúa sobre funciones que sólo dependen del espacio o del tiempo, $u = u(x)$ o $u = u(t)$. De esta forma tengo los operadores diferenciales ordinarios

$$\ell_\lambda u = -\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u, \quad (1.3)$$

$$L_\lambda u = \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + \lambda u. \quad (1.4)$$

A continuación te doy dos proposiciones en las que caracterizo la existencia del principio del máximo para cada uno de estos operadores. Empiezo con el siguiente resultado para el operador ℓ_λ .

PROPOSICIÓN 1.3. *El operador ℓ_λ satisface el principio del máximo si y sólo si $\lambda > 0$.*

Para probar que $\lambda > 0$ es una condición necesaria es suficiente que consideres $f \not\equiv 0$ y que integres en $\ell_\lambda u = f$ sobre $[0, 2\pi]$.

Para ver que es condición suficiente tienes varias opciones. La primera es que calcules explícitamente las soluciones para cada λ y veas cuando se cumple el principio. Esta manera te llevará bastante tiempo y papel pero puedes llenar un rato en que no tengas otra cosa mejor que hacer (algo que dudo).

La segunda opción es que calcules la función de Green asociada y veas cuando dicha función es positiva. La misma nota que en el caso anterior.

Por último, la tercera opción es que recurras al principio del máximo para el problema de Dirichlet que aparece en [51]. Más concretamente, has de tener presente el Teorema 3 (pág. 6) y su corolario. Para hacerlo más fácil, voy a darte una versión adaptada a mis propósitos.

TEOREMA 1.4. *Considera una función $v(x) \in C^2([a, b])$ tal que satisface la desigualdad diferencial*

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + h(x)v(x) \geq 0$$

en (a, b) , con $h(x) \leq 0$ (continua), y tal que $v(a) \leq 0$, $v(b) \leq 0$. Entonces $v(x) \leq 0$ en (a, b) salvo que $v \equiv 0$.

NOTA 1.1. Antes de continuar, he de decirte (“confesarte”) que la idea de la demostración de esta última opción se la tengo que agradecer a mi director de tesis.

De nuevo, voy a suponer que $f \not\equiv 0$. Considera que u es negativa en algún punto. Es claro que existirá x_0 donde u alcanza un mínimo negativo, esto es, tal que $u(x_0) < 0$ y $\frac{d^2 u}{dx^2}(x_0) \geq 0$. Pero entonces

$$0 > -\frac{d^2 u}{dx^2}(x_0) + \lambda u(x_0) = f(x_0) \geq 0.$$

Por tanto u no puede tomar valores negativos.

Queda por ver qué ocurre si u no es negativa pero sí se anula en algún punto. Aquí es donde voy a utilizar el teorema anterior. Para ser más literal en las hipótesis, considera la función $v = -u$. Entonces v también se anula en un punto x_0 . Por la periodicidad, v se anula en $x_0 + 4\pi$. Si tomas $h(x) = -\lambda$, $a = x_0$ y $b = x_0 + 4\pi$, el teorema te dice que $v \equiv 0$ o $v < 0$ en $(x_0, x_0 + 4\pi)$. Lo primero no puede ser pues, en tal caso, $f \equiv 0$ en contra de lo supuesto. Lo segundo tampoco es posible pues, por la periodicidad, $v(x_0 + 2\pi) = 0$. Por tanto, tienes que v no puede anularse y u ha de ser siempre positiva.

NOTA 1.2. Como sin duda habrás observado, en este ejemplo te he probado que se cumple un resultado más fuerte que el principio del máximo. A este hecho lo llamaré principio del máximo fuerte. Sin mucho rigor,

$$\mathfrak{L}_\lambda u = f, \quad f \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} f > 0 \quad \Rightarrow \quad u > 0.$$

NOTA 1.3. Como puedes comprobar con cálculos rutinarios, $\lambda = 0$ es precisamente el primer valor propio del operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ actuando sobre funciones periódicas.

A continuación voy a probar un resultado para el operador L_λ .

PROPOSICIÓN 1.5. *El operador L_λ satisface el principio del máximo si y sólo si*

$$0 < \lambda \leq \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

NOTA 1.4. El valor crítico $\frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}$ no parece estar relacionado con los valores propios y sí que depende de las propiedades oscilatorias de las soluciones de $L_\lambda u = 0$.

En este caso no puedo aplicar las herramientas clásicas. Así, algunos autores te hablarán de principios de anti-máximo. Por ejemplo, puedes consultar [11] donde, además, tienes una prueba de esta proposición para $c = 0$.

Antes de pasar a la demostración, necesito alguna notación y hechos previos. Dado $\tau \in \mathbb{R}$, sea $u(t)$ la solución del problema de valores iniciales

$$L_\lambda u = 0, \quad u(\tau) = 0, \quad u'(\tau) = 1.$$

Entonces defino el 0-conjugado de τ como

$$\tau^* = \min\{t > \tau / u(t) = 0\}$$

en caso de existir tal mínimo. Si no existe entonces $\tau^* = +\infty$.

Por otra parte, sea $u(t)$ la solución del problema de valores iniciales

$$L_\lambda u = 0, \quad u(\tau) = 1, \quad u'(\tau) = 0.$$

Defino el 1-conjugado de τ como

$$\hat{\tau} = \min\{t > \tau / u(t) = 0\},$$

en caso de existir tal mínimo. Si no existe entonces $\hat{\tau} = +\infty$.

NOTA 1.5. Observa que $\tau < \tau^*, \hat{\tau}$.

NOTA 1.6. La distancia entre τ y τ^* es independiente de τ . Lo mismo para τ y $\hat{\tau}$.

NOTA 1.7. Si consideras el operador

$$L_\lambda^* u = u'' - cu' + \lambda u$$

y defines el 0-conjugado para este operador, puedes comprobar que la distancia entre los ceros y sus 0-conjugados es la misma para L y L^* .

LEMA 1.6. Considera $\tau \in \mathbb{R}$ fijo y $f \in C(\mathbb{R})$ 2π -periódica tal que

$$f \geq 0, \quad \int_\tau^{\tau+\varepsilon} f > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Entonces la solución u del problema de valores iniciales

$$L_\lambda u = f, \quad u(\tau) = 0, \quad u'(\tau) = 0$$

satisface que $u(t) > 0, \forall t \in (\tau, \hat{\tau}]$.

Demostración. Considera ϕ_1, ϕ_2 soluciones de $L_\lambda u = 0$ tales que

$$\phi_1(\tau) = \phi_2'(\tau) = 1, \quad \phi_1'(\tau) = \phi_2(\tau) = 0.$$

Entonces

$$u(t) = \int_\tau^t e^{c(s-\tau)} [\phi_2(t)\phi_1(s) - \phi_1(t)\phi_2(s)] f(s) ds.$$

Por la definición de 1-conjugado, $\phi_1(t) > 0, \forall t \in [\tau, \hat{\tau})$, y puedes tomar el cociente de funciones $\frac{\phi_2}{\phi_1}$. Derivando

$$\left(\frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \right)' = \frac{e^{-c(t-\tau)}}{\phi_1^2(t)}, \quad \forall t \in [\tau, \hat{\tau}),$$

por lo que este cociente es positivo. A partir de esto

$$\phi_1(t)\phi_2(s) < \phi_1(s)\phi_2(t), \quad \forall t, s \in (\tau, \hat{\tau}), \quad t > s,$$

y tienes la conclusión del lema.

LEMA 1.7. Considera que para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ se satisface la desigualdad

$$t_0^* < t_0 + 2\pi.$$

Entonces existe $f \in C(\mathbb{R})$, 2π -periódica, $f \geq 0$, tal que la solución 2π -periódica de $L_\lambda u = f(t)$ cambia de signo.

Demostración. Considera una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua, 2π -periódica y tal que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \tau] \\ > 0, & t \in (\tau, t_0 + 2\pi) \end{cases}$$

donde $\tau \in (t_0^*, t_0 + 2\pi)$ tal que $\hat{\tau} \geq t_0 + 2\pi$.

Si $u(t)$ es una solución periódica de

$$L_\lambda u = f$$

entonces también es solución de

$$L_\lambda u = 0 \quad \text{en } [t_0, \tau].$$

Por la teoría de Sturm y la definición de t^* tienes que u cambia de signo o es idénticamente nula. En el primer caso he acabado.

En el segundo caso, por el lema 1.6

$$u(t) > 0, \quad \forall t \in (\tau, t_0 + 2\pi],$$

en particular, $u(t_0 + 2\pi) > 0$. Pero u es 2π -periódica y $u(t_0) = 0$. De esta forma llego a una contradicción.

LEMA 1.8. *Considera que $t^* \geq t + 2\pi, \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces L_λ satisface un principio del máximo.*

Demostración. Probaré que si τ es un cero cualquiera de u solución periódica de

$$L_\lambda u = u'' + cu' + \lambda u = f \tag{1.5}$$

entonces $u'(\tau) > 0$. Pero esto es contradictorio por la periodicidad de u . En efecto, ten en cuenta que si $u'(t)$ es positiva en un cero $t = \tau$ entonces debe existir otro cero $\tilde{\tau} \in (\tau, \tau + 2\pi)$ con $u'(\tilde{\tau}) \leq 0$.

Sea ϕ solución del problema

$$L_\lambda^* u = u'' - cu' + \lambda u = 0, \quad u(\tau) = 0, \quad u'(\tau) = 1.$$

Por la hipótesis, ϕ es positiva en $(\tau, \tau + 2\pi)$. Si multiplicas en (1.5) por ϕ e integras en $[\tau, \tau + 2\pi]$ llegarás a

$$\phi(\tau + 2\pi)u'(\tau) = \int_\tau^{\tau+2\pi} f(s)\phi(s) ds.$$

Con esto acabas la demostración.

NOTA 1.8. La idea para la demostración de este último lema la he tomado prestada del lema 5.7 en [46].

Demostración de la Proposición 1.5. Considera la ecuación (1.5). Como en el caso del operador ℓ , la positividad de λ la puedes deducir integrando la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Ahora, a partir de los lemas 1.7 y 1.8, basta con que calcules la distancia entre un cero y su 0-conjugado en el problema de valores iniciales (recuerda el carácter autónomo de la ecuación)

$$L_\lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

determinando después cuando esta distancia es mayor que 2π . Pero esto no es difícil ya que tienes un problema de coeficientes constantes. En efecto, los resultados de estos cálculos son

a) $0 < \lambda < \frac{c^2}{4}$. La solución es

$$u(t) = \frac{e^{-ct/2}}{D_1} (e^{D_1 t/2} - e^{-D_1 t/2})$$

(con $D_1^2 = c^2 - 4\lambda$) que se anula sólo en $t = 0$ y, por tanto, la distancia es infinito.

b) $\lambda = \frac{c^2}{4}$. La solución es

$$u(t) = te^{-ct/2}$$

que se anula sólo en $t = 0$ y, por tanto, la distancia es infinito.

c) $\frac{c^2}{4} < \lambda$. La solución es

$$u(t) = \frac{e^{-ct/2}}{D_2} \sin D_2 t$$

(con $4D_2^2 = 4\lambda - c^2$). Tomando $t = 0$, tienes que $t^* = \frac{\pi}{D_2}$. Así, la distancia es $\frac{\pi}{D_2}$. Por último, este valor es mayor que 2π si, y sólo si, $\lambda < \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}$.

Con esto acabo la demostración.

1.3. Concepto de solución y regularidad

Para hacer un estudio riguroso del problema planteado lo primero que debo hacer es definirte el concepto de solución con el que voy a trabajar. Para ello es necesario que considere algunas identificaciones entre espacios que serán muy útiles.

Como trabajo con funciones doblemente periódicas, si conozco una función sobre un dominio fundamental ($[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ por ejemplo) entonces la conozco en todo el plano por periodicidad.

Defino el toro 2-dimensional

$$\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Un punto de \mathbb{T}^2 se nota como (\bar{t}, \bar{x}) , donde (t, x) es un punto de \mathbb{R}^2 y $\bar{t} = t + 2\pi\mathbb{Z}$, $\bar{x} = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Si tomo la proyección

$$\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad (t, x) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}),$$

las funciones doblemente periódicas serán identificadas con funciones definidas en el toro por medio de esta proyección. Gráficamente,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{u \text{ (doblemente periódica)}} & \mathbb{R} \\ \Pi \downarrow & \searrow u & \\ \mathbb{T}^2 & & \end{array}$$

En particular, las notaciones $L^p(\mathbb{T}^2)$, $C(\mathbb{T}^2)$ (funciones continuas), $\mathcal{D}(\mathbb{T}^2) = C^\infty(\mathbb{T}^2)$ (funciones test), etc., se mantienen para los espacios de funciones doblemente periódicas con el grado de regularidad indicado. El espacio de las distribuciones en \mathbb{T}^2 es $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ y el espacio de las medidas (esto es, el dual de $C(\mathbb{T}^2)$) es $M(\mathbb{T}^2)$.

Dado $c > 0$, considera el operador diferencial

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t,$$

que actúa sobre las funciones en el toro, $u : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Defino el operador adjunto formal como

$$\mathcal{L}^*u = u_{tt} - u_{xx} - cu_t.$$

Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ considero el problema

$$\mathfrak{L}u + \lambda u = f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2). \quad (1.6)$$

Diré que u es una solución de (1.6) si es una función de $L^1(\mathbb{T}^2)$ que satisface

$$\int_{\mathbb{T}^2} u(\mathfrak{L}^* \phi + \lambda \phi) = \int_{\mathbb{T}^2} f \phi, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2).$$

Llamaré valor propio de \mathfrak{L} a todo número complejo λ tal que la ecuación homogénea

$$\mathfrak{L}u + \lambda u = 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

tenga soluciones no triviales. El operador \mathfrak{L} no es autoadjunto y tiene un espectro complejo, esto es, hay valores propios que no son reales. En efecto, si usas análisis de Fourier, tal como puedes ver en [52], probarás que dicho espectro es

$$\sigma_{\mathbb{C}}(\mathfrak{L}) = \{\lambda_{nm} = -m^2 + n^2 - icn / m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sin embargo, sólo estoy interesado en los valores propios reales. Por tanto, hablaré del espectro real de \mathfrak{L} como el conjunto de sus valores propios reales. Así, consideraré en lo que sigue el conjunto

$$\sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L}) = \{\lambda_m = -m^2 / m \in \mathbb{N}\}.$$

NOTA 1.9. Observa que si $c = 0$ entonces \mathfrak{L} sí es autoadjunto y sólo tiene valores propios reales. Esto lo puedes ver haciendo “ $c \rightarrow 0$ ” en $\sigma_{\mathbb{C}}(\mathfrak{L})$: los valores propios “colapsan” sobre el eje temporal. Además, para $\lambda = 0$ el espacio propio es infinito-dimensional mientras que si $\lambda \neq 0$ entonces el espacio propio es finito dimensional.

La siguiente proposición es análoga a un resultado bien conocido para la ecuación de ondas sin fricción y que puedes consultar en [[10], pág. 142]. En esta proposición queda resumida la teoría de regularidad para (1.6).

PROPOSICIÓN 1.9. *Considera $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Entonces (1.6) tiene una única solución. Tal solución es continua y satisface la estimación*

$$\|u\|_{C(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \quad (1.7)$$

donde C_1 es una constante que sólo depende de c y λ .

Además, si $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $1 < p < +\infty$, entonces

$$u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2), \quad \alpha = 1 - \frac{1}{p}$$

y

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)}, \quad (1.8)$$

con $C_p = C_p(c, \lambda)$.

Para acabar esta sección, he de señalarte que en varias ocasiones tendré que reemplazar $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ por una medida. También en este caso puedo obtener alguna regularidad. Sea el problema

$$\mathfrak{L}u + \lambda u = \mu \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2), \quad (1.9)$$

donde $\mu \in M(\mathbb{T}^2)$ es una medida dada. Diré que u es una solución de (1.9) si es una función de $L^1(\mathbb{T}^2)$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}^2} u(\mathfrak{L}^* \phi + \lambda \phi) = \langle \mu, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad entre $M(\mathbb{T}^2)$ y $C(\mathbb{T}^2)$.

PROPOSICIÓN 1.10. *Considera $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$ y $\mu \in M(\mathbb{T}^2)$. Entonces (1.9) tiene una única solución u que pertenece a $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ y satisface*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 \|\mu\|_{M(\mathbb{T}^2)},$$

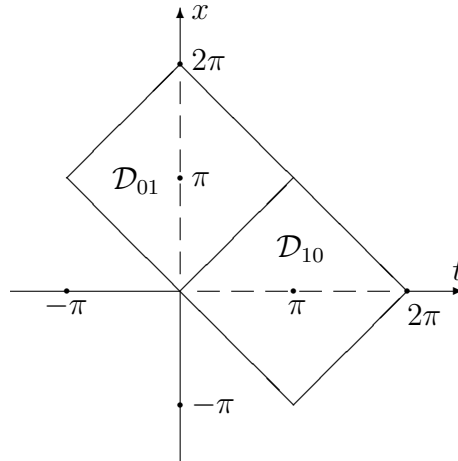
siendo C_1 la constante que aparece en la proposición 1.9.

NOTA 1.10. Es conveniente que observes que la solución u dada por esta proposición no está en $C(\mathbb{T}^2)$. Para que te convenzas de este hecho, presento el siguiente ejemplo. Pero antes algo de notación que será útil tanto ahora como en la sección 1.6.

Considera la familia de rectas \mathcal{C} dada por

$$x \pm t = 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Al complementario de \mathcal{C} , esto es, $\mathbb{R}^2 - \mathcal{C}$, lo denotaré por \mathcal{D} . Por último, marcaré con \mathcal{D}_{ij} a la componente conexa de \mathcal{D} con centro en el punto $(i\pi, j\pi)$. Observa que $i + j$ ha de ser impar necesariamente. Por ejemplo, la idea gráfica de \mathcal{D}_{10} y \mathcal{D}_{01} es



Con respecto a este dibujo, tengo que señalar que $\overline{\mathcal{D}_{01}} \cup \overline{\mathcal{D}_{10}}$ es también un dominio fundamental y, además, será muy útil a la hora de definir la función de Green y considerar las zonas de continuidad.

Sea la ecuación

$$\mathfrak{L}_{\frac{c^2}{4}} u = \mathfrak{L}u + \frac{c^2}{4} u = \delta_{\overline{0}}, \quad (1.10)$$

donde $\delta_{\overline{0}}$ es la medida dada por

$$\langle \delta_{\overline{0}}, \phi \rangle = \phi(\overline{0}, \overline{0}),$$

con ϕ cualquier función continua en \mathbb{T}^2 . La solución de esta ecuación es la función $G(t, x)$ que, entendida como función periódica en \mathbb{R}^2 , viene dada por

$$G(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1+e^{-c\pi}}{(1-e^{-c\pi})^2} e^{-ct/2}, & \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{10} \\ \frac{e^{-c\pi}}{(1-e^{-c\pi})^2} e^{-ct/2}, & \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{01} \end{cases}$$

y extendiendo por periodicidad en el resto de \mathbb{R}^2 . Es claro que $G(t, x)$ está acotada y, sin embargo, no es continua. Que $G(t, x)$ es efectivamente la solución de (1.10) es un hecho que puedes comprobar con un cálculo rutinario. De todas formas, en la sección 1.6 verás una prueba explícita de que $G(t, x)$ es la función de Green para el operador $\mathfrak{L}_{\frac{c^2}{4}}$ y, por tanto, solución de la ecuación (1.10).

1.4. Un principio del máximo en el toro

Comienzo esta sección formulando de manera precisa el principio del máximo para la ecuación del telégrafo.

Considera el operador diferencial \mathfrak{L}_λ

$$\mathfrak{L}_\lambda u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u.$$

Diré que \mathfrak{L}_λ satisface el principio del máximo si $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$ y para cada $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ satisfaciendo

$$f \geq 0 \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2$$

entonces

$$u(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

siendo u la única solución de (1.6).

Diré que el principio del máximo es fuerte si

$$f \geq 0 \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2, \quad \int_{\mathbb{T}^2} f > 0$$

implica

$$u(t, x) > 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

En el siguiente teorema, que puedo considerar como el central de este capítulo, caracterizo para qué valores de λ el operador \mathfrak{L}_λ satisface el principio del máximo.

TEOREMA 1.11. *Existe una función*

$$\nu : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \quad c \mapsto \nu(c)$$

tal que \mathfrak{L}_λ satisface el principio del máximo si y sólo si

$$\lambda \in (0, \nu(c)].$$

Además, el principio del máximo siempre es fuerte y la función ν satisface

$$\frac{c^2}{4} < \nu(c) \leq \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}, \quad (1.11)$$

$$\nu(c) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } c \searrow 0, \quad (1.12)$$

$$\nu(c) - \frac{c^2}{4} \rightarrow \frac{j_0^2}{8\pi^2} \quad \text{cuando } c \nearrow +\infty, \quad (1.13)$$

donde j_0 es el primer cero positivo de la función de Bessel J_0 .

NOTA 1.11. La estimación superior de (1.11) es consecuencia de los ejemplos de la sección 1.2.

NOTA 1.12. La constante $\nu(c)$ del teorema dependerá de las propiedades oscilatorias de la función de Green asociada a (1.6). Construiré esta función en la sección 1.6 y la función de Bessel J_0 jugará un importante papel en dicha construcción.

Concluyo esta sección con una variante del principio del máximo para el caso de medidas. Dada $\mu \in M(\mathbb{T}^2)$, diré que μ es no negativa si

$$\langle \mu, \phi \rangle \geq 0, \quad \forall \phi \in C_+(\mathbb{T}^2),$$

donde $C_+(\mathbb{T}^2)$ es la clase de funciones no negativas en $C(\mathbb{T}^2)$.

COROLARIO 1.12. Considera $\lambda \in (0, \nu]$, donde ν está dada por el teorema 1.11, y $\mu \in M(\mathbb{T}^2)$ una medida no negativa. Entonces la solución de (1.9) satisface

$$u \geq 0 \quad \text{c.t. } \mathbb{T}^2.$$

NOTA 1.13. Como ya indiqué en la introducción de este capítulo, puedes pensar que la ecuación del telégrafo en el toro tiene un cierto carácter parabólico. Para afirmar esto me baso en los resultados dados por la proposición 1.9 y el teorema 1.11. La proposición me dice que gano “bastante” regularidad y el teorema me indica que hay un principio del máximo. Ambos hechos son falsos, en general, para ecuaciones hiperbólicas y ciertos para parabólicas.

1.5. Algunos resultados sobre operadores lineales positivos

En esta sección voy a recordarte algunos resultados sobre la teoría de operadores lineales positivos que necesitaré en el momento de probar el principio del máximo para la ecuación del telégrafo. Puedes consultar más detalles sobre esta teoría en [24] y [3] entre otros trabajos.

Por otra parte, verás una aplicación en que se combina esta teoría con el principio del máximo para extender este último a una cierta ecuación del telégrafo con coeficientes variables.

Considera un espacio de Banach X y un cono C en X con las siguientes características:

i) C es convexo de vértice cero, es decir,

$$\lambda x + \mu y \in C, \quad \forall \lambda, \mu \geq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

ii) C es cerrado;

iii) $\text{int}(C) \neq \emptyset$;

iv) $C \cap (-C) = \{0\}$.

Entonces (X, C) es un espacio de Banach ordenado con el orden

$$x, y \in X, \quad x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in C.$$

Dado un operador lineal A sobre X diré que

- a) A es positivo si $A(C) \subseteq C$;
- b) A es fuertemente positivo si $A(C - \{0\}) \subseteq \text{int}(C)$.

Por otra parte, si $x \in X$ diré que

- a) $x > 0$ si $x \in C - \{0\}$;
- b) $x \gg 0$ si $x \in \text{int}(C)$.

Cuando A es compacto y fuertemente positivo entonces puedes aplicar la teoría de Krein-Rutman y tienes el siguiente resultado.

TEOREMA 1.13. *Considera un operador $A : X \rightarrow X$ lineal, compacto y fuertemente positivo. Entonces el radio espectral de A , $\mu_0 = \varrho(A)$, satisface las siguientes propiedades:*

- i) es un valor propio real, positivo y simple de A ;*
- ii) puedes tomar como vector propio asociado un vector x tal que $x \gg 0$;*
- iii) es el único valor propio que admite un vector propio $x \in X$ tal que $x > 0$.*

Puedes comprobar que este resultado es justamente un caso particular del Teorema 3.2 de [3]. También puedes ver el Teorema VI.13 de [6].

Por otra parte, aquí tienes una condición suficiente para que ciertas ecuaciones lineales tengan solución positiva. El ambiente es el mismo del teorema recién enunciado.

PROPOSICIÓN 1.14. *Considera el sistema*

$$\mu\varphi = A\varphi + f, \quad f > 0.$$

Entonces, si $\mu > \mu_0 = \varrho(A)$, existe una única solución $\varphi \gg 0$.

Demostración. Es claro que el sistema propuesto es equivalente a

$$\varphi = \frac{1}{\mu}A\varphi + \frac{1}{\mu}f,$$

esto es,

$$(I - \frac{1}{\mu}A)\varphi = \frac{1}{\mu}f.$$

Observa que, por ser A un endomorfismo con radio espectral μ_0 , $I - \frac{1}{\mu}A$ será inversible si $\mu_0 < |\mu|$. Además, puedes expresar φ como

$$\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu^{n+1}} A^n f.$$

Con esta fórmula tienes que $\varphi \gg 0$ si $\mu > \mu_0$ y $f > 0$. Así acabo la demostración.

1.5.1. La ecuación lineal con coeficientes variables. Considera σ una constante fija que satisfaga

$$\sigma \in (0, \nu(c)], \quad (1.14)$$

donde $\nu(c)$ es la constante introducida en el teorema 1.11. Considera el problema de valores propios

$$\mathfrak{L}_\sigma u = \lambda m(t, x)u \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2), \quad (1.15)$$

donde m es una función en $L^1(\mathbb{T}^2)$ y λ es el parámetro.

Un valor propio de (1.15) es un número $\lambda \in \mathbb{R}$ (o \mathbb{C} , si admites valores propios complejos) tal que (1.15) tiene soluciones no triviales (funciones propias) pertenecientes a $C(\mathbb{T}^2)$.

Voy a aprovechar el marco abstracto que he expuesto en esta sección. Considera X como el espacio de Banach $C(\mathbb{T}^2)$ y A como $T : X \rightarrow X$ un operador lineal tal que (1.15) es equivalente a

$$u = \lambda T u, \quad u \in X.$$

Para definir T , considero la resolvente asociada a \mathfrak{L}_σ dada por

$$R_\sigma : L^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow C(\mathbb{T}^2), \quad f \mapsto u$$

donde u es la solución de

$$\mathfrak{L}u + \sigma u = f \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Entonces

$$T : X \rightarrow X, \quad T u = R_\sigma(mu).$$

Si $m \in L^p(\mathbb{T}^2)$ para algún p que satisfaga $1 < p < +\infty$ entonces la proposición 1.9 implica que

$$ImT \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2), \quad \alpha = 1 - \frac{1}{p},$$

esto es, $T : X \rightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ es continuo. Si tienes en cuenta que $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ se sumerge en $C(\mathbb{T}^2)$ de forma compacta, concluyes que T es compacto. Ahora puedes aplicar la teoría espectral de esta clase de operadores. En particular, si (1.15) tiene valores propios, entonces están ordenados en una sucesión $\{\lambda_n\}$ con

$$|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$$

Esto es claro si tienes en cuenta que los valores propios de \mathfrak{L}_σ son los inversos de los valores propios de T .

Por otra parte, el espacio X es un espacio de Banach ordenado con cono

$$C = C_+(\mathbb{T}^2) = \{u \in X / u \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^2\}.$$

Este cono tiene interior no vacío, a saber

$$int(C) = \{u \in X / u(t, x) > 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Por último, observa que cuando m satisface la condición adicional

$$m(t, x) > 0 \quad \text{c.t. } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.16)$$

el operador T es fuertemente positivo, esto es,

$$T(C - \{0\}) \subset \text{int}(C).$$

Esto es una consecuencia de (1.14) y del principio del máximo. También, la positividad estricta en $C(\mathbb{T}^2)$ implica que el radio espectral $\varrho(T)$ es positivo. Paso a detallar este hecho antes de continuar. Toma una función $\varphi \gg 0$ con norma igual a 1. Entonces $T\varphi \geq \mu\varphi$, para algún $\mu > 0$. De aquí, $T^n\varphi \geq \mu^n\varphi > 0$, por lo que $\sqrt[n]{\|T^n\varphi\|} \geq \sqrt[n]{\mu^n} = \mu$. Ya puedes concluir que $\varrho(T) \geq \mu$.

Todas estas consideraciones en Análisis Funcional te llevan al siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.15. *Considera que se cumple (1.14) y que m es una función satisfaciendo (1.16) y*

$$m \in L^p(\mathbb{T}^2)$$

para algún p con $1 < p < +\infty$. Entonces el primer valor propio λ_0 de (1.15) es positivo y la primera función propia u_0 es simple y puedes elegirla estrictamente positiva. Además, si $0 < \lambda < \lambda_0$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, el problema

$$\mathfrak{L}_\sigma u = \lambda m(t, x)u + f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

tiene una solución única, la cual es positiva si f satisface

$$f \geq 0 \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2, \quad \int_{\mathbb{T}^2} f > 0.$$

La demostración es inmediata a partir del teorema 1.13 y la proposición 1.14. (También puedes considerar las demostraciones de los Teoremas 4.3 y 4.4 en [3]).

Por otro lado, siguiendo la línea del Teorema 4.5 en [3], puedes probar la monotonía de λ_0 con respecto al peso. En efecto, dadas dos funciones m_1, m_2 en las condiciones de la proposición anterior, la desigualdad

$$m_1(t, x) < m_2(t, x) \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2$$

implica

$$\lambda_0(m_1) > \lambda_0(m_2).$$

Ahora voy a extender el principio del máximo a operadores de coeficientes variables del tipo

$$\mathfrak{L}_\alpha u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \alpha(t, x)u$$

donde $\alpha \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Puedes extender, de forma obvia, la noción de principio del máximo introducida en la sección 1.4 a esta clase de operadores. Así, puedo enunciar el siguiente resultado.

TEOREMA 1.16. *Considera una función $\alpha \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ que satisfaga*

$$0 < \alpha(t, x) < \nu(c) \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2.$$

Entonces \mathfrak{L}_α satisface el principio del máximo fuerte.

Demostración. Reescribe la ecuación

$$\mathfrak{L}_\alpha u = f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2) \quad (1.17)$$

de la forma

$$\mathfrak{L}_\nu u = (\nu - \alpha(t, x))u + f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Considera $m_1(t, x) = \nu - \alpha(t, x)$. Si $\lambda_0(m_1) > 1$ entonces, por la proposición 1.15,

$$\mathfrak{L}_\nu u = \lambda m_1(t, x)u + f(t, x)$$

tiene una única solución positiva para todo $\lambda \in (0, \lambda_0(m_1))$, en particular para $\lambda = 1$. Además, esta será la única solución de (1.17).

Basta, por tanto, que compruebe que $\lambda_0(m_1) > 1$. Para ello, tomo $m_2 = \nu$,

$$\mathfrak{L}_\nu u = \lambda m_2(t, x)u = \lambda \nu u.$$

Si denoto por λ_{mn} a los valores propios de este operador (y considero de nuevo el conjunto de combinaciones lineales de funciones de $\{e^{int}e^{imx} / m, n \in \mathbb{Z}\}$) entonces

$$\lambda_{mn} = \frac{m^2 - n^2 + icn + \nu}{\nu}.$$

Ya está claro que $\lambda_{00} = 1$ y $|\lambda_{mn}| \geq 1$. Acabo la demostración teniendo en cuenta la monotonía entre m_1 y m_2 ,

$$\lambda_0(m_1) > \lambda_0(m_2) = 1.$$

1.6. Demostraciones

La idea principal que voy a considerar en esta sección es la posibilidad de expresar la solución de la ecuación del telégrafo (1.6) de la forma

$$u(t, x) = (G * f)(t, x) = \int_{\mathbb{T}^2} G(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi,$$

esto es, como la convolución de $G(t, x)$, la función de Green, y $f(t, x)$. De esta manera, el estudio de la regularidad y positividad de u es equivalente al estudio de dichas propiedades para la función $G(t, x)$.

Por tanto, los pasos que seguiré son tres. Primero construiré la función de Green y estudiaré sus propiedades. En segundo lugar, probaré los resultados de regularidad de las soluciones de los problemas planteados. Por último, demostraré el principio del máximo.

1.6.1. La función de Green: construcción y propiedades. Para construir la función de Green, G , asociada al problema (1.6), voy a comenzar con el caso $\lambda \geq \frac{c^2}{4}$. Considera la medida de Dirac concentrada en $\bar{0} \in \mathbb{T}^2$, esto es, la medida $\delta_{\bar{0}} \in M(\mathbb{T}^2)$ dada por

$$\langle \delta_{\bar{0}}, \phi \rangle = \phi(\bar{0}, \bar{0}), \quad \forall \phi \in C(\mathbb{T}^2).$$

Entonces, la solución del problema

$$\mathfrak{L}_\lambda G = \delta_{\bar{0}} \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

será la función de Green buscada.

En lugar de intentar hacer los cálculos directamente en \mathbb{T}^2 , voy a resolver el problema análogo en \mathbb{R}^2 . Considera el espacio $M(\mathbb{R}^2)$ correspondiente a las medidas en \mathbb{R}^2 . Para una definición precisa de este espacio puedes consultar [14]. En este espacio toma la medida de Dirac concentrada en el origen, $\delta_0 \in M(\mathbb{R}^2)$, esto es, la medida dada por

$$\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0, 0), \quad \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}^2),$$

donde $C_0(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de funciones continuas que tienen soporte compacto. Notando $d = \lambda - \frac{c^2}{4}$, considera d fijo. Mi propósito ahora es calcular una solución de

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u = \delta_0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2), \quad (1.18)$$

con $\lambda = d + \frac{c^2}{4}$. Si hago el cambio $u(t, x) = e^{-ct/2}v(t, x)$, entonces el problema se reduce a calcular una solución fundamental del operador

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\lambda - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d.$$

Siguiendo la idea que aparece en [[12], pág. 186], voy a buscar una solución de este operador que sólo dependa de la distancia hiperbólica $r = \sqrt{t^2 - x^2}$ (distancia de un punto (t, x) al punto $(0, 0)$). Esta idea me lleva a una ecuación de Bessel de orden cero con solución conocida. De aquí,

$$v(t, x) = \frac{1}{2} J_0 \left(\sqrt{d(t^2 - x^2)} \right) \chi_{\mathcal{K}}(t, x),$$

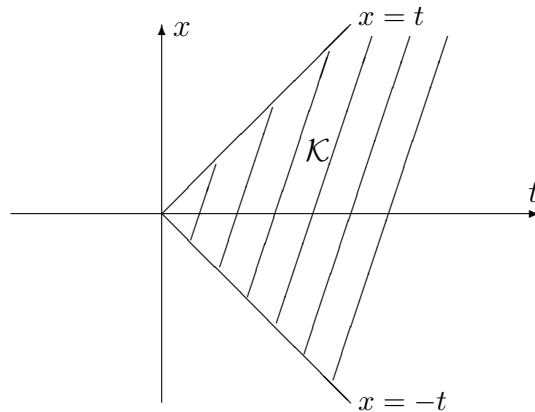
donde $\chi_{\mathcal{K}}$ es la función característica asociada al cono

$$\mathcal{K} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / |x| < t\}.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio, tengo que

$$U(t, x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} J_0 \left(\sqrt{d(t^2 - x^2)} \right) \chi_{\mathcal{K}}(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} J_0 \left(\sqrt{d(t^2 - x^2)} \right), & \text{si } |x| < t, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Gráficamente, el soporte de $U(t, x)$ es la región rayada en el siguiente dibujo.



Como necesito una función que sea doblemente periódica, considero la serie doble

$$G(t, x) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} U(t + 2\pi n, x + 2\pi m), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.19)$$

Si aplicas el test de Weierstrass, puedes comprobar que esta serie converge uniformemente en subconjuntos acotados del plano. Para ello, basta que recuerdes que J_0 está acotada por 1 (razón por la que exijo que $d = \lambda - \frac{c^2}{4} > 0$) y, por tanto, U satisface la estimación

$$|U(t, x)| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} \chi_\kappa(t, x).$$

Así,

$$|G(t, x)| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-c\pi n} \chi_\kappa(t + 2\pi n, x + 2\pi m) = \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} \sum_{n > -\frac{t}{2\pi}} e^{-c\pi n} \sum_{m \in I_n(t,x)} 1,$$

donde, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, defino

$$I_n(t, x) = \{m \in \mathbb{Z} \mid |x + 2\pi m| < t + 2\pi n\}.$$

La doble sumatoria que aparece al final es calculable y, por supuesto, finita. En consecuencia, la función G es doblemente periódica y continua en el conjunto \mathcal{D} que definí en la nota 1.10. Además, G pertenece a $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ y el principio de superposición implica que verifica

$$G_{tt} - G_{xx} + cG_t + \lambda G = \delta_S \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \quad (1.20)$$

con $\delta_S \in M(\mathbb{R}^2)$ la medida dada por

$$\langle \delta_S, \phi \rangle = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \phi(2\pi n, 2\pi m), \quad \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}^2).$$

El último paso para construir la función de Green en \mathbb{T}^2 es traducir la ecuación (1.20) al toro. Para ello considero la medida $\delta_{\bar{0}} \in M(\mathbb{T}^2)$, esto es, la medida de Dirac concentrada en $\bar{0} \in \mathbb{T}^2$. En términos precisos,

$$\langle \delta_{\bar{0}}, \phi \rangle = \phi(\bar{0}, \bar{0}), \quad \forall \phi \in C(\mathbb{T}^2).$$

Para finalizar este proceso de construcción necesito probar el siguiente lema.

LEMA 1.17. *Considera $\lambda \geq \frac{c^2}{4}$ y $d = \lambda - \frac{c^2}{4}$. Entonces la función G definida por (1.19) es una solución de*

$$\mathfrak{L}_\lambda G = \delta_{\bar{0}} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2).$$

NOTA 1.14. Observa que, al no ser λ valor propio de \mathfrak{L} , la función G es la única solución de esta ecuación. Por tanto, la llamaré función de Green asociada al operador \mathfrak{L}_λ .

Demostración. Considera una partición periódica de la unidad en el sentido de [[58], pág. 127]. Esto es, toma una función

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) = C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp}(\varphi) \subset \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

tal que

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \varphi(t + 2\pi n, x + 2\pi m) = 1, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.21)$$

Por ejemplo, siguiendo [58], puedes considerar φ tal que es constantemente igual a 1 en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y positiva en el interior del soporte. De esta forma, en el sumatorio anterior sólo tienes uno, dos o cuatro términos no nulos. Además, para una función arbitraria $g \in L^1(\mathbb{T}^2)$, puedes probar fácilmente las identidades siguientes

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\varphi = \int_{\mathbb{T}^2} g, \quad \int_{\mathbb{R}^2} g\partial^\alpha \varphi = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \quad |\alpha| > 0. \quad (1.22)$$

Ahora estás en posición para que pueda probar el lema.

Si consideras una función $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2)$ entonces $\phi\varphi$ es una función test en $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ y puedes aplicar (1.20) para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{L}_\lambda^*(\phi\varphi)G = \langle \delta_S, \phi\varphi \rangle.$$

Por (1.22) tienes que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{L}_\lambda^*(\phi\varphi)G = \int_{\mathbb{T}^2} (\mathfrak{L}_\lambda^*\phi)G,$$

donde has de utilizar que $\varphi G \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Por otra parte, de (1.21),

$$\langle \delta_S, \phi\varphi \rangle = \phi(0, 0).$$

De esta forma concluyes que G verifica la igualdad

$$\int_{\mathbb{T}^2} (\mathfrak{L}_\lambda^*\phi)G = \phi(0, 0), \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2)$$

y la demostración está acabada.

NOTA 1.15. Considera de nuevo la notación introducida en la nota 1.10 y el conjunto $I_n(t, x)$ definido en la estimación de $|G(t, x)|$. Es claro que $I_n(t, x)$ es fijo en cada una de las componentes \mathcal{D}_{ij} de \mathcal{D} . Por ejemplo, para las componentes \mathcal{D}_{10} y \mathcal{D}_{01} , I_n está dado por

$$I_n(t, x) = \{-n, \dots, n\} \quad \text{si } n \geq 0, \quad \emptyset \quad \text{si } n < 0, \quad (t, x) \in \mathcal{D}_{10}$$

e

$$I_n(t, x) = \{-n, \dots, n-1\} \quad \text{si } n \geq 1, \quad \emptyset \quad \text{si } n \leq 0, \quad (t, x) \in \mathcal{D}_{01}.$$

Esta notación me permite expresar G sobre \mathcal{D} de una forma más explícita:

$$G(t, x) = \frac{e^{-\frac{c}{2}t}}{2} \sum_{n > -\frac{t}{2\pi}} e^{-c\pi n} \sum_{m \in I_n(t, x)} J_0\left(\sqrt{d[(t + 2\pi n)^2 - (x + 2\pi m)^2]}\right). \quad (1.23)$$

En particular, cuando $\lambda = \frac{c^2}{4}$ (esto es, $d = 0$) la identidad $J_0(0) = 1$ te facilita el cálculo de la serie.

LEMA 1.18. Considera $\lambda = \frac{c^2}{4}$. Entonces

$$G(t, x) = \begin{cases} \gamma_{10} e^{-\frac{c}{2}t}, & \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{10}, \\ \gamma_{01} e^{-\frac{c}{2}t}, & \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{01}, \end{cases} \quad (1.24)$$

donde

$$\gamma_{10} = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-c\pi}}{(1 - e^{-c\pi})^2}, \quad \gamma_{01} = \frac{e^{-c\pi}}{(1 - e^{-c\pi})^2}.$$

Además, por periodicidad determinas el valor de G en todo \mathcal{D} .

NOTA 1.16. Esta función es la que utilicé en el ejemplo en la nota 1.10.

NOTA 1.17. Para llegar a la fórmula (1.23) puedes considerar otras vías. Por ejemplo, en [[57], pág. 151] tienes la expresión de la solución de la ecuación del telégrafo cuando sólo impones que la haya periodicidad en la variable t . Si en dicha expresión consideras que hay también periodicidad con respecto a x , y operas en forma adecuada, llegas a (1.23) de nuevo.

Un segundo camino alternativo a considerar para el caso $\lambda = \frac{c^2}{4}$ es que hagas el cambio $u = e^{-ct/2}v$ en la ecuación del telégrafo. Con este cambio resulta la ecuación de ondas para la que la fórmula de D'Alembert te da la solución explícita. Deshaciendo el cambio, y tras realizar algunos cálculos más o menos tediosos e imponer la periodicidad en t y x , obtienes (1.24). He de indicar que esta vía fue la que me llevo a pensar que había un principio del máximo para las soluciones doblemente periódicas del telégrafo.

NOTA 1.18. A partir de (1.24) puedes deducir fácilmente una serie de propiedades para G en el caso $\lambda = \frac{c^2}{4}$. A saber,

1. G es analítica en \mathcal{D}_{ij} , $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Los valores de los saltos en las discontinuidades son conocidos y sólo dependen de t y c ; no dependen ni de x ni de d .
3. G es positiva en cualquier componente de \mathcal{D} .
4. Como consecuencia de 3, el principio del máximo es fuerte para $\lambda = \frac{c^2}{4}$.

A continuación voy a ver qué ocurre con estas propiedades cuando $\lambda > \frac{c^2}{4}$.

PROPOSICIÓN 1.19. Considera $\lambda \geq \frac{c^2}{4}$. Entonces el conjunto

$$Z = \{(t, x) \in \mathcal{D} / G(t, x) = 0\}$$

tiene medida cero.

Para demostrar este resultado, es suficiente que pruebe que la intersección de Z con \mathcal{D}_{10} y \mathcal{D}_{01} tiene medida cero. Para ello voy a demostrar que G es una función analítica no idénticamente nula en cada uno de estos dominios. Que esto es suficiente es un hecho bien conocido en variable compleja; a saber, si una función analítica no es idénticamente nula en un dominio y se anula en un punto P de dicho dominio entonces o bien P es un punto aislado o bien el conjunto de puntos donde se anula la función lo puedes describir como la unión finita de una serie de "ramas" que surgen de P (las cuales tienen medida cero) y cuyo único punto común es P . Puedes

consultar [21], la sección 4.5 de [35] y la sección 8.6.3 de [36] si quieres más detalles. Una versión real de este resultado la puedes encontrar en [30].

Te recuerdo la siguiente definición de función analítica: sean ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^2 y $h = h(t, x)$, $(t, x) \in \omega$, una función dada; diré que h es analítica en la clausura de ω si existen un subconjunto abierto Ω de \mathbb{C}^2 y una función holomorfa $\tilde{h} = \tilde{h}(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, tales que $\bar{\omega} \subset \Omega$ y \tilde{h} extiende a h .

LEMA 1.20. *La función G es analítica en la clausura de \mathcal{D}_{10} (respectivamente \mathcal{D}_{01}).*

Demostración. Probaré el resultado para \mathcal{D}_{10} . Para cada $n = 0, 1, \dots$, $|m| \leq n$ y $(t, x) \in \mathbb{C}^2$, defino

$$z_{nm}(t, x) = (t + 2\pi n)^2 - (x + 2\pi m)^2.$$

Entonces, la función de Green en \mathcal{D}_{10} está dada por la serie

$$G(t, x) = \frac{e^{-\frac{c}{2}t}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-c\pi n} \sum_{m=-n}^n J_0\left(\sqrt{dz_{nm}}\right). \quad (1.25)$$

Por ser J_0 una función entera, deduces que la función $J_0\left(\sqrt{dz_{nm}}\right)$ es holomorfa en todo el espacio $(t, x) \in \mathbb{C}^2$. En este punto, has de tener en cuenta que la raíz cuadrada no crea ningún problema ya que los coeficientes impares de la serie de potencias de J_0 son nulos. Así, para probar el lema es suficiente que demuestre la existencia de un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ con $\overline{\mathcal{D}_{10}} \subset \Omega$ y tal que la serie de G converja uniformemente en Ω .

Considera $\delta > 0$ un número satisfaciendo

$$\pi^2 - \delta^2 > \frac{1}{8}, \quad 16\pi\delta\sqrt{d} < c\pi. \quad (1.26)$$

Defino el conjunto Ω formado por los puntos $(t, x) \in \mathbb{C}^2$ tales que

$$\Re(t - x) > -\pi, \quad \Re(t + x) > -\pi,$$

$$|\Re t| < 7, \quad |\Re x| < 7, \quad |\Im t| < \delta, \quad |\Im x| < \delta.$$

Es claro que $\overline{\mathcal{D}_{10}} \subset \Omega$. Queda por probar la convergencia de la serie. Para ello usaré las siguientes desigualdades

$$|J_0(z)| \leq e^{|\Im z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1.27)$$

$$|\Im \sqrt{z}| \leq \frac{|\Im z|}{\sqrt{2|z|}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \Re z > 0. \quad (1.28)$$

La primera desigualdad es clásica y, si quieres una prueba, puedes consultar [[59], pág.49]. Para la segunda el uso de coordenadas polares te proporciona una prueba fácil. En efecto, si consideras $z = \rho e^{i\theta}$ entonces

$$|\Im z| = \rho |\sin \theta|, \quad |\Im \sqrt{z}| = \sqrt{\rho} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|, \quad \sqrt{2|z|} = \sqrt{2\rho}.$$

Por tanto, que pruebes (1.28) equivale a que pruebes

$$\sqrt{\rho} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq \frac{\rho |\sin \theta|}{\sqrt{2\rho}}, \quad \forall \rho \in (0, +\infty), \quad \forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

lo cual ya es un simple ejercicio de cálculo trigonométrico.

También serán útiles las siguientes identidades,

$$\Re z_{nm}(t, x) = (\Re(t+x) + 2\pi(n+m))(\Re(t-x) + 2\pi(n-m)) - (\Im t)^2 + (\Im x)^2$$

$$\Im z_{nm}(t, x) = 2(2\pi n + \Re t)\Im t - 2(2\pi m + \Re x)\Im x.$$

Para probarlas es suficiente que sustituyas $z_{nm}(t, x)$ por su valor y realices algunos cálculos.

Continúo ya con la demostración del lema. Distinguiré dos casos en la prueba de la convergencia.

Caso (i): $|m| < n$. Por la definición de Ω y (1.26), cálculos directos te llevan a

$$\Re z_{nm} > \pi^2 - \delta^2 > \frac{1}{8}, \quad |\Im z_{nm}| < 4(2\pi n + 7)\delta.$$

Así, puedes aplicar (1.28) y como $|z_{nm}| > \frac{1}{8}$, obtienes que

$$|\Im \sqrt{z_{nm}}| \leq 2|\Im z_{nm}| < 8(2\pi n + 7)\delta.$$

Ahora, de (1.27) deduces que

$$\sum_{|m| < n} |J_0(\sqrt{dz_{nm}})| \leq \sum_{|m| < n} e^{|\Im \sqrt{dz_{nm}}|} < (2n-1)e^{8(2\pi n+7)\delta\sqrt{d}}.$$

Con esta estimación, sustituyes en (1.25) y, utilizando (1.26), tienes que

$$\frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}t}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-c\pi n} \sum_{m=-n+1}^{n-1} |J_0(\sqrt{dz_{nm}})| \leq \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2}t}}{2} e^{56\delta\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)r^n,$$

donde $r = e^{16\pi\delta\sqrt{d}-c\pi} < 1$. Así, la última sumatoria es finita; de hecho, la suma es calculable explícitamente (recuerda que no es la primera vez que aparece esta sumatoria). Con esto he probado la convergencia de esta parte de la serie.

Caso (ii): $|m| = n$. Observa primero que la estimación para $\Im z_{nm}$ del caso anterior sigue siendo válida. Para la parte real, y nuevamente por un cálculo directo,

$$|\Re z_{nm}| \leq 14(14 + 4\pi n) + 2\delta^2.$$

En consecuencia, $|z_{nm}| = O(n)$ cuando $n \rightarrow +\infty$ y tienes que existen números positivos A, B tales que

$$|z_{nm}|^{1/2} \leq An^{1/2} + B.$$

A partir de aquí,

$$|\Im \sqrt{dz_{nm}}| \leq \sqrt{d} |z_{nm}|^{1/2} \leq \sqrt{d} (An^{1/2} + B),$$

y la convergencia de los términos $m = \pm n$ es ya inmediata.

Con esto finalizo la demostración de este lema.

LEMA 1.21. *La función G no es idénticamente nula en ninguna de las componentes de \mathcal{D} .*

NOTA 1.19. Voy a darte dos demostraciones de este lema. En la primera utilizo que conozco de forma explícita el valor del salto que tiene la función de Green en las líneas de discontinuidad, resultando “casi” trivial la demostración del lema a partir de este hecho. La segunda demostración es “algo” más complicada; sin embargo, puede que sea más útil para extender el resultado a operadores más generales.

Demostración 1. Se sabe que puedes extender la función G de una forma regular a la clausura $\overline{\mathcal{D}_{ij}}$ de cada una de las componentes \mathcal{D}_{ij} de \mathcal{D} . Desde luego, el valor de esta extensión en los puntos de \mathcal{C} dependerá de la componente que escojas. Considera la siguiente notación

$$G_{ij}(t, x) = \lim_{\substack{(\tau, \xi) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, \xi) \in \mathcal{D}_{ij}}} G(\tau, \xi), \quad (t, x) \in \mathcal{C}.$$

Considera dos componentes adyacentes de \mathcal{D} . Por ejemplo, \mathcal{D}_{ij} y \mathcal{D}_{hk} , con $(h, k) = (i - 1, j - 1)$ o $(i - 1, j + 1)$. Toma un punto (t, x) en la frontera común de ambas, esto es, $(t, x) \in \partial\mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{D}_{hk}$. Un cálculo directo a partir de (1.23) te permite encontrar explícitamente el salto de G en tal punto (t, x) ,

$$G_{ij}(t, x) - G_{hk}(t, x) = \frac{e^{-\frac{c}{2}t}}{2(1 - e^{-c\pi})} e^{c\pi[\frac{h}{2}]},$$

donde $[x]$ representa la parte entera de x . Formalmente, el valor del salto te resulta de tomar tan sólo los elementos no comunes de los conjuntos $I_n(t, x)$ según consideres que (t, x) es aproximado por una sucesión de puntos de \mathcal{D}_{ij} o de puntos de \mathcal{D}_{hk} .

Ahora probaré el lema por medio de un argumento de reducción al absurdo. Primero considera que $G \equiv 0$ en \mathcal{D}_{01} . Entonces, por periodicidad, G también se anula en \mathcal{D}_{21} y

$$G_{01}(\pi, \pi) = G_{21}(\pi, \pi) = 0.$$

Si realizas un salto de \mathcal{D}_{01} a \mathcal{D}_{10} tienes que

$$G_{10}(\pi, \pi) = \frac{e^{-\frac{c}{2}\pi}}{2(1 - e^{-c\pi})} > 0,$$

mientras que si el salto lo das de \mathcal{D}_{10} a \mathcal{D}_{21} tienes que

$$G_{10}(\pi, \pi) = -\frac{e^{-\frac{c}{2}\pi}}{2(1 - e^{-c\pi})} < 0.$$

Esta es la contradicción que buscaba.

Si consideras que $G \equiv 0$ en \mathcal{D}_{10} entonces funciona el mismo argumento si reemplazas (π, π) por $(2\pi, 0)$. Con esto acabo la primera demostración del lema.

Demostración 2. Considera que G es idénticamente nula en una de las componentes, por ejemplo \mathcal{D}_{01} . Nuevamente voy a hacer que llegues a una contradicción. Por el lema 1.17,

$$\phi(0, 0) = \int_{\mathbb{T}^2} G \mathfrak{L}_\lambda^* \phi = \int_{\mathcal{D}_{01} \cup \mathcal{D}_{10}} G \mathfrak{L}_\lambda^* \phi = \int_{\mathcal{D}_{10}} G \mathfrak{L}_\lambda^* \phi, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2). \quad (1.29)$$

Por el lema 1.20, sabes que G es regular en $\overline{\mathcal{D}_{10}}$. Por tanto, es claro que G satisface en el sentido clásico la ecuación

$$\mathfrak{L}_\lambda G = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}_{10}.$$

Esto permite que integres por partes en (1.29) obteniendo

$$\phi(0,0) = \int_{\mathcal{D}_{10}} G \mathfrak{L}_\lambda^* \phi = \int_{\partial \mathcal{D}_{10}} \{(G_{10} \phi_t - (G_{10})_t \phi - c G_{10} \phi) n_1 - (G_{10} \phi_x - (G_{10})_x \phi) n_2\},$$

donde G_{10} la defino como en la primera demostración y $n = (n_1, n_2)$ es el vector normal exterior en $\partial \mathcal{D}_{10}$. Operando en esta última expresión llegas a

$$\phi(0,0) = 2[G_{10}(0,0) + G_{10}(2\pi,0)]\phi(0,0) - 2[G_{10}(\pi,\pi) + G_{10}(\pi,-\pi)]\phi(\pi,\pi) + \int_{\partial \mathcal{D}_{10}} K \phi, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2),$$

con

$$K = -2(G_{10})_t n_1 + 2(G_{10})_x n_2 - c G_{10} n_1.$$

Si tomas ϕ cualquiera tal que se anule en $(0,0)$ y (π,π) , concluirás que $K \equiv 0$ en $\partial \mathcal{D}_{10}$. Así,

$$\begin{aligned} \phi(0,0) &= 2[G_{10}(0,0) + G_{10}(2\pi,0)]\phi(0,0) - \\ &2[G_{10}(\pi,\pi) + G_{10}(\pi,-\pi)]\phi(\pi,\pi), \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2), \end{aligned}$$

de donde ya es claro que

$$G_{10}(0,0) + G_{10}(2\pi,0) = \frac{1}{2}, \quad (1.30)$$

y

$$G_{10}(\pi,\pi) + G_{10}(\pi,-\pi) = 0. \quad (1.31)$$

Por otra parte, si aplicas la identidad $K \equiv 0$ sobre las rectas $t - x = 0$, $t + x = 0$, $t - x = 2\pi$ y $t + x = 2\pi$ tienes que

$$2 \frac{d}{ds} G_{10}(\pi - s, \pi - s) - c G_{10}(\pi - s, \pi - s) = 0, \quad s \in (0, \pi),$$

$$2 \frac{d}{ds} G_{10}(s, -s) + c G_{10}(s, -s) = 0, \quad s \in (0, \pi),$$

$$2 \frac{d}{ds} G_{10}(\pi + s, -\pi + s) + c G_{10}(\pi + s, -\pi + s) = 0, \quad s \in (0, \pi),$$

y

$$2 \frac{d}{ds} G_{10}(2\pi - s, s) - c G_{10}(2\pi - s, s) = 0, \quad s \in (0, \pi)$$

respectivamente. Ecuaciones que son de fácil resolución,

$$G_{10}(\pi - s, \pi - s) = G_{10}(\pi, \pi) e^{cs/2}, \quad s \in (0, \pi), \quad (1.32)$$

$$G_{10}(s, -s) = G_{10}(0, 0) e^{-cs/2}, \quad s \in (0, \pi), \quad (1.33)$$

$$G_{10}(\pi + s, -\pi + s) = G_{10}(\pi, -\pi) e^{-cs/2}, \quad s \in (0, \pi), \quad (1.34)$$

$$G_{10}(2\pi - s, s) = G_{10}(2\pi, 0)e^{cs/2}, \quad s \in (0, \pi). \quad (1.35)$$

Ahora, si combinas (1.31) con (1.32) y (1.33) evaluadas en π tienes que $G_{10}(0, 0) = 0$. Por otra parte, si combinas (1.31) con (1.34) y (1.35) evaluadas en π tienes que $G_{10}(2\pi, 0) = 0$. Y esto ya te conduce a la contradicción buscada pues (1.30) es incompatible con los dos últimos cálculos. Con esto finaliza esta segunda demostración del lema.

Para finalizar el estudio de G , voy a probar una estimación que será útil cuando considere el caso de una ecuación del telégrafo con coeficiente de fricción grande.

LEMA 1.22. *Considera $c \geq 1$ y $\lambda > \frac{c^2}{4}$. Entonces existen constantes positivas k_1, k_2 (independientes de c y λ) tales que*

$$\begin{aligned} |e^{\frac{c}{2}t}G(t, x) - \frac{1}{2}J_0\left(\sqrt{d(t^2 - x^2)}\right)| &\leq k_1e^{-c\pi} \quad \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{10}, \\ |e^{\frac{c}{2}(t+2\pi)}G(t, x) - \frac{1}{2}\left\{J_0\left(\sqrt{d[(t+2\pi)^2 - (x-2\pi)^2]}\right) + \right. \\ &\quad \left. J_0\left(\sqrt{d[(t+2\pi)^2 - x^2]}\right)\right\}| &\leq k_2e^{-c\pi} \quad \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{01}. \end{aligned}$$

Demostración. Es un simple ejercicio de suma de series si tienes en cuenta la expresión (1.23), que $|J_0(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}$, y que conoces $I_n(t, x)$ tanto si (t, x) está en \mathcal{D}_{10} como si está en \mathcal{D}_{01} .

1.6.2. Regularidad de soluciones. En la subsección previa he encontrado la función de Green cuando $\lambda \geq \frac{c^2}{4}$. Usando análisis de Fourier tienes un método alternativo para calcular G que es válido para cualquier $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$. En efecto, la solución formal de

$$\mathfrak{L}_\lambda G = \delta_{\bar{0}} \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2) \quad (1.36)$$

es

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - n^2 + \lambda + icn} e^{i(nt+mx)}.$$

Si pruebo que la serie doble

$$\sum_{m, n} |m^2 - n^2 + \lambda + icn|^{-2} \quad (1.37)$$

es convergente entonces la función G pertenece a $L^2(\mathbb{T}^2)$.

LEMA 1.23. *Considera $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$. Entonces la serie doble dada por (1.37) es convergente.*

Demostración. Para probar este lema es suficiente que, aplicando el criterio de Weierstrass, compruebes la convergencia de la serie de términos positivos

$$\sum_{m, n} \frac{1}{(m^2 - n^2 + \lambda)^2 + (cn)^2}. \quad (1.38)$$

Pero esta serie está acotada por

$$\sum_{p,q} \frac{4}{4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2},$$

donde estás considerando el cambio de índices $p = m + n$, $q = m - n$ que, aunque no es biyectivo, es válido para tu propósito pues, como mal menor, estás añadiendo términos positivos a la serie original (1.38). Ahora si agrupas adecuadamente,

$$\frac{1}{\lambda^2} + \sum_{p \neq 0} \frac{4}{4\lambda^2 + c^2p^2} + \sum_{q \neq 0} \frac{4}{4\lambda^2 + c^2q^2} + \sum_{\substack{p \neq q \\ p, q \neq 0}} \frac{4}{4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2}.$$

y es suficiente que compruebes la convergencia de la última sumatoria, pues para las dos primeras ya es evidente. Antes de continuar, observa que si $\lambda > 0$ entonces $4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2 \neq 0$, mientras que si $\lambda \leq 0$ entonces $4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2 = 0$ si, y sólo si, $\lambda = -p^2$, lo cual se contradice con la hipótesis del lema. Así, si en lo que sigue algún denominador se anula es porque se puede eliminar. Continúo.

Es claro que

$$\begin{aligned} \sum_{p \neq q} \frac{1}{4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2} &= \\ \sum_{\substack{pq \geq 1 \\ p \neq q}} \frac{1}{4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2} + \sum_{\substack{pq \geq 1 \\ p \neq q}} \frac{1}{4(pq - \lambda)^2 + c^2(p + q)^2} &= \\ \sum_{p > q \geq 1} \frac{2}{4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2} + \sum_{p > q \geq 1} \frac{2}{4(pq - \lambda)^2 + c^2(p + q)^2}. \end{aligned}$$

Considera $\lambda > 0$. Entonces

$$\sum_{p > q \geq 1} \frac{2}{4(pq + \lambda)^2 + c^2(p - q)^2} \leq \sum_{p > q \geq 1} \frac{1}{2(pq)^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2},$$

y la convergencia es clara. Por otra parte, si defino los conjuntos $A_1 = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 / 1 \leq q < p, 1 \leq pq \leq \lambda\}$ y $A_2 = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 / 1 \leq q < p, pq > \lambda\}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{p > q \geq 1} \frac{1}{4(pq - \lambda)^2 + c^2(p + q)^2} &= \\ \sum_{(p,q) \in A_1} \frac{1}{4(pq - \lambda)^2 + c^2(p + q)^2} + \sum_{(p,q) \in A_2} \frac{1}{4(pq - \lambda)^2 + c^2(p + q)^2}. \end{aligned}$$

Aquí, la primera sumatoria es finita y para la segunda

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in A_2} \frac{1}{4(pq - \lambda)^2 + c^2(p + q)^2} &\leq \sum_{(p,q) \in A_2} \frac{1}{4(pq - \lambda)^2} \leq \frac{1}{4} \sum_{q \geq 1} \left(\frac{1}{q^2} \sum_{p > \frac{\lambda}{q}} \frac{1}{(p - \frac{\lambda}{q})^2} \right) \leq \\ \frac{1}{4} \sum_{q \geq 1} \left(\frac{1}{q^2} \sum_{p > \frac{\lambda}{q}} \frac{1}{(p - \frac{\lambda}{q})^2} \right) &\leq \frac{1}{4} \sum_{q \geq 1} \left(\frac{1}{q^2} S(\lambda) \right) < +\infty, \end{aligned}$$

donde

$$S(\lambda) = \max_{q \geq 1} \left\{ \sum_{p > \frac{\lambda}{q}} \frac{1}{(p - \frac{\lambda}{q})^2} \right\}.$$

Acabo así el caso $\lambda > 0$. El caso $\lambda < 0$ lo puedes probar de forma análoga. Fin de la demostración.

A continuación voy a comprobar que G es una solución de (1.36) en el sentido de las distribuciones. Empiezo considerando funciones del tipo $e^{i(nt+mx)}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} G \mathfrak{L}_\lambda^*(e^{i(nt+mx)}) &= \int_{\mathbb{T}^2} G(-n^2 + m^2 - icn + \lambda) e^{i(nt+mx)} = \\ (-n^2 + m^2 - icn + \lambda) \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^{-i(nt+mx)} e^{i(nt+mx)}}{-(-n)^2 + (-m)^2 + ic(-n) + \lambda} &= \\ 1 = \langle e^{i(nt+mx)}, \delta_{\bar{0}} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, como una función $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2)$ admite una serie de Fourier

$$\phi(t, x) = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \phi_{nm} e^{i(nt+mx)}$$

que converge uniformemente junto con todas sus derivadas, puedo efectuar las siguientes operaciones sin problemas

$$\int_{\mathbb{T}^2} G \mathfrak{L}_\lambda^* \phi = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \phi_{nm} \int_{\mathbb{T}^2} G \mathfrak{L}_\lambda^*(e^{i(nt+mx)}) = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \phi_{nm} = \phi(0, 0).$$

Por tanto, he probado que G es solución de (1.36).

Con G así construida, si tomas $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ fija, se verifica que la función $u = G * f$ es la solución de (1.6). Observa que la convolución considerada debes entenderla definida en el toro, esto es

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{T}^2} G(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (1.39)$$

De esta forma llego a un resultado preliminar que ya obtuvo Kim en [22]. A saber, si consideras $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, el problema (1.6) tiene una única solución $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$ que satisface

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq \|G\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}. \quad (1.40)$$

A continuación voy a probar la proposición 1.9. En ella el resultado de Kim es mejorado pues, como recordarás, obtengo continuidad de la solución.

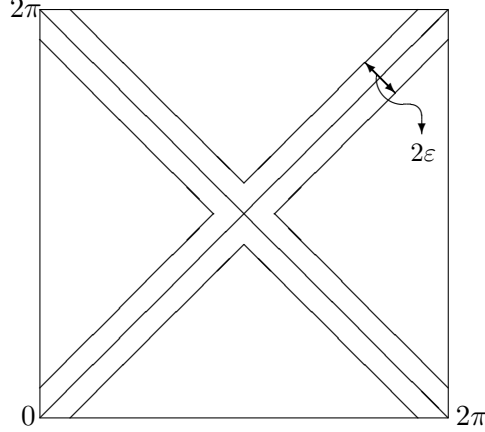
Demostración de la Proposición 1.9. Empezaré suponiendo que $\lambda = \frac{c^2}{4}$. En este caso G está explícitamente dada por el lema 1.18. Sea \mathcal{C} la familia de rectas $x \pm t = 2N\pi$ que ya viste en la definición de G . Para cada $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}[$, defino \mathcal{C}_ε como el ε -entorno

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / \text{dist}[(t, x), \mathcal{C}] < \varepsilon\}.$$

Es claro que la función característica de \mathcal{C}_ε es una función doblemente periódica. Denotaré a dicha función por χ_ε . Puedes comprobar sin dificultad que

$$\|\chi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq k\varepsilon, \quad (1.41)$$

donde k es una constante independiente de ε . De hecho, voy a tomar $k = 4\pi^2$ para que las estimaciones de la proposición tengan una expresión sencilla. Como indicación de la validez de la estimación, si observas el siguiente dibujo



y tienes en cuenta que \mathcal{C}_ε viene dado por el aspa, entonces $\|\chi_\varepsilon\|_{L^1}$ no es otra cosa que el área del aspa y el valor de k ya es obvio.

La función G que tengo a partir del lema 1.18 es discontinua en \mathcal{C} pero satisface, para cada $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$|G(t + h_1, x + h_2) - G(t, x)| \leq L[|h| + \chi_{|h|}(t, x)] \quad \text{c.t. } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.42)$$

donde L es una constante fija. Para demostrar esta estimación has de tener en cuenta que es suficiente que consideres que $(t + h_1, x + h_2)$ y (t, x) están en el interior del rombo de vértices $(\pi, -\pi)$, $(3\pi, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ y $(-\pi, \pi)$. Cualquier otra situación se reduce a esta por la periodicidad. Además, puedes tomar

$$L = \frac{e^{c\pi/2}}{1 - e^{-c\pi}} \max\left\{1, \frac{c}{2(1 - e^{-c\pi})}\right\}.$$

Como sabes que G está acotada, nuevamente por las propiedades de la convolución, tienes que, fijada $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, la solución dada por (1.39) pertenece a $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ y satisface

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq \|G\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)}.$$

Esta es la estimación (1.7). Me queda por mostrarte que u es continua. Por (1.42) deduces que

$$|u(t + h_1, x + h_2) - u(t, x)| \leq L|h| \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} + L \int_{\mathbb{T}^2} \chi_{|h|}(t - \tau, x - \xi) |f(\tau, \xi)| d\tau d\xi.$$

Puesto que, en la segunda integral, el integrando tiende a cero cuando $|h| \rightarrow 0$ y está dominado por $|f| \in L^1(\mathbb{T}^2)$, puedes aplicar el Teorema de la convergencia dominada para tener la continuidad de u .

Cuando $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, es posible mejorar la estimación. En efecto, si aplicas la desigualdad de Hölder y (1.41),

$$\int_{\mathbb{T}^2} \chi_{|h|}(t-\tau, x-\xi) |f(\tau, \xi)| d\tau d\xi \leq \|f\|_{L^p} \|\chi_{|h|}\|_{L^{p'}} = \|f\|_{L^p} \|\chi_{|h|}\|_{L^1}^\alpha \leq (4\pi^2|h|)^\alpha \|f\|_{L^p},$$

donde $\alpha = \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$.

Así, ya es claro que u es Hölder-continua. Además, como $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, entonces $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ y

$$\begin{aligned} |u(t+h_1, x+h_2) - u(t, x)| &\leq L|h|(4\pi^2)^\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} + L(4\pi^2|h|)^\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} = \\ &(4\pi^2)^\alpha \{L(|h|^{1-\alpha} + 1)\} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} |h|^\alpha \leq (4\pi^2)^\alpha \{L((4\pi\sqrt{2})^{1-\alpha} + 1)\} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} |h|^\alpha. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq \|G\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq (4\pi^2)^\alpha \|G\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)}.$$

Así, ya puedes deducir la estimación (1.8),

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leq (4\pi^2)^\alpha \{\|G\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + L((4\pi\sqrt{2})^{1-\alpha} + 1)\} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} = C_p \left(\frac{c^2}{4}\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^2)}.$$

Paso al caso $\lambda \neq \frac{c^2}{4}$. La solución u de (1.6) también es solución de

$$\mathfrak{L}u + \frac{c^2}{4}u = g(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

con $g = f + (\frac{c^2}{4} - \lambda)u$.

Si $f \in L^1$, a partir de (1.40) sabes que $u \in L^2$ y por tanto $g \in L^1$. Pero entonces, por el caso previo, u es continua. Una vez que tengo que $u \in C(\mathbb{T}^2)$, la equivalencia $f \in L^p \Leftrightarrow g \in L^p$ es evidente. Así $u \in C^{0,\alpha}$ si $f \in L^p$. Para las estimaciones (1.7) y (1.8), como la función de Green G_λ asociada está en $L^2(\mathbb{T}^2)$ también está en $L^1(\mathbb{T}^2)$, de donde

$$\|g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \left| \frac{c^2}{4} - \lambda \right| \|u\|_{L^p} \leq \left(1 + \left| \frac{c^2}{4} - \lambda \right| \|G_\lambda\|_{L^1} \right) \|f\|_{L^p}.$$

Con esto y utilizando la estimación del caso anterior, para (1.7)

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|G_{\frac{c^2}{4}}\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \leq \|G_{\frac{c^2}{4}}\|_{L^\infty} \left(1 + \left| \frac{c^2}{4} - \lambda \right| \|G_\lambda\|_{L^1} \right) \|f\|_{L^1} = C_1(\lambda) \|f\|_{L^1}.$$

Por último, para (1.8)

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)} &\leq C_p \left(\frac{c^2}{4}\right) \|g\|_{L^p} \leq \\ &C_p \left(\frac{c^2}{4}\right) \left(1 + \left| \frac{c^2}{4} - \lambda \right| \|G_\lambda\|_{L^1} \right) \|f\|_{L^p} = C_p(\lambda) \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Así acabo la demostración de la proposición 1.9

NOTA 1.20. Como has visto en la anterior demostración, puedes tomar la constante $C_p = C_p(\lambda)$ en (1.7) y (1.8) como una función continua de $\lambda \in \mathbb{R} - \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$.

Demostración de la Proposición 1.10. Como en la proposición 1.9, la unicidad es consecuencia directa de la definición de $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$. Para la existencia voy a hacer un argumento de aproximación. Para ello considera una sucesión de funciones $f_n \in L^1(\mathbb{T}^2)$ tales que

$$\int_{\mathbb{T}^2} f_n \phi \rightarrow \langle \mu, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C(\mathbb{T}^2), \quad \|f_n\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{T}^2)}.$$

Puedes consultar [14] para ver que puedes considerar tal sucesión. Así, puedes aplicar la proposición 1.9 al problema aproximado

$$\mathfrak{L}u + \lambda u = f_n(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

y obtener una sucesión $\{u_n\}$ en $C(\mathbb{T}^2)$ con

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 \|\mu\|_{M(\mathbb{T}^2)}.$$

Puedes tomar ahora $\{u_k\}$ subsucesión de $\{u_n\}$ convergente a $u \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ en sentido débil*; esto es

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_k \phi \rightarrow \int_{\mathbb{T}^2} u \phi, \quad \forall \phi \in L^1(\mathbb{T}^2).$$

Voy a ver que u es una solución de (1.9), esto es,

$$\int_{\mathbb{T}^2} u(\mathfrak{L}^* \phi - \lambda \phi) = \langle \mu, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2).$$

Para cada u_k

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_k(\mathfrak{L}^* \phi - \lambda \phi) = \int_{\mathbb{T}^2} f_k \phi, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2).$$

En el primer término de la igualdad puedo aplicar límites pues ϕ_{tt} , ϕ_{xx} , ϕ_t y ϕ están en $L^1(\mathbb{T}^2)$. En el segundo se aplica la elección de $\{f_n\}$. Además, por las propiedades del límite débil*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq \liminf \|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 \|\mu\|_{M(\mathbb{T}^2)}.$$

Así finalizo la demostración, pero es conveniente que te haga notar que, por la unicidad de solución, es la sucesión $\{u_n\}$ completa la que converge a u .

1.6.3. Demostración del principio del máximo. Ya estás preparado para que demuestre el resultado principal del capítulo. A partir de (1.39), es claro que \mathfrak{L}_λ satisface el principio del máximo si y sólo si

$$G \geq 0 \quad \text{c.t. } \mathbb{T}^2.$$

Además, este principio del máximo es fuerte si

$$G > 0 \quad \text{c.t. } \mathbb{T}^2.$$

De esta forma, si aplicas el lema 1.18, puedes concluir que el principio del máximo fuerte se cumple al menos para $\lambda = \frac{c^2}{4}$. Con el siguiente resultado verás que el principio también se cumple para valores de λ cercanos a $\frac{c^2}{4}$.

LEMA 1.24. *Considera que, para algún $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$, la función de Green satisface*

$$\operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{T}^2} G > 0.$$

Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que el principio del máximo fuerte se cumple para $\mathfrak{L}_{\lambda+\varepsilon}$ si $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$.

Demostración. Toma una función fija $f \in L^1$, $f \geq 0$. Nota por u_0 y u a las soluciones de $\mathfrak{L}_{\lambda}u_0 = f$, $\mathfrak{L}_{\lambda+\varepsilon}u = f$ respectivamente. A partir de la expresión (1.39),

$$u_0(t, x) \geq \underline{G} \|f\|_{L^1}, \quad \underline{G} = \operatorname{ess\,inf} G.$$

Por otra parte, si ε es pequeño y tienes en cuenta la nota 1.20, puedes encontrar una constante C independiente de ε tal que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^1}.$$

Si defines $w = u - u_0$ es claro que esta función es una solución de

$$\mathfrak{L}_{\lambda}w = -\varepsilon u(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Aplica ahora la estimación (1.7) y obtienes

$$\|u - u_0\|_{L^\infty} \leq C|\varepsilon| \|u\|_{L^1} \leq C|\varepsilon| 4\pi^2 \|u\|_{L^\infty} \leq C^2 4\pi^2 |\varepsilon| \|f\|_{L^1}.$$

Por último,

$$u(t, x) \geq u_0(t, x) - \|u - u_0\|_{L^\infty} \geq (\underline{G} - C^2 4\pi^2 |\varepsilon|) \|f\|_{L^1}$$

y u es positiva si $|\varepsilon|$ es suficientemente pequeño. Fin de la demostración del lema.

Continúo con la demostración del principio del máximo. Si integras en la ecuación del problema (1.6) sobre $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ con f constante, pruebas que, si el principio del máximo se cumple, entonces λ tiene que ser positivo. Puedo definir por tanto el conjunto

$$\mathfrak{J}_c = \{\lambda \in (0, +\infty) / \mathfrak{L}_{\lambda} \text{ satisface el principio del máximo}\}.$$

Ya sabes que \mathfrak{J}_c es no vacío puesto que $\frac{c^2}{4}$ es un punto interior. Si consideras una sucesión $\{\lambda_n\}$ de puntos \mathfrak{J}_c que converja a λ , puedes probar que $\lambda \in \mathfrak{J}_c$ con la misma técnica de la demostración de la proposición 1.10. De esta forma tienes que \mathfrak{J}_c es cerrado relativo a $(0, +\infty)$. Así concluyo que si \mathfrak{J}_c está acotado entonces tiene máximo y puedo definir

$$\nu(c) = \max \mathfrak{J}_c.$$

Por el lema 1.24, sabes que $\nu(c) > \frac{c^2}{4}$.

Si aplicas ahora la proposición 1.19 puedes deducir que, para $\lambda = \nu(c)$, la función de Green G_{λ} es positiva casi por doquier y, por tanto, $\mathfrak{L}_{\nu(c)}$ satisface el principio del máximo fuerte.

Por la teoría de operadores lineales positivos tienes la siguiente propiedad:

“Considera $\Lambda \in \mathfrak{J}_c$ tal que \mathfrak{L}_{Λ} satisface el principio del máximo fuerte. Entonces, si $\lambda \in (0, \Lambda]$, tienes que $\lambda \in \mathfrak{J}_c$ y \mathfrak{L}_{λ} también satisface el principio del máximo fuerte.”

Para probar esta propiedad voy a utilizar la proposición 1.14. La ecuación $\mathfrak{L}_{\Lambda-\varepsilon}u = f$ es equivalente a

$$(I - \varepsilon R_\Lambda)u = R_\Lambda f$$

donde R_Λ es la resolvente de \mathfrak{L}_Λ que introduce en la sección 1.5. Si restringes el operador R_Λ a $C(\mathbb{T}^2)$ entonces puedes verlo como un endomorfismo de este espacio con radio espectral $\frac{1}{\Lambda}$. Tomando en la proposición referida $A = R_\Lambda$ y $\mu_0 = \frac{1}{\Lambda}$, concluyes que u es estrictamente positiva si $\varepsilon \in (0, \Lambda)$ y $f \geq 0$ con $\int_{\mathbb{T}^2} f > 0$.

Tomando $\Lambda = \nu(c)$ en el último razonamiento, toda la discusión anterior me ha permitido probar que \mathfrak{L}_λ cumple el principio del máximo fuerte para $\lambda \in (0, \nu(c)]$.

Para acabar la demostración del teorema 1.11, he de probar las estimaciones de $\nu(c)$. La estimación (1.11) es consecuencia directa de la exposición previa y el ejemplo 1.2.

Para probar (1.12) considera un número fijo $\lambda > 0$. Considera igualmente dos funciones regulares u y f en el toro tales que

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = f,$$

f es positiva y u cambia de signo. Para este fin puedes tomar las funciones del ejemplo 1.1. Es claro que la función u también satisface

$$\mathfrak{L}_\lambda u = g$$

con $g = f + cu_t$. Ahora bien, cuando c es pequeño entonces g es positiva y, por tanto, $\lambda \notin \mathfrak{J}_c$.

Por último, para probar (1.13), considera las funciones

$$\begin{aligned} r_{10}(t, x) &= J_0 \left(\sqrt{d(t^2 - x^2)} \right), \quad \text{si } (t, x) \in \overline{\mathcal{D}_{10}}, \\ r_{01}(t, x) &= J_0 \left(\sqrt{d[(t + 2\pi)^2 - (x - 2\pi)^2]} \right) + \\ &J_0 \left(\sqrt{d[(t + 2\pi)^2 - x^2]} \right), \quad \text{si } (t, x) \in \overline{\mathcal{D}_{01}}. \end{aligned}$$

Mediante algunos cálculos comprobarás que

$$t^2 - x^2 \leq 4\pi^2, \quad \forall (t, x) \in \overline{\mathcal{D}_{10}},$$

con igualdad sólo en el punto $(t, x) = (2\pi, 0)$;

$$(t + 2\pi)^2 - (x - 2\pi)^2 \leq 8\pi^2, \quad \forall (t, x) \in \overline{\mathcal{D}_{01}},$$

con igualdad sólo en el punto $(t, x) = (\pi, \pi)$;

$$(t + 2\pi)^2 - x^2 \leq 8\pi^2, \quad \forall (t, x) \in \overline{\mathcal{D}_{01}},$$

con igualdad sólo en el punto $(t, x) = (\pi, \pi)$.

Fija cualquier número d con $0 < d < \frac{j_0^2}{8\pi^2}$ (recuerda que j_0 es el primer cero positivo de J_0). Entonces r_{10} y r_{01} son siempre estrictamente positivas, de donde,

$$J_0 \left(\sqrt{d(t^2 - x^2)} \right) \geq a_{10} > 0, \quad \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{10},$$

$$\begin{aligned} J_0 \left(\sqrt{d[(t + 2\pi)^2 - (x - 2\pi)^2]} \right) + J_0 \left(\sqrt{d[(t + 2\pi)^2 - x^2]} \right) \geq \\ a_{01} > 0, \quad \text{si } (t, x) \in \mathcal{D}_{01}. \end{aligned}$$

Ahora, si defines $\lambda_c = d + \frac{c^2}{4}$, por el lema 1.22 tienes que, para valores grandes de c , la función de G_{λ_c} , asociada a λ_c , es positiva. Así, $\nu(c) > d + \frac{c^2}{4}$ y esto te prueba que

$$\liminf_{c \rightarrow +\infty} \left\{ \nu(c) - \frac{c^2}{4} \right\} \geq \frac{j_0^2}{8\pi^2}.$$

Para probar la desigualdad contraria es suficiente que tomes d fijo tal que d sea mayor y suficientemente próximo a $\frac{j_0^2}{8\pi^2}$. En este caso r_{01} cambia de signo. Por su parte r_{10} puede que no cambie de signo, pero esto no influye en el resultado final. Con esto tienes que, si c es grande, G_{λ_c} también cambia de signo. Con esto doy por finalizada la demostración del teorema 1.11.

Ya sólo me queda por probar el corolario 1.12. Para ello basta con que consideres un argumento de aproximación en la misma línea de la demostración de la proposición 1.10.

1.7. El método de sub-super-soluciones

Considera la ecuación no lineal

$$\mathfrak{L}u \equiv u_{tt} - u_{xx} + cu_t = F(t, x, u) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2). \quad (1.43)$$

Supondré que la función $F : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones de Carathéodory siguientes

- a) Para c.t. $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, la función $u \in \mathbb{R} \mapsto F(t, x, u)$ es continua.
- b) Para todo $u \in \mathbb{R}$, la función $(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto F(t, x, u)$ es medible.
- c) Para cada constante positiva $R > 0$ existe una función $\gamma \in L^1(\mathbb{T}^2)$ tal que

$$\sup_{|u| \leq R} |F(t, x, u)| \leq \gamma(t, x) \quad \text{c.t. } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Diré que una función $u_* \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ es una sub-solución de (1.43) si satisface

$$\mathfrak{L}u_* \leq F(t, x, u_*) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Esta desigualdad diferencial tienes que entenderla en el sentido de las distribuciones, esto es,

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_* \mathfrak{L}^* \phi \leq \int_{\mathbb{T}^2} F(t, x, u_*) \phi, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}_+(\mathbb{T}^2).$$

Diré que $u^* \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ es una super-solución si es una función que satisface la desigualdad contraria.

TEOREMA 1.25. *Considera que u_* , u^* son sub-super-soluciones de (1.43) tales que satisfacen*

$$u_* \leq u^* \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2.$$

Además, considera que

$$F(t, x, u_2) - F(t, x, u_1) \geq -\nu(u_2 - u_1), \quad (1.44)$$

para c.t. $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ y todos u_1, u_2 con

$$u_*(t, x) \leq u_1 \leq u_2 \leq u^*(t, x).$$

(La constante $\nu = \nu(c)$ fue definida en el teorema 1.11). Entonces (1.43) tiene una solución $u \in C(\mathbb{T}^2)$ que satisface

$$u_* \leq u \leq u^* \quad \text{c.t. } \mathbb{R}^2.$$

La demostración que doy se basa en el esquema monótono estándar que se emplea en la mayoría de los estudios de sub-super-soluciones. Sin embargo, el que las sub-super-soluciones sean débiles me lleva a tener que probar el siguiente resultado previo para salvar algunas sutilezas.

LEMA 1.26. Considera que $\lambda \in (0, \nu]$ y que u es una función de $L^1(\mathbb{T}^2)$ que satisface

$$\mathfrak{L}_\lambda u \geq 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Entonces $u \geq 0$ c.t. \mathbb{R}^2 .

Demostración. Considera la distribución

$$\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2) \mapsto \int_{\mathbb{T}^2} u \mathfrak{L}_\lambda^* \phi.$$

Es claro que esta distribución es no negativa. Así, puedes extender u a una medida. Para dar este paso puedes consultar [[58], pág. 22] o [[31], pág. 151]. De esta forma, u satisface

$$\mathfrak{L}_\lambda u = \mu \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

con $\mu \in M(\mathbb{T}^2)$. Aplico el corolario 1.12 y acabo la demostración.

Demostración del Teorema 1.25. Considera el esquema iterativo

$$\mathfrak{L}_\nu u_{n+1} = \mathfrak{L}u_{n+1} + \nu u_{n+1} = F(t, x, u_n) + \nu u_n \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Considera las sucesiones $\{\underline{u}_n\}$ y $\{\bar{u}_n\}$ generadas por las condiciones iniciales $\underline{u}_0 = u_*$ y $\bar{u}_0 = u^*$, respectivamente. Por la regularidad de las soluciones de la ecuación lineal (proposición 1.9), tienes que \underline{u}_n y \bar{u}_n son continuas si $n \geq 1$. Además, la condición (1.44) y el lema anterior te llevan a la cadena de desigualdades

$$u_* = \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \dots \leq \underline{u}_n \leq \dots \leq \bar{u}_n \leq \dots \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0 = u^*.$$

En efecto, por ser $\underline{u}_0 = u_*$ sub-solución de (1.43)

$$\mathfrak{L}_\nu \underline{u}_1 = F(t, x, \underline{u}_0) + \nu \underline{u}_0 = F(t, x, u_*) + \nu u_* \geq \mathfrak{L}u_* + \nu u_* = \mathfrak{L}_\nu u_* = \mathfrak{L}_\nu \underline{u}_0,$$

de donde

$$\mathfrak{L}_\nu(\underline{u}_1 - \underline{u}_0) \geq 0.$$

Por el principio del máximo para \mathfrak{L}_ν , $\underline{u}_1 \geq \underline{u}_0$. Considera ahora que $\underline{u}_{n+1} \geq \underline{u}_n$ como hipótesis de inducción. Entonces

$$\mathfrak{L}_\nu(\underline{u}_{n+2} - \underline{u}_{n+1}) = \mathfrak{L}_\nu \underline{u}_{n+2} - \mathfrak{L}_\nu \underline{u}_{n+1} = F(t, x, \underline{u}_{n+1}) + \nu \underline{u}_{n+1} - F(t, x, \underline{u}_n) - \nu \underline{u}_n$$

y, por la condición (1.44),

$$\mathfrak{L}_\nu(\underline{u}_{n+2} - \underline{u}_{n+1}) \geq 0.$$

Nuevamente por el principio del máximo, $\underline{u}_{n+2} \geq \underline{u}_{n+1}$. Así, he probado que $\{\underline{u}_n\}$ es no decreciente. De forma análoga puedes ver que $\{\bar{u}_n\}$ es no creciente.

Igualmente, no te será complicado probar, también por inducción, que $\underline{u}_n \leq \bar{u}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, tengo que la sucesión $\{\underline{u}_n\}$ es no decreciente y converge puntualmente a una función u que satisface $u_* \leq u \leq u^*$. Basándome en el Teorema de la convergencia dominada (o en el Teorema de la convergencia monótona) puedo efectuar un paso al límite y obtengo que u es una solución de

$$\mathfrak{L}u + \nu u = F(t, x, u) + \nu u \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

o, equivalentemente, de (1.43). Finalmente, la teoría de regularidad me permite concluir que u pertenece a $C(\mathbb{T}^2)$. He acabado la demostración.

CAPÍTULO 2

El índice de las soluciones periódicas de ciertas ecuaciones de evolución de segundo orden

2.1. Introducción al capítulo 2

En este capítulo voy a optar por hacer un estudio en un marco que quizás puedas considerar, en principio, demasiado abstracto. Sin embargo, tal abstracción te ayudará, según mi punto de vista, a comprender la idea subyacente. Espero que al final me des la razón.

Considera pues dos espacios de Hilbert H y V de dimensión infinita con $V \subset H$, V denso en H . Asimismo, considera la ecuación diferencial

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = f(t, u), \quad u \in V, \quad \dot{u} \in H. \quad (2.1)$$

En esta ecuación $c > 0$ es una constante fija, ℓ es un operador lineal autoadjunto que se define por densidad en H y f es una función no lineal T -periódica con respecto al tiempo. Además, impondré sobre ℓ y f condiciones que determinaré a partir del caso de la ecuación semilineal del telégrafo.

Puedes ver distintos métodos para estudiar el problema periódico asociado a ecuaciones de este tipo en [52], [37], [16], [9], [57], [5], [23] y las referencias que aparecen en estos trabajos. La idea central de este capítulo es presentarte dos enfoques, que puedo considerar de los más clásicos, para estudiar el problema periódico asociado a (2.1) y probar que son equivalentes.

El primer enfoque está basado en el operador de Poincaré. Para definirlo empezaré considerando el problema de Cauchy asociado a (2.1), el cual está bien planteado bajo condiciones apropiadas sobre ℓ y f . Así, si notas por $u(t; u_0, v_0)$ a la solución de (2.1) que satisface

$$u(0) = u_0 \in V, \quad \dot{u}(0) = v_0 \in H,$$

entonces tienes que el problema periódico para (2.1) se reduce al estudio de los puntos fijos del operador de Poincaré

$$\mathcal{P} : (u_0, v_0) \rightarrow (u(T; u_0, v_0), \dot{u}(T; u_0, v_0)).$$

Como puedes comprobar, en general este operador no es completamente continuo, por lo que no puedo aplicar directamente la teoría de Leray-Schauder. Sin embargo, por el carácter disipativo de la ecuación soy capaz de asegurar que \mathcal{P} es una α -contracción. Esto me permitirá aplicar la teoría desarrollada por Nussbaum en [44] para definir el grado

$$\deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H),$$

donde G es un subconjunto abierto de $V \times H$.

Para el segundo enfoque haré nuevamente uso de las funciones de Green. La idea es que reescribas el problema periódico como una ecuación integral. Para que esto sea factible impondré hipótesis sobre ℓ de forma que el problema periódico

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = p(t), \quad u(0) = u(T), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(T), \quad p \in C([0, T], H),$$

tenga una única solución $u = \mathcal{G}_T p$. Observa que dicha solución pertenece al espacio de funciones

$$\mathfrak{M}_T = \{u \in C^1([0, T], H) \cap C([0, T], V) / u(0) = u(T), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(T)\}.$$

Con esto tienes que el problema periódico no lineal es equivalente a la ecuación de punto fijo

$$u = \mathcal{G}_T \mathcal{N}_T u, \quad u \in \mathfrak{M}_T,$$

donde \mathcal{N}_T es el operador de sustitución asociado a f . En este enfoque, el operador que considero, $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T \mathcal{N}_T$, sí es completamente continuo y puedo utilizar la teoría de Leray-Schauder para definir el grado

$$\deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T),$$

donde Ω_T es un subconjunto abierto y acotado de \mathfrak{M}_T .

Supongo ahora que los conjuntos G y Ω_T tienen un *núcleo común*. Intuitivamente, esto significa que una solución periódica de (2.1) pertenece a Ω_T si y sólo si sus condiciones iniciales están en G . El que denominaré teorema de dualidad te afirmará que los dos grados coinciden, es decir,

$$\deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H) = \deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T).$$

El resultado análogo para ecuaciones diferenciales ordinarias es un resultado clásico y puedes encontrar una demostración en el libro de Krasnoselskii y Zabreiko [26]. La idea básica de la demostración en [26] es conectar los operadores \mathcal{P} y \mathcal{F}_T mediante una ingeniosa cadena de homotopías. En la demostración que te propongo, para ecuaciones en derivadas parciales, seguiré las ideas de [26] y las adaptaré al marco infinito-dimensional. La principal dificultad que me surgió en esta adaptación derivó de un hecho bien conocido: no puedo definir el grado para funciones continuas arbitrarias en el caso de dimensión infinita. Verás que las sucesivas homotopías permanecerán siempre en una clase admisible donde el grado sí está bien definido.

Junto con su interés intrínseco, los Teoremas de Dualidad son útiles en aplicaciones. Así, en el capítulo 3 combinaré el teorema de dualidad con las técnicas introducidas en el capítulo 1 para obtener más resultados sobre la ecuación de sine-Gordon forzada con condiciones de contorno periódicas.

Organizo el resto del capítulo en cinco secciones. En la sección 2.2 recuerdo algunos hechos conocidos en teoría de grado que utilizaré en las siguientes secciones. En la sección 2.3 discuto la ecuación lineal asociada a ℓ y obtengo algunos resultados preliminares. En la sección 2.4 estudio el problema de Cauchy para el problema (2.1) y presento algunos resultados preliminares sobre la ecuación no lineal. En la sección 2.5 describo en términos rigurosos el operador de Poincaré y el enfoque analítico-funcional en el estudio del problema de contorno periódico. Por último, en la sección 2.6 enuncio y demuestro el teorema de dualidad. También en esta sección presento una discusión sobre el valor del índice de una solución periódica asintóticamente

estable. Para calcular dicho índice usaré el método del operador de Poincaré y el Teorema del punto fijo asintótico para α -contracciones siguiendo las ideas de [43] y [20].

2.2. Operadores de tipo α -contractivo y teoría de grado

Considera un espacio de Banach X con norma $|\cdot|$. Si A es un conjunto acotado de X , defino la medida de no compacidad de A como

$$\gamma(A) := \inf\{d > 0 / A \text{ puede ser recubierto por un número finito de conjuntos con diámetro menor o igual que } d\}.$$

Puedes ver las propiedades de γ en [44] y [13].

Consideraré en esta sección que $f : \bar{\Omega} \subset X \rightarrow X$ es un operador definido en el cierre de un subconjunto acotado y abierto Ω de X . Además, siempre supondré que f es continuo y que $f(\bar{\Omega})$ es acotado.

Diré que el operador f es una α -contracción si existe una constante $k \in (0, 1)$ tal que

$$\gamma(f(A)) \leq k\gamma(A)$$

para cada subconjunto A de $\bar{\Omega}$.

NOTA 2.1. Como ejemplo típico de α -contracción tienes $f = L + C$, donde L es un operador lineal acotado con norma $|L| := \sup\{|Lx| / |x| \leq 1\} < 1$ y C es un operador compacto.

NOTA 2.2. Has de tener en cuenta que γ depende de la norma $|\cdot|$ y, por tanto, lo mismo ocurre con la clase de las α -contracciones. Si cambias la norma $|\cdot|$ en X por otra equivalente $\|\cdot\|$, entonces una α -contracción para $|\cdot|$ puede dejar de serlo para $\|\cdot\|$. Esto me lleva a tener que trabajar en una clase más amplia de operadores. En concreto, usaré la introducida por Nussbaum en [44] y que denominaré clase de operadores de tipo α -contractivo. Esta clase contiene a la formada por los operadores que son α -contracciones con respecto a alguna norma que sea equivalente a $|\cdot|$. Para mi definición necesito notación previa. Antes de finalizar esta nota, quiero comentarte que, aunque la idea original es la de Nussbaum, voy a seguir a partir de ahora el desarrollo hecho por Lloyd en [33].

Considera un operador $f : \bar{\Omega} \subset X \rightarrow X$ continuo y acotado. Defino los conjuntos

$$K_1 = \bar{\text{co}}f(\bar{\Omega}), \quad K_n = \bar{\text{co}}f(K_{n-1} \cap \bar{\Omega}), \quad n > 1,$$

donde $\bar{\text{co}}(S)$ denota la envolvente cerrada y convexa del conjunto S . Es claro que los conjuntos K_n son cerrados, convexos y satisfacen la cadena de inclusiones

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$$

Defino ahora el conjunto $K_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$. Este conjunto también es cerrado y convexo. Diré que el operador f pertenece a la clase $\mathfrak{LC}(\bar{\Omega})$ si K_∞ es compacto.

NOTA 2.3. Como puedes observar, K_∞ depende de f y Ω . Cuando quiera que esta dependencia quede reflejada de forma explícita escribiré $K_\infty(f, \Omega)$.

NOTA 2.4. Como ejemplo de operador en $\mathfrak{L}C(\overline{\Omega})$ tienes los operadores $F = L + C$ donde C es compacto y L es lineal con radio espectral $\varrho(L) < 1$.

Voy a repasar la prueba de este hecho: considero una norma $|\cdot|_*$ en X equivalente a la original y tal que L sea una contracción métrica para ella. Si denoto por γ_* la medida de compacidad asociada a esta norma, entonces (a partir de propiedades bien conocidas de las medidas de compacidad que puedes consultar en la sección 6.1 de [33])

$$\begin{aligned}\gamma_*(K_n) &= \gamma_*(\overline{\text{co}}f(K_{n-1} \cap \overline{\Omega})) = \gamma_*(f(K_{n-1} \cap \overline{\Omega})) \leq \\ &\gamma_*(L(K_{n-1} \cap \overline{\Omega})) + \gamma_*(C(K_{n-1} \cap \overline{\Omega})).\end{aligned}$$

Como C es un operador compacto, $\gamma_*(C(K_{n-1} \cap \overline{\Omega})) = 0$ y, por tanto,

$$\gamma_*(K_n) \leq \gamma_*(L(K_{n-1} \cap \overline{\Omega})) \leq \gamma_*(L(K_{n-1})) \leq |L|_* \gamma_*(K_{n-1}).$$

Por último, como he elegido la norma $|\cdot|_*$ de manera que $|L|_* < 1$ entonces tengo que $\gamma_*(K_n) \rightarrow 0$. En consecuencia $\gamma_*(K_\infty) = 0$.

Es evidente que si $f \in \mathfrak{L}C(\overline{\Omega})$ entonces el conjunto de sus puntos fijos $\text{Fix}(f)$ está incluido en K_∞ . Siempre que f satisfaga

$$\text{Fix}(f) \cap \partial\Omega = \emptyset, \quad (2.2)$$

puedo definir el grado

$$\deg(I - f, \Omega; X)$$

de la siguiente manera

i) si $K_\infty = \emptyset$ entonces

$$\deg(I - f, \Omega; X) = 0;$$

ii) si $K_\infty \neq \emptyset$ entonces

$$\deg(I - f, \Omega; X) = \deg(I - f^*, \Omega; X),$$

donde el segundo grado es el de Leray-Schauder y $f^* : \overline{\Omega} \rightarrow X$ es cualquier operador continuo satisfaciendo

$$f^*(x) = f(x) \text{ si } x \in K_\infty \cap \overline{\Omega}, \quad f^*(\overline{\Omega}) \subset K_\infty.$$

NOTA 2.5. Observa que los puntos fijos de f han de estar en K_∞ por la construcción hecha. Por otra parte, la extensión f^* siempre existe como consecuencia de la generalización del Teorema de Tietze hecha por Dugundji y que está enunciada en [33] (más concretamente, el Teorema 4.4.5). A partir de esto, puedes ver que f y f^* tienen los mismos puntos fijos. Así, la definición que he dado es coherente. Para que definitivamente esta definición de grado sea correcta tengo que probar que es independiente del operador f^* escogido. Si f^{**} es otro operador en las mismas condiciones, basta definir la homotopía

$$\lambda f^*(x) + (1 - \lambda)f^{**}(x), \quad \lambda \in [0, 1],$$

y aplicar la invarianza del grado de Leray-Schauder por homotopías, donde has de observar que $\lambda f^* + (1 - \lambda)f^{**}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, no tiene puntos fijos en $\partial\Omega$ puesto que $K_\infty \cap \partial\Omega = \emptyset$.

A continuación presento tres propiedades que utilizaré en este capítulo.

LEMA 2.1. (Invarianza por conjugación) *Considera los espacios de Banach X , Y , un isomorfismo lineal (y continuo) $\Phi : X \rightarrow Y$ y un operador $f \in \mathcal{LC}(\bar{\Omega})$ tal que satisface (2.2). Si defines*

$$g : \bar{\omega} \subset Y \rightarrow Y, \quad g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \quad \omega = \Phi(\Omega),$$

entonces $g \in \mathcal{LC}(\bar{\omega})$, $\text{Fix}(g) \cap \partial\omega = \emptyset$ y

$$\deg(I - f, \Omega; X) = \deg(I - g, \omega; Y).$$

Demostración. Primero tienes que comprobar que $g \in \mathcal{LC}(\bar{\omega})$, esto es, que $K_\infty(g, \omega)$ es compacto. Para ello, como un isomorfismo lineal respeta los cierres convexos,

$$K_1(g, \omega) = \overline{\text{co}}g(\bar{\omega}) = \overline{\text{co}}g(\Phi(\bar{\Omega})) = \overline{\text{co}}\Phi(f(\bar{\Omega})) = \Phi(\overline{\text{co}}f(\bar{\Omega})) = \Phi(K_1(f, \Omega)).$$

Supongo, como hipótesis de inducción, que $K_{n-1}(g, \omega) = \Phi(K_{n-1}(f, \Omega))$. A partir de aquí,

$$\begin{aligned} K_n(g, \omega) &= \overline{\text{co}}g(K_{n-1}(g, \omega) \cap \bar{\omega}) = \overline{\text{co}}g\Phi(K_{n-1}(f, \Omega) \cap \bar{\Omega}) = \\ &= \overline{\text{co}}\Phi f(K_{n-1}(f, \Omega) \cap \bar{\Omega}) = \Phi(\overline{\text{co}}f(K_{n-1}(f, \Omega) \cap \bar{\Omega})) = \Phi(K_n(f, \Omega)). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$K_\infty(g, \omega) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n(g, \omega) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Phi K_n(f, \Omega) = \Phi\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n(f, \Omega)\right) = \Phi(K_\infty(f, \Omega)),$$

de donde, como Φ es continuo, $K_\infty(g, \omega)$ es compacto. A continuación tienes que comprobar que

$$\text{Fix}(g) \cap \partial\omega = \emptyset.$$

Razonando por reducción al absurdo, si tal intersección fuese no vacía entonces, al respetar Φ las fronteras,

$$\text{Fix}(f) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$$

contra las hipótesis del teorema. Me queda por probar la igualdad de los dos grados. Aquí puedo suponer que $K_\infty \neq \emptyset$, pues en caso contrario el resultado es trivialmente cierto. Defino la extensión g^* de $g|_{K_\infty}$

$$g^* = \Phi \circ f^* \circ \Phi^{-1},$$

donde f^* es una extensión continua de f tal como la tomé en la definición del grado para f . Es claro que $g^*(x) = g(x)$ si $x \in K_\infty(g, \omega)$ y que $g^*(\bar{\omega}) \subset K_\infty(g, \omega)$. Puedo de esta forma definir

$$\deg(I - g, \omega; Y) = \deg(I - g^*, \omega; Y),$$

donde el segundo grado es el de Leray-Schauder.

Para acabar la demostración voy a ver que los grados de Leray-Schauder para f^* y g^* son iguales. Con este fin, uso la siguiente proposición que es una reescritura del Teorema 26.4 de [26].

PROPOSICIÓN 2.2. *Considera un subconjunto abierto y acotado G_1 de un espacio de Banach E_1 , un subconjunto abierto y acotado G_2 de un espacio de Banach E_2 , un operador compacto $D : G_1 \rightarrow E_1$ y un homeomorfismo $V : G_2 \subset E_2 \rightarrow G_1 \subset E_1$. Si Ω_1 es un subconjunto abierto y acotado de E_1 tal que $\overline{\Omega_1} \subset G_1$, $D(\overline{\Omega_1}) \subset G_1$ y $\text{Fix}(D) \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$ entonces*

$$\deg(I - D, \Omega_1; E_1) = \deg(I - V^{-1}DV, V^{-1}\Omega_1; E_2).$$

Si tomo $D = f^*$, $V = \Phi^{-1}$ y $\Omega_1 = \Omega$ tengo la igualdad deseada. Fin de la prueba del lema.

LEMA 2.3. (Reducción de la dimensión) *Considera un subespacio cerrado X_0 de X y un operador $f \in \mathcal{LC}(\overline{\Omega})$ satisfaciendo (2.2). Además considera que $f(\overline{\Omega}) \subset X_0$ y define*

$$f_0 : \overline{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0, \quad x \mapsto f(x).$$

Entonces $f_0 \in \mathcal{LC}(\overline{\Omega} \cap X_0)$ y

$$\deg(I - f, \Omega; X) = \deg(I - f_0, \Omega \cap X_0; X_0).$$

NOTA 2.6. Como en el lema anterior, cuando f es compacto este es un resultado clásico (como siempre, “deg” se refiere al grado de Leray-Schauder en tal situación). El caso de α -contracciones lo puedes ver enunciado en [[13], pág. 74].

Demostración. Primero tienes que probar que $f_0 \in \mathcal{LC}(\overline{\Omega} \cap X_0)$. Para ello,

$$K_1^0 = \overline{\text{co}}f_0(\overline{\Omega} \cap X_0) = \overline{\text{co}}f(\overline{\Omega} \cap X_0) \subseteq \overline{\text{co}}f(\overline{\Omega}) = K_1 \subset X_0.$$

Ahora, si supones como hipótesis de inducción que $K_n^0 \subseteq K_n \subseteq X_0$, tienes que

$$K_{n+1}^0 = \overline{\text{co}}f_0(K_n^0 \cap \overline{\Omega} \cap X_0) = \overline{\text{co}}f(K_n^0 \cap \overline{\Omega} \cap X_0) \subseteq \overline{\text{co}}f(K_n \cap \overline{\Omega}) = K_{n+1}.$$

Por otra parte,

$$K_2 = \overline{\text{co}}f(K_1 \cap \overline{\Omega}) \subseteq \overline{\text{co}}f(\overline{\Omega} \cap X_0) = \overline{\text{co}}f_0(\overline{\Omega} \cap X_0) = K_1^0.$$

Razonando de nuevo por inducción tendrás que $K_{n+1}^0 \subseteq K_n^0$, $n \geq 1$. Por tanto, ya puedes deducir de forma inmediata que $K_\infty^0 = K_\infty^0$ (donde la notación que estoy empleando es obvia). Así has probado que f_0 está en la clase adecuada. Por último, para comprobar la igualdad de grados basta que consideres $f_0^* = f^*$ y utilices la propiedad de reducción de la dimensión para el grado de Leray-Schauder según lo visto en la nota 2.6. Así terminas la demostración.

La invarianza del grado con respecto a las homotopías en la clase $\mathcal{LC}(\overline{\Omega})$ es bastante delicada (puedes ver el Teorema 2 de la sección D en [44]). A continuación incluyo un resultado más simple que será suficiente para mis propósitos.

LEMA 2.4. *Considera dos operadores $f_1, f_2 \in \mathcal{LC}(\overline{\Omega})$ tales que puedes descomponerlos de la forma*

$$f_i = L_i + C_i, \quad i = 1, 2,$$

donde L_i es un operador lineal acotado y C_i es compacto. Además, considera que se satisfacen las condiciones

$$\varrho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) < 1 \tag{2.3}$$

y

$$\text{Fix}(\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2) \cap \partial\Omega = \emptyset \quad (2.4)$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$. Entonces

$$\deg(I - f_1, \Omega; X) = \deg(I - f_2, \Omega; X).$$

Demostración. Por la propiedad (2.3) tienes que para cada $\lambda \in [0, 1]$ puedes encontrar una norma $|\cdot|_\lambda$ en X (equivalente a la norma $|\cdot|$) y una constante $K_\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$|(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2)(x)|_\lambda \leq K_\lambda |x|_\lambda, \quad x \in X.$$

Ahora, por un argumento de compacidad puedes tomar una partición del intervalo $[0, 1]$, $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = 1$, y una constante $K \in [0, 1]$ tal que si $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ entonces

$$|(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2)(x)|_{\lambda_i} \leq K |x|_{\lambda_i}, \quad x \in X.$$

La propiedad de invarianza por homotopías para la clase de α -contracciones con respecto a una norma fija es bien conocida. Así,

$$\deg(I - f_{\lambda_i}, \Omega; X) = \deg(I - f_{\lambda_{i+1}}, \Omega; X), \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.5)$$

donde $f_\lambda = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$. Uniendo todas las igualdades de (2.5) acabo la demostración.

NOTA 2.7. Si consideras un operador lineal acotado L con $r(L) < 1$ y un operador compacto C , el grado de $I - f$ con $f = L + C$ también se puede definir usando técnicas alternativas. Por ejemplo, puedes transformar la ecuación de punto fijo $x = f(x)$ en la ecuación $x = f_*(x)$ con $f_* = (I - L)^{-1} \circ C$ y observar que f_* es compacto. En esta memoria necesito variar L pero, cuando L es fijo, esta idea está relacionada con el grado de coincidencia de Mawhin [17].

2.3. La ecuación lineal

En esta sección usaré el marco general establecido en [56]. Así pues, voy a recordarte una serie de conceptos y resultados que serán útiles en lo que sigue. Empiezo considerando dos espacios de Hilbert, H y V , separables y tales que

$$V \subset H$$

con inclusión compacta. Además, supongo que V es denso en H (con respecto a la norma de la H -topología). Notaré a la norma y el producto escalar en H simplemente por $|\cdot|$ y (\cdot, \cdot) . En el caso de V seré más explícito y escribiré $|\cdot|_V$ y $(\cdot, \cdot)_V$ respectivamente.

Además, consideraré una forma bilineal

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

continua, simétrica y coerciva. Como es usual, le asocio a esta forma bilineal un operador lineal autoadjunto no acotado

$$\ell : \text{dom}(\ell) \subset H \rightarrow H$$

con $\text{dom}(\ell)$ denso en H . En estas condiciones, sé que el inverso de ℓ existe y es un operador compacto de H en H . Esto me permite aplicar la teoría espectral de operadores autoadjuntos compactos a ℓ^{-1} y construir las potencias fraccionarias ℓ^s de una manera simple. Si quieres más información sobre las potencias puedes consultar [56]. Por último, destaco la identidad $\text{dom}(\ell^{1/2}) = V$.

Considera ahora el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = p(t), & t \in (0, T), \\ u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $u_0 \in V$, $v_0 \in H$ y $p \in C([0, T], H)$ son fijos. Por una solución de este problema entenderé una función $u \in \mathfrak{M} := C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$ que satisfaga las condiciones iniciales y que para cada $w \in V$ verifique la siguiente ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), w) + c \frac{d}{dt}(u(t), w) + (\ell^{1/2}u(t), \ell^{1/2}w) = (p(t), w),$$

donde esta última expresión tienes que entenderla en el sentido de las distribuciones.

Has de saber que es un hecho bien conocido que (2.6) tiene una única solución. Concretamente, como puedes ver en [[56], pág. 180 (expresión (1.20))], se satisface el siguiente resultado: existe $\varepsilon_0 > 0$ (dependiente solamente de c , a , V y H) tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ entonces

$$\begin{aligned} |u(t)|_V^2 + |\dot{u}(t) + \varepsilon u(t)|^2 &\leq \{|u_0|_V^2 + |v_0 + \varepsilon u_0|^2\} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} + \\ &\frac{2}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}) |p|_{C([0, T], H)}^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Puedes observar que, para valores pequeños de ε , la fórmula

$$|(u_0, v_0)|_\varepsilon^2 := |u_0|_V^2 + |v_0 + \varepsilon u_0|^2, \quad (u_0, v_0) \in V \times H, \quad (2.8)$$

define una norma que es equivalente a cualquiera de las normas producto en $V \times H$ que son estándares. Con esta norma puedes reescribir la estimación previa (2.7) de la forma

$$|(u(t), v(t))|_\varepsilon^2 \leq |(u_0, v_0)|_\varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} + \frac{2}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}) |p|_{C([0, T], H)}^2, \quad t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Para finalizar este recordatorio, he de señalarte que el espacio funcional $\mathfrak{M} = C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$ está naturalmente dotado con la norma

$$\|u\|_{\mathfrak{M}} := \max_{t \in [0, T]} \{|u(t)|_V + |\dot{u}(t)|\}.$$

Sin embargo, algunas veces será más interesante que use la norma equivalente

$$\|u\|_{\mathfrak{M}, \varepsilon} := \max_{t \in [0, T]} |(u(t), \dot{u}(t))|_\varepsilon,$$

para ε suficientemente pequeño.

En este marco funcional defino dos operadores lineales asociados a (2.6). A saber,

$$\mathcal{H} : V \times H \rightarrow \mathfrak{M}, \quad (u_0, v_0) \mapsto u^*,$$

donde u^* es la solución de (2.6) para $p \equiv 0$, y

$$\mathcal{V} : C([0, T], H) \rightarrow \mathfrak{M}, \quad p \mapsto u^{**},$$

donde u^{**} es la solución de (2.6) para $u_0 = 0$, $v_0 = 0$.

NOTA 2.8. Observa que puedes descomponer la solución de (2.6) como

$$u = u^* + u^{**} = \mathcal{H}(u_0, v_0) + \mathcal{V}p \quad (2.10)$$

para (u_0, v_0) y p arbitrarios. Igualmente, la desigualdad (2.7) implica que ambos operadores \mathcal{H} y \mathcal{V} son continuos. Como supongo habrás adivinado, en este punto es conveniente emplear la norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}, \varepsilon}$.

En el resto de esta sección analizaré el problema periódico

$$\begin{cases} \ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = p(t), & t \in (0, T), \\ u(0) = u(T), & \dot{u}(0) = \dot{u}(T). \end{cases} \quad (2.11)$$

Para tal fin defino la familia de operadores lineales

$$\xi_\tau : \mathfrak{M} \rightarrow V \times H, \quad u \mapsto (u(\tau), \dot{u}(\tau)); \tau \in [0, T],$$

y el subespacio de \mathfrak{M} dado por

$$\mathfrak{M}_T := \{u \in \mathfrak{M} : \xi_0 u = \xi_T u\}.$$

Las soluciones de (2.11) son justamente las funciones de \mathfrak{M}_T que resuelven la ecuación diferencial en el sentido que te indiqué anteriormente.

LEMA 2.5. *Considera $p \in C([0, T], H)$ fija. Entonces existe una única solución del problema (2.11). Además, el operador lineal*

$$\mathcal{G}_T : p \in C([0, T], H) \mapsto u \in \mathfrak{M}_T$$

es continuo.

Demostración. Si tomas una condición inicial arbitraria $(u_0, v_0) \in V \times H$, la solución de (2.6) está dada por (2.10). A partir de las identidades

$$\xi_0 \circ \mathcal{H} = I_{V \times H}, \quad \xi_0 \circ \mathcal{V} = 0, \quad (2.12)$$

es claro que u será periódica (esto es, $\xi_0 u = \xi_T u$) si, y sólo si,

$$(u_0, v_0) = \xi_T \mathcal{H}(u_0, v_0) + \xi_T \mathcal{V}p. \quad (2.13)$$

Por otra parte, a partir de la desigualdad (2.7) tienes que

$$|\xi_T \mathcal{H}(u_0, v_0)|_\varepsilon \leq e^{-\frac{\varepsilon}{4}T} |(u_0, v_0)|_\varepsilon. \quad (2.14)$$

Por tanto, el operador $\xi_T \circ \mathcal{H}$ es una contracción continua con respecto a la norma $|\cdot|_\varepsilon$. Así la ecuación de punto fijo (2.13) es resoluble de forma única y, en consecuencia, (2.11) tiene una única solución. Por último, para probar la continuidad de \mathcal{G}_T es suficiente que veas que tal operador, a partir de (2.10) y (2.13), puede ser expresado de la forma

$$\mathcal{G}_T = \mathcal{H} \circ (I - \xi_T \circ \mathcal{H})^{-1} \circ \xi_T \circ \mathcal{V} + \mathcal{V}. \quad (2.15)$$

Así termino esta demostración.

Concluyo esta sección presentándote un problema concreto para el que puedes aplicar el marco abstracto visto. Además, puedes considerar que este ejemplo es un primer acercamiento al capítulo 3.

EJEMPLO 2.6. Defino los espacios

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad \mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}, \quad n \geq 1, \quad H = L^2(\mathbb{T}^n), \quad V = H^1(\mathbb{T}^n)$$

y la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{T}^n} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv,$$

donde $\lambda > 0$ es fijo. El operador asociado ℓ está dado por

$$\ell : \text{dom}(\ell) \subset H \rightarrow H, \quad \ell u = -\Delta u + \lambda u$$

donde $\text{dom}(\ell) = H^2(\mathbb{T}^n)$.

Con estas hipótesis, puedes ver que la ecuación del problema (2.6) se transforma en la ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + cu_t - \Delta u + \lambda u = p(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

con condiciones de contorno periódicas

$$u(t, x_1, \dots, x_i + 2\pi, \dots, x_n) = u(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n.$$

La función p pertenece a $C([0, T], L^2(\mathbb{T}^n))$ y, por el lema 2.5, sabes que esta ecuación del telégrafo tiene una única solución T -periódica.

2.4. La ecuación no lineal

En esta sección voy a estudiar la ecuación diferencial

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = f(t, u), \quad t \in (0, T), \tag{2.16}$$

donde ℓ es el mismo operador que definí en la sección 2.3 y

$$f : [0, T] \times V \rightarrow H, \quad (t, u) \mapsto f(t, u)$$

satisface las siguientes condiciones:

(f-1) Para cada $r > 0$ existe $\gamma_r > 0$ tal que

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq \gamma_r |u_1 - u_2|_V$$

si $t \in [0, T]$ y $|u_1|_V, |u_2|_V \leq r$.

(f-2) Para cada $r > 0$ existe un módulo de continuidad $\omega_r > 0$ tal que

$$|f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2)| \leq \omega_r (|t_1 - t_2| + |u_1 - u_2|)$$

si $t_1, t_2 \in [0, T]$ y $|u_1|_V, |u_2|_V \leq r$.

(Por un módulo de continuidad entenderé una función $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ que es creciente, continua y tal que $\omega(0) = 0$).

NOTA 2.9. A primera vista puedes pensar que, cuando f no depende de t , el módulo de continuidad ω de (f-2) es lineal. Esta idea puede que te sea sugerida por la condición (f-1). Sin embargo este no es el caso puesto que la norma de $u_1 - u_2$ en (f-2) está referida ahora al espacio H .

Antes de discutir las consecuencias de estas hipótesis las voy a analizar en un caso concreto.

EJEMPLO 2.7. Sigo con la notación del ejemplo 2.6 y considero ahora la ecuación del telégrafo semilineal

$$\begin{cases} u_{tt} + cu_t - \Delta_x u + \lambda u = F(t, x, u) \\ u(t, x_1, \dots, x_i + 2\pi, \dots, x_n) = u(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

donde $F : [0, T] \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Supongo también que $\frac{\partial F}{\partial u}(t, x, u)$ existe y es continua. Bajo ciertas condiciones adicionales, puedes interpretar esta ecuación como un caso particular de (2.16) con

$$f(t, u) = F(t, \cdot, u(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u \in H^1(\mathbb{T}^n).$$

Cuando $n = 1$ tienes que el espacio $H^1(\mathbb{T})$ está incluido en $C(\mathbb{T})$ y, por tanto, f está siempre bien definida y las condiciones (f-1), (f-2) se satisfacen. En el caso $n \geq 2$ debes imponer condiciones adicionales sobre F . Así, en el caso $n \geq 3$, considera que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial u}(t, x, u) \right| \leq k(1 + |u|)^{\sigma-1}, \quad |F(t_1, x, u) - F(t_2, x, u)| \leq (1 + |u|)^\sigma \omega(|t_1 - t_2|)$$

donde $k > 0$ es una constante, ω es un módulo de continuidad y $\sigma \in (1, \frac{n}{n-2})$. Para chequear que f está bien definida recuerda la inmersión de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^n) \subset L^{n^*}(\mathbb{T}^n)$ con $n^* = \frac{2n}{n-2}$. En tal situación, observa que f es Hölder-continua en u , esto es, para cada $r > 0$ existe $\Gamma_r > 0$ tal que

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq \Gamma_r |u_1 - u_2|^\alpha$$

si $t \in [0, T]$, $|u_1|_V, |u_2|_V \leq r$. Aquí $\alpha = 1 - \beta$ con $\beta = \frac{2(\sigma-1)}{n^*-2}$. Puedes probar esta propiedad a partir de la desigualdad de Hölder con $r = \frac{1}{\beta}$, $s = \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} |f(t, u_1) - f(t, u_2)|^2 &\leq k^2 \int_{\mathbb{T}^n} (1 + |u_1| + |u_2|)^{2(\sigma-1)} |u_1 - u_2|^{2\beta} |u_1 - u_2|^{2\alpha} \leq \\ &k^2 \left[\int_{\mathbb{T}^n} (1 + |u_1| + |u_2|)^{\frac{2(\sigma-1)}{\beta}} |u_1 - u_2|^2 \right]^\beta \left[\int_{\mathbb{T}^n} |u_1 - u_2|^2 \right]^\alpha. \end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad ya puedes comprobar fácilmente la condición (f-1). Para la comprobación de la condición (f-2) sólo has de utilizar las inmersiones de Sobolev.

Para acabar con este ejemplo, observa que en el caso $n = 2$ las condiciones sobre F son las mismas tomando $\sigma \in (1, +\infty)$ pues $H^1(\mathbb{T}^2) \subset L^p(\mathbb{T}^2)$, $\forall p < \infty$.

Vuelvo al marco general. Diré que una función $u \in C(I, V) \cap C^1(I, H)$ es una solución de (2.16) si satisface, en el sentido que di en la sección 2.3, la ecuación lineal

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = p(t), \quad t \in I,$$

con $p(t) = f(t, u(t))$ e I algún subintervalo de $[0, T]$.

NOTA 2.10. Para determinar la existencia y unicidad de solución local puedes utilizar un argumento de punto fijo estándar tal y como expongo a continuación. Para comenzar, considera el problema

$$\begin{cases} \ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = p(t), & t \in I, \\ u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde las condiciones iniciales son fijas y el intervalo es $I = [t_0 - h, t_0 + h] \cap [0, T]$ con $h > 0$ un parámetro a determinar. Además, toma el espacio $X = C(I, V) \cap C^1(I, H)$.

Observa que (2.17) es una ligera variante de (2.6). Así para (2.17) tienes definidos, de la misma manera que se hizo para (2.6), los operadores \mathcal{H} y \mathcal{V} . Para no complicar la lectura, propongo seguir notándolos igual. También sufre una pequeña modificación la estimación (2.9), en concreto,

$$|(u(t), v(t))|_\varepsilon^2 \leq |(u_0, v_0)|_\varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)} + \frac{2}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)}) |p|_{C(I,H)}^2, \quad t \in I. \quad (2.18)$$

Si $v \in X$ entonces, a partir de (f-2) (o la continuidad de f si lo prefieres), $\mathcal{N}v = f(\cdot, v(\cdot)) \in C(I, H)$ y, por las definiciones dadas, $\mathcal{V}\mathcal{N}v + \varphi \in X$, siendo $\varphi(t)$ la solución de (2.17) con $p \equiv 0$ (esto es, $\mathcal{H}(u_0, v_0)$). Define el operador

$$T : X \rightarrow X, \quad T = \mathcal{V}\mathcal{N} + \varphi.$$

A partir de (2.18) y para h pequeño puedes comprobar que $\mathcal{V} : C(I, H) \rightarrow X$ tiene una norma pequeña. Para ello ten en cuenta que si haces $u_0 = v_0 = 0$ en (2.18) entonces

$$|(u(t), v(t))|_\varepsilon^2 \leq \frac{2}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)}) |p|_{C(I,H)}^2 \leq \frac{2}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\frac{\varepsilon}{2}h}) |p|_{C(I,H)}^2, \quad t \in I.$$

Al ser ε fijo tienes la pequeñez de $\|\mathcal{V}\|$ para h adecuado.

Toma dos números r y R tales que $0 < r < R$ y $r > |u_0|_V + |v_0|$. Define el conjunto

$$\mathcal{E}_R = \{u \in X / |u(t)|_V + |\dot{u}(t)| \leq R, t \in I\}.$$

Si pruebas que $T(\mathcal{E}_R) \subseteq \mathcal{E}_R$ de manera contractiva, entonces, por ser \mathcal{E} completo, T tendrá un punto fijo en \mathcal{E}_R .

Por la dependencia continua para ecuaciones lineales tienes que, si h es pequeño,

$$|u_0|_V + |v_0| \leq r \Rightarrow |\varphi(t)|_V + |\dot{\varphi}(t)| \leq r + \frac{R-r}{2}, \quad t \in I. \quad (2.19)$$

Por otra parte,

$$|\mathcal{V}\mathcal{N}u|_X \leq \|\mathcal{V}\| [|\mathcal{N}0|_{C(I,H)} + |\mathcal{N}u - \mathcal{N}0|_{C(I,H)}] \leq \|\mathcal{V}\| [|\mathcal{N}0|_{C(I,H)} + \gamma_R |u|_X],$$

donde tienes que utilizar (f-1) para la última estimación. Por último, si $\|\mathcal{V}\|$ es pequeño, es claro que

$$|\mathcal{V}\mathcal{N}u|_X \leq \frac{R-r}{2}. \quad (2.20)$$

Combinando (2.19) y (2.20), ya tienes que \mathcal{E}_R es invariante por T . Falta la contractividad de T . Para ello,

$$|Tu_1 - Tu_2|_X = |\mathcal{V}\mathcal{N}u_1 - \mathcal{V}\mathcal{N}u_2|_X \leq \|\mathcal{V}\| |\mathcal{N}u_1 - \mathcal{N}u_2|_{C(I,H)} \leq \|\mathcal{V}\| \gamma_R |u_1 - u_2|_X,$$

donde has de utilizar una vez más (f-1). De nuevo, la posibilidad de tomar $\|\mathcal{V}\|$ pequeño te permite considerar

$$\|\mathcal{V}\| \gamma_R < 1.$$

Como consecuencia de la demostración que has visto en esta última nota, destaco la siguiente propiedad por ser un hecho que utilizaré varias veces en lo que sigue.

PROPIEDAD L. *Considera dos números r y R tales que $0 < r < R$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que, si $u(t)$ es una solución de (2.16) con*

$$|\dot{u}(t_0)| + |u(t_0)|_V \leq r,$$

para algún t_0 , te es posible extender $u(t)$ al intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, T]$. Además, en este intervalo se satisface

$$|\dot{u}(t)| + |u(t)|_V \leq R.$$

A continuación voy a obtener un resultado de dependencia continua con respecto a topologías débiles que requiere (f-2). Tal resultado está en la línea de la Proposición 5.1 de [1]. Primero introduciré alguna notación. Dados $\tau \in (0, T]$ y $u \in C^1([0, \tau], H) \cap C([0, \tau], V)$ defino la norma

$$\|u\|_\tau = \max\{|\dot{u}(t)| + |u(t)|_V / t \in [0, \tau]\}.$$

Observa que $\|\cdot\|_T$ coincide con $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$.

Por otra parte, puedes descomponer toda solución $u(t)$ de (2.16) de la forma $u = u^\sharp + u^{\sharp\sharp}$ donde u^\sharp satisface

$$\ddot{u}^\sharp + c\dot{u}^\sharp + \ell u^\sharp = 0, \quad u^\sharp(0) = u(0), \quad \dot{u}^\sharp(0) = \dot{u}(0).$$

Paso ya a mostrarte el resultado prometido.

PROPOSICIÓN 2.8. *Considera las soluciones $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_\infty$ de (2.16) que están definidas en $[0, \tau]$, $\tau \leq T$. Si supones que*

$$\sup_n \|u_n\|_\tau < +\infty$$

y

$$u_{0n} \rightharpoonup u_{0\infty} \text{ débilmente en } V, \quad v_{0n} \rightharpoonup v_{0\infty} \text{ débilmente en } H,$$

donde $u_n(0) = u_{0n}$, $\dot{u}_n(0) = v_{0n}$, $n = 1, 2, \dots, +\infty$, entonces

$$\max_{t \in [0, \tau]} |u_n(t) - u_\infty(t)| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|u_n^{\sharp\sharp} - u_\infty^{\sharp\sharp}\|_\tau \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

NOTA 2.11. Como es previsible, el resultado anterior también es cierto cuando hagas uso de la convergencia fuerte. Es decir, si estás en las condiciones de la proposición y supones que

$$u_{0n} \rightarrow u_{0\infty} \text{ fuerte en } V, \quad v_{0n} \rightarrow v_{0\infty} \text{ fuerte en } H,$$

entonces

$$\|u_n - u_\infty\|_\tau \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

NOTA 2.12. En la demostración haré uso del Teorema de Ascoli-Arzelà. Incluyo aquí la siguiente versión que puedes ver demostrada en [55].

TEOREMA 2.9. *Considera un espacio topológico separable X y un espacio métrico completo Y . Entonces, si F es un subconjunto no vacío de $C(X, Y)$ tal que*

i) es equicontinuo,

ii) para cada $x \in X$ el conjunto $\{f(x) / f \in F\}$ es relativamente compacto en Y , tienes que toda sucesión $\{f_n\} \subset F$ admite una parcial convergente puntualmente en X a una función $f \in C(X, Y)$. Además, esta convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de X .

Demostración de la proposición 2.8. Primero observa que la sucesión $\{u_n\}$ es relativamente compacta en $C([0, \tau], H)$. Esto lo puedes deducir fácilmente comprobando las hipótesis del Teorema 2.9 (tal como puedes ver hecho en la Proposición 5.1 de [1]). En efecto, por la hipótesis hecha sobre la norma $\|\cdot\|_\tau$ tienes que

i) $|\dot{u}_n(t)|$ está acotada independientemente de n y t ; a partir de esto,

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq |t - s| \max_{\xi \in [0, T]} |\dot{u}_n(\xi)| \leq \Gamma |t - s|,$$

con Γ independiente de t , s y n ;

ii) $|u_n(t)|_V$ está acotada; esto, junto con el hecho de estar incluido V de forma compacta en H , te da la segunda condición.

Ahora es suficiente que pruebe la proposición para subsucesiones $\{u_k\}$ que sean convergentes en $C([0, \tau], H)$. Notaré por $u \in C([0, \tau], H)$ al límite correspondiente. Defino $p_k(t) = f(t, u_k(t))$. Por (f-2) sé que $\{p_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $C([0, \tau], H)$. Llamo $q(t)$ al límite. Si adapto las notaciones de la sección 2.3 al intervalo $[0, \tau]$ entonces la descomposición $u_k = u_k^\# + u_k^{\#\#}$ puedo expresarla como

$$u_k^\# = \mathcal{H}(u_{0k}, v_{0k}), \quad u_k^{\#\#} = \mathcal{V}p_k.$$

Puesto que las ecuaciones lineales se comportan bien respecto a las topologías débiles, sé que, para cada $t \in [0, \tau]$,

$$u_k^\#(t) \rightharpoonup u_\infty^\#(t) \text{ débilmente en } V, \quad \dot{u}_k^\#(t) \rightharpoonup \dot{u}_\infty^\#(t) \text{ débilmente en } H.$$

De esta forma, por la continuidad de \mathcal{V} , tengo que $u = u_\infty^\# + \mathcal{V}q$ está en $C^1([0, T], H) \cap C([0, T], V)$ y $\|u_k^{\#\#} - u^{\#\#}\|_\tau \rightarrow 0$. Si pruebo que u y u_∞ coinciden entonces habré acabado. Esto se seguirá por unicidad porque u también es solución de (2.16). En efecto, de (f-2),

$$|f(t, u_k(t)) - f(t, u(t))| \leq \omega_r(|u_k(t) - u(t)|), \quad t \in [0, \tau],$$

para algún $r > 0$. Por tanto $q(t) = f(t, u(t))$ y así u es una solución de (2.16). Fin de la demostración.

Si considero las condiciones iniciales (u_0, v_0) en $V \times H$, denoto a la solución de (2.16) que satisface $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ por $u(t; u_0, v_0)$. Está solución estará definida en un cierto intervalo maximal. Defino

$$\mathfrak{D} = \{(u_0, v_0) \in V \times H / u(t; u_0, v_0) \text{ está definida en } [0, T]\}.$$

NOTA 2.13. Por la propiedad L y la dependencia continua sé que \mathfrak{D} es abierto. En efecto, tomo $(u_0, v_0) \in \mathfrak{D}$ y supongo que la sucesión $\{(u_{0n}, v_{0n})\}$ converge a (u_0, v_0) . Si pruebo que $(u_{0n}, v_{0n}) \in \mathfrak{D}$, a partir de n_0 suficientemente grande, habré acabado. Sean pues r y R (con $r < R$) tales que

$$|u(t)|_V + |\dot{u}(t)| < r, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde $u(t) = u(t; u_0, v_0)$. Voy a ver que

$\exists N / n \geq N \Rightarrow u_n(t)$ está definida en $[0, T]$ y $|u_n(t)|_V + |\dot{u}_n(t)| < 2R, \forall t \in [0, T]$.

Si no fuera así, encontraría $T_n < T$ tal que

$$|u_n(t)|_V + |\dot{u}_n(t)| < 2R, \quad \forall t \in [0, T_n); \quad |u_n(T_n)|_V + |\dot{u}_n(T_n)| = 2R.$$

Puedo suponer que $T_n \rightarrow T^*$. Por la propiedad L existe $\delta > 0$ tal que, para n grande, $T_n \geq \delta$. Si $\varepsilon \in (0, \delta)$, por dependencia continua, las funciones u_n convergen a u en $C([0, T^* - \varepsilon], V) \cap C^1([0, T^* - \varepsilon], H)$. Así, si n es grande, llego a que

$$|u_n(T^* - \varepsilon)|_V + |\dot{u}_n(T^* - \varepsilon)| < r,$$

de donde

$$|u_n(T_n)|_V + |\dot{u}_n(T_n)| < R$$

y tengo una contradicción.

Puedo definir ahora el operador solución para el problema de valores iniciales asociado a (2.16),

$$\Sigma : \mathfrak{D} \subset V \times H \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \Sigma(u_0, v_0) = u(\cdot; u_0, v_0).$$

A partir de la proposición 2.8 y de la dependencia continua respecto de las topologías fuertes (nota 2.11), tienes de forma clara que Σ es continuo. Sin embargo, y esto es quizás sorprendente, este operador no es necesariamente acotado. Esto significa que Σ puede llevar un subconjunto cerrado y acotado de \mathfrak{D} en un subconjunto no acotado de \mathfrak{M} . En el siguiente ejemplo verás una muestra de este hecho.

EJEMPLO 2.10. Empieza considerando el problema unidimensional

$$\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + \frac{c^2}{4}\xi = \lambda(t)\xi^3, \quad \xi(0) = 1, \quad \dot{\xi}(0) = 0. \quad (2.21)$$

Para este problema puedes probar la existencia de un número $\lambda^* > 0$ tal que

a) la solución de (2.21) está bien definida en $[0, T]$ si $\lambda \in C([0, T])$ satisface

$$0 \leq \lambda(t) \leq \lambda^*, \quad t \in [0, T],$$

con desigualdad estricta $\lambda(t) < \lambda^*$ en alguna parte;

b) la solución de (2.21) para $\lambda(t) \equiv \lambda^*$ explota en $t = T$.

Como ayuda te diré que es conveniente utilizar el cambio de variables $\xi = e^{-\frac{c}{2}t}\eta$. Con ello llegas a un sistema con incógnitas η y $\dot{\eta}$ que satisface las condiciones de Kamke y, por consiguiente, al que le puedes aplicar la teoría de desigualdades diferenciales. Como referencia sobre las condiciones de Kamke y las desigualdades diferenciales puedes ver [[18], sección 4.6].

A continuación considera los espacios $H = L^2(\mathbb{T})$, $V = H^1(\mathbb{T})$ y el operador

$$\ell u = -u_{xx} + \frac{c^2}{4}u.$$

Si descompones cada función $u \in H$ de la forma $u = \bar{u} + \tilde{u}$ con $\bar{u} \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{T}} \tilde{u} = 0$, entonces tienes inducidas las descomposiciones $V = \mathbb{R} \oplus \tilde{V}$, $H = \mathbb{R} \oplus \tilde{H}$. Define

$$f(t, u) = \lambda^*(1 - \varepsilon|\tilde{u}|^2)\bar{u}^3,$$

donde $\varepsilon > 0$ es un valor que más tarde tendrás que fijar. En esta situación, las condiciones (f-1) y (f-2) se cumplen. Puesto que f toma valores sobre las funciones constantes, puedes descomponer las soluciones de (2.16), que están definidas hasta T , de la forma $u = \xi + \omega$ donde $\omega \in C^1([0, T], \tilde{H}) \cap C([0, T], \tilde{V})$ satisface

$$\ddot{\omega} + c\dot{\omega} + \ell\omega = 0 \quad (2.22)$$

y $\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución de

$$\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + \frac{c^2}{4}\xi = \lambda^*(1 - \varepsilon \int_{\mathbb{T}} \omega^2(t, x) dx)\xi^3. \quad (2.23)$$

Toma el conjunto

$$C = \{(u_0, v_0) \in V \times H / \int_{\mathbb{T}} (u'_0)^2 = 1, \quad \bar{u}_0 = 1, \quad v_0 = 0\}.$$

A partir de $\int_{\mathbb{T}} (u'_0)^2 = 1$ y $\bar{u}_0 = 1$ tienes que $|u_0|_V$ está acotado, mientras que v_0 está obviamente acotado también. Así, C es acotado. Por otro lado, considera una sucesión $\{(u_{0n}, v_{0n})\} \subset C$ convergente a (u_0, v_0) . Es claro que $v_{0n} = v_0 = 0$; además, como los funcionales

$$u \in V \mapsto \int_{\mathbb{T}} (u')^2, \quad u \mapsto \bar{u},$$

son continuos, tienes que

$$\int_{\mathbb{T}} (u'_{0n})^2 \rightarrow \int_{\mathbb{T}} (u'_0)^2 = 1, \quad (\bar{u}_{0n}) \rightarrow \bar{u}_0 = 1.$$

Por tanto, C es cerrado. Finalmente, si w es una solución de (2.22) que empieza en C , existirá $K > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega(t, x)^2 dx \leq K, \quad \forall t \in [0, T].$$

La existencia de este K lo puedes deducir de (2.7). Como K es independiente de ω (observa que sólo depende de C) puedes elegir ε suficientemente pequeño tal que $\varepsilon K < 1$ y, por consiguiente, se satisfará que $\varepsilon \int_{\mathbb{T}^2} \omega^2 \leq 1$. Como ω no es idénticamente cero entonces, a partir de (2.23) y las propiedades de λ^* , sabes que, si ω tiene una condición inicial en C , $C \subset \mathfrak{D}$. Considera ahora $(u_{0n}, 0) \in C$ con

$$u_{0n}(x) = 1 + \frac{\sin nx}{n\sqrt{\pi}}.$$

Entonces $\omega_n(t, x) = e^{-\frac{c}{2}t}(\cos nt + \frac{c}{2n} \sin nt) \frac{\sin nx}{n\sqrt{\pi}}$ y, por tanto, $\int_{\mathbb{T}} \omega_n^2(t, x) dx \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow +\infty$, uniformemente en t . Por dependencia continua deduces que $\xi_n(t)$ converge a la solución de (2.21) para $\lambda \equiv \lambda^*$. Se concluye que la sucesión ξ_n no puede estar acotada. Así tienes probado que $\Sigma(C)$ no está acotado.

Como habrás observado, en este ejemplo el conjunto C no es cerrado con respecto a la topología débil. En el siguiente resultado te muestro que este hecho es crucial para mis propósitos.

PROPOSICIÓN 2.11. *Considera un conjunto C acotado en $V \times H$ tal que es cerrado con respecto a la topología débil y, además, $C \subset \mathfrak{D}$. Entonces $\Sigma(C)$ está acotado en \mathfrak{M} .*

Demostración. Para cada $\tau \in (0, T]$ defino

$$\gamma(\tau) = \sup\{\|u(\cdot; u_0, v_0)\|_\tau; (u_0, v_0) \in C\}.$$

Por la propiedad L tengo que $\gamma(\tau)$ es finita para τ pequeño. A continuación quiero probar que $\gamma(T)$ también es finita. Para ello emplearé un argumento de reducción al absurdo. Supondré que $\gamma(T) = +\infty$. Defino

$$T^* = \sup\{\tau \in (0, T]; \gamma(\tau) < +\infty\}.$$

De nuevo por la propiedad L, tengo que $\gamma(T^*) = +\infty$ y puedo encontrar una sucesión (u_{0n}, v_{0n}) en C tal que

$$\|u_n\|_{T^*} \rightarrow +\infty \quad \text{donde } u_n = u(\cdot; u_{0n}, v_{0n}). \quad (2.24)$$

Como C es débilmente cerrado y acotado, puedo suponer que la sucesión (u_{0n}, v_{0n}) converge (en sentido débil) a un punto $(u_{0\infty}, v_{0\infty})$ en C . Además, la hipótesis $C \subset \mathfrak{D}$ me permite definir $u_\infty(t) = u(t; u_{0\infty}, v_{0\infty})$ en todo el intervalo $[0, T]$. Puesto que, por la definición de T^* , sé que para cada $\tau < T^*$ las normas $\|u_n\|_\tau$ están acotadas, a partir de la proposición 2.8, puedo deducir que $|u_n(t) - u_\infty(t)| \rightarrow 0$ uniformemente en $t \in [0, \tau]$ y $\|u_n^\sharp - u_\infty^\sharp\|_\tau \rightarrow 0$. Por la continuidad del operador \mathcal{H} , sé que $\|u_n^\sharp\|_{\mathfrak{M}}$ está acotada por una constante c . Sea δ la constante que resulta de la propiedad L para $r = c + 2\|u_\infty^\sharp\|_{\mathfrak{M}}$ y $R = 2r$. Si defino $t_0 = T^* - \delta$ y supongo que n es suficientemente grande entonces

$$\begin{aligned} |\dot{u}_n(t_0)| + |u_n(t_0)|_V &\leq |\dot{u}_n^\sharp(t_0)| + |u_n^\sharp(t_0)|_V + |\dot{u}_n^\sharp(t_0)| + |u_n^\sharp(t_0)|_V \leq \\ &c + 2\|u_\infty^\sharp\|_{\mathfrak{M}} = r. \end{aligned}$$

La propiedad L me implica que

$$|\dot{u}_n(t)| + |u_n(t)|_V \leq R \quad \text{si } t \in (T^* - \delta, T^*].$$

Así llego a la estimación

$$\|u_n\|_{T^*} \leq \max\{\gamma(T^* - \delta), R\}$$

que no es compatible con (2.24). Fin de la demostración.

2.5. Dos definiciones de índice

En el resto de este capítulo siempre supondré que ℓ está en las condiciones de la sección 2.3 y f satisface (f-1) y (f-2). Además, como adivinarás, mi interés se centrará las soluciones periódicas de la ecuación (2.16), es decir, las soluciones que están en \mathfrak{M}_T o, equivalentemente, las que satisfacen las condiciones de contorno

$$u(0) = u(T), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(T). \quad (2.25)$$

2.5.1. El operador de Poincaré. Defino el operador de Poincaré por

$$\mathcal{P} : \mathfrak{D} \subset V \times H \rightarrow V \times H, \quad \mathcal{P}(u_0, v_0) = (u(T; u_0, v_0), \dot{u}(T; u_0, v_0))$$

o, equivalentemente,

$$\mathcal{P} = \xi_T \circ \Sigma \tag{2.26}$$

NOTA 2.14. Observa que los puntos fijos de \mathcal{P} son justamente las condiciones iniciales de las soluciones periódicas de (2.16).

NOTA 2.15. Por la sección previa, sabes que Σ es un operador continuo pero no necesariamente acotado. Por tanto, \mathcal{P} tiene las mismas propiedades. Paso a tratar este problema. Considera un subconjunto G abierto y acotado de $V \times H$ y denota por $cl_w(G)$ a la clausura de G con respecto a la topología débil. Si $cl_w(G) \subset \mathfrak{D}$ puedes aplicar la proposición 2.11 con $C = cl_w(G)$ para concluir que $\mathcal{P}(\overline{G})$ está acotado.

NOTA 2.16. Recuerda que la clausura fuerte \overline{G} está siempre incluida en $cl_w(G)$ y la identidad $\overline{G} = cl_w(G)$ se verifica al menos cuando G es convexo.

PROPOSICIÓN 2.12. *Considera un subconjunto abierto y acotado $G \subset V \times H$ tal que*

$$cl_w(G) \subset \mathfrak{D}.$$

Entonces el operador \mathcal{P} está en la clase $\mathfrak{LC}(\overline{G})$.

Demostración. Por la nota 2.15, sabes que $\Sigma(\overline{G})$ es un subconjunto acotado de \mathfrak{M} . Observa que, volviendo a las notaciones de la sección 2.3, $u(t; u_0, v_0)$ es solución del problema lineal (2.6) con $p = \mathcal{N}\Sigma(u_0, v_0)$ y donde \mathcal{N} es el operador sustitución

$$\mathcal{N} : \mathfrak{M} \rightarrow C([0, T], H), \quad u \mapsto f(\cdot, u(\cdot)).$$

De (2.10) deduces sin problemas la identidad

$$\Sigma = \mathcal{H} + \mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma. \tag{2.27}$$

A partir de ahora me referiré a esta identidad como la ecuación abstracta de Volterra. Combinando (2.26) y (2.27), puedes reescribir \mathcal{P} como

$$\mathcal{P} = \xi_T \circ \mathcal{H} + \xi_T \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma.$$

Recordarás que en la demostración del lema 2.5 vi que $\xi_T \circ \mathcal{H}$ es una contracción lineal con respecto a alguna norma $|\cdot|_\varepsilon$. Así, para completar esta demostración es suficiente, teniendo en cuenta la nota 2.4, que pruebes que $\mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma$ es compacto sobre \overline{G} . Pero esto es una consecuencia del siguiente lema.

LEMA 2.13. *El operador \mathcal{N} es completamente continuo.*

Demostración. Por (f-1) y (f-2) sabes que \mathcal{N} es continuo y lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados. Considera un subconjunto acotado $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$. Tienes que probar que $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$ es relativamente compacto en $C([0, T], H)$. Para ello puedes utilizar de nuevo el Teorema de Ascoli-Arzelà y, por tanto, basta que verifiques las dos condiciones siguientes,

- (i) $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$ es equicontinuo;
- (ii) $\{f(t, u(t)) / u \in \mathfrak{B}\}$ es relativamente compacto en H para cada $t \in [0, T]$.

Toma $r > 0$ tal que $\max_{t \in [0, T]} |u(t)|_V \leq r$ para cada $u \in \mathfrak{B}$. Para probar (i), observa que si $t_1, t_2 \in [0, T]$ entonces

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq d|t_1 - t_2|, \quad u \in \mathfrak{B},$$

con $d = \max\{|\dot{u}(t)| / t \in [0, T], u \in \mathfrak{B}\}$. Por (f-2) tienes que

$$|\mathcal{N}u(t_1) - \mathcal{N}u(t_2)| \leq \omega_r((1 + d)|t_1 - t_2|),$$

esto es, la equicontinuidad de \mathcal{N} .

Para probar (ii) considera la bola cerrada de radio r en V ,

$$B_r = \{u \in V / |u|_V \leq r\},$$

vista como un espacio métrico inmerso en H (con la topología inducida por $|\cdot|$). Mediante un argumento de compacidad débil puedo ver que B_r es compacta. Te detallo el razonamiento a continuación. En primer lugar, por estar B_r acotada en V y ser la inclusión de V en H compacta, sé que B_r es relativamente compacta en H . Si pruebo que B_r es cerrada en H he acabado. Considero una sucesión $\{u_n\} \subset B_r$ tal que converja a $u \in H$ con $|u_n - u| \rightarrow 0$. Como $\{u_n\}$ es acotada en V tengo una parcial $\{u_k\}$ que converge, de manera fuerte en H y débil en el propio V , a un vector $u^* \in V$. Pero el límite en H es único y puedo asegurar que $u^* = u$. Finalmente, como

$$\{u_k\} \rightharpoonup u \text{ en } V \quad \text{y} \quad |u|_V \leq \liminf |u_k| \leq r,$$

sé que $u \in B_r$. Así B_r es compacta en H .

Por otra parte, por la condición (f-2) tienes que $f : [0, T] \times B_r \rightarrow H$ es continua. Así $f(t, B_r)$ es compacta y tienes (ii). Con esto acabas la demostración del lema y, por tanto, la de la proposición.

Ya estoy en posición de asociarle un grado a $I - \mathcal{P}$. Para ello considera un subconjunto abierto y acotado $G \subset V \times H$ tal que

$$cl_w(G) \subset \mathfrak{D} \text{ y } \text{Fix}(\mathcal{P}) \cap \partial G = \emptyset. \quad (2.28)$$

Entonces puedo definir el grado

$$\deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H).$$

A partir de esta definición, voy a asociarle un índice a una solución periódica de (2.16). En efecto, si $u \in \mathfrak{M}_T$ es una solución de este tipo, diré que es aislada si existe un entorno $N \subset V \times H$ de $(u(0), \dot{u}(0))$ tal que

$$\text{Fix}(\mathcal{P}) \cap \bar{N} = \{(u(0), \dot{u}(0))\}.$$

Defino el índice de u como

$$\gamma_{\mathcal{P}}(u) := \deg(I - \mathcal{P}, N; V \times H).$$

Observa que siempre puedes elegir N suficientemente pequeño tal que $cl_w(N) \subset \mathfrak{D}$. Esto es así pues \mathfrak{D} es abierto y las bolas cerradas son débilmente cerradas. Además, por las propiedades de grado, sabes que esta definición es independiente de la elección de N .

2.5.2. El método del operador de Green. Comienzo definiendo el operador

$$\mathcal{F}_T : \mathfrak{M}_T \rightarrow \mathfrak{M}_T, \quad \mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T \circ \mathcal{N}_T,$$

donde por \mathcal{N}_T indico la restricción de \mathcal{N} a \mathfrak{M}_T .

Por la definición de \mathcal{G}_T (lema 2.5), es claro que los puntos fijos de \mathcal{F}_T son precisamente las soluciones de (2.16) que están en \mathfrak{M}_T . Además, por los lemas 2.5 (continuidad de \mathcal{G}_T) y 2.13 (completa continuidad de \mathcal{N}), tienes que \mathcal{F}_T es completamente continuo. Esto me permite definir el grado

$$\deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T)$$

cuando Ω_T es un subconjunto abierto y acotado de \mathfrak{M}_T tal que

$$\partial\Omega_T \cap \text{Fix}(\mathcal{F}_T) = \emptyset. \quad (2.29)$$

NOTA 2.17. Observa que una solución $u \in \mathfrak{M}_T$ es aislada, en el sentido que antes te definí, si y sólo si existe un pequeño entorno $\omega_T \subset \mathfrak{M}_T$ de u tal que

$$\text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \overline{\omega_T} = \{u\}.$$

Esto es una simple consecuencia de la continuidad de Σ . En efecto, Σ liga homeomórficamente las condiciones iniciales para (2.16) con las soluciones del problema de valores iniciales que surge.

Esta observación me permite definir un segundo índice para las soluciones periódicas aisladas de (2.16) por

$$\gamma_{\mathcal{F}}(u) := \deg(I - \mathcal{F}_T, \omega_T; \mathfrak{M}_T).$$

En principio esta definición depende de la forma en que escriba la ecuación. Por ejemplo, considera $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la forma cuadrática $a(u, u) + \lambda|u|^2$ sea coerciva. Entonces puedes reescribir (2.16) de la forma

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \ell_\lambda u = f_\lambda(t, u), \quad (2.30)$$

donde $\ell_\lambda = \ell + \lambda I$ y $f_\lambda(t, u) = f(t, u) + \lambda u$. El operador ℓ_λ y la función f_λ satisfacen todos los requerimientos previos y por tanto puedes definir el índice en términos de (2.30). Sin embargo, (2.30) define, de forma clara, una homotopía ya en Ω_T ya en ω_T . Por tanto, las definiciones de grado e índice son independientes de λ .

NOTA 2.18. Algunas veces el índice está definido en términos de (2.30) para un valor de λ que está en la resolvente de “ $-\ell$ ” pero tal que “ $a(\cdot, \cdot) + \lambda|\cdot|^2$ ” no es coerciva. En estos casos el índice puede tener un cambio de signo. Un ejemplo de esta situación lo tienes en [45].

2.6. El teorema de dualidad

Considera dos conjuntos abiertos y acotados $G \subset V \times H$ y $\Omega_T \subset \mathfrak{M}_T$. Además, supón que la clausura débil de G , $cl_w(G)$ está dentro de \mathfrak{D} (esto es, el dominio de \mathcal{P}).

Seguendo [26], diré que G y Ω_T tienen un *núcleo común* con respecto al problema periódico (2.16)–(2.25) si se cumplen las siguientes condiciones,

$$\text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \partial\Omega_T = \emptyset, \quad \text{Fix}(\mathcal{P}) \cap \partial G = \emptyset, \quad (2.31)$$

$$\xi_0(\text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T) = \text{Fix}(\mathcal{P}) \cap G, \quad (2.32)$$

$$\Sigma(\text{Fix}(\mathcal{P}) \cap G) = \text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T. \quad (2.33)$$

NOTA 2.19. Las condiciones (2.32) y (2.33) son en realidad equivalentes. Para obtener (2.32) a partir de (2.33) basta que tengas en cuenta que $\xi_0\Sigma = I_{V \times H}$. Para la implicación contraria has de notar que si $u \in \text{Fix}(\mathcal{F}_T)$ entonces $\Sigma\xi_0u = u$.

He preferido distinguirlas porque, según qué casos, es conveniente utilizar una u otra.

NOTA 2.20. Observa que la condición (2.31) te indica que no hay soluciones T -periódicas en $\partial\Omega_T$ o que tengan condiciones iniciales en ∂G . Por otra parte, las condiciones (2.32) y (2.33) te señalan que una solución periódica pertenece a Ω_T si y sólo si sus condiciones iniciales pertenecen a G .

TEOREMA 2.14. *Si supones que G y Ω_T están en las condiciones previas y que tienen un núcleo común con respecto a (2.16)–(2.25), entonces*

$$\deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H) = \deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T).$$

En particular, si u es una solución aislada T -periódica,

$$\gamma_{\mathcal{P}}(u) = \gamma_{\mathcal{F}}(u).$$

Antes de presentarte la demostración de este resultado voy a discutir algunas consecuencias. Más específicamente discutiré sobre algunas conexiones entre el índice y las propiedades de estabilidad de una solución periódica. En principio, puesto que tengo que la ecuación (2.16) sólo está definida en el intervalo $[0, T]$, no puedo considerar la noción clásica de estabilidad. Sin embargo, si supongo que $f(0, \cdot)$ y $f(T, \cdot)$ coinciden, puedo extender f por periodicidad. A partir de aquí, diré que

- i) una solución T -periódica $u(t)$ es estable (en el sentido de Lyapunov) si dado cualquier entorno $\mathcal{U} \subset V \times H$ de $(u(0), \dot{u}(0))$ me es posible encontrar otro entorno \mathcal{V} tal que si $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$ entonces $u(t; u_0, v_0)$ está bien definida para $t \in [0, +\infty)$ y $(u(t; u_0, v_0), \dot{u}(t; u_0, v_0)) \in \mathcal{U}$ para cada $t \geq 0$;
- ii) una solución $u(t)$ es asintóticamente estable si es estable y existe un entorno \mathcal{W} de $(u(0), \dot{u}(0))$ tal que

$$|u(t; u_0, v_0) - u(t)|_V + |\dot{u}(t; u_0, v_0) - \dot{u}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty$$

para cada $(u_0, v_0) \in \mathcal{W}$.

Con esta definición, puedes ver fácilmente que una solución periódica asintóticamente estable es aislada. Mi interés se centra ahora en el cálculo de su índice. Para ello, observa que, siguiendo la idea de la nota 2.17, $u(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si la condición inicial $(u(0), \dot{u}(0))$ tiene la misma propiedad como punto fijo del operador de Poincaré \mathcal{P} .

Ahora, \mathcal{P} está bien definido en algún entorno de $(u(0), \dot{u}(0))$ y, por la demostración de la proposición 2.12, sé que es una α -contracción con respecto a la norma $|\cdot|_\varepsilon$.

Así la estabilidad asintótica es uniforme (consulta las secciones 2.2 y 2.3 de [19]). Como consecuencia puedo encontrar un entorno abierto y acotado N de $(u(0), \dot{u}(0))$ satisfaciendo las condiciones siguientes

$$\mathcal{P}(N) \subseteq N, \quad \text{Fix}(\mathcal{P}) \cap \overline{N} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{P}^n(\overline{N}) = \{(u(0), \dot{u}(0))\}.$$

Para comprobar que es posible esto, considera $r > 0$ tal que $B_{2r} \subset \mathfrak{D}$,

$$\text{Fix}(\mathcal{P}) \cap B_{2r} = \{(u(0), \dot{u}(0))\}$$

y

$$\mathcal{P}^n x \rightarrow (u(0), \dot{u}(0)), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformemente en } x \in B_{2r},$$

donde B_{2r} es la bola en $V \times H$ de centro $(u(0), \dot{u}(0))$ y radio $2r$. Toma también un entorno M del punto fijo $(u(0), \dot{u}(0))$ tal que

$$\mathcal{P}^n(M) \subset B_r, \quad \forall n \geq 0.$$

Si defines $N = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}^n(M)$ es claro que $\mathcal{P}(N) \subseteq N$. Además,

$$\text{Fix}(\mathcal{P}) \cap \overline{N} = \{(u(0), \dot{u}(0))\}$$

pues $\overline{N} = \bigcup_{n \geq 0} \overline{\mathcal{P}^n(M)} \subset \overline{B_r} \subset B_{2r}$. Por último,

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{P}^n(\overline{N}) \subset \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{P}^n(\overline{B_r}) = \{(u(0), \dot{u}(0))\}$$

ya que $\text{diam} \mathcal{P}^n(\overline{B_r}) \rightarrow 0$.

Esto me permite aplicar el Teorema 1 de [43] para deducir que

$$\deg(I - \mathcal{P}, N; V \times H) = 1.$$

(No enuncio el Teorema 1 porque creo que tendrías que consultar [43] de todas formas para aclarar la notación).

Para tal fin realizo las siguientes identificaciones:

- i) $X = B \equiv V \times H$;
- ii) $G \equiv N$;
- iii) $f \equiv \mathcal{P} : N \rightarrow N$;
- iv) $C_n(f, G) \equiv C_n(\mathcal{P}, N) = \mathcal{P}^n(N)$;
- v) $C_\infty(f, G) \equiv C_\infty(\mathcal{P}, N) = \{(u(0), \dot{u}(0))\}$, $\overline{C_\infty(\mathcal{P}, N)} = \{(u(0), \dot{u}(0))\}$;
- vi) $K \equiv \{(u(0), \dot{u}(0))\}$.

Toda la discusión anterior me conduce al siguiente resultado.

COROLARIO 2.15. *Considera una solución T -periódica asintóticamente estable $u(t)$ de (2.16). Entonces*

$$\gamma_{\mathcal{P}}(u) = \gamma_{\mathcal{F}}(u) = 1.$$

En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias este resultado se sigue del Teorema 9.6 de [[25], Cap. III] y del Teorema de dualidad (teorema 28.5) de [26].

NOTA 2.21. Al introducir el método del operador de Green, recuerda que hablaba sobre la dependencia o independencia de la definición de grado o índice correspondiente según escribiera la ecuación de una forma u otra. A partir del teorema de dualidad queda clara la independencia, esto es, el grado $\deg(I - \mathcal{F}_T, \omega_T; \mathfrak{M}_T)$ es independiente de la forma en que se reformule (2.16), siempre y cuando tal reformulación quede dentro del marco de la sección 2.4.

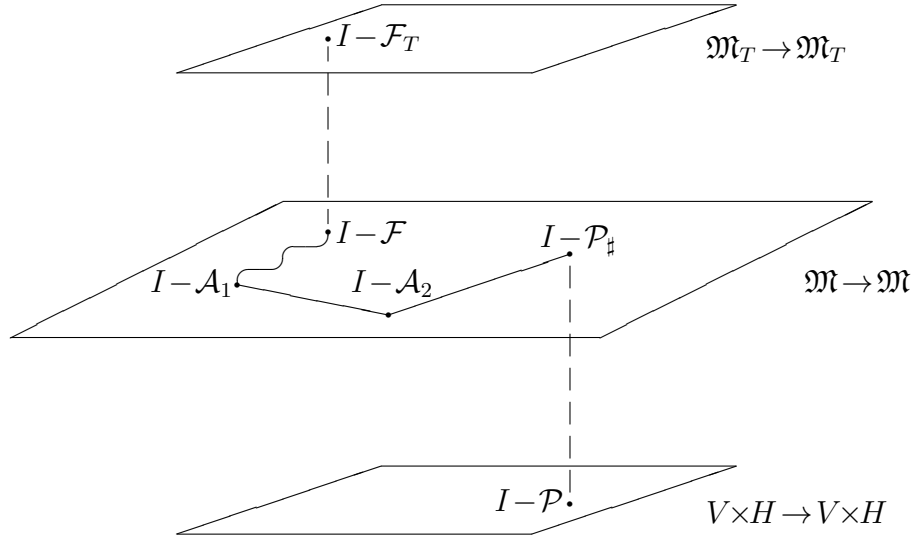
El resto de la sección está dedicada a la demostración del teorema 2.14. Pero antes te voy a dar un esquema de la misma y un dibujo que espero te ayuden a captar las ideas que se utilizan en un golpe de vista.

Un esquema de la demostración. Para demostrar el teorema 2.14 voy a seguir la línea de razonamiento que es utilizada por los autores de [26] para la demostración del Teorema 28.5.

La primera dificultad que me surge a la hora de conectar los grados de $I - \mathcal{F}_T$ y $I - \mathcal{P}$ es que estos operadores están definidos en espacios diferentes. Para eludir este obstáculo, construiré dos nuevos operadores \mathcal{F} y \mathcal{P}_\sharp los cuales sí están definidos en un espacio común, que será \mathfrak{M} , y además conservan los grados correspondientes. Verás que el operador \mathcal{F} es una simple extensión de \mathcal{F}_T . Para construir \mathcal{P}_\sharp tengo que realizar algo más de trabajo: sumergiré $V \times H$ en \mathfrak{M} y entonces transportaremos \mathcal{P} a \mathfrak{M} por conjugación.

Una vez tenga definidos \mathcal{F} y \mathcal{P}_\sharp , consideraré dos operadores auxiliares \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 que me permitirán diseñar una homotopía en tres pasos entre $I - \mathcal{F}$ y $I - \mathcal{P}_\sharp$.

Gráficamente, puedo resumir todo lo anterior en la siguiente figura:



Como última nota, te hago notar que en la demostración supondré que se satisface la siguiente condición adicional,

$$\text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T \neq \emptyset. \tag{2.34}$$

Observa que, si no se cumpliera tal condición, el teorema es trivialmente cierto pues

$$\deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H) = \deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T) = 0.$$

2.6.1. El operador \mathcal{F} . Defino el operador

$$\mathcal{F} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \mathcal{F}(u) = \mathcal{G}_T \circ \mathcal{N}(u).$$

Como en el caso de \mathcal{F}_T puedes probar que \mathcal{F} es completamente continuo usando los lemas 2.5 y 2.13. Además,

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}_T \text{ y } \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}_T(u), \quad \forall u \in \mathfrak{M}_T.$$

En particular esto implica,

$$\text{Fix}(\mathcal{F}) = \text{Fix}(\mathcal{F}_T).$$

LEMA 2.16. *Existe un subconjunto no vacío ω de \mathfrak{M} , que es abierto y acotado, satisfaciendo las condiciones:*

$$\text{Fix}(\mathcal{F}) \cap \omega = \text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T, \quad (2.35)$$

$$\text{Fix}(\mathcal{F}) \cap \partial\omega = \emptyset, \quad (2.36)$$

$$cl_\omega \xi_0(\omega) \subset \mathfrak{D}, \quad (2.37)$$

donde \mathfrak{D} es el dominio del operador de Poincaré \mathcal{P} .

Demostración. Observa que, teniendo en cuenta la condición (2.34), el conjunto $\mathcal{K} := \text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \overline{\Omega_T}$ es compacto y no vacío. Además, $\xi_0(\mathcal{K})$ está contenido en el conjunto abierto \mathfrak{D} . Así puedes encontrar un número finito de bolas en \mathfrak{M} , B_1, \dots, B_r , recubriendo \mathcal{K} y tales que $cl_\omega \xi_0(B_i) \subset \mathfrak{D}$, $1 \leq i \leq r$. Para convencerte de que esta última inclusión es cierta, ten en cuenta que al ser B_i convexa también lo es $\xi_0(B_i)$; así el cierre débil y el fuerte coinciden en este caso según expuse en la nota 2.16. Por último, si eliges dichas bolas suficientemente pequeñas, puedes definir

$$\omega := \bigcup_{i=1}^r B_i$$

de forma que satisface (2.35), (2.36) y (2.37). Fin de la demostración.

Toma ahora $\omega_T = \omega \cap \mathfrak{M}_T$. Por un lado, las propiedades (2.35) y (2.36) te llevan a que

$$\deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T) = \deg(I - \mathcal{F}_T, \omega_T; \mathfrak{M}_T).$$

Por otro lado, el lema 2.3 te permite asegurar que el segundo término de esta igualdad coincide con

$$\deg(I - \mathcal{F}, \omega; \mathfrak{M}),$$

esto es, se satisface que

$$\deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T) = \deg(I - \mathcal{F}, \omega; \mathfrak{M}). \quad (2.38)$$

2.6.2. El operador $\mathcal{P}_\#$. Primero voy a construir una inmersión de $V \times H$ en \mathfrak{M} . Para ello considera una función regular fija (C^1 es suficiente) $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo las condiciones de contorno

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(T) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T) = 0.$$

Considera también los operadores lineales

$$\mathcal{H}_\tau : V \times H \rightarrow \mathfrak{M}, \quad u = \mathcal{H}_\tau(u_0, v_0),$$

donde $\tau \in [0, T]$ y u es la solución del problema de valores iniciales

$$\ddot{u} + c\dot{u} + \ell u = 0, \quad u(\tau) = u_0, \quad \dot{u}(\tau) = v_0.$$

NOTA 2.22. Observa que \mathcal{H}_0 es precisamente el operador \mathcal{H} introducido en la sección 2.3. Además, una variante obvia de la desigualdad (2.7) te permite probar que \mathcal{H}_τ es continuo.

Si defines

$$j : V \times H \rightarrow \mathfrak{M}, \quad j(u_0, v_0) = \varphi \mathcal{H}_0(u_0, v_0) + (1 - \varphi) \mathcal{H}_T(u_0, v_0),$$

tienes un operador lineal acotado que satisface

$$\xi_0 \circ j = \xi_T \circ j = I_{V \times H} \tag{2.39}$$

y tal que la imagen $\mathfrak{M}_* := j(V \times H)$ está contenida en \mathfrak{M}_T , es decir, $\xi_0|_{\mathfrak{M}_*} = \xi_T|_{\mathfrak{M}_*}$. También es claro que j induce un isomorfismo entre $V \times H$ y \mathfrak{M}_* ; en particular,

$$j \circ \xi_0|_{\mathfrak{M}_*} = I_{\mathfrak{M}_*}.$$

Asimismo, observa que \mathfrak{M}_* es cerrado en \mathfrak{M} (o, si lo prefieres, en \mathfrak{M}_T). Para justificar esto, considera una sucesión

$$w_n = \varphi \mathcal{H}_0(u_{0n}, v_{0n}) + (1 - \varphi) \mathcal{H}_T(u_{0n}, v_{0n}),$$

tal que $w_n \rightarrow w$ en \mathfrak{M} . Entonces

$$\xi_0 w_n \rightarrow \xi_0 w =: (u_0, v_0) \in V \times H.$$

Como $\xi_0 w_n = (u_{0n}, v_{0n})$, tienes que

$$w_n \rightarrow w^* = \varphi \mathcal{H}_0(u_0, v_0) + (1 - \varphi) \mathcal{H}_T(u_0, v_0) \in \mathfrak{M}_*.$$

Pero, por la unicidad del límite, w coincide con w^* y, por tanto, está en \mathfrak{M}_* .

Ahora puedes transportar \mathcal{P} a \mathfrak{M}_* . Para ello define

$$\mathfrak{D}_* = \{u \in \mathfrak{M}_* / \xi_0 u \in \mathfrak{D}\}$$

y

$$\mathcal{P}_* : \mathfrak{D}_* \subset \mathfrak{M}_* \rightarrow \mathfrak{M}_*, \quad \mathcal{P}_*(u) = j \circ \mathcal{P} \circ \xi_0(u).$$

Además, si defines $G_* = j(G)$, por el lema 2.1 y la proposición 2.12, tienes que $\mathcal{P}_* \in \mathcal{L}C(\overline{G_*})$ y

$$\deg(I - \mathcal{P}_*, G_*; \mathfrak{M}_*) = \deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H). \tag{2.40}$$

Para dar el último paso hacia la definición de $\mathcal{P}_\#$, fijado $r > 0$, considera el subconjunto abierto y acotado de \mathfrak{M} ,

$$G_\#(r) = \{u \in \mathfrak{M} / \xi_0 u \in G, \|u\|_{\mathfrak{M}} < r\}.$$

Observa que puedes elegir r suficientemente grande tal que

$$G_* = G_{\#}(r) \cap \mathfrak{M}_*, \quad \partial G_* = \partial G_{\#}(r) \cap \mathfrak{M}_*, \quad (2.41)$$

donde ∂G_* es la frontera de G_* en \mathfrak{M}_* . En concreto, te vale tomar cualquier $r > \sup\{\|u\|_{\mathfrak{M}} / u \in G_*\}$.

Define ahora $\mathfrak{D}_{\#} = \{u \in \mathfrak{M} / \xi_0 u \in \mathfrak{D}\}$ y

$$\mathcal{P}_{\#} : \mathfrak{D}_{\#} \subset \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \mathcal{P}_{\#} = j \circ \mathcal{P} \circ \xi_0.$$

Esta función pertenece a $\mathfrak{L}C(\overline{G_{\#}(r)})$ puesto que

$$K_{\infty}(\mathcal{P}_{\#}, G_{\#}(r)) = K_{\infty}(\mathcal{P}_*, G_*).$$

Además es claro que $\mathcal{P}_{\#}$ es una extensión de \mathcal{P}_* con $\mathcal{P}_{\#}(\mathfrak{D}_{\#}) \subset \mathfrak{M}_*$. Por último, a partir de (2.41) llegas a que $\mathcal{P}_{\#}$ no tiene punto fijos en la frontera de $G_{\#}(r)$ y por tanto, si aplicas el lema 2.3,

$$\deg(I - \mathcal{P}_{\#}, G_{\#}(r); \mathfrak{M}) = \deg(I - \mathcal{P}_*, G_*; \mathfrak{M}_*). \quad (2.42)$$

De (2.40) y (2.42) concluyes que

$$\deg(I - \mathcal{P}_{\#}, G_{\#}(r); \mathfrak{M}) = \deg(I - \mathcal{P}, G; V \times H). \quad (2.43)$$

2.6.3. Los operadores auxiliares \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Defino los operadores

$$\mathcal{A}_1 : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{H}_0 \circ \xi_T + \mathcal{V} \circ \mathcal{N}$$

y

$$\mathcal{A}_2 : \mathfrak{D}_{\#} \subset \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{H}_0 \circ \xi_T + \mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma \circ \xi_0.$$

Observa que si tomas el dominio ω dado por el lema 2.16, por la condición (2.37), sabes que \mathcal{A}_2 está bien definido sobre $\bar{\omega}$ y $\mathcal{A}_2(\bar{\omega})$ es un conjunto acotado. Por otra parte, es claro que el operador \mathcal{A}_1 está bien definido en todo el espacio \mathfrak{M} .

Mi primera tarea será probar que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 pertenecen a $\mathfrak{L}C(\bar{\omega})$. Pero, puesto que los operadores $\mathcal{V} \circ \mathcal{N}$ y $\mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma \circ \xi_0$ son compactos en $\bar{\omega}$, será suficiente que pruebe el siguiente resultado.

LEMA 2.17. *El radio espectral de $\mathcal{H}_0 \circ \xi_T : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ satisface*

$$\varrho(\mathcal{H}_0 \circ \xi_T) < 1.$$

NOTA 2.23. Como ocurrió en el lema 1.21, voy a proponerte dos demostraciones de este lema. En la primera haré hincapié sobre el espectro del operador. En la segunda recorro a una renormación del espacio.

Demostración 1. Considera primero el operador $\xi_T \circ \mathcal{H}_0$. Por la estimación (2.14) es claro que el radio espectral de este operador satisface

$$\varrho(\xi_T \circ \mathcal{H}_0) < 1.$$

Esto es equivalente a decir que el espectro de $\xi_T \mathcal{H}_0$ está dentro del disco unidad.

Si fijas un número $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ en la resolvente de $\xi_T \mathcal{H}_0$, puedes probar fácilmente que λ también está en la resolvente de $\mathcal{H}_0 \xi_T$ y se cumple la siguiente fórmula

$$(\mathcal{H}_0 \xi_T - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda} [\mathcal{H}_0 (\xi_T \mathcal{H}_0 - \lambda I)^{-1} \xi_T - I].$$

Por tanto el espectro de $\mathcal{H}_0\xi_T$ también está dentro del disco unidad y la demostración 1 queda completada.

Demostración 2. Como comenté en la última nota, la idea de esta segunda demostración es renormar el espacio \mathfrak{M} y probar que $\mathcal{H}_0 \circ \xi_T$ es una contracción métrica con respecto a la nueva norma $\|\cdot\|$. Puesto que la norma $\|\cdot\|$ será equivalente a la norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$, tendré la conclusión.

Toma una constante fija $\varepsilon > 0$ tal que $|\cdot|_{\varepsilon}$ sea una norma que satisfaga (2.9). Define entonces

$$\|u\| := \max_{t \in [0, T]} e^{\frac{\varepsilon}{4}(t-T)} |(u(t), \dot{u}(t))|_{\varepsilon}, \quad u \in \mathfrak{M}.$$

A partir de la definición,

$$|\xi_T u|_{\varepsilon} \leq \|u\|, \quad \forall u \in \mathfrak{M},$$

y, si tomas $p = 0$ en (2.9),

$$\|(\mathcal{H}_0 \circ \xi_T)u\| \leq e^{-\frac{\varepsilon}{4}T} |\xi_T u|_{\varepsilon} \quad \forall u \in \mathfrak{M}.$$

Uniendo estas dos desigualdades alcanzas la conclusión. Fin de la demostración 2.

En el siguiente resultado verás, en particular, que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 tienen los mismos puntos fijos que \mathcal{F} .

LEMA 2.18. *Para cada $\lambda \in [0, 1]$,*

$$\text{Fix}(\lambda\mathcal{A}_1 + (1 - \lambda)\mathcal{A}_2) = \text{Fix}(\mathcal{F}).$$

Demostración. Considera un punto fijo u de $\lambda\mathcal{A}_1 + (1 - \lambda)\mathcal{A}_2$. Si defines $\hat{u} := \Sigma\xi_0 u$ entonces \hat{u} es una solución de (2.16) que satisface las mismas condiciones iniciales que u , es decir, $(\xi_0\hat{u} = \xi_0 u)$. Considera la ecuación

$$\ddot{w} + c\dot{w} + \ell w = g(t, w) \tag{2.44}$$

donde $g(t, w) := (1 - \lambda)f(t, w) + \lambda f(t, \hat{u}(t))$. Es claro que la función g satisface las condiciones (f-1) y (f-2) y por tanto hay unicidad para el problema de valores iniciales asociado a (2.44). Además, la definición de g te permite asegurar que \hat{u} es una solución de (2.44).

Por otra parte, sabes que u es un punto fijo de $\lambda\mathcal{A}_1 + (1 - \lambda)\mathcal{A}_2$ y, por consiguiente, verifica la ecuación

$$u = \mathcal{H}_0\xi_T u + \lambda\mathcal{V}\mathcal{N}u + (1 - \lambda)\mathcal{V}\mathcal{N}\Sigma\xi_0 u. \tag{2.45}$$

A partir de esta ecuación y (2.12), tienes que u es periódica, esto es, $\xi_0 u = \xi_T u$. Ahora puedes reescribir (2.45) como

$$u = \mathcal{H}_0\xi_0 u + \mathcal{V}g(\cdot, u),$$

lo cual, junto con (2.10), te permite deducir que u es una solución de (2.44). Finalmente, por unicidad de solución, tienes que $u = \hat{u}$ y por tanto u es una solución periódica de (2.16). Esto implica que

$$\text{Fix}(\lambda\mathcal{A}_1 + (1 - \lambda)\mathcal{A}_2) \subset \text{Fix}(\mathcal{F}).$$

Para probar la otra inclusión observa que la condición $u \in \text{Fix}(\mathcal{F})$ te conduce a las identidades

$$u = \Sigma \xi_0 u, \quad \xi_0 u = \xi_T u$$

y

$$u = \mathcal{H}_0 \xi_T u + \lambda \mathcal{V} \mathcal{N} u + (1 - \lambda) \mathcal{V} \mathcal{N} \Sigma \xi_0 u.$$

Finalizo de este modo la demostración.

Una vez probado este lema, puedes ahora usar (2.36) y el lema 2.4 para deducir que

$$\deg(I - \lambda \mathcal{A}_1 - (1 - \lambda) \mathcal{A}_2, \omega; \mathfrak{M}) \quad (2.46)$$

está bien definido y es constante.

2.6.4. La conexión entre \mathcal{F} y \mathcal{A}_1 . Puesto que $\mathcal{F}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}_T$ sabes que $\xi_T \mathcal{F} = \xi_0 \mathcal{F}$. Así,

$$(I - \mathcal{H}_0 \xi_T)(I - \mathcal{F}) = I - \mathcal{H}_0 \xi_T - \mathcal{F} + \mathcal{H}_0 \xi_0 \mathcal{F}.$$

De la definición de \mathcal{F} y (2.15)

$$\mathcal{F} = [\mathcal{H}_0(I - \xi_T \mathcal{H}_0)^{-1} \xi_T + I] \mathcal{V} \mathcal{N}.$$

Si combinas esta identidad con (2.12),

$$\mathcal{H}_0 \xi_0 \mathcal{F} = \mathcal{H}_0(I - \xi_T \mathcal{H}_0)^{-1} \xi_T \mathcal{V} \mathcal{N}.$$

Estas tres identidades te llevan a su vez a la identidad

$$(I - \mathcal{H}_0 \xi_T)(I - \mathcal{F}) = I - \mathcal{A}_1.$$

De esta forma

$$H_\lambda := (I - \lambda \mathcal{H}_0 \xi_T)(I - \mathcal{F}) = I - \lambda \mathcal{H}_0 \xi_T - \mathcal{F} + \lambda \mathcal{H}_0 \xi_0 \mathcal{F}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

te define una homotopía entre $I - \mathcal{F}$ y $I - \mathcal{A}_1$. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, $I - H_\lambda$ está en $\mathcal{LC}(\bar{\omega})$ y $\text{Fix}(I - H_\lambda)$ es independiente de λ . Todas estas propiedades y el lema 2.4 te llevan a la conclusión

$$\deg(I - \mathcal{F}, \omega; \mathfrak{M}) = \deg(I - \mathcal{A}_1, \omega; \mathfrak{M}). \quad (2.47)$$

2.6.5. La conexión entre \mathcal{A}_2 y \mathcal{P}_\sharp . De nuevo intentaré aplicar el lema 2.4. Para ello observa que puedes descomponer \mathcal{A}_2 como

$$\mathcal{A}_2 = L_1 + \mathcal{C}_1, \quad L_1 = \mathcal{H}_0 \circ \xi_T, \quad \mathcal{C}_1 = \mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma \circ \xi_0.$$

Que \mathcal{C}_1 es compacto sobre $\bar{\omega}$ es claro al ser \mathcal{N} compacto y \mathcal{V} , Σ y ξ_0 operadores continuos que llevan acotados en acotados. Que L_1 es lineal y acotado es evidente.

Para la descomposición de \mathcal{P}_\sharp , a partir de su definición y de las identidades (2.26) y (2.27), tienes que

$$\mathcal{P}_\sharp = j \mathcal{P} \xi_0 = j \xi_T \Sigma \xi_0 = j \xi_T (\mathcal{H}_0 + \mathcal{V} \mathcal{N} \Sigma) \xi_0 = L_2 + \mathcal{C}_2,$$

donde

$$L_2 = j \circ \xi_T \circ \mathcal{H}_0 \circ \xi_0 \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_2 = j \circ \xi_T \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{N} \circ \Sigma \circ \xi_0.$$

Razonando como en el caso de \mathcal{C}_1 , tienes que el operador \mathcal{C}_2 es compacto sobre $\bar{\omega}$. Nuevamente, que L_2 es lineal y acotado es obvio.

Para aplicar el lema 2.4 falta que verifique (2.3) y (2.4). Esto lo voy a llevar a cabo por medio de tres lemas. El primero de ellos es un fácil ejercicio de análisis funcional.

LEMA 2.19. *Considera un espacio de Banach X con norma $|\cdot|$ y un operador lineal acotado $L : X \rightarrow X$. Además, admite la existencia de una semi-norma $\|\cdot\|$ en X tal que se cumplen las siguientes condiciones*

- i) $k|x| \leq \|x\| \leq K|x|$, $\forall x \in \text{Im}(L)$,
- ii) $\|Lx\| \leq \Gamma\|x\|$, $\forall x \in X$,

donde k , K y Γ son constantes fijas positivas. Entonces el radio espectral de L satisface

$$\varrho(L) \leq \Gamma.$$

Demostración. Si pruebas la desigualdad

$$|L^n| \leq \frac{K}{k} \Gamma^{n-1} |L|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

el resultado será una consecuencia de la fórmula de Gelfand para el radio espectral. Para dicha prueba, fija $y \in X$ arbitrario y observa que i) se cumple tanto para $x = Ly$ como para $L^n y$, $n \geq 2$. De esta forma,

$$|L^n y| \stackrel{i)}{\leq} \frac{1}{k} \|L^n y\| \stackrel{ii)}{\leq} \frac{\Gamma^{n-1}}{k} \|Ly\| \stackrel{i)}{\leq} \frac{K\Gamma^{n-1}}{k} |Ly| \leq \frac{K\Gamma^{n-1}}{k} |L||y|.$$

Fin de la prueba.

LEMA 2.20. *Considera la familia de operadores*

$$L_\lambda = \lambda \mathcal{H}_0 \circ \xi_T + (1 - \lambda) j \circ \xi_T \circ \mathcal{H}_0 \circ \xi_0, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Entonces se verifica que

$$\varrho(L_\lambda) < 1, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Demostración. Por el lema 2.17 ya sabes que el resultado es válido para $\lambda = 1$. Cuando $\lambda = 0$, un simple cálculo te permite ver que las potencias de L_0 satisfacen

$$L_0^n = j(\xi_T \mathcal{H}_0)^n \xi_0.$$

Puesto que $\varrho(\xi_T \mathcal{H}_0) < 1$ puedes concluir que el resultado es cierto también para $\lambda = 0$.

A partir de ahora supondré que $\lambda \in (0, 1)$. La idea es aplicar el lema previo con $X = \mathfrak{M}$, $|\cdot| = \|\cdot\|_{\mathfrak{M}, \varepsilon}$ y la semi-norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|u\|_\partial := \max\{|\xi_0 u|_\varepsilon, |\xi_T u|_\varepsilon\}, \quad u \in \mathfrak{M}.$$

Aquí $\varepsilon > 0$ es un número pequeño fijo y elegido como en la sección 2.3 para la fórmula (2.8).

Para verificar la segunda condición del lema 2.19, si fijas $u \in \mathfrak{M}$ y tienes en cuenta la definición de L_λ y la estimación (2.14),

$$\begin{aligned} |\xi_0 L_\lambda u|_\varepsilon &= |\lambda \xi_T u + (1 - \lambda) \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 u|_\varepsilon \leq \lambda \|u\|_\partial + (1 - \lambda) e^{-\frac{\varepsilon}{4} T} \|u\|_\partial, \\ |\xi_T L_\lambda u|_\varepsilon &= |\lambda \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_T u + (1 - \lambda) \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 u|_\varepsilon \leq e^{-\frac{\varepsilon}{4} T} \|u\|_\partial, \end{aligned}$$

de donde

$$\|L_\lambda u\|_\partial \leq \Gamma_\lambda \|u\|_\partial, \quad \Gamma_\lambda := \lambda + (1 - \lambda)e^{-\frac{\varepsilon}{4}T}.$$

Es claro que $\Gamma_\lambda < 1$.

Para la primera condición del lema 2.19, considera $u \in \text{Im}(L_\lambda)$ arbitraria. Entonces tienes que

$$u = \lambda \mathcal{H}_0 \xi_T w + (1 - \lambda) j \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 w \quad (2.48)$$

para alguna $w \in \mathfrak{M}$. Como puedes comprobar, los valores extremos $\xi_0 u$ y $\xi_T u$ satisfacen

$$\xi_0 u = \lambda \xi_T w + (1 - \lambda) \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 w, \quad (2.49)$$

$$\xi_T u = \lambda \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_T w + (1 - \lambda) \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 w, \quad (2.50)$$

lo que te lleva a la igualdad

$$\xi_0 u - \xi_T u = \lambda (I - \xi_T \mathcal{H}_0) \xi_T w.$$

Puesto que $\xi_T \mathcal{H}_0$ tiene radio espectral menor que 1, puedes invertir $I - \xi_T \mathcal{H}_0$ para obtener

$$|\xi_T w|_\varepsilon \leq \frac{1}{\lambda} |(I - \xi_T \mathcal{H}_0)^{-1}|_\varepsilon 2 \|u\|_\partial.$$

Si operas de nuevo con (2.49),

$$(1 - \lambda) |\xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 w|_\varepsilon \leq |\xi_0 u|_\varepsilon + \lambda |\xi_T w|_\varepsilon \leq (1 + 2 |(I - \xi_T \mathcal{H}_0)^{-1}|_\varepsilon) \|u\|_\partial.$$

Ahora, a partir de estas dos últimas estimaciones, la relación (2.48) y la continuidad de \mathcal{H}_0 y j , puedes obtener una estimación del tipo

$$k_\lambda \|u\|_{\mathfrak{M}, \varepsilon} \leq \|u\|_\partial, \quad u \in \text{Im}(L_\lambda).$$

Finalmente, la desigualdad

$$\|u\|_\partial \leq \|u\|_{\mathfrak{M}, \varepsilon}$$

es obvia por la definición de la semi-norma. Así completas la demostración.

LEMA 2.21. *Puedes determinar $r^* > 0$ tal que si $r > r^*$ entonces*

$$\text{Fix}(\lambda \mathcal{A}_2 + (1 - \lambda) \mathcal{P}_\#) \cap \partial G_\#(r) = \emptyset$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$.

Demostración. En primer lugar observa que \mathcal{A}_2 satisface la identidad

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{H}_0 \circ \xi_T - \mathcal{H}_0 \circ \xi_0 + \Sigma \circ \xi_0. \quad (2.51)$$

Para ello simplemente has de tener en cuenta la identidad de Volterra (2.27) y la definición de \mathcal{A}_2 .

Considera ahora un punto fijo u de $\lambda \mathcal{A}_2 + (1 - \lambda) \mathcal{P}_\#$. La fórmula (2.51) junto con las definiciones de \mathcal{P} y $\mathcal{P}_\#$ te llevan a

$$u = \lambda \mathcal{H}_0 \xi_T u - \lambda \mathcal{H}_0 \xi_0 u + \lambda \Sigma \xi_0 u + (1 - \lambda) j \xi_T \Sigma \xi_0 u. \quad (2.52)$$

Si aplicas ξ_0 y ξ_T a esta identidad, haciendo uso de (2.12) y (2.39), obtienes

$$\xi_0 u = \lambda \xi_T u + (1 - \lambda) \xi_T \Sigma \xi_0 u, \quad (2.53)$$

$$\xi_T u = \lambda \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_T u - \lambda \xi_T \mathcal{H}_0 \xi_0 u + \xi_T \Sigma \xi_0 u. \quad (2.54)$$

Si multiplicas (2.54) por $1 - \lambda$ y restas el resultado de (2.53), tienes que

$$\xi_0 u - \xi_T u = \lambda(1 - \lambda)\xi_T \mathcal{H}_0(\xi_0 u - \xi_T u).$$

Esta identidad te va a permitir deducir que u es periódica, esto es, $\xi_0 u = \xi_T u$. Este hecho es obvio para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Puedes, por tanto, suponer que $\lambda \in (0, 1)$. Como recordarás, en la demostración del lema 2.5 se prueba que el radio espectral de $\xi_T \mathcal{H}_0$ es estrictamente menor que 1, concretamente, se prueba (2.14). Así tienes que $\frac{1}{\lambda(1-\lambda)} > 1$ no puede ser un valor propio de este operador y $\xi_0 u - \xi_T u$ debe anularse.

Una vez que sabes que $\xi_0 u = \xi_T u$, puedes volver a (2.53) para deducir que $\xi_0 u$ es un punto fijo de \mathcal{P} .

Ya estás en disposición de probar el lema. La idea es que supongas que u pertenece a $\text{Fix}(\lambda \mathcal{A}_2 + (1 - \lambda)\mathcal{P}_\#) \cap \partial G_\#(r)$ e intentes llegar a una contradicción para r grande. Por la anterior discusión y la definición de $G_\#(r)$ sabes que

$$\xi_0 u \in \text{Fix}(\mathcal{P}) \cap \overline{G}.$$

Las hipótesis sobre G , en particular (2.31), implican que $\xi_0 u$ no puede estar en ∂G . En estas circunstancias $u \in \partial G_\#(r)$ implica

$$\|u\|_{\mathfrak{M}} = r. \quad (2.55)$$

Puesto que $cl_w(G) \subset \mathfrak{D}$ el siguiente número es finito,

$$\rho := \sup\{\|\Sigma(u_0, v_0)\|_{\mathfrak{M}} / (u_0, v_0) \in \overline{G}\}.$$

Con este número y no olvidando que $\xi_0 u = \xi_T u$, de (2.52) obtienes una cota para u , a saber

$$\|u\|_{\mathfrak{M}} \leq \rho(1 + \|j\|). \quad (2.56)$$

Si defines $r^* := \rho(1 + \|j\|)$, entonces (2.55) y (2.56) no son compatibles cuando $r > r^*$ y llegas así a la contradicción buscada. Con esto acabas la demostración del lema.

Tras estos dos últimos lemas y a partir del lema 2.4, puedes concluir que

$$\deg(I - \mathcal{A}_2, G_\#(r); \mathfrak{M}) = \deg(I - \mathcal{P}_\#, G_\#(r); \mathfrak{M}). \quad (2.57)$$

Pero por el lema 2.18 sabes que \mathcal{A}_2 y \mathcal{F} tienen los mismos puntos fijos. Como G y Ω_T tiene un núcleo común puedes deducir que para r grande

$$\text{Fix}(\mathcal{A}_2) \cap G_\#(r) = \text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T = \text{Fix}(\mathcal{A}_2) \cap \omega.$$

Observa que utilizas (2.35) en la última igualdad. En consecuencia

$$\deg(I - \mathcal{A}_2, \omega; \mathfrak{M}) = \deg(I - \mathcal{A}_2, G_\#(r); \mathfrak{M}). \quad (2.58)$$

Por último, de (2.57) y (2.58)

$$\deg(I - \mathcal{A}_2, \omega; \mathfrak{M}) = \deg(I - \mathcal{P}_\#, G_\#(r); \mathfrak{M}). \quad (2.59)$$

2.6.6. Conclusión. Una última línea para que observes que ya hemos logrado probar el teorema de dualidad 2.14. En efecto, basta que consideres la cadena de identidades dada por (2.38), (2.47), (2.46), (2.59) y (2.43).

CAPÍTULO 3

La ecuación de sine-Gordon forzada

3.1. Introducción al capítulo 3

En este capítulo voy a estudiar algunas propiedades de las soluciones doblemente periódicas de la ecuación de sine-Gordon. Esta ecuación viene dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + a \sin u = f(t, x), \quad (3.1)$$

donde a y c son números positivos y $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Como podrás observar, la ecuación de sine-Gordon es un caso particular de la clase de ecuaciones dada por (1.1). Asimismo, te recuerdo que una función u solución de (3.1) es doblemente periódica de periodo 2π en el siguiente sentido

$$u(t + 2\pi, x) = u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Cuando f es pequeña, la existencia de soluciones periódicas pequeñas fue analizada en una forma muy precisa en [5]. En la sección 3.3 te mostraré resultados de existencia sin suponer la pequeñez de f pero imponiendo la restricción

$$a \leq \nu,$$

siendo ν la cota de existencia de principio del máximo vista en el capítulo 1. Tales resultados resultarán de una combinación del método de sub-super-soluciones con algunas técnicas desarrolladas en [38] para la ecuación del péndulo forzado.

En la sección 3.4 intentaré (y conseguiré) aplicar a (3.1) con éxito el marco abstracto de la sección 2.4, en concreto las ideas del ejemplo 2.7, para obtener un resultado sobre multiplicidad e inestabilidad de las soluciones periódicas.

3.2. Algunas consideraciones previas

Como la única propiedad de la función seno que utilizaré en el resto del capítulo es la periodicidad, me parece conveniente reemplazar (3.1) por una ecuación más general, en concreto,

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \Phi(t, x, u) = s, \quad (3.2)$$

donde Φ es una función 2π -periódica en cada variable y $s \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Además, supondré que Φ está en la clase $C^{0,1}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1)$. La noción de solución doblemente periódica introducida previamente para (3.1) también se aplica para esta ecuación.

En este momento te habrán surgido las siguientes preguntas: ¿Cómo puedes englobar la ecuación (3.1) dentro de (3.2) si estás considerando $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$? ¿No haría falta que f fuera continua? Pues sí, puedo hacer tal proceso y no necesito que f sea continua para ello. La justificación que te voy a dar para ambas repuestas se

basa en el uso de un conocido (aunque no considerado en muchas ocasiones) cambio de variable. ¿Cuál? Primero descompongo f de la forma

$$f(t, x) = \tilde{f}(t, x) + \bar{f}$$

donde \tilde{f} satisface $\int_{\mathbb{T}^2} \tilde{f} = 0$ y $\bar{f} \in \mathbb{R}$ es el valor medio de f . A continuación encuentro la única función $F \in C(\mathbb{T}^2)$ que es solución (en el sentido de la distribuciones) del problema lineal

$$F_{tt} - F_{xx} + cF_t = \tilde{f}(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2), \quad \int_{\mathbb{T}^2} F = 0 \quad (3.3)$$

que sé que existe por la proposición 3.1. Enunciaré y probaré este resultado en un momento. Ahora, el cambio de variable

$$\mathbf{u} = u + F(t, x)$$

transforma la ecuación (3.1) en

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + a \sin(u + F(t, x)) = \bar{f}. \quad (3.4)$$

Como puedes ver, esta ecuación ya sí está incluida en la clase dada por (3.2).

NOTA 3.1. El haber utilizado “ \mathbf{u} ” para (3.1) es porque no era ésta la ecuación con la que iba a trabajar en este capítulo sino con (3.4) o su abstracción, esto es, (3.2).

PROPOSICIÓN 3.1. *Considera $p \in [1, +\infty)$ un número dado y f una función satisfaciendo*

$$f \in L^p(\mathbb{T}^2), \quad \int_{\mathbb{T}^2} f = 0.$$

Entonces el problema

$$\mathfrak{L}u = f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2), \quad \int_{\mathbb{T}^2} u = 0$$

tiene una única solución. Esta solución satisface

$$u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2), \quad \alpha = 1 - \frac{1}{p},$$

y las estimaciones (1.7) y (1.8) de la proposición 1.9 siguen siendo ciertas.

NOTA 3.2. Observa que tengo incluido el caso $p = 1$ por medio de la convención $C^{0,0}(\mathbb{T}^2) = C(\mathbb{T}^2)$.

Para la demostración de la proposición 3.1 he utilizar el siguiente lema.

LEMA 3.2. *Considera $p \in [1, +\infty)$ y $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$, $u_n \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)$, $f_n \in L^p(\mathbb{T}^2)$ tres sucesiones tales que*

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \quad \int_{\mathbb{T}^2} u_n = 0, \quad \sup \|f_n\|_{L^p} < +\infty$$

y

$$\mathfrak{L}u_n + \varepsilon_n u_n = f_n(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2).$$

Entonces $\|u_n\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)}$ está acotada.

Demostración. Voy a probar sólo el caso $p = 1$. La demostración para el caso $p > 1$ es similar. Define $\eta_n = \|u_n\|_{L^\infty}$ y considera, por un argumento de reducción al absurdo, que una sucesión parcial $\{\eta_k\}$ satisface

$$\eta_k > 0, \quad \eta_k \rightarrow +\infty.$$

Entonces $v_k = \eta_k^{-1}u_k$ es una solución de

$$\mathfrak{L}v_k + \varepsilon_k v_k = \eta_k^{-1}f_k(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2). \quad (3.5)$$

Si escoges $\lambda \notin \sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$, entonces v_k también es la única solución de

$$\mathfrak{L}v + \lambda v = g_k(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2),$$

con $g_k = (\lambda - \varepsilon_k)v_k + \eta_k^{-1}f_k$. Esto te permite descomponer v_k de la forma

$$v_k = w_k + z_k,$$

con

$$\mathfrak{L}w_k + \lambda w_k = (\lambda - \varepsilon_k)v_k, \quad \mathfrak{L}z_k + \lambda z_k = \eta_k^{-1}f_k.$$

A partir de las estimaciones (1.7) y (1.8) tienes que $\|z_k\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ y $\|w_k\|_{C^{0,\alpha}}$ está acotada para cualquier $\alpha \in (0, 1)$. Consecuentemente puedes extraer una nueva subsucesión v_r que converge uniformemente a $v \in C(\mathbb{T}^2)$. Por último, si pasas al límite en (3.5) ves que v es idénticamente cero, pero esto no es consistente con el valor de la norma

$$\|v\|_{L^\infty} = \|v_r\|_{L^\infty} = 1.$$

Fin de la demostración del lema.

Demostración de la Proposición 3.1. Considera una función $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ fija tal que $\int_{\mathbb{T}^2} f = 0$. Voy a ver que el problema

$$\mathfrak{L}u = f, \quad \int_{\mathbb{T}^2} u = 0,$$

tiene una solución. Para ello, considera $\{\varepsilon_n\}$ una sucesión formada por números que no estén en $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathfrak{L})$ y que sea decreciente a cero. Si tomas u_n solución de

$$\mathfrak{L}u_n + \varepsilon_n u_n = f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2). \quad (3.6)$$

entonces la tripleta ε_n, u_n, f está en las condiciones del lema previo. Para asegurarte de este hecho, te faltaría ver que $\int_{\mathbb{T}^2} u_n = 0$, pero esto lo deduces por simple integración en (3.6) sobre \mathbb{T}^2 . Así $\|u_n\|_{L^\infty}$ está acotada y puedes extraer una subsucesión $\{u_k\}$ convergente a $u \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ en el sentido débil*, esto es,

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_k \phi \rightarrow \int_{\mathbb{T}^2} u \phi, \quad \forall \phi \in L^1(\mathbb{T}^2).$$

Ahora, si tomas $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{T}^2)$, es claro que ϕ y $\mathfrak{L}^*\phi$ están en $L^1(\mathbb{T}^2)$. Por tanto,

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_k \mathfrak{L}^*\phi \rightarrow \int_{\mathbb{T}^2} u \mathfrak{L}^*\phi, \quad \int_{\mathbb{T}^2} u_k \phi \rightarrow \int_{\mathbb{T}^2} u \phi.$$

Esto te permite tomar límites en la formulación débil (3.6) para la subsucesión $\{u_k\}$ y tienes que u es la solución buscada. Las estimaciones (1.7) y (1.8) son consecuencia del lema 3.2 para $\varepsilon_n \equiv 0$. Finalmente, la unicidad se sigue de que la ecuación

$$\mathfrak{L}u = 0 \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2)$$

sólo admite como soluciones a las funciones constantes. Con esto acabo la demostración.

A continuación algunas notas sobre conceptos de solución que puedes encontrar en otros trabajos y ambientes y una nota final sobre las definiciones de solución que utilicé en los dos capítulos anteriores.

NOTA 3.3. Pudiera ser que en algunas situaciones físicas fuera interesante buscar soluciones de (3.2) tomando valores en $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ en lugar de \mathbb{R} . Ahora bien, dada una función continua $u : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1$ solución de (3.2) existe otra función continua $\tilde{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y dos enteros positivo M y N tales que

$$\tilde{u}(t+2\pi, x) = \tilde{u}(t, x) + 2N\pi, \quad \tilde{u}(t, x+2\pi) = \tilde{u}(t, x) + 2M\pi, \quad u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Siguiendo la terminología de [41], a estas soluciones las llamaré *soluciones doblemente periódicas de segunda clase*. Mediante el cambio

$$v(t, x) = \tilde{u}_1(t, x) - Nt - Mx,$$

reduzco el estudio de esta clase de soluciones (para M y N fijos) al caso $M = N = 0$.

NOTA 3.4. Ten en cuenta que, si tomas una solución doblemente periódica u de (3.2), también la trasladada $u + 2\pi$ es una solución. Por tanto diré que dos soluciones son *geométricamente diferentes* si no difieren en un múltiplo de 2π .

NOTA 3.5. Si vuelves atrás, puedes comprobar que existe un pequeño problema referente a la equivalencia de la definición de solución que utilicé en el capítulo 1 por un lado y la que usé en el capítulo 2 por otro. En efecto, recuerda que

(S1) en el capítulo 1 consideré funciones de $C(\mathbb{T}^2)$ que satisfacían (3.2) en el sentido de las distribuciones;

(S2) en el capítulo 2 trabajé con funciones de \mathfrak{M}_T que eran soluciones de (2.16).

Te será fácil probar que una solución de (2.16)–(2.25) es también una solución en el sentido (S1). La clave de dicha prueba es la inmersión de \mathfrak{M}_T en $C(\mathbb{T}^2)$. Entonces tienes que utilizar el hecho de que basta usar funciones test que sean sumas finitas trigonométricas. El recíproco es algo más delicado y depende del siguiente resultado de regularidad para la ecuación lineal (3.3):

“La solución F pertenece a $C^1(\mathbb{T}^2)$ si \tilde{f} está en $C(\mathbb{T}^2)$.”

Para probar esto tienes diversos caminos; por ejemplo, puedes usar la función de Green del lema 1.18 y un razonamiento análogo al de la proposición 1.9. Ahora, si consideras $u \in C(\mathbb{T}^2)$ solución de (3.2) en el sentido de las distribuciones, entonces $\tilde{u} = u - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} u$ es una solución de (3.3) para una apropiada \tilde{f} que pertenezca a $C(\mathbb{T}^2)$. Así tienes que u está en $C^1(\mathbb{T}^2)$ y, como puedes sumergir este espacio en \mathfrak{M}_T , ya llegas a la equivalencia entre las dos definiciones.

3.3. Sub y super-soluciones

Como he indicado en la introducción de este capítulo, en esta sección voy a aplicar el método de sub-super-soluciones a la ecuación de sine-Gordon siguiendo la línea de Mawhin en [38].

Recuerda que la ecuación (3.2) viene dada por la expresión

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \Phi(t, x, u) = s,$$

donde $\Phi \in C^{0,1}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1)$ y $s \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Como quiero aplicar el teorema 1.25 he de imponer la condición

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(t, x, u) \leq \nu \quad \text{para todo } (t, x, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

En efecto, si identificas términos de (1.43) y (3.2),

$$F(t, x, u) = s - \Phi(t, x, u).$$

De esta forma, F satisface (1.44) si, y sólo si,

$$F(t, x, u_1) - F(t, x, u_2) = -\Phi(t, x, u_1) + \Phi(t, x, u_2) \geq -\nu(u_1 - u_2).$$

Pero esto es cierto si impones (3.7).

NOTA 3.6. Si integras (3.2) en \mathbb{T}^2 , deduces de forma inmediata que

$$\min \Phi \leq s \leq \max \Phi$$

es una condición necesaria para que (3.2) pueda ser resuelta.

En el siguiente resultado te describo las condiciones exactas, en términos cualitativos, para que (3.2) tenga solución. La demostración que te propongo sigue la misma línea de la demostración del Teorema 3 en [38] que proporciona el resultado para la ecuación del péndulo. Las herramientas a utilizar serán el teorema 1.25 y la proposición 3.1.

TEOREMA 3.3. *En los supuestos anteriores, existe un intervalo I cerrado y no vacío (dependiente de Φ) tal que (3.2) tiene solución si y sólo si $s \in I$.*

Demostración del Teorema 3.3. Fijada $\Phi \in C^{0,1}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1)$ defino el conjunto

$$I(\Phi) = \{s \in \mathbb{R} / (3.2) \text{ tiene solución}\}.$$

Primero voy a probar que $I(\Phi)$ es un intervalo. Para ello, veré que si $s_1, s_2 \in I(\Phi)$, con $s_1 \leq s_2$, entonces $s \in I(\Phi)$, $\forall s \in [s_1, s_2]$. Sean u_1, u_2 soluciones asociadas a s_1, s_2 respectivamente. Sumando, si fuese necesario, un múltiplo positivo de 2π a u_2 , puedes suponer que $u_1 < u_2$. De esta forma, es claro que u_1 es una sub-solución de (3.2) para $s \in [s_1, s_2]$ fijo. Análogamente, u_2 es una super-solución. Ahora, si consideras la función $F(t, x, u) = s - \Phi(t, x, u)$, estás en las condiciones del teorema 1.25. Esto te justifica que $s \in I(\Phi)$.

Ahora, como segundo paso de esta demostración, voy a ver que $I(\Phi)$ es distinto del vacío. Considera pues los operadores

$$P : C(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Pu = \bar{u} := \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} u,$$

y

$$Q : C(\mathbb{T}^2) \rightarrow C(\mathbb{T}^2), \quad Qu = \tilde{u} := u - \bar{u} = (I - P)u.$$

Si aplicas estos operadores a (3.2), entonces u es solución de (3.2) si, y sólo si, es solución del sistema

$$\begin{cases} PNu = s, \\ \mathfrak{L}Qu + QNu = 0, \end{cases}$$

donde $Nu = \Phi(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot))$ y has de tener en cuenta que $P\mathfrak{L} = 0$ y $Q\mathfrak{L} = \mathfrak{L}Q$. Puesto que $u = \tilde{u} + \bar{u}$, puedes reescribir este último sistema de la forma

$$\begin{cases} PN(\tilde{u} + \bar{u}) = s, \\ \mathfrak{L}\tilde{u} + QN(\tilde{u} + \bar{u}) = 0. \end{cases}$$

A partir de la proposición 3.1, cuando buscamos soluciones con valor medio cero, el operador \mathfrak{L} es inversible con operador inverso $R : \tilde{C}(\mathbb{T}^2) \rightarrow \tilde{C}(\mathbb{T}^2)$. Así, basta resolver

$$\begin{cases} PN(\tilde{u} + \bar{u}) = s, \\ \tilde{u} = -RQN(\tilde{u} + \bar{u}). \end{cases}$$

Si consideras \bar{u} fijo entonces puedes aplicar el Teorema de Schauder en la segunda ecuación del sistema para obtener \tilde{u} . Voy a comprobar este hecho con más detalle. Sea el operador

$$T_{\bar{u}} : \tilde{C}(\mathbb{T}^2) \rightarrow \tilde{C}(\mathbb{T}^2), \quad T_{\bar{u}}\omega = -RQN(\omega + \bar{u}).$$

Por ser $\Phi \in C^{0,1}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1)$, es claro que $QNu \in L^p(\mathbb{T}^2)$, para cada $p > 1$, con valor medio cero. Por las estimaciones de la proposición 3.1, $RQN u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)$. Como $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ está sumergido de forma compacta en $C(\mathbb{T}^2)$ y $\tilde{C}(\mathbb{T}^2)$ es cerrado en $C(\mathbb{T}^2)$, concluyo la compacidad de T . Para finalizar este segundo paso de la demostración, sólo es necesario que definas $s = PN(\tilde{u} + \bar{u})$ para el valor de \bar{u} que fijaste hace un momento.

Resta por probar que $I(\Phi)$ es cerrado. Para ello considera una sucesión $\{s_k\} \subset I(\Phi)$ convergente a s . Para cada k , sea u_k la solución asociada a s_k . Si sigues con la notación del párrafo anterior, $u_k = \tilde{u}_k + \bar{u}_k$ satisface el sistema

$$\begin{cases} PN(\tilde{u}_k + \bar{u}_k) = s_k, \\ \tilde{u}_k = T_{\bar{u}_k}\tilde{u}_k. \end{cases} \quad (3.8)$$

Como $u_k + 2n\pi$ también es solución para cualquier entero n , puedes considerar $\{\bar{u}_k\} \subset [0, 2\pi]$. Por otra parte,

$$\|\tilde{u}_k\|_{C(\mathbb{T}^2)} = \|T_{\bar{u}_k}\tilde{u}_k\|_{C(\mathbb{T}^2)} \leq \|RQN(u)\|_{C(\mathbb{T}^2)} \leq$$

$$C_1\|QN(u)\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \leq 8\pi^2 C_1\|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T})}.$$

Así tienes que $\{u_k\}$ está acotada. Pero, por ser T compacto, $\{Tu_k\} = \{u_k\}$ admite una parcial convergente a una función u . Ahora estás en condiciones de aplicar límites en (3.8) para dicha parcial y tienes que u es una solución asociada a s . Con esto acabo la demostración del teorema.

Acabo esta sección con una aplicación cuantitativa para la ecuación de sine-Gordon dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + a \sin u = f(t, x) \quad \text{en } \mathfrak{D}'(\mathbb{T}^2). \quad (3.9)$$

donde $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ es una función con valor medio cero. Considera la solución U de

$$\mathfrak{L}U = f, \quad \int_{\mathbb{T}^2} U = 0$$

dada por la proposición 3.1. Observa que he olvidado el parámetro s ; la razón de esto es aplicar directamente la proposición 3.1 y, también sea dicho, para que las cuentas sean más fáciles.

Es claro que las funciones $u^* = \frac{\pi}{2}$, $u_* = -\frac{\pi}{2}$ son super-sub-soluciones ordenadas de (3.4), con $F = U$ y $s = 0$, si $\|U\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$. A partir de esto tengo el siguiente resultado.

TEOREMA 3.4. *Si $\|U\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 < a \leq \nu$, entonces (3.9) tiene una solución doblemente periódica u que satisface*

$$\|u - U\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.4. Multiplicidad e inestabilidad de las soluciones periódicas

Como ya te comenté, mi idea para esta sección es obtener resultados sobre multiplicidad e inestabilidad de soluciones periódicas. Tales resultados los puedes ver como extensiones parciales de resultados bien conocidos para la ecuación del péndulo forzado que encontrarás, en particular, en [39] y [45].

A partir de este momento permaneceré en el marco introducido en los ejemplos 2.6 y 2.7 con dimensión $n = 1$. En particular,

$$H = L^2(\mathbb{T}^1), \quad V = H^1(\mathbb{T}^1).$$

Supondré como siempre que el periodo en tiempo es $T = 2\pi$ y, por tanto, tienes que entender una solución doblemente periódica de (3.2) como una solución del problema de contorno periódico (2.16)–(2.25), donde (2.16) es ahora la versión abstracta de (3.4).

NOTA 3.7. Recordarás que en la sección anterior ya estudié las soluciones doblemente periódicas de (3.2) bajo la hipótesis

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(t, x, u) \leq \nu \quad \text{para todo } (t, x, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

donde $\nu = \nu(c)$ es el número que determina la región de parámetros donde es posible encontrar un principio del máximo para la ecuación del telégrafo. Mi idea es combinar los resultados obtenidos en la secciones 2.6 y 3.3 para obtener el siguiente resultado que puedes considerar una continuación del teorema 3.3.

TEOREMA 3.5. *Si supones que se satisface (3.10) entonces existe un intervalo $I_\Phi = [s_-, s_+]$, $s_- \leq s_+$, tal que (3.2) tiene*

a) *ninguna solución doblemente periódica si $s < s_-$ o $s > s_+$;*

- b) al menos una solución doblemente periódica si $s = s_-$ o s_+ ;
 c) al menos dos soluciones doblemente periódicas (geométricamente diferentes) si $s_- < s < s_+$.

Además, al menos una de estas soluciones es no asintóticamente estable cuando $s_- < s < s_+$ y ninguna de las soluciones doblemente periódicas puede ser asintóticamente estable cuando $s = s_-$ o s_+ .

NOTA 3.8. Este teorema está inspirado por un resultado que es bien conocido para ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo del péndulo. Por ejemplo puedes consultar, entre otros, los trabajos [39] y [45]. Es conveniente que aclare que en este caso una restricción del tipo (3.10) no es necesaria.

NOTA 3.9. Pudiera ser que este resultado se hubiera probado mediante el uso de otras técnicas. Sin embargo, no tengo constancia de ello y me atrevo a decir que es nuevo.

A partir de este momento me dedicaré a probar el teorema 3.5.

Demostración del teorema 3.5. (Multiplicidad y propiedades de inestabilidad). El teorema 3.3 me garantiza la existencia de un intervalo $I_\Phi = [s_-, s_+]$ tal que (3.2) tiene soluciones doblemente periódicas si y sólo si $s_- \leq s \leq s_+$.

Considera primero el caso $s = s_-$ o s_+ . Voy a mostrarte que las soluciones doblemente periódicas son no asintóticamente estables. Toma una de tales soluciones u y presupón que es aislada, pues en otro caso la conclusión es clara. En efecto, es imposible que una solución periódica sea asintóticamente estable cuando tienes otra solución periódica tan cerca de la primera como tú quieras.

Piensa ahora que el índice $\gamma_{\mathcal{P}}(u)$ fuera diferente de cero. Entonces las propiedades de grado y la dependencia continua de (3.2) con respecto al parámetro s te conducen a que (3.2) debe tener una solución periódica para cualquier s cercano a s_- o a s_+ . Pero esto contradice la definición del intervalo I_Φ y, por tanto, puedes concluir que $\gamma_{\mathcal{P}}(u) = 0$. Tienes la conclusión sin más que aplicar el corolario 2.15.

A continuación considera el caso $s \in (s_-, s_+)$. Quieres probar que hay dos soluciones periódicas geométricamente diferentes y también que al menos una de ellas es no asintóticamente estable. Como en el caso anterior, puedes suponer que todas las soluciones periódicas son aisladas pues en caso contrario el resultado sería cierto trivialmente. Necesito que veas previamente dos resultados.

ASERTO 1. Si consideras una solución $u \in \mathfrak{M}_T$ de (3.2) entonces

$$\gamma_{\mathcal{F}}(u) = \gamma_{\mathcal{F}}(u + 2\pi).$$

ASERTO 2. Puedes encontrar $u_1, u_2 \in \mathfrak{M}_T$ soluciones de (3.2) y tales que

$$\gamma_{\mathcal{F}}(u_1) \neq \gamma_{\mathcal{F}}(u_2).$$

Una vez aceptes estas dos afirmaciones la demostración del teorema se completa fácilmente. Es claro que las soluciones u_1 y u_2 son geométricamente diferentes y

al menos una de ellas debe tener índice diferente de uno, por ejemplo, $\gamma_{\mathcal{F}}(u_1)$. De nuevo por el corolario 2.15, puedes decir que u_1 es no asintóticamente estable.

Antes de probar los asertos necesito volver al marco abstracto que introduce en los ejemplos 2.6 y 2.7. Como puedes ver en tales ejemplos, el número $\lambda > 0$ en la definición de la forma bilineal $a(u, v)$ fue arbitrario. Esto te permite elegir $\lambda = \nu$. El principio del máximo establecido en el capítulo 1 implica que el operador lineal \mathcal{G}_T del lema 2.5 es fuertemente positivo. Te recuerdo el sentido de esta consecuencia: si tomas una función $p \in C([0, T], H)$ no trivial tal que

$$p(t, x) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}$$

para cada $t \in [0, T]$ entonces $w = \mathcal{G}_T p$ satisface

$$w(t, x) > 0 \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

También sabes, por el mismo lema, que $\mathcal{G}_T : C([0, T], H) \rightarrow \mathfrak{M}_T$ es un operador continuo. Denota por $\|\mathcal{G}_T\|$ su norma.

Por otra parte, aquí puedes hacer más precisa la definición de \mathcal{F}_T . Si consideras $u \in \mathfrak{M}_T$, la imagen $w = \mathcal{F}_T(u)$ es la solución en \mathfrak{M}_T de

$$w_{tt} - w_{xx} + cw_t + \nu w = F(t, x, u(t, x)), \quad (3.11)$$

donde

$$F(t, x, u) := s - \Phi(t, x, u) + \nu u.$$

Prueba del aserto 1. Observa que \mathcal{F}_T conmuta con el operador de traslación

$$\mathcal{T} : \mathfrak{M}_T \rightarrow \mathfrak{M}_T, \quad u \mapsto u + 2\pi.$$

El Teorema de conmutatividad para el grado de Leray-Schauder y la identidad $\mathcal{F}_T = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{F}_T\mathcal{T}$ te permiten acabar la prueba.

Prueba del aserto 2. Elige tres funciones u_1 , u_- y u_+ en \mathfrak{M}_T tales que u_1 es una solución de (3.2) y u_{\pm} son soluciones de

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \Phi(t, x, u) = s_{\pm}.$$

Si sumas y restas múltiplos de 2π , también puedes suponer que estas funciones satisfacen las desigualdades

$$u_- < u_1 - 2\pi < u_1 + 2\pi < u_+.$$

Define el conjunto

$$\Omega_T = \{u \in \mathfrak{M}_T / u_-(t, x) < u(t, x) < u_+(t, x), \quad \forall (t, x), \quad \|u\|_{\mathfrak{M}_T} < R\}$$

donde R es cualquier número satisfaciendo

$$R > \|\mathcal{G}_T\| M \sqrt{2\pi}$$

y

$$M := \max\{|F(t, x, u)| / (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad u_-(t, x) \leq u \leq u_+(t, x)\}.$$

El conjunto Ω_T tiene la siguiente *propiedad P*:

“Si tomas $u \in \mathfrak{M}_T$ tal que $u_- \leq u \leq u_+$ entonces $w = \mathcal{F}_T u$ pertenece a Ω_T .”

Para probar esta propiedad primero tienes que comprobar la desigualdad $w < u_+$. Para la desigualdad $w > u_-$ el razonamiento es similar. La diferencia $\vartheta = u_+ - w$ satisface

$$\vartheta_{tt} - \vartheta_{xx} + c\vartheta_t + \nu\vartheta = F(t, x, u_+) - F(t, x, u) + s_+ - s.$$

Por la condición (3.10) sabes que la función F es monótona no decreciente. Ello implica que el lado derecho de esta última ecuación es positivo. La positividad de \mathcal{G}_T te lleva a la conclusión deseada.

Para finalizar la demostración de la propiedad debes ver que $\|w\|_{\mathfrak{M}_T} < R$. Por la definición de \mathcal{F}_T tienes que

$$w = \mathcal{G}_T(F(\cdot, \cdot, u(\cdot))).$$

A partir de aquí obtienes las estimaciones

$$\|w\|_{\mathfrak{M}_T} \leq \|\mathcal{G}_T\| \|F(\cdot, \cdot, u(\cdot))\|_{C([0, T], H)} \leq \|\mathcal{G}_T\| M\sqrt{2\pi},$$

quedando probada la propiedad P .

Ya estamos en posición de verificar el segundo aserto. Por la propiedad P , puedes deducir que

$$\mathcal{F}_T(\bar{\Omega}_T) \subset \Omega_T.$$

Puesto que Ω_T es un subconjunto abierto, acotado y convexo de \mathfrak{M}_T sabes que

$$\deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T) = 1. \quad (3.12)$$

Por otro lado, el conjunto $\text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \bar{\Omega}_T$ es finito. En efecto, como supones que las soluciones son aisladas entonces el conjunto $B = \text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \bar{\Omega}_T$ es discreto. Por otro lado, B es acotado, pero \mathcal{F}_T es compacto, luego $\mathcal{F}_T(B)$ es relativamente compacto. Ahora, como \mathcal{F}_T es continuo tienes que B es cerrado, pero $B = \mathcal{F}_T(B)$ luego B es compacto. Por último, por ser B compacto y discreto puedes concluir que es finito. Todo esto te permite utilizar la aditividad del grado y asegurar que

$$\deg(I - \mathcal{F}_T, \Omega_T; \mathfrak{M}_T) = \sum_{u \in \text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T} \gamma_{\mathcal{F}}(u). \quad (3.13)$$

Como $\text{Fix}(\mathcal{F}_T) \cap \Omega_T$ tiene al menos tres elementos, a saber, u_1 , $u_1 + 2\pi$ y $u_1 - 2\pi$ pertenecen a él, es claro que las identidades (3.12) y (3.13) para el grado de $I - \mathcal{F}_T$ no son compatibles salvo que se cumpla el aserto 2. Fin de la prueba.

3.5. Otra forma de atacar el problema

Como indiqué en la introducción general, la primera idea de mi director de tesis era que intentara aplicar el método de Lyapunov-Schmidt global o método de la alternativa. En tal caso hubiera necesitado una hipótesis del tipo

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right| \leq M,$$

con M una constante apropiada. Observa que esto implica que la monotonía de Φ está limitada tanto en zonas de crecimiento como de decrecimiento, mientras que con la técnica de esta memoria no hay ninguna limitación en las zonas de decrecimiento.

Por otra parte, la constante ν parece que es mayor que el valor de M que se obtendría cuando c fuese grande y no está muy claro qué ocurriría para c pequeño.

Epílogo: ¿Y ahora qué?

Sí, ¿y ahora qué? ¿Qué es lo que hay previsto para el futuro? Afortunadamente creo que este trabajo sólo representa una pequeña parte de lo que se puede hacer. A continuación doy una serie de claves sobre líneas que han quedado establecidas.

1. Sólo he estudiado el principio del máximo en el caso uni-dimensional. Queda por ver qué ocurre en dimensiones superiores. La esperanza en este momento es que en dimensiones 2 y 3 seguirá habiendo un principio del máximo, pero no para dimensiones superiores. Para asegurar esto me baso en la relación existente con [49]. El trabajo he de realizarlo.

2. En el capítulo 1 he supuesto que el periodo es el mismo para el tiempo y el espacio. Esto ha sido simplemente por una cuestión de sencillez. De hecho el resultado que he obtenido sobre el principio del máximo lo puedes adaptar para el caso en que ambos periodos son distintos. Implícitamente esto está expuesto en [40].

Los problemas que quedan abiertos son: la determinación del valor óptimo de ν y el estudio de la regularidad para el caso inconmensurable. Para el primero me atrevo a conjeturar que $\nu = \frac{c^2}{4}$ cuando los periodos sean inconmensurables. Con respecto a la regularidad de las soluciones (tal y como la establecí en la proposición 1.9), la solución es continua cuando los periodos son conmensurables. En el caso inconmensurable no lo sé, pues, mientras que en el caso conmensurable las curvas características son cerradas en el toro, en el inconmensurable son densas. Esto hace que la función de Green tenga una “gran cantidad” de líneas de discontinuidad en este segundo caso.

3. La existencia del principio del máximo la he establecido para valores positivos de λ . Hay que estudiar qué ocurre para valores negativos. Evidentemente no hay una conservación de la positividad pero sí puede que halla un anti-principio del máximo, es decir, un principio de positividad para el operador $-\mathfrak{L}^{-1}$.

4. Si pudiera caracterizar el valor $\nu(c)$ como la constante óptima en alguna desigualdad integral ligada a \mathfrak{L} , esto proporcionaría un punto de vista totalmente diferente al propuesto en esta memoria y, por consiguiente, la posibilidad de tener nuevas propiedades. Relacionado con esta idea puede estar el trabajo hecho en [2].

5. Con respecto al capítulo 2, puede ser que halla una demostración alternativa del teorema de dualidad utilizando técnicas de linealización. Esto no es querer curarme en salud. Al contrario, si la hubiera, primero se debería empezar por el caso de ecuaciones ordinarias y no creo que el trabajo fuese mucho menor.

6. También queda abierto el problema de la estabilidad de soluciones periódicas. En esta memoria sólo he estudiado inestabilidad. Pienso que una vía a seguir será la de tener en cuenta ideas similares a las expuestas en [45].

Bibliografía

- [1] J.M. ALONSO, J. MAWHIN Y R. ORTEGA, Bounded solutions of second order semilinear evolution equations and applications to the telegraph equation, *J. Math. Pures Appl.* **78** (1999), 49–63.
- [2] M. ARIAS, J. CAMPOS Y J.P. GOSSEZ, On the antimaximum principle and the Fučík spectrum for the Neumann p -laplacian, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 217–226.
- [3] H. AMANN, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review* **18** (1976), 620–709.
- [4] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG Y S.R.S. VARADHAN, The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains, *Comm. Pure Appl. Math.* **XLVII** (1994), 47–92.
- [5] B. BIRNIR Y R. GRAUER, An explicit description of the global attractor of the damped and driven sine-Gordon equation, *Commun. Math. Phys.* **162** (1994), 539–590.
- [6] H. BRÉZIS, “Análisis funcional.” Alianza Ed., Madrid, 1984 (Traducción de “Analyse fonctionnelle,” Masson, París, 1983).
- [7] V.S. BURD, JU.S. KOLESOV Y M.A. KRASNOSELSKII, Investigation on the Green’s function for differential operators with almost periodic coefficients, *Math. USSR Izvestija*, **3** (1969), 1027–1054.
- [8] V.S. BURD, JU.S. KOLESOV Y M.A. KRASNOSELSKII, On the existence and constancy of sign of Green’s function of scalar equations of high order with almost periodic coefficients, *Math. USSR Izvestija*, **3** (1969), 1319–1334.
- [9] L. CESARI Y R. KANNAN, Periodic solutions of nonlinear wave equations with damping, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Ser. II, **XXXI** (1982), 421–432.
- [10] S.N. CHOW Y J.K. HALE, “Methods of bifurcation theory,” Springer-Verlag, Nueva York, 1982.
- [11] PH. CLÉMENT Y A. PELETIER, An anti-maximum principle for second-order elliptic operators, *J. Differential Equations* **34** (1979), 218–229.
- [12] R. COURANT Y D. HILBERT, “Methods of mathematics physics. Vol. II,” John Wiley, Nueva York, 1962.
- [13] K. DEIMLING, “Nonlinear functional analysis,” Springer-Verlag, Berlín, 1985.
- [14] J. DIEUDONNÉ, “Éléments d’analyse. Tome II,” Gauthier-Villars, París, 1974.
- [15] D.G. DE FIGUEIREDO Y E. MITIDIERI, Maximum principles for cooperative elliptic systems, *C. R. Acad. Sc. Paris* **310 Série I** (1990), 49–52.

- [16] S. FUČIK Y J. MAWHIN, Generalized periodic solutions of nonlinear telegraph equations, *Nonlinear Anal.* **2** (1978), 609–617.
- [17] R. GAINES Y J. MAWHIN, Coincidence degree and nonlinear differential equations, en “Lecture Notes in Mathematics,” Vol. **568**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [18] M. DE GUZMÁN, “Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control,” Ed. Alhambra, Madrid, 1975.
- [19] J. HALE, “Asymptotic behaviour of dissipative systems,” American Math. Soc., Providence, 1988.
- [20] J. HALE Y O. LOPES, Fixed point theorems and dissipative process, *J. Differential Equations* **13** (1973), 391–402.
- [21] M. HERVÉ, “Several complex variables. Local theory (2nd edition),” Oxford University Press, Nueva Delhi, 1987.
- [22] W.S. KIM, Double-periodic boundary value problem for non-linear dissipative hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **145** (1990), 1–16.
- [23] W.S. KIM, Multiple doubly periodic solutions of semilinear dissipative hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **197** (1996), 735–748.
- [24] M.A. KRASNOSELSKII, “Positive solutions of operator equations,” Noordhoff, Groningen, 1964.
- [25] M.A. KRASNOSELSKII, The operator of translation along the trajectories of differential equations, en “Trans. Math. Monographs,” Vol. **19**, American Math. Soc., Providence, 1968.
- [26] M.A. KRASNOSELSKII Y P.P. ZABREIKO, “Geometrical methods of nonlinear analysis,” Springer-Verlag, Berlín, 1984.
- [27] K. KREITH Y C.A. SWANSON, Kiguradze classes for characteristic initial value problems, *Comp. & Maths. with Appls.* **11** (1985), 239–247.
- [28] A. KULAKOV Y A. RUMIÁNTSEV, “Introducción a la física de los procesos no lineales,” Editorial Mir, Moscú, 1990.
- [29] Y. IMRY Y L.S. SCHULMAN, Qualitative theory of the nonlinear behaviour of coupled Josephson junctions, *J. Appl. Phys.* **49**(2) (1978), 749–758.
- [30] S. LEFSCHETZ, “Differential equations: geometric theory,” Dover, Nueva York, 1977.
- [31] E.H. LIEB Y M. LOSS, “Analysis,” American Math. Soc., Providence, 1996.
- [32] Z. LIU Y Z. XU, A new method of studying the dynamical behaviour of the sine-Gordon equation, *Physics Letters A* **204** (1995), 343–346.
- [33] N.G. LLOYD, “Degree theory,” Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [34] J. LÓPEZ-GÓMEZ Y M. MOLINA-MEYER, The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications, *Differential Integral Equations* **7** (1994), 383–398.
- [35] A. MARKUSHEVICH, “Teoría de las funciones analíticas. Tomo I,” Editorial Mir, Moscú, 1987.

- [36] A. MARKUSHEVICH, “Teoría de las funciones analíticas. Tomo II,” Editorial Mir, Moscú, 1987.
- [37] J. MAWHIN, Periodic solutions of nonlinear telegraph equations, *en* “Dynamical Systems” (Bednarek and Cesari, Eds.), págs. 193–210, Academic Press, Nueva York, 1977.
- [38] J. MAWHIN, Periodic oscillations of forced pendulum-like equation, *en* “Lecture Notes in Mathematics,” Vol. **964**, págs. 458–476, Springer-Verlag, Berlín, 1982.
- [39] J. MAWHIN, The forced pendulum: a paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems, *Expo. Math.* **6** (1988), 271–287.
- [40] J. MAWHIN, R. ORTEGA Y A.M. ROBLES-PÉREZ, A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equations and applications to nonlinear forcings, *J. Math. Anal. Appl.* Aceptado para su publicación.
- [41] N. MINORSKY, “Nonlinear oscillations,” Krieger, Boston, 1974.
- [42] K. NAKAJIMA, T. YAMASHITA Y Y. ONODERA, Mechanical analogue of active Josephson transmission line, *J. Appl. Phys.* **45**(7) (1974), 3141–3145.
- [43] R.D. NUSSBAUM, Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps, *Math. Ann.* **191** (1971), 181–195.
- [44] R.D. NUSSBAUM, The fixed point index for local condensing maps, *Ann. Mat. Pura Appl.* **89** (1971), 217–258.
- [45] R. ORTEGA, Some applications of the topological degree to stability theory, *en* “Topological methods in differential equations and inclusions” (A. Granas and M. Frigon, Eds.), págs. 377–409, Kluwer Academic, Dordrecht, 1995.
- [46] R. ORTEGA, Periodic solutions of a newtonian equation: stability by the third approximation, *J. Differential Equations* **128** (1996), 491–518.
- [47] R. ORTEGA Y A.M. ROBLES-PÉREZ, A maximum principle for periodic solutions of the telegraph equation, *J. Math. Anal. Appl.* **221** (1998), 625–651.
- [48] R. ORTEGA Y A.M. ROBLES-PÉREZ, A duality theorem for periodic solutions of a class of second order evolution equations, *J. Differential Equations*. Aceptado para su publicación.
- [49] I. PERAL-ALONSO, Some remarks on semilinear wave equations in \mathbb{R}^n , *en* “Contributions to nonlinear partial differential equations (Volume II),” (J.I. Díaz and P.L. Lions, Eds.), págs. 193–209, Pitman Research Notes in Mathematics Series **155**, Longman Scientific & Technical, Essex, 1987.
- [50] A.C. PETERSON, On the sign of Green’s functions, *J. Differential Equations* **21** (1976), 167–178.
- [51] M.H. PROTTER Y H.F. WEINBERGER, “Maximum principles in differential equations,” Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1967.
- [52] P.H. RABINOWITZ, Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **XX** (1967), 145–205.
- [53] A.M. ROBLES-PÉREZ, A maximum principle with applications to the forced sine-Gordon equation, *en* “Proceedings of the autumn school on nonlinear analysis and differential equations”. Aceptado para su publicación.

- [54] A.C. SCOTT, A nonlinear Klein-Gordon equation, *Amer. J. Phys.* **37** (1969), 52–61.
- [55] K.R. STROMBERG, “An introduction to classical real analysis,” Wadsworth, Inc., Belmont, 1981.
- [56] R. TEMAM, “Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics,” Springer-Verlag, Nueva York, 1988.
- [57] O. VEJVODA, “Partial differential equations: time-periodic solutions,” Nijhoff, Praga, 1982.
- [58] V.S. VLADIMIROV, “Generalized functions in mathematical physics,” Mir Publishers, Moscú, 1979.
- [59] G.N. WATSON, “A treatise on the theory of Bessel functions,” Cambridge University Press, Nueva York, 1995.

