

## Tema 11. Introducción a los métodos numéricos para problemas de valores iniciales

### 1. Introducción

En esta tema veremos una (muy) breve introducción a los métodos numéricos de aproximación de soluciones de problemas de valores iniciales. La razón de este tema viene de la imposibilidad, en muchas ocasiones, de conocer una expresión explícita de la solución de un problema dado,

- bien porque no haya un método que nos permita resolver la ecuación diferencial correspondiente,
- bien porque podamos resolver la ecuación pero no obtengamos una expresión de la solución en términos de funciones elementales.

**Definición 1.** Un problema de valores iniciales viene dado por

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $f(t, x)$  es una función continua definida en un dominio  $D$ , subconjunto abierto y arco-conexo de  $\mathbb{R}^2$ , y  $(t_0, x_0)$  es un punto de  $D$ .

**Definición 2.** Una solución de (1) es una función  $x(t)$ , definida en un intervalo abierto  $I$  (que contiene a  $t_0$ ), tal que

- $x \in C^1(I)$ ,
- $(t, x(t)) \in D, \forall t \in I$ ,
- $x(t_0) = x_0$ ,
- $x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in I$ .

La idea base en los métodos que veremos es, partiendo de la condición inicial  $(t_0, x_0)$ , aproximar el valor  $x(t_1)$  de la solución para  $t_1$  cercano a  $t_0$ . A continuación, aproximar  $x(t_2)$  para  $t_2$  cercano a  $t_1$  y así sucesivamente. En otras palabras, si  $x(t)$  es la solución de (1) definida en el intervalo  $[a, b] \subset I$  (con  $a = x_0$ ), nuestro objetivo es calcular una sucesión de valores  $\{x_k\}$  de forma que  $x(t_k) \approx x_k$  para  $t_k = x_0 + kh$ , donde  $k = 0, 1, \dots, n$  y  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Al parámetro  $h$  se le denomina el *paso* y, aunque puede ser variable, en los métodos que vamos a ver siempre será constante. En teoría, cuando  $h \rightarrow 0$  (esto es, cuando  $n \rightarrow \infty$ ) obtenemos la solución exacta de (1). En la práctica esto no ocurrirá debido, entre otras razones, a los errores de redondeo que introducen los cálculos con el ordenador.

Para introducir los métodos de aproximación, podemos recurrir a la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales, es decir, a los llamados campos de direcciones. Sin embargo, hemos preferido emplear la expresión integral del problema de valores iniciales (1), es decir, la expresión

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (2)$$

que es la resultante de integrar en ambos términos de la ecuación diferencial en el intervalo  $[t_0, t]$  y ajustar la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ . Los distintos métodos se obtendrán aplicando adecuadas fórmulas de cuadratura numérica a la integral que aparece en (2).

## 2. Método de Euler

Es claro que, con la notación de la sección anterior, el valor de la solución (exacta) en el punto  $t_1$  viene dado por

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds.$$

Aplicando la fórmula del rectángulo a izquierdas, tenemos que

$$x(t_1) = x(t_0) + (t_1 - t_0)f(t_0, x(t_0)).$$

Tomando  $x_0 = x(t_0)$ ,  $x_1 = x(t_1)$  y  $h = t_1 - t_0$ , queda

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0).$$

Haciendo lo mismo para los sucesivos puntos, tenemos la recurrencia que define al método de Euler. A saber,

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Nota 3.** Se dice que el método de Euler es un método de un paso, pues cada término de la sucesión  $\{x_k\}$  se calcula a partir del anterior.

Además, se dice que Euler es un método explícito de un paso, pues cada término se calcula directamente a partir del anterior. Se entenderá el significado de esta frase cuando se vea un ejemplo de método implícito.

**Ejemplo 4.** Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Claramente la solución es  $x(t) = e^t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Apliquemos el método de Euler para aproximar  $x(0.5)$  tomando  $h = 0.1$  (obsérvese que  $f(t, x) = x$ ):

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x(0.1) \approx x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$
- $x(0.2) \approx x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1) = 1.1 + 0.1f(0.1, 1.1) = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1 = 1.21$
- $x(0.3) \approx x_3 = x_2 + hf(t_2, x_2) = 1.21 + 0.1f(0.2, 1.21) = 1.21 + 0.1 \cdot 1.21 = 1.331$
- $x(0.4) \approx x_4 = x_3 + hf(t_3, x_3) = 1.331 + 0.1f(0.3, 1.331) = 1.331 + 0.1 \cdot 1.331 = 1.4641$
- $x(0.5) \approx x_5 = x_4 + hf(t_4, x_4) = 1.4641 + 0.1f(0.4, 1.4641) = 1.4641 + 0.1 \cdot 1.4641 = 1.61051$

Teniendo en cuenta que  $e^{0.1} = 1.10517\dots$ ,  $e^{0.2} = 1.22140\dots$ ,  $e^{0.3} = 1.34985\dots$ ,  $e^{0.4} = 1.49182\dots$  y  $e^{0.5} = 1.64872\dots$ , vemos que los valores aproximados se van alejando de los exactos. La razón es la acumulación de errores en las sucesivas aproximaciones que, en este ocasión, se deben al método empleado.

Como es habitual en el cálculo numérico, uno de los objetivos al trabajar es conseguir controlar los errores que se deben al método, además de los que se derivan de los posibles redondeos resultantes de operar con el ordenador.

## 3. Método de Heun (o de Euler mejorado)

Partimos nuevamente de la expresión

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds.$$

Si aplicamos ahora la fórmula del trapecio a la integral, tenemos que

$$x(t_1) = x(t_0) + \frac{t_1 - t_0}{2} [f(t_0, x(t_0)) + f(t_1, x(t_1))].$$

O sea,

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1)].$$

Haciendo lo mismo en los puntos sucesivos, la recurrencia asociada al método de Heun es

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} [f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Nota 5.** Se dice que el método de Heun es un método implícito. Esto significa que, en cada paso,  $x_{k+1}$  está definido en función de sí mismo. Por tanto, salvo que  $f$  sea lineal en  $x$ , necesitaremos resolver una ecuación no lineal.

Para solventar este inconveniente una posibilidad es calcular un valor previo  $x_{k+1}^*$  y, a partir de él, determina  $x_{k+1}$ . Tenemos así que Heun es un ejemplo de los llamados métodos multi-paso predictor-corrector.

A partir del comentario anterior, el método de Heun viene dado por la recurrencia

$$\begin{cases} \text{Predicción: } x_{k+1}^* = x_k + hf(t_k, x_k), \\ \text{Corrección: } x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} [f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1}^*)], \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . En este método, las predicciones se calculan aplicando el método de Euler.

**Ejemplo 6.** De nuevo consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

y aplicamos el método de Heun para aproximar  $x(0.5)$  tomando  $h = 0.1$ :

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x_1^* = x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$   
 $x(0.1) \approx x_1 = x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, x_1^*)] = 1 + 0.05 \cdot [1 + 1.1] = 1.105$
- $x_2^* = x_1 + hf(t_1, x_1) = 1.105 + 0.1f(0.1, 1.105) = 1.105 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2155$   
 $x(0.2) \approx x_2 = x_1 + \frac{h}{2} [f(t_1, x_1) + f(t_2, x_2^*)] = 1.105 + 0.05 \cdot [1.105 + 1.2155] = 1.221025$
- $x_3^* = 1.3431275$      $x(0.3) \approx x_3 = 1.349232625$
- $x_4^* = 1.4841558875$ ,     $x(0.4) \approx x_4 = 1.490902050625$
- $x_5^* = 1.6399922556875$ ,     $x(0.5) \approx x_5 = 1.64744676594062$

Se observa que las aproximaciones son mejores que con el método de Euler.

## 4. Método de Euler modificado

Este método se obtiene de aplicar a la expresión

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds$$

la fórmula del rectángulo en el punto medio, quedando

$$x(t_1) = x(t_0) + (t_1 - t_0)f\left(t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}, x\left(t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}\right)\right).$$

O sea, siendo  $x_{1/2} = x\left(t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}\right)$ ,

$$x_1 = x_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_{1/2}\right).$$

En general, el método de Euler modificado viene dado por la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+1/2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Nota 7.** Este método no es implícito, pues no viene dado  $x_{k+1}$  en función de sí mismo, pero tampoco es explícito, pues necesitamos determinar previamente  $x_{k+1/2}$ . Como en el caso de Heun, usaremos Euler para hallar el valor previo. Por tanto, se puede considerar que Euler modificado es un método de dos pasos.

Así pues, el método de Euler modificado viene dado por la recurrencia

$$\begin{cases} \text{Predicción: } x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2}f(t_k, x_k), \\ \text{Corrección: } x_{k+1} = x_k + hf(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+1/2}), \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Ejemplo 8.** Aplicando Euler modificado al problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

para aproximar  $x(0.5)$  con  $h = 0.1$ , obtenemos:

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0) = 1 + 0.05f(0, 1) = 1 + 0.05 \cdot 1 = 1.05$   
 $x(0.1) \approx x_1 = x_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, x_{1/2}) = 1 + 0.1 \cdot 1.05 = 1.105$
- $x_{3/2} = x_1 + \frac{h}{2}f(t_1, x_1) = 1.105 + 0.05f(0.1, 1.105) = 1.105 + 0.05 \cdot 1.105 = 1.16025$   
 $x(0.2) \approx x_2 = x_1 + hf(t_1 + \frac{h}{2}, x_{3/2}) = 1.105 + 0.1 \cdot 1.16025 = 1.221025$
- $x_{5/2} = 1.28207625$      $x(0.3) \approx x_3 = 1.349232625$
- $x_{7/2} = 1.41669425625$ ,     $x(0.4) \approx x_4 = 1.490902050625$
- $x_{9/2} = 1.56544715315625$ ,     $x(0.5) \approx x_5 = 1.64744676594062$

En este problema las aproximaciones, en 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5, coinciden con las del método de Heun. Esto no es cierto en general.

## 5. Método de Runge-Kutta (de orden 4)

Este es, quizás, el método más usual en la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales. Se puede ver como resultado de la aplicación de la regla de Simpson como fórmula de cuadratura numérica. Para determinar cada elemento de la sucesión  $\{x_k\}$  se realizan cuatro estimaciones previas, de acuerdo con el siguiente esquema

- $K_1 = f(t_k, x_k)$ ,
- $K_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_1)$ ,
- $K_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}K_2)$ ,
- $K_4 = f(t_k + h, x_k + hK_3)$ ,

y, a continuación, se define

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

**Nota 9.** Aunque necesitamos cuatro cálculos previos al cálculo de la aproximación en cada punto, el método de Runge-Kutta es un método explícito de un paso.

**Ejemplo 10.** Apliquemos el método de Runge-Kutta al problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

para aproximar  $x(0.5)$  con  $h = 0.1$ . Obtenemos la siguiente tabla,

- $x(0) = x_0 = 1$
- $x(0.1) \approx x_1 = 1.1051708333333333$  con
  - $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 1.05$ ,  $K_3 = 1.0525$ ,  $K_4 = 1.10525$ .

- $x(0.2) \approx x_2 = 1.221402570850695$  con
  - $K_1 = 1.1051708333333333$ ,  $K_2 = 1.160429375$ ,  $K_3 = 1.163192302083334$ ,  
 $K_4 = 1.221490063541667$ .
- $x(0.3) \approx x_3 = 1.349858497062538$  con
  - $K_1 = 1.221402570850695$ ,  $K_2 = 1.282472699393229$ ,  $K_3 = 1.285526205820356$ ,  
 $K_4 = 1.349955191432730$ .
- $x(0.4) \approx x_4 = 1.491824240080686$  con
  - $K_1 = 1.349858497062538$ ,  $K_2 = 1.417351421915665$ ,  $K_3 = 1.420726068158321$ ,  
 $K_4 = 1.491931103878370$ .
- $x(0.5) \approx x_5 = 1.64872063859684$  con
  - $K_1 = 1.491824240080686$ ,  $K_2 = 1.566415452084720$ ,  $K_3 = 1.570145012684922$ ,  
 $K_4 = 1.648838741349178$ .

A la vista de este ejemplo, es claro que con este método es de esperar que, en general, se obtendrán las mejores aproximaciones a la solución exacta.

## 6. Un método explícito de dos pasos

Para obtener este método vamos a partir de la ecuación diferencial de (1). Si aproximamos la derivada mediante la fórmula de derivación numérica del punto medio, tenemos que, para un punto  $t_k$ ,

$$x'(t_k) = f(t_k, x(t_k)) \Rightarrow \frac{x(t_{k+1}) - x(t_{k-1}))}{t_{k+1} - t_{k-1}} \approx f(t_k, x(t_k)).$$

Considerando  $h = t_{k+1} - t_k$  constante y la notación empleada en las secciones anteriores,

$$x_{k+1} = x_{k-1} + 2hf(t_k, x_k), \quad k = 1, \dots, n-1$$

Puesto que es un método de dos pasos, para el cálculo de  $x_1$  haremos uso de un método de un paso (por ejemplo, Euler).

## 7. Algunas cuestiones teóricas

Cuando se aplica un método, con paso  $h$ , se deben considerar los siguientes errores.

**Definición 11.** El *error global* en el punto  $t_{k+1}$  es la cantidad  $e_{k+1}(h) = |x_{k+1} - x(t_{k+1})|$ , donde

- $x_{k+1}$  es el valor aproximado calculado, por el método correspondiente, en el punto  $t_{k+1}$ ;
- $x(t_{k+1})$  es el valor correspondiente para la solución exacta del problema de valores iniciales con  $x(t_0) = x_0$ .

**Definición 12.** El *error máximo global* es el valor

$$E(h) = \max_k \{e_k(h)\}.$$

**Definición 13.** El *error local* en el punto  $t_{k+1}$  es igual a la cantidad  $\varepsilon_{k+1}(h)$  resultante de tomar el valor absoluto de la diferencia entre

- el valor aproximado  $x_{k+1}$  calculado, por el método correspondiente, en el punto  $t_{k+1}$
- y el valor, en el punto  $t_{k+1}$ , de la solución exacta de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial  $x(t_k) = x_n$ .

**Nota 14.** En la práctica, el error local es la suma de

- el *error local de truncamiento* (o *error de discretización*)  $\varepsilon_{1,k}(h)$  debido a la aproximaciones realizadas para definir el método;

- el *error local de redondeo*  $\varepsilon_{2,k}(h)$  debido a los redondeos de la representación en punto flotante (por parte del ordenador).

**Teorema 15.** Si los errores locales  $\varepsilon_k(h)$  están acotados por un valor  $\varepsilon(h)$ , entonces se satisface que

$$e_k(h) \leq C \frac{\varepsilon}{h},$$

para una cierta constante  $C$ .

Si suponemos que los cálculos se realizan de forma exacta, entonces  $\varepsilon_{2,k}(h)$  es siempre nulo, es decir,  $\varepsilon_k(h) = \varepsilon_{1,k}(h)$ . A partir de aquí se define el concepto de consistencia.

**Definición 16.** Se dice que un método es *consistente* si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \varepsilon_1(h) \right) = 0,$$

donde  $\varepsilon_1(h) = \max_k \{ \varepsilon_{1,k}(h) \}$ .

Hablando alegremente, que un método sea consistente significa que la aproximación considerada en su definición es “correcta” teóricamente. No debemos confundir la consistencia de un método con su convergencia, pues en este nuevo concepto intervienen los errores de redondeo.

**Definición 17.** Se dice que un método es *convergente* si  $\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$ .

**Definición 18.** Se dice que un método es *convergente* de orden  $r$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)}{h^r} = C,$$

donde  $C$  es una constante no nula.

Por otra parte, si sólo tenemos en cuenta los errores de redondeo, entonces surge el concepto de estabilidad.

**Definición 19.** Se dice que un método es *estable* cuando los errores de redondeo permanecen acotados. En caso contrario se dice que el método es inestable.

En términos más sencillos, un método es estable si pequeñas variaciones en la condición inicial producen pequeñas diferencias en la solución aproximada.

Para detectar un método inestable, una posible idea es comparar los resultados para distintos pasos y valores aproximados de la condición inicial. Cuando hay inestabilidad la diferencia de los resultados aumenta cuando se toman valores menores del paso.

## 8. Comparación de los métodos expuestos

- Los cinco métodos son consistentes y, en general, estables.
- Euler es de orden 1; Heun (Euler mejorado), Euler modificado y el explícito de dos pasos son de orden 2; Runge-Kutta es (como su nombre indica) de orden 4.
- Los métodos de un paso (Euler y Runge-Kutta) son bastantes exactos y fáciles de programar, pero
  - o son poco exactos, caso de Euler;
  - o necesitan evaluar varias veces la función  $f(t, x)$ , caso de Runge-Kutta.
- Los métodos de varios pasos se pueden programar para que precisen menos evaluaciones de la función  $f(t, x)$  que Runge-Kutta, lo cual hace que su implementación sea algo más complicada.
- Si  $f(t, x)$  es complicada, entonces los métodos multi-paso pueden ser más eficientes.

## Referencias

- [1] J. D. Lambert. “Computational methods in ordinary differential equations”. John Wiley & Sons, 1973.
- [2] D. G. Zill. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelado (Séptima edición)”. Thomson Learning, 2002.