“Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico”

Tema 8. Interpolación.

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

Ejemplo: idea asociada al método de interpolación

- De una tabla de la distribución normal tipificada $N(0,1)$ tenemos los valores

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70450

- ¿Cuál es el valor de dicha normal para $z = 0.513$?
- Quizás la opción más simple sea considerar la recta $y(x) = ax + b$ que pasa por los puntos $(0.51, 0.69497)$, $(0.52, 0.69847)$ y tomar $y(0.513)$ como el valor buscado.
- Otra opción, algo más complicada, sería buscar una función simple $f(x)$, que satisfaga los cinco valores dados, y tomar $f(0.513)$ como el valor buscado.

Interpolación de datos

- Consideremos una serie de datos obtenidos a partir de un experimento, a partir de una cierta función (no conocida completamente o difícil de evaluar), etc.
- Básicamente, el método de interpolación consiste en construir una función “simple” que satisfaga exactamente los datos considerados.
- Una vez construida la función interpoladora, la consideraremos como la función “real” asociada al experimento, que es justamente la función que desconocíamos, etc.

8.2. Problema general de interpolación de datos lagrangianos

- Sean $n+1$ datos lagrangianos, esto es, $n+1$ datos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
- El problema general de interpolación consiste en hallar una función (interpoladora) $f(x)$ tal que $f(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$.

- Cuando buscamos una función interpoladora, es deseable que cumpla una serie de características como
  - ser fácil de hallar;
  - ser fácil de evaluar;
  - ser "suave" (es decir, suficientemente derivable), etc.

Tipos de interpolación

- Polinomial: se buscan polinomios (el caso más simple y usual).
- Trigonométrica: se buscan senos y cosenos (caso de datos oscilantes y/o periódicos).
- Por splines: se buscan funciones polinómicas a trozos (cuando hay "muchos" nodos).

Problema de interpolación polinomial para datos lagrangianos

- Sean $n+1$ datos lagrangianos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$.
- Queremos hallar un polinomio $p(x)$, de grado menor o igual que n, tal que $p(x_i)=y_i$, $0\leq i\leq n$.

Resultado

- Sean $n+1$ datos lagrangianos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$.
- Existe un único polinomio $p(x)$, de grado menor o igual que n, tal que $p(x_i)=y_i$, $0\leq i\leq n$.

- La demostración de este resultado es simple. Además, es de tipo constructivo, esto es, proporciona la solución del problema.
- En efecto, sea $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ un polinomio cualquiera que debemos determinar.
- Al imponer que $p(x)$ pase por los $n+1$ datos, obtenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas.
- El determinante asociado a la matriz de coeficientes del sistema anterior es de un tipo muy especial: es un determinante de Vandermonde (para los nodos $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$).
- Se sabe que un Vandermonde es no nulo si, y sólo si, los nodos son distintos dos a dos (nuestro caso).
- Concluimos que el sistema tiene solución única y, por tanto, existe un único polinomio $p(x)$ solución del problema de interpolación propuesto.

8.3.1. Cálculo directo: método de los coeficientes indeterminados

- Aplicar directamente la demostración que acabamos de ver.

- El sistema que debemos resolver es el siguiente.

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_n x_0^n & + & a_{n-1} x_0^{n-1} & + & \dots & + & a_1 x_0 & + & a_0 & = & y_0 \\ a_n x_1^n & + & a_{n-1} x_1^{n-1} & + & \dots & + & a_1 x_1 & + & a_0 & = & y_1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_n x_n^n & + & a_{n-1} x_n^{n-1} & + & \dots & + & a_1 x_n & + & a_0 & = & y_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ejemplo

- Calculemos $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tal que interpole los datos $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,6)$.
- El sistema que debemos resolver es

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 & = & 1 \\ 9a_2 & + & 3a_1 & + & a_0 & = & 2 \\ 16a_2 & + & 4a_1 & + & a_0 & = & 6 \end{array}\right\}$$

- El determinante de la matriz de coeficientes es igual a $(2-3)(2-4)(3-4) = -2 \neq 0$.
- La solución del sistema es $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_1 = -\frac{13}{2}$, $a_0 = 8$.
- El polinomio buscado es $p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8$.

8.3.2. Idea de Lagrange

- Construir una base adecuada del espacio vectorial $\mathbb{P}_n$ formado por los polinomios de grado menor o igual que n (con la suma y el producto por escalares usuales).

- En concreto la base (de Lagrange) es $\{\ell_0(x), \ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)\}$, donde

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}, \quad 0 \le i \le n. \tag{2}$$

- Cada $\ell_i(x)$ es un polinomio de grado n que vale 1 en x_i y 0 en los demás nodos.
- El único polinomio $p(x)$ que interpola los datos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ es

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \ldots + y_n\ell_n(x).$$

Ejemplo

- Para los datos $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,6)$, la base de Lagrange es

$$\ell_0(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)}, \quad \ell_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)}, \quad \ell_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)}.$$

- El polinomio interpolador es

$$p(x) = 1\cdot\frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} + 2\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} + 6\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)}.$$

- Simplificando, $p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8$. (En general, no es buena idea simplificar.)

8.3.3. Idea de Newton

- Construir recursivamente el polinomio interpolador.
- Es decir, construir el polinomio conforme vamos obteniendo los datos.

Ejemplo

- Sean los datos $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,6)$. Construimos el polinomio interpolador en tres pasos.
  1) Polinomio (de grado 0) que interpola el dato $(2,1)$: $p_0(x) = 1$.
  2) Polinomio (de grado menor o igual que 1) que interpola los datos $(2,1)$, $(3,2)$:

$$p_1(x) = \alpha_1(x-2) + p_0(x) \Rightarrow p_1(x) = \alpha_1(x-2) + 1 \Rightarrow p_1(3) = \alpha_1 \cdot 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{2-1}{1} = 1 \Rightarrow p_1(x) = 1 \cdot (x-2) + 1 \Rightarrow p_1(x) = x - 1.$$

  3) Polinomio (de grado menor o igual que 2) que interpola los datos $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,6)$:

$$p_2(x) = \alpha_2(x-2)(x-3) + p_1(x) \Rightarrow p_2(x) = \alpha_2(x-2)(x-3) + x - 1$$

$$\Rightarrow p_2(4) = \alpha_2 \cdot 2 + 3 = 6 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2}(x-2)(x-3) + x - 1 \Rightarrow p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8.$$

Idea de Newton: esquema general

Resultado

- Hipótesis:
  - Sean $k+1$ datos lagrangianos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)\}$ (donde $k \geq 0$).
  - Sea $p_{k-1}(x) \in \mathbb{P}_{k-1}$ interpolador de los datos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_{k-1},y_{k-1})\}$.
- Tesis:
  - El polinomio $p_k(x) \in \mathbb{P}_k$ interpolador de los datos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)\}$ es

$$p_k(x) = \alpha_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) + p_{k-1}(x),$$

donde $\alpha_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$.

Consecuencia

- El polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_n$ que interpola los datos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ es

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \alpha_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

donde $\alpha_0 = y_0$; $\alpha_i = \frac{y_i - p_{i-1}(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})}$, $1 \leq i \leq n$.

- $\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$ es una base (de Newton) de $\mathbb{P}_n$.

8.3.4. Diferencias divididas

- Sería interesante, cuando seguimos la idea de Newton, poder calcular fácil y rápidamente los coeficientes α_i en el polinomio interpolador.

- Para simplificar la notación, consideraremos que los nodos vienen dados de la forma $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$ (es decir, están asociados a una función f).
- Sea

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

el polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_n$ que interpola los datos $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.

Definición

- Se llama *diferencia dividida de orden k* (*de f en los nodos* $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$) al coeficiente α_k.
- Denotaremos $\alpha_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $0 \le k \le n$.

- Con la notación establecida, el polinomio interpolador se escribe de la forma

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Resultado: propiedades de las diferencias divididas

- Hipótesis:
  - Sean $k+1$ datos lagrangianos $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_k, f(x_k))\}$ (donde $k \geq 0$).
  - Sean $f[x_i] = f(x_i),\ 0 \leq i \leq k,$ las diferencias divididas de orden cero.
- Tesis:
  - La diferencia dividida de orden k viene dada por la expresión

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

  - $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ no depende del orden es que se escriban sus argumentos.

Consecuencia: tabla de diferencias divididas

- Las diferencias divididas se calculan de acuerdo con la siguiente tabla.

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_n & f[x_n] & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \ldots & f[x_0, x_1, \ldots, x_n]
\end{array}$$

Ejemplos con tablas de diferencias divididas

1) Sean los datos $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,6)$.

- Construimos la tabla de diferencias divididas.

$$\begin{array}{llll} 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & \frac{2-1}{3-2}=1 & \\ 4 & 6 & \frac{6-2}{4-3}=4 & \frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2} \end{array}$$

- $p(x) = 1 + 1(x-2) + \frac{3}{2}(x-2)(x-3) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8.$

2) Sean los datos $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,6)$.

- Construimos la tabla de diferencias divididas.

$$\begin{array}{lllll} 2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & \frac{2-1}{3-2}=1 & & \\ 4 & 6 & \frac{6-2}{4-3}=4 & \frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2} & \\ 1 & 1 & \frac{1-6}{1-4}=\frac{5}{3} & \frac{\frac{5}{3}-4}{1-3}=\frac{7}{6} & \frac{\frac{7}{6}-\frac{3}{2}}{1-2}=\frac{1}{3} \end{array}$$

- $p(x) = 1 + 1(x-2) + \frac{3}{2}(x-2)(x-3) + \frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x.$

- Para resolver el segundo ejemplo ha bastado con añadir una fila a la tabla del primero.

8.3.5. Comparación de los métodos

- Coeficientes indeterminados
  - Hay que resolver un sistema para dar el polinomio interpolador (= bastantes cálculos).
  - Es fácil de evaluar el polinomio de interpolación (Algoritmo de Horner).
  - Si se añade o cambia algún dato, hay que resolver de nuevo el sistema.
- Lagrange
  - No se necesitan cálculos para dar el polinomio interpolador.
  - Si cambian las imágenes en los datos, la expresión del polinomio "varía poco".
  - Hacen falta muchos cálculos para evaluar el polinomio.
  - Es inestable: le afectan mínimos errores en los datos.
  - Si se añade algún dato, hay que calcular de nuevo la base.
  - A pesar de todo, es útil emplearla en cuestiones teóricas.
- Newton
  - Se necesitan algunos cálculos para dar el polinomio interpolador.
  - Es fácil de evaluar el polinomio de interpolación (Algoritmo de Horner).
  - Si cambia algún dato, no hay que calcular la tabla completa de nuevo.
  - Si se añade algún dato, sólo se debe añadir una fila a la tabla ya existente.
  - Observando la expresión del polinomio interpolador, al usar la base de Newton, cada término de la suma indica en cuánto hay que modificar un polinomio de cierto grado para obtener otro polinomio, de un grado más, que interpola un nuevo dato.

8.4. Interpolación polinomial para datos tipo Hermite

Datos tipo Hermite

- Los datos, en un problema de interpolación, son de tipo Hermite cuando, además de los valores de la función en los nodos, aparecen valores en las derivadas sucesivas.
- En particular, en el problema de interpolación de Hermite clásico se conoce el valor de la función y su derivada en todos los nodos.

Resultado

- Sean $n+1$ datos de tipo Hermite de forma que, si aparece la derivada j-ésima en un nodo, entonces todas las derivadas de orden inferior también aparecen.
- Existe un único polinomio $p(x)$, de grado menor o igual que n, que interpola los datos de Hermite dados.
- El problema de Hermite clásico, con $n+1$ nodos, es unisolvente en $\mathbb{P}_{2n+1}$.
  (Hay que tener en cuenta que por cada nodo hay dos datos: el valor de la función y el de la derivada. Por tanto, tenemos $2n+2$ datos.)

- En este caso, la demostración del resultado es más engorrosa que en el caso de datos lagrangianos pues, al tener que considerar derivadas sucesivas, se complica la notación.
- Pero la idea es la misma: se considera un polinomio del grado adecuado y se ajustan los datos de Hermite. Así se obtiene un sistema con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.
- Tras probar que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, la única solución del sistema es el conjunto de coeficientes del polinomio interpolador.

8.4.1. Diferencias divididas con argumentos repetidos

- Se puede generalizar la idea de Lagrange para datos de Hermite.
- Sin embargo, es mucho más simple generalizar la idea de Newton.
- Necesitaremos definir las diferencias divididas con argumentos repetidos.

- Empezamos dándole significado a la expresión $f[x_0, x_0]$.
- Para ello, consideramos los nodos $x_0, x_0 + h$, donde h es un número real no nulo.
- Sabemos que $f[x_0, x_0 + h] = \frac{f[x_0+h]-f[x_0]}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Tomando límites para $h \to 0$, si f es derivable, tenemos que $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$.
- Para el caso de tres nodos, si f es dos veces derivable, podemos hacer

$$f[x_0, x_0, x_0 + h] = \frac{f[x_0, x_0 + h] - f[x_0, x_0]}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h^2} \xrightarrow{h\to 0} \frac{f''(x_0)}{2},$$

  aplicando un par de veces L'Hôpital.
- Aplicando un argumento de inducción, se demuestra que (si f es k veces derivable)

$$f[\overbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}^{k+1 \text{ nodos}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Ejemplo: tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos

- Supongamos que nos piden interpolar los siguientes datos:

$$f(2)=1;\ f'(2)=3;\ f(3)=3;\ f'(3)=2;\ f(4)=6.$$

  - Construimos la tabla de diferencias divididas.

$$\begin{array}{llllll}
2 & 1 & & & & \\
2 & 1 & f'(2)=3 & & & \\
3 & 3 & \frac{3-1}{3-2}=2 & \frac{2-3}{3-2}=-1 & & \\
3 & 3 & f'(3)=2 & \frac{2-2}{3-2}=0 & \frac{0-(-1)}{3-2}=1 & \\
4 & 6 & \frac{6-3}{4-3}=3 & \frac{3-2}{4-3}=1 & \frac{1-0}{4-2}=\frac{1}{2} & \frac{\frac{1}{2}-1}{4-2}=\frac{-1}{4}
\end{array}$$

  - El polinomio interpolador es

$$p(x)=1+3(x-2)-(x-2)^2+(x-2)^2(x-3)-\frac{1}{4}(x-2)^2(x-3)^2.$$

- Un caso particular de interpolación polinomial con datos tipo Hermite es cuando tenemos los valores de la función, la primera derivada, la segunda derivada, y así sucesivamente hasta la n-ésima derivada, en un mismo nodo x_0.

- Por ejemplo, si tenemos $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, entonces la tabla de diferencias divididas es

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
x_0 & f(x_0) & f'(x_0) & & \\
x_0 & f(x_0) & f'(x_0) & \frac{f''(x_0)}{2} & \\
x_0 & f(x_0) & f'(x_0) & \frac{f''(x_0)}{2} & \frac{f'''(x_0)}{6}
\end{array}$$

- Por tanto, el polinomio interpolador es

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3,$$

  que es, justamente, el polinomio de Taylor de tercer grado, centrado el punto x_0, asociado a la función $f(x)$.

- Es por esto que, en este caso, hablamos de interpolación para datos de tipo Taylor.

Resultado

- Hipótesis:
  - Sea una función $f \in C^{n+1}([a,b])$.
  - Sea $p(x) \in \mathbb{P}_n$ el polinomio que interpola $n+1$ datos de la función $f(x)$.
    (Donde los datos pueden ser lagrangianos, de Hermite o de Taylor.)
  - Sea $x^* \in [a,b]$.
- Tesis: el error cometido al aproximar $f(x^*)$ por $p(x^*)$ viene dado por

$$f(x^*) - p(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x^* - x_k), \tag{3}$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son los nodos de interpolación y $\xi \in]a,b[$ es dependiente de x^*.

- Debemos observar que
  - si los datos son lagrangianos, entonces los nodos serán distintos entre sí en (3);
  - si los datos son Hermite o Taylor, entonces aparecerán nodos repetidos en (3).
- Por otra parte, como ξ no es fácil de determinar, se suele usar la acotación

$$\left|f(x^*) - p(x^*)\right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} \left|x^* - x_k\right|, \tag{4}$$

donde $M = \text{máx}_{x \in]a,b[} \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \right\}$.

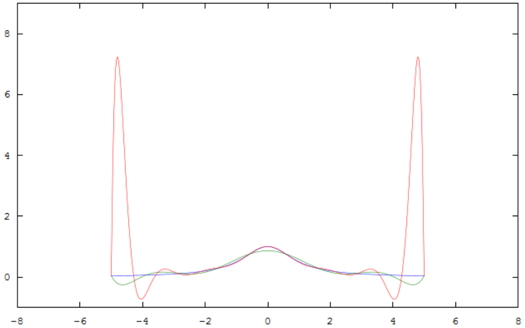
8.6.1. Problemas con la convergencia: ejemplo de Runge

- A partir de las expresiones (3) o (4), se puede sospechar que el error será mayor cuanto mayor sea el intervalo $[a, b]$.
- Por otra parte, es frecuente que los polinomios de interpolación ajusten bien en el centro del intervalo y mal en los extremos.
- Finalmente, aumentar el número de nodos no garantiza una mejor "aproximación" mediante polinomios de interpolación.

- Carl Runge demostró en 1900 que, cuando se interpola la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-5, 5]$ tomando nodos equiespaciados, entonces la sucesión de polinomios $p_n \in \mathbb{P}_n$ no converge a $f(x)$ si $|x| > 3.6$.
- Karl Weierstrass había probado en 1885 el siguiente resultado:

  "Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un polinomio $q(x)$ tal que $|f(x) - q(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a, b]$."

  (Con palabras: una función continua se puede aproximar, en un intervalo cerrado y acotado, tanto como deseemos por un polinomio.)
- Estos dos resultados no se contradicen: simplemente aconsejan no tomar nodos equiespaciados si queremos interpolar y aproximar bien una función.
- Como anécdota, decir que Weierstrass había dirigido la tesis de Runge en 1880.



- Azul: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- Verde: polinomio de grado 9 que interplola en los nodos

$$-5, -\frac{35}{9}, -\frac{25}{9}, -\frac{15}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{15}{9}, \frac{25}{9}, \frac{35}{9}, 5.$$

- Rojo: polinomio de grado 14 que interplola en los nodos

$$-5, -\frac{300}{7}, -\frac{25}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{15}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{20}{7}, \frac{25}{7}, \frac{30}{7}, 5.$$

8.7. Funciones polinómicas a trozos: splines

- Para paliar el problema de la interpolación cuando hay muchos nodos equiespaciados, recurriremos al uso de funciones polinómicas a trozos.
- Es usual denominar spline a este tipo de funciones.

- La idea de la interpolación por splines es "pegar" adecuadamente polinomios:
  - se usan polinomios de grado bajo para interpolar grupos pequeños de datos (interpolación a trozos),
  - imponiendo, si es necesario, condiciones adicionales (valores de la función o sus derivadas en los nodos ya existentes o en nodos auxiliares).
- En lo que sigue consideramos los datos $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$, donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Spline lineal

- Un spline lineal (de clase cero) es una función continua que está formada por trozos de rectas (un polinomio de primer grado por cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, $1 \leq i \leq n$).
- Para los datos dados, el spline lineal es la función $s(x)$ definida por

$$s(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \ \ \forall x \in [x_{i-1},x_i], \ \ 1 \leq i \leq n.$$

- No hay que añadir condiciones adicionales, pues el espacio vectorial de los splines lineales, sobre $n+1$ nodos, tiene dimensión igual a $n+1$.

Spline cuadrático

- Un spline cuadrático de clase uno es una función que está formada por trozos de parábolas (un polinomio de segundo grado por cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$) y que admite derivada primera continua.
- La dimensión del espacio vectorial de los splines cuadráticos de clase uno, sobre $n+1$ nodos, es igual a $n+2$. Por tanto, hay que añadir un dato adicional.
- El dato adicional es, usualmente, el valor concreto de la derivada en uno de los nodos o el valor de la función en un nodo auxiliar.

Spline cúbico de clase dos

- Un spline cúbico de clase dos es una función que está formada por trozos de cúbicas (un polinomio de tercero grado por cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$) y que admite derivada segunda continua.
- La dimensión del espacio vectorial de los splines cúbicos de clase dos, sobre $n+1$ nodos, es igual a $n+3$. Por tanto, hay que añadir dos datos adicionales.
- Los tipos más usuales, según las condiciones adicionales, de splines cúbicos de clase dos son
  - natural: las derivadas segundas en $x = a$ y $x = b$ son nulas;
  - periódico: tanto la derivada primera como la segunda toman los mismo valores en $x = a$ y $x = b$ (en este caso, al tomar los datos, se ha de cumplir que $y_0 = y_n$);
  - sujeto: los valores de las derivadas primeras en $x = a$ y $x = b$ están fijados.

- J.M. Sanz-Serna. “Diez lecciones de cálculo numérico (Segunda edición)”. Universidad de Valladolid (Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial), 2010.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.