“Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico”

Tema 6. Introducción al ~~análisis~~ cálculo numérico

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

6.1. Objetivo del cálculo numérico

- El análisis numérico trata del estudio (análisis) y diseño de métodos (algoritmos) para dar (de manera eficiente) respuestas "concretas" (aunque aproximadas) a problemas matemáticos que modelizan (en general) fenómenos reales.
- El cálculo numérico se puede considerar un primer paso hacia el análisis numérico (tal como ocurre con el cálculo matemático y el análisis matemático).

- Algoritmo: secuencia finita de operaciones aritméticas y lógicas que producen una solución aproximada (tanto como deseemos) a un problema expresado en términos matemáticos.
- Eficiencia: qué se necesita para conseguir un buen algoritmo.
  - Control de errores (convergencia, estabilidad, errores de medida, errores de discretización, errores de computación).
  - Coste operativo (número de operaciones necesarias para dar la respuesta). Relacionado con las necesidades de memoria y el tiempo de cálculo.

1) ¿Cuál es el valor de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.5}^{0.8} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx?$$

2) ¿Cuántas operaciones son necesarias para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 22?

- Usando la definición: $22 \cdot 22! - 1 \approx 2.472801601 \cdot 10^{22}$
- Usando los adjuntos: $2 \cdot 22! - 1 \approx 2.248001456 \cdot 10^{21}$

- Con un ordenador capaz de realizar 10^9 operaciones por segundo, tardaríamos 784120 años en hacer los cálculos por la primera vía y 71283 años por la segunda.

- Los errores que se pueden presentar a la hora de resolver un problema mediante un algoritmo son básicamente,
  - errores de entrada: debidos a las mediciones realizadas en el experimento planteado;
  - errores de almacenamiento/representación: debidos a cómo se guardan los números en el ordenador (Estándar "IEEE 754", `http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-2008`);
  - errores de cálculo: debidos al modo de realizar los cálculos en el algoritmo.
- Evidentemente, el análisis numérico no puede hacer nada por evitar los errores de entrada. Su campo de actuación son los errores de cálculo (principalmente) y los de almacenamiento.
- Para medir el error cometido podemos usar (x valor exacto, $\tilde{x}$ valor aproximado)
  - el error absoluto: $\Delta x = |x - \tilde{x}|$.
  - el error relativo: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right|$.
- Sea k el mayor número entero tal que $\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| < 5 \cdot 10^{-k}$. Entonces se dice que $\tilde{x}$ aproxima a x con k cifras significativas.
- Calcular el error absoluto o el relativo no es posible, pues ello significaría conocer el valor exacto. Por tanto se trabaja con cotas de estos errores.

Errores por almacenamiento y cálculo

1) La ecuación polinómica $x^2 - 121x + 1 = 0$ tiene como raíces

$$r_1 = \frac{121 + \sqrt{121^2 - 4}}{2} = \frac{2}{121 - \sqrt{121^2 - 4}} \approx 120.9917349726,$$

$$r_2 = \frac{121 - \sqrt{121^2 - 4}}{2} = \frac{2}{121 + \sqrt{121^2 - 4}} \approx 0.00826502736097.$$

- Operando con un ordenador que sólo guarde cuatro dígitos,

$$r_1 = \frac{121 + \sqrt{121^2 - 4}}{2} = \frac{121 + \sqrt{14640}}{2} = \frac{121 + 121}{2} = 121,$$

$$r_2 = \frac{121 - \sqrt{121^2 - 4}}{2} = \frac{121 - 121}{2} = \frac{0}{2} = 0,$$

y con la fórmula alternativa,

$$r_1 = \frac{2}{121 - \sqrt{121^2 - 4}} = \frac{2}{0} = \infty,$$

$$r_2 = \frac{2}{121 + \sqrt{121^2 - 4}} = \frac{2}{121 + 121} = \frac{2}{121 + 121} = 0.008264.$$

2) Es claro que $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

- Si $x = 231$, entonces $\sqrt{232} - \sqrt{231} = \frac{1}{\sqrt{232} + \sqrt{231}} \approx 0.032862058$.
- Operando con seis dígitos y redondeando:
  - $\sqrt{232} - \sqrt{231} = 15.2315 - 15.1987 = 0.0328$.
  - $\frac{1}{\sqrt{232} + \sqrt{231}} = \frac{1}{15.2315 + 15.1987} = \frac{1}{30.4302} = 0.0328621$.
- Operando con seis dígitos y truncando:
  - $\sqrt{232} - \sqrt{231} = 15.2315 - 15.1986 = 0.0329$.
  - $\frac{1}{\sqrt{232} + \sqrt{231}} = \frac{1}{15.2315 + 15.1986} = \frac{1}{30.4301} = 0.0328621$.
- Operando con tres dígitos y redondeando:
  - $\sqrt{232} - \sqrt{231} = 15.2 - 15.2 = 0.0$.
  - $\frac{1}{\sqrt{232} + \sqrt{231}} = \frac{1}{15.2 + 15.2} = \frac{1}{30.4} = 0.0329$.
- Operando con tres dígitos y truncando:
  - $\sqrt{232} - \sqrt{231} = 15.2 - 15.1 = 0.1$.
  - $\frac{1}{\sqrt{232} + \sqrt{231}} = \frac{1}{15.2 + 15.1} = \frac{1}{30.3} = 0.0330$.

Cifras significativas

- $\left|\frac{4.18-4.2}{4.18}\right| \approx 4.784 \cdot 10^{-3} < 5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$ 4.2 aproxima a 4.18 con 3 cifras significativas.
- $\left|\frac{4.17-4.2}{4.17}\right| \approx 7.194 \cdot 10^{-3} < 5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$ 4.2 aproxima a 4.17 con 2 cifras significativas.
- $\left|\frac{4-5}{5}\right| = 2 \cdot 10^{-1} < 5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow$ 4 aproxima a 5 con 1 cifra significativa.
- $\left|\frac{5-4}{4}\right| = 2.5 \cdot 10^{-1} < 5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow$ 5 aproxima a 4 con 1 cifra significativa.

Acotación de errores

- Euler demostró que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$
- Consideremos $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{k^2}$.
- Se puede comprobar que $\frac{1}{k+1} < S - S_k < \frac{1}{k}$.

- Estándar “IEEE 754”: `http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-2008`
- Sobre los errores que son consecuencia de la representación de los números en el ordenador, revisa los ejemplos vistos en las secciones 1.2, 1.3 y 1.4 del archivo Practica01-v1.pdf de prácticas de ordenador.

Condicionamiento

- Un problema está bien condicionado si pequeñas variaciones en los datos de entrada provocan pequeñas variaciones en la solución.
- Un problema está mal condicionado si las mismas condiciones provocan grandes variaciones en la solución: pequeños cambios en los datos iniciales dan lugar a grandes cambios en los resultados finales.

Estabilidad

- Un algoritmo es estable si los errores de representación y redondeo generados (tanto en la entrada de datos como en los cálculos intermedios) no provocan grandes variaciones en los resultados finales.
- Un algoritmo es inestable en caso contrario: los errores que se cometen en cada etapa del algoritmo van aumentando de forma progresiva y el resultado final pierde exactitud en un alto grado.

- Revisa de nuevo las secciones 1.3 y 1.4 del archivo Practica01-v1.pdf.

Sistema mal condicionado

- $$\left.\begin{array}{r} 7x+12y=19 \\ 4x+7y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}\right.$$
- $$\left.\begin{array}{r} 7.005x+12.05y=19 \\ 4.04x+6.95y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{2000}{11}\approx -181.818182 \\ y=\frac{1180}{11}\approx 107.272727 \end{array}\right.$$
- $$\left.\begin{array}{r} 7.01x+12.045y=19 \\ 4.045x+6.95y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{17800}{101}\approx 176.237624 \\ y=-\frac{10200}{101}\approx -100.990099 \end{array}\right.$$
- $$\left.\begin{array}{r} 7.01x+12.045y=19.05 \\ 4.045x+6.95y=10.95 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{20190}{101}\approx -199.900990 \\ y=\frac{11910}{101}\approx 117.920792 \end{array}\right.$$

Algoritmos inestables y estables

- Vamos a calcular la raíz cuadrada de 5 con tres métodos iterativos diferentes. Su valor (aproximado) es 2.236067977.
- $x_{n+1} = \frac{5-2x_n}{x_n-2}$
  - $x_0 = 2.236$;
  - $x_1 = 2.237288136$; $x_2 = 2.214285711$; $x_3 = 2.666666743$; $x_4 = -0.500000171$; $x_5 = -2.399999973$; $x_6 = -2.227272729$; $x_7 = -2.236559139$; $x_8 = -2.236040609$.
- $x_{n+1} = \frac{5+2x_n}{x_n+2}$
  - $x_0 = 2$;
  - $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.235294117$; $x_3 = 2.236111111$; $x_4 = 2.236065573$; $x_5 = 2.236068111$; $x_6 = 2.236067970$; $x_7 = 2.236067978$.
- $x_{n+1} = \frac{x_n^2+5}{2x_n}$
  - $x_0 = 2$;
  - $x_1 = 2.25$; $x_2 = 2.236111111$; $x_3 = 2.236067978$.

- Misiles Patriot
  - http://en.wikipedia.org/wiki/MIM-104_Patriot
  - http://qaustral.com/sitio/fallas-en-el-software-parte-ix
- Cohete Ariane 5
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Ariane_5_Flight_501
  - http://www.historiasdelaciencia.com/?p=249

Referencias

- J.M. Sanz-Serna. “Diez lecciones de cálculo numérico (Segunda edición)”. Universidad de Valladolid (Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial), 2010.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.