*“Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico”*

# *Tema 5. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*

*(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)*

## *Definición*

- *Las ecuaciones en derivadas parciales (e.d.p.) son expresiones de la forma*

$$F\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

*donde*

- $F$ *es una función definida en subconjunto abierto y arco-conexo de* $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$;
- $x_1, x_2 \ldots, x_n$ *son las variables independientes;*
- $u = u(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ *es la incógnita (variable dependiente);*
- $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$ *son derivadas parciales de* $u$;
- $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Ejemplos.
  1) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (e.d.p. de primer orden).
  2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (e.d.p. de segundo orden).
  3) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{sen}(xy)$ (e.d.p. de segundo orden).

# *Concepto de solución*

## *Definición*

- *Una solución de* (1) *será una función* $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que*
  - $u \in C^m(D)$ *(siendo D un subconjunto abierto y arco-conexo de* $\mathbb{R}^n$*);*
  - $\left(x_1, x_2 \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right)$ *pertenece al dominio de F para cualquier* $(x_1, x_2 \ldots, x_n) \in D$*;*
  - *al "sustituir todo" se satisface* (1)*.*

- Ejemplos.
  *1)* Si $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, entonces $u(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$ es solución de $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
  *2)* Si $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$, entonces $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$ es solución de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.
  *3)* La ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ sólo admite como soluciones a las funciones constantes.
  *4)* La ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones (reales).

- Podemos ver que las soluciones de las e.d.p.'s dependen de funciones. Recordemos que las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias dependen de parámetros.

### *Definición*

- *Diremos que una e.d.p. es lineal si la función F que la determina es lineal en u y todas sus derivadas.*

- Ejemplos.
  1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u - \operatorname{sen}(x) + xy = 0$ es lineal de segundo orden.
  2) $y\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0$ no es lineal.

- Una familia especialmente importante son las e.d.p's lineales de segundo orden.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y),$$

  donde $A, B, C, a, b, c, f \in C(\Omega)$, siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y arco-conexo.
  Estas ecuaciones se clasifican en
  1) Hiperbólicas: $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ en $\Omega$.
  2) Parabólicas: $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ en $\Omega$.
  3) Elípticas: $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ en $\Omega$.

*1)* Hiperbólica: la ecuación de ondas $(u = u(t,x))$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Modeliza las ("pequeñas") oscilaciones de una cuerda.

*2)* Parabólica: la ecuación del calor $(u = u(t,x))$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Representa la distribución de la temperatura en una varilla.

*3)* Elíptica: la ecuación del potencial o de Laplace $(u = u(x,y))$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Está relacionada con fenómenos estacionarios, es decir, fenómenos que no dependen del tiempo. Por ejemplo, los estados de equilibrio que se alcanzan en la ecuación de ondas o en la ecuación del calor (al tomar $u = u(t,x,y)$).

- Consideramos la e.d.p lineal de segundo orden

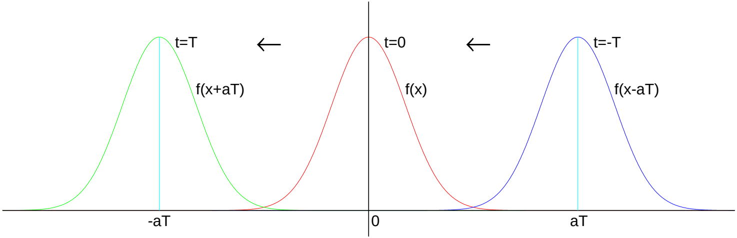
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

  donde $a \in \mathbb{R}^+$ está relacionada con la velocidad y $u = u(t,x)$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$.
- Para resolver esta ecuación aplicamos el cambio de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\tau-\xi}{2a} \\ x = \frac{\tau+\xi}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau = x + at \\ \xi = x - at \end{array} \right. .$$

- Con dicho cambio pasamos a una función $v(\tau,\xi) = v(x+at, x-at) = u(t,x)$.
- Derivamos (usando notación de subíndices)
  - $u_t(t,x) = v_\tau(\tau,\xi)\tau_t + v_\xi(\tau,\xi)\xi_t = av_\tau(\tau,\xi) - av_\xi(\tau,\xi)$.
  - $u_{tt}(t,x) = a^2 v_{\tau\tau}(\tau,\xi) - a^2 v_{\tau\xi}(\tau,\xi) - a^2 v_{\xi\tau}(\tau,\xi) + a^2 v_{\xi\xi}(\tau,\xi) = a^2 v_{\tau\tau}(\tau,\xi) - 2a^2 v_{\tau\xi}(\tau,\xi) + a^2 v_{\xi\xi}(\tau,\xi)$.
  - $u_x(t,x) = v_\tau(\tau,\xi)\tau_x + v_\xi(\tau,\xi)\xi_x = v_\tau(\tau,\xi) + v_\xi(\tau,\xi)$.
  - $u_{xx}(t,x) = v_{\tau\tau}(\tau,\xi) + v_{\tau\xi}(\tau,\xi) + v_{\xi\tau}(\tau,\xi) + v_{\xi\xi}(\tau,\xi) = v_{\tau\tau}(\tau,\xi) + 2v_{\tau\xi}(\tau,\xi) + v_{\xi\xi}(\tau,\xi)$.

- Sustituyendo en (2), tenemos la ecuación
$$v_{\tau\xi}(\tau,\xi) = 0.$$
- Las soluciones de esta ecuación son de la forma
$$v(\tau,\xi) = f(\tau) + g(\xi),$$
donde $f, g$ son funciones arbitrarias de $C^2(\mathbb{R}^2)$.
- Deshaciendo el cambio, las soluciones de (2) vienen dadas por la expresión
$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at).$$
- La función $f(x+at)$ se puede visualizar como una onda que viaja hacia la izquierda con velocidad $a$.



- Como solución al problema de la ecuación de ondas ("infinita"), hemos obtenido una familia dependiente de dos funciones arbitrarias,

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at). \tag{3}$$

- Sería interesante determinar una única solución como resultado de imponer alguna condición.
- En este caso basta con fijar el estado inicial de la onda, esto es, fijar la posición y velocidad iniciales.
- Tenemos así un problema de condiciones iniciales o problema de Cauchy. (Esta terminología ya se usó en ecuaciones diferenciales ordinarias.)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = \psi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

  donde $\varphi, \psi$ son funciones conocidas que representan, respectivamente, la posición y velocidad iniciales de la onda.
- A partir de $\varphi$ y $\psi$ determinaremos de forma única $f$ y $g$.

- A partir de (3), derivando $u$ parcialmente con respecto a $t$ y tomando las condiciones iniciales de (4), tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} u(0,x) = f(x)+g(x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} f(x)+g(x) = \varphi(x) \\ f(x)-g(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\,ds \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\,ds \\ g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(s)\,ds \end{array}\right\}.$$

- Sustituyendo en (3) las expresiones de $f$ y $g$ obtenidas, llegamos a la fórmula de d'Alembert

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds, \ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^2. \tag{5}$$

*Resultado*

- *Fijadas las funciones* $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ *y* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, *el problema de Cauchy* (4) *admite una única solución* $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
- *Además, la solución* $u(t,x)$ *viene dada por la expresión* (5).

## Ejemplo

- Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = \mathrm{sen}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = 3, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Por la fórmula de d'Alembert,

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(x+2t) + \mathrm{sen}(x-2t)\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 3\, ds \ \Rightarrow$$

$$u(t,x) = \mathrm{sen}(x)\cos(2t) + \frac{1}{4}3((x+2t)-(x-2t)) \ \Rightarrow$$

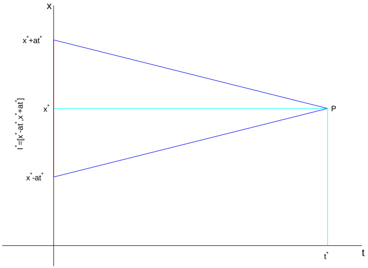
$$u(t,x) = \mathrm{sen}(x)\cos(2t) + 3t, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

- Sea un punto $P = (t^*, x^*)$ con $t^* > 0$. Podemos reescribir (5) como

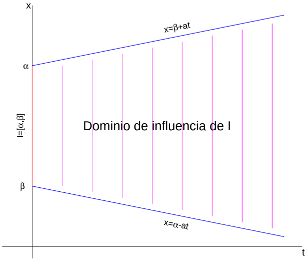
$$u(P) = u(t^*, x^*) = \frac{\varphi(x^* + at^*) + \varphi(x^* - at^*)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{I^*} \psi(s)\, ds,$$

donde $I^* = [x^* - at^*, x^* + at^*]$.

- A la vista de esta fórmula, deducimos que el valor de $u$ en $P$ depende de los valores que tomen $\varphi$ y $\psi$ en el intervalo $I^*$.
- $I^*$ se denomina *"dominio de dependencia"* de $P$.
- Gráficamente tenemos la siguiente situación.



- Podemos hacer la interpretación anterior al contrario: fijado un intervalo $I$, en el instante $t = 0$, ¿sobre que puntos ejercerá su influencia?
- El conjunto de puntos afectados se denomina *“dominio de influencia”* de $I$.
- Gráficamente ahora tenemos el siguiente esquema.




- Observemos cómo influye la velocidad de la ecuación de ondas. Si emitimos, en el instante $t = 0$, una señal en el punto $x_0$, entonces
  - se percibirá en el punto $y_0 > x_0$ en el instante $t = \frac{y_0 - x_0}{a}$;
  - se percibirá en el punto $y_0 < x_0$ en el instante $t = \frac{x_0 - y_0}{a}$.
- Por esto se dice que, en la ecuación de ondas, la velocidad de propagación es finita.

- En algunos casos será interesante imponer condiciones, en la frontera del dominio, acerca del comportamiento del fenómeno estudiado.
- Por ejemplo, en la ecuación del potencial no tiene sentido imponer condiciones iniciales pues estas serían automáticamente la solución buscada. (Recordemos que esta ecuación modeliza fenómenos estacionarios, es decir, "constantes".)
- Hay varias posibilidades de imponer condiciones de contorno.
  - Condiciones de Dirichlet: se fijan los valores de la función en la frontera.
  - Condiciones de Neumann: se fijan los valores de la derivada (o derivadas parciales) de la función en la frontera.
  - Condiciones mixtas: se imponen condiciones de Dirichlet en una parte de la frontera y condiciones de Neumann en la otra parte.
- Cuando se combinan condiciones iniciales y de contorno tenemos los llamados problemas mixtos.
- Por ejemplo, en el estudio de la vibración de una cuerda de longitud finita, debemos considerar la posición y velocidad iniciales (condiciones iniciales) y qué ocurre en los extremos de la cuerda (condición de contorno).

- Consideramos el problema mixto (con condiciones de Dirichlet)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,\ell], \\ u(0,x) = \varphi(x), \ \forall x \in [0,\ell], \\ u_t(0,x) = \psi(x), \ \forall x \in [0,\ell], \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+, \end{cases} \tag{6}$$

donde $a, \ell \in \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ y $\varphi, \psi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ son números y funciones conocidos.

- Este problema representa las vibraciones ("pequeñas") de una cuerda que está sujeta en los extremos.
- Para que exista solución, $\varphi$ y $\psi$ deben satisfacer ciertas restricciones ("ligaduras").
    - $u(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \varphi(0) = 0.$
    - $u(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow u_t(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \psi(0) = 0.$
    - $u(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow u_t(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow u_{tt}(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$ $u_{xx}(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \varphi''(0) = 0.$
    - Análogamente, $\varphi(\ell) = 0$, $\psi(\ell) = 0$ y $\varphi''(\ell) = 0$.
- En la resolución de (6) seguiremos el *método de separación de variables*.
    - Primero buscamos soluciones del tipo $u(t,x) = v(t)w(x)$ que satisfagan la ecuación y las condiciones de contorno.
    - Después ajustamos las condiciones iniciales empleando desarrollos de Fourier.

- Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,\ell], \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases} \tag{7}$$

- Si existen soluciones (no triviales) de la forma $u(t,x) = v(t)w(x)$, entonces
  - $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow v''(t)w(x) - a^2 v(t)w''(x) = 0 \Rightarrow \frac{v''(t)}{v(t)} = a^2 \frac{w''(x)}{w(x)} = -\lambda.$

    (Dos funciones en variables distintas son iguales si y sólo si son constantes.)
  - $u(t,0) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow v(t)w(0) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow w(0) = 0.$
  - $u(t,\ell) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow v(t)w(\ell) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow w(\ell) = 0.$
- Combinando estas igualdades, tenemos dos problemas que resolver.
  - Un problema (de e.d.o.) con condiciones de contorno en la variable $x$,

$$\begin{cases} w''(x) + \frac{\lambda}{a^2} w(x) = 0, \ \forall x \in [0,\ell], \\ w(0) = w(\ell) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

  - Una ecuación en la variable $t$,

$$v''(t) + \lambda v(t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{9}$$

## Problema en la variable $x$ (Problema (8))

- Las raíces del polinomio $p(r) = r^2 + \frac{\lambda}{a^2}$ nos dan las soluciones de la ecuación.
- Según el signo de $\lambda$, hay tres casos en la búsqueda de soluciones no triviales de (8).
  - $\lambda < 0 \Rightarrow r_\pm = \pm\frac{\sqrt{-\lambda}}{a} \Rightarrow w(x) = \alpha e^{r_+ x} + \beta e^{r_- x}$.
    Por las condiciones de contorno, la única posibilidad es $w \equiv 0$, que no sirve.
  - $\lambda = 0 \Rightarrow r = 0$ doble $\Rightarrow w(x) = \alpha + \beta x$.
    Por las condiciones de contorno, la única posibilidad es $w \equiv 0$, que no sirve.
  - $\lambda > 0 \Rightarrow r_\pm = \pm\frac{\sqrt{\lambda}}{a} i \Rightarrow w(x) = \alpha \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a} x\right)$.
    Por las condiciones de contorno, tenemos soluciones distintas de la trivial si y sólo si $\frac{\sqrt{\lambda}}{a}\ell = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$.
- Conclusión.
  - El problema (8) tiene soluciones distintas de la trivial si y sólo si

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2, \; n = 1, 2, \ldots.$$

  - Dichas soluciones vienen dadas por

$$w_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \; \forall x \in [0, \ell], \; n = 1, 2, \ldots.$$

## Ecuación en la variable $t$ (Ecuación (9))

- Como buscamos soluciones de (7), sólo tenemos que estudiar la ecuación (9) para los valores de $\lambda$ determinados al resolver (8).
- Por tanto, resolvemos las ecuaciones

$$v''(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 v(t) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

- Las soluciones de estas ecuaciones son

$$v_n(t) = c_{1n}\cos\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right) + c_{2n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right), \; \forall t \in \mathbb{R}_0^+, \; c_{1n}, c_{2n} \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

## Soluciones del problema (7)

- $u_n(t,x) = c_{1n}\cos\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + c_{2n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \; \forall (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,\ell],$ $c_{1n}, c_{2n} \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \ldots.$

## *Separación de variables: segundo paso (Soluciones del problema mixto para la cuerda finita)*

### Casos particulares

- Si $\varphi(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ y $\psi(x) = 0$, entonces la solución de (6) es

$$u(t,x) = \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,\ell].$$

- Si $\varphi(x) = 0$ y $\psi(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, entonces la solución de (6) es

$$u(t,x) = \frac{\ell}{n\pi a}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,\ell].$$

### Caso general

- Supondremos que las funciones $\varphi, \psi$ admiten los desarrollos de Fourier

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

### Resultado

- *Sea* $\varphi \in C^2([0,\ell])$ *con derivada tercera continua a trozos que satisface las condiciones* $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0$.
- *Sea* $\psi \in C^1([0,\ell])$ *con derivada segunda continua a trozos que satisface las condiciones* $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$.
- *Entonces la solución de* (6) *viene dada por la expresión*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) + \frac{\ell}{n\pi a} \psi_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell} t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,\ell],$$

*donde*

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad \psi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

### Observación

- *Los desarrollos de Fourier cambiarán de acuerdo con las funciones que se obtengan como solución del problema* (8) *correspondiente a cada caso.*

# 5.6. Añadido: unicidad de solución del problema mixto (Método de la energía)

- Para probar la unicidad de solución de (6) podemos usar la función *"energía total de la onda"*.

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left\{(u_t(t,x))^2 + a^2(u_x(t,x))^2\right\} dx, \;\; \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

- $E(t)$ es constante. En efecto,

$$E'(t) = \int_0^{\ell} \left\{u_t(t,x)u_{tt}(t,x) + a^2 u_x(t,x)u_{xt}(t,x)\right\} dx = \int_0^{\ell} u_t(t,x)u_{tt}(t,x)\,dx + \int_0^{\ell} a^2 u_x(t,x)u_{xt}(t,x)\,dx =$$

$$\int_0^{\ell} u_t(t,x)u_{tt}(t,x)\,dx + a^2\left[u_x(t,x)u_t(t,x)\right]_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^{\ell} a^2 u_{xx}(t,x)u_t(t,x)\,dx =$$

$$\int_0^{\ell} u_t(t,x)\left[u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x)\right] dx = 0.$$

- Si (6) tuviera dos soluciones $u_1, u_2$ (para las mismas condiciones iniciales) entonces $v = u_1 - u_2$ sería solución de (6) con condiciones iniciales $v(0,x) = v_t(0,x) = 0$.
- De $v(0,x) = v_t(0,x) = 0$, $\forall x \in [0,\ell]$ se sigue que $v_x(0,x) = 0$. Por tanto,

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left\{(v_t(0,x))^2 + a^2(v_x(0,x))^2\right\} dx = 0.$$

- Como $E(t)$ es constante, entonces $E(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$.
- Por consiguiente, $v_t(t,x) = v_x(t,x) = 0, \forall (t,x)$. Deducimos entonces que $v$ es constante.
- Como $v(t,0) = 0$, concluimos que $v \equiv 0$, es decir, $u_1 \equiv u_2$.

- Cuando se estudia la dependencia espacial del campo en el interior de una guía de ondas (con propagación en $z$) aparece la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 E_z^0}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 E_z^0}{\partial y^2}(x,y) + h^2 E_z^0(x,y) = 0, \tag{10}$$

  donde $h$ es el *"número de onda"* (parámetro real no negativo).

- Un ejemplo habitual es el de guía con sección rectangular. En tal caso $E_z^0(x,y)$ está definida en $[0,a]\times[0,b]$ (con $a,b>0$) y como condiciones de contorno se consideran

$$E_z^0(0,y) = E_z^0(a,y) = 0,\ \forall y \in [0,b]; \quad E_z^0(x,0) = E_z^0(x,b) = 0,\ \forall x \in [0,a], \tag{11}$$

  es decir, se supone que la guía está aislada del exterior del recinto $[0,a]\times[0,b]$.

- Para resolver el problema de contorno (10)-(11), empleamos de nuevo el método de separación de variables. Por comodidad, escribiremos $u(x,y) = E_z^0(x,y)$.
- Empezamos buscando soluciones del tipo $u(x,y) = v(x)w(y)$.

- Razonando como en la ecuación de ondas finita, tenemos que (siendo $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y) + h^2 w(y)}{w(y)} = -\lambda,$$

- De $E_z^0(0,y) = E_z^0(a,y) = 0$ se sigue que $v(0) = v(a) = 0$. Entonces,

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \\ v(0) = v(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \; v_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \; n = 1, 2, \ldots .$$

- De $E_z^0(x,0) = E_z^0(x,b) = 0$ se sigue que $w(0) = w(b) = 0$. Entonces,

$$\begin{cases} w''(y) + \left(h^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) w(y) = 0 \\ w(0) = w(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \; w_m(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{b}\right), \; m = 1, 2, \ldots,$$

  teniendo en cuenta que debe verificarse que $h^2 = \lambda + \mu = \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2$.

- Por tanto, las soluciones de (10)-(11) del tipo $u(x,y) = v(x)w(y)$ son de la forma

$$u_{nm}(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{b}\right), \; n, m = 1, 2, \ldots \; \left(\text{con } \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = \frac{h^2}{\pi^2}\right).$$

- También será solución cualquier combinación lineal ("finita" o "infinita bien definida") de las funciones $u_{nm}(x,y)$.

# *Referencias*


- M. Krasnov, A. Kiseilov, G. Makarenko, E. Shikin. "Curso de matemáticas superiores para ingenieros, tomo 2". Editorial Mir Moscú, 1990.