"Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico"

Tema 4. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (de primer orden)

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

Tema 4. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (de primer orden)

- Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales tiene estructura algebraica bien definida.
  - Diremos que un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es homogéneo si está formado exclusivamente por ecuaciones lineales homogéneas.
  - El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo determina un espacio vectorial.
  - Si el sistema está formado n ecuaciones lineales homógeneas de primer orden, entonces el espacio vectorial de soluciones tiene dimensión n.
  - El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo (alguna ecuación es completa) conforma un espacio afín.
  - La estructura de espacio afín nos permite calcular el conjunto de soluciones sin más que conocer una solución particular del sistema y el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado.

- Por lo comentado en el punto anterior, nos centraremos en los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales de primer orden.
- En concreto, estudiaremos los sistemas de coeficientes constantes.
- Así, un sistema homogéneo de coeficientes constantes de dos ecuaciones con dos incógnitas viene dado por

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

- Si tomamos $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces el sistema (1) se expresa matricialmente de la forma $X'(t) = AX(t)$ (que es muy similar a la expresión de las ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes).
- Por la analogía con las ecuaciones, podemos pensar que las soluciones de (1) serán múltiplos de e^{At}. Pero,
  - ¿qué significa e^{At}?
  - ¿qué se entiende por múltiplo?

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = x_1 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \tag{2}$$

- Este sistema se puede resolver directamente.
- En la primera ecuación: $x_1(t) = K_1 e^t$.
- Sustituyendo en la segunda, $x_2' = x_2 + 2K_1 e^t$, que es lineal completa.
  (¡OJO! Se deja $2K_1$, pues K_1 ya está en $x_1(t)$.)
  - La solución de $x_2' = x_2$ es $x_{2h}(t) = K_2 e^t$.
  - Una solución particular de $x_2' = x_2 + 2K_1 e^t$ será del tipo $x_{2p}(t) = \alpha t e^t$, para un valor de α adecuado. En este caso, $\alpha = 2K_1$ (¡Compruébalo!)
- Por tanto, la solución del sistema (2) es

$$X(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^t + 2K_1 t e^t \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 2te^t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

- Concluimos que $\left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 2te^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema fundamental de (2).

Ejemplo 2

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \tag{3}$$

- En este sistema pasaremos a una ecuación lineal de segundo orden.
- Primero debemos observar que $x_1, x_2 \in C^1$ y, por tanto, $x_1', x_2' \in C^1$. Concluimos que $x_1, x_2 \in C^2$ y podemos derivar las ecuaciones del sistema, al menos, una vez.
  - Consideramos la primera ecuación y derivamos en ella: $x_1' = x_2 \Rightarrow x_1'' = x_2'$.
  - Usamos estas dos igualdades en la segunda ecuación para obtener una ecuación que sólo dependa de x_1: $x_1'' = 2x_1 + x_1'$.
  - La solución de esta última es $x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$.
  - Obtenemos $x_2(t)$ a partir de la primera ecuación: $x_2(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$.
- Por tanto, la solución del sistema (3) es

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- Concluimos que $\left\{ \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema fundamental de (3).

Ejemplo 2 (de nuevo)

- Podemos resolver (3) operando de distinta forma.
  - Derivamos la segunda ecuación: $x_2'' = 2x_1' + x_2'$.
  - Sustituimos la primera en la nueva ecuación: $x_2'' = 2x_2 + x_2'$.
  - La solución de esta última es $x_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$.
  - Obtenemos $x_1(t)$ a partir de la primera ecuación: $x_1(t) = -c_1 e^{-t} + \frac{1}{2} c_2 e^{2t}$.
- Por tanto, la solución del sistema (3) es

$$X(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} + \frac{1}{2} c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- Concluimos que $\left\{ \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema fundamental de (3).
- Por supuesto, el nuevo sistema fundamental es equivalente al obtenido antes.

- A la vista de los ejemplos anteriores, comenzamos buscando condiciones para obtener soluciones del tipo $X(t) = e^{\lambda t}v$, donde v es un vector no nulo.
- Así pues, supongamos que, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la función $X(t) = e^{\lambda t}v$ es solución del sistema de coeficientes constantes $X' = AX$.
  - Por un lado, $X'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}\lambda v$.
  - Por otro lado, $AX(t) = Ae^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$.
  - Por tanto, $e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av$.
  - Operando sobre esta igualdad,
    $e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av \Leftrightarrow e^{\lambda t}Av - e^{\lambda t}\lambda v = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda t}(Av - \lambda v) = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av = \lambda v$.
- Podemos concluir que $X(t) = e^{\lambda t}v$ será una solución del sistema $X' = AX$ si y sólo si λ es un valor propio de A y v es un vector propio de A (asociado a λ).
- (Debemos observar que seguimos sin saber qué es o cómo se calcula e^{At}.)

- Ejemplo 1.

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = x_1 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - El polinomio característico de A es $p(\lambda) = (1 - \lambda)^2$.
  - La matriz A admite como valor propio $\lambda = 1$ (doble).
  - El conjunto de vectores propios asociados a $\lambda = 1$ es el de los múltiplos del vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  - Por tanto, $e^{\lambda t} v = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ es una solución del sistema dado.
  - Pero hay un problema: necesitamos otra solución del sistema, que sea linealmente independiente con $\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$, ya que la dimensión del espacio vectorial de soluciones es igual a 2.

- Ejemplo 2.

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X' = AX, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$ (observa que coincide con el polinomio característico asociado a las ecuaciones de segundo orden vistas en las páginas 6 y 7).
  - La matriz A admite como valores propios $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$.
  - El conjunto de vectores propios asociados a $\lambda = -1$ es el de los múltiplos del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
  - El conjunto de vectores propios asociados a $\lambda = 2$ es el de los múltiplos del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
  - Por tanto, $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ son soluciones (linealmente independientes) del sistema dado.

- Veamos como solventar la pega que surgió en el ejemplo 1.
- En primer lugar, recordemos que $e^s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \cdots + \frac{s^n}{n!} + \cdots$, donde s es un número real cualquiera.
- Esta serie nos permite definir la exponencial de una matriz A como
$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$
(Otra cuestión es cómo calcular las potencias de A de manera simple.)
- A partir de la serie, es fácil justificar que, si $f(t) = e^{At}$, entonces $f'(t) = Ae^{At}$ (siendo $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$).
- Por tanto, si $X(t) = e^{At}v$ con $v \in \mathbb{R}^n$, entonces $X'(t) = Ae^{At}v = AX(t)$, es decir, $e^{At}v$ es solución del sistema $X' = AX$.
- Por otra parte,
$$e^{At}v = e^{At}e^{-\lambda t}e^{\lambda t}v = e^{At}e^{-\lambda It}e^{\lambda t}v = e^{At-\lambda It}e^{\lambda t}v =$$
$$e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}v = e^{\lambda t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A-\lambda I)^n t^n}{n!}\right)v = e^{\lambda t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n (A-\lambda I)^n v}{n!}\right).$$

- En el ejemplo 1 tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\lambda = 1$.
- Es claro que $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y que $(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Por tanto, existe un vector w tal que $(A - \lambda I)w \neq 0$ y $(A - \lambda I)^2 w = 0$.
- Tenemos así que $e^{At}w = e^{\lambda t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n (A-\lambda I)^n w}{n!}\right) = e^{\lambda t}\left(I + t(A - \lambda I)\right) w$.

  (Observa que $(A - \lambda I)^n w = 0$ para $n = 3, 4, \ldots$)
- En nuestro ejemplo, la elección más fácil es $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde

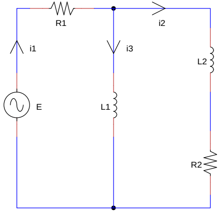
$$X(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2te^t \end{pmatrix}$$

  es la solución que nos faltaba (además coincide con la obtenida en la página 5).
- En sistemas con más de dos ecuaciones pueden aparecer valores propios con multiplicidades mayores que 2. En estos casos se sigue la misma idea, es decir, se buscan vectores w tales que $(A - \lambda I)^k w \neq 0$ para potencias menores o iguales que un adecuado valor de k y $(A - \lambda I)^k w = 0$ para potencias mayores que dicho valor de k.

- Consideremos el sistema $X' = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
- El polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$.
- La matriz A admite como valores propios $\lambda = 1 + i$ y $\lambda = 1 - i$.
- Los vectores propios asociados a $\lambda = 1 + i$ son los múltiplos del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.
- Los vectores propios asociados a $\lambda = 1 - i$ son los múltiplos del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.
- Por tanto, dos soluciones (linealmente independientes) del sistema son $\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ (1+i)e^{(1+i)t} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} e^{(1-i)t} \\ (1-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$.
- Podemos comprobar que las soluciones obtenidas son conjugadas entre sí.
- Tomando la parte real y la parte imaginaria de la primera, tenemos que dos soluciones reales (linealmente independientes) del sistema dado son $\begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)) \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen}(t) \\ e^t(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1

- Consideremos la red dada por el esquema



- El sistema de ecuaciones diferenciales, resultante de aplicar análisis de mallas, es

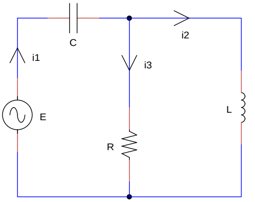
$$\left.\begin{array}{c} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_3}{dt} = E(t) \\ R_1 i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = E(t) \end{array}\right\}.$$

- Teniendo en cuenta que $i_1 = i_2 + i_3$, queda

$$\left.\begin{array}{c} L_1 \frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 = E(t) \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2) i_2 + R_1 i_3 = E(t) \end{array}\right\}.$$

Ejemplo 2

- Consideremos la red dada por el esquema



- El sistema de ecuaciones diferenciales, resultante de aplicar análisis de mallas, es

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{C}q + Ri_3 = E(t) \\ \frac{1}{C}q + L\frac{di_2}{dt} = E(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} Ri_3 + \frac{1}{C}q = E(t) \\ L\frac{di_2}{dt} - Ri_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} R\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_1 = \frac{dE}{dt}(t) \\ L\frac{di_2}{dt} - Ri_3 = 0 \end{array}\right\},$$

donde se ha tenido en cuenta que $\frac{dq}{dt} = i_1$.

- Por último, ya que $i_1 = i_2 + i_3$, entonces

$$\left.\begin{array}{c} R\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_2 + \frac{1}{C}i_3 = \frac{dE}{dt}(t) \\ L\frac{di_2}{dt} - Ri_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

- Consideremos dos masas m_1, m_2 intercaladas entre tres muelles (con constantes de elasticidad k_1, k_2, k_3) en un medio que no ofrece resistencia (esto es, no hay rozamiento).
- El sistema que determina el movimiento de ambas masas es

$$\left.\begin{array}{c} m_1 x_1''(t) = -(k_1+k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) \\ m_2 x_2''(t) = k_2 x_1(t) - (k_2+k_3)x_2(t) \end{array}\right\}. \tag{4}$$

- Si suponemos $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ y consideramos $\alpha^2 = \frac{k}{m}$, el sistema sería

$$\left.\begin{array}{c} x_1'' = -2\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2 \\ x_2'' = \alpha^2 x_1 - 2\alpha^2 x_2 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

- Para resolver (5) podemos pasar a una ecuación lineal de cuarto orden con coeficientes constantes.
  - Despejamos $x_2(t)$ en la primera ecuación y derivamos dos veces: $x_2 = \frac{1}{\alpha^2} x_1'' + 2x_1 \Rightarrow x_2'' = \frac{1}{\alpha^2} x_1^{(iv)} + 2x_1''$.
  - Sustituimos ambas expresiones en la segunda ecuación: $\frac{1}{\alpha^2} x_1^{(iv)} + 2x_1'' = \alpha^2 x_1 - 2(x_1'' + 2\alpha^2 x_1) \Rightarrow x_1^{(iv)} + 4\alpha^2 x_1'' + 3\alpha^4 x_1 = 0$.
  - Una vez hallada $x_1(t)$, recurrimos de nuevo la primera ecuación para calcular $x_2(t)$.
- (`http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados/acoplados.html`.)

- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 6". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec6.pdf.
- G.F. Simmons. "Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas (Segunda edición)". McGraw-Hill, 2002.
- D.G. Zill. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Octava edición)". Cengage Learning, 2009.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.

Licencia Creative Commons 3.0 España. http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/