“Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico”

Tema 3. La ecuación diferencial lineal (segunda parte)

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

3.5. Reducción de orden en la ecuación lineal homogénea.

3.6. Resolución de la ecuación lineal completa. Variación de constantes.
(Resolución práctica: identificando soluciones particulares.)

3.7. Ecuación lineal de coeficientes constantes.

3.8. Aplicaciones: Circuitos eléctricos simples y osciladores.

3.9. Añadido: la ecuación lineal de Euler.
(El cambio que faltaba: cambio de variable independiente.)

- En general, no es fácil resolver explícitamente una ecuación lineal homogénea de orden mayor o igual que 2.
- Si disponemos de una solución (no idénticamente cero) de una ecuación de segundo orden, entonces podemos calcular otra solución que será linealmente independiente con la ya conocida.

- Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden
$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0,$$
donde $a_0, a_1 \in C^1(I)$ (con I intervalo abierto).
- Sea el cambio $x = \varphi(t)y$, donde $\varphi(t)$ es una solución no trivial de la ecuación.
- Derivando dos veces en el cambio y sustituyendo en la ecuación, tenemos
$$\varphi''(t)y + 2\varphi'(t)y' + \varphi(t)y'' + a_1(t)(\varphi'(t)y + \varphi(t)y') + a_0(t)\varphi(t)y = 0 \Rightarrow$$
$$(\varphi''(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_0(t)\varphi(t))\, y + (2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t))\, y' + \varphi(t)y'' = 0.$$
- Ya que $\varphi''(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_0(t)\varphi(t) = 0$, nos queda la ecuación
$$(2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t))\, y' + \varphi(t)y'' = 0.$$
- Tomando el cambio $z = y'$, tenemos finalmente una ecuación de primer orden.
$$\varphi(t)z' + (2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t))\, z = 0.$$

Observaciones

- El método de reducción de orden se puede aplicar a cualquier ecuación de orden n ($n \geq 2$). La idea será siempre usar el cambio $x = \varphi(t)y$, supuesto que $\varphi(t)$ es una solución no trivial de la ecuación dada.

- Justificación de la independencia lineal (con cálculos un tanto "alegres").
  - Tomando $A_1(t) = \int a_1(t)dt$, una solución de $\varphi(t)z' + (2\varphi'(t) + a_1(t)\varphi(t))\, z = 0$ es $z(t) = \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}$. (Como $\varphi(t) \not\equiv 0$, podemos hacer la división.)
  - Deshaciendo el cambio $y' = z$, tenemos que $y(t) = \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt$.
  - Deshaciendo el cambio $x = \varphi(t)y$, la segunda solución es $\psi(t) = \varphi(t) \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt$.
  - Para ver que $\varphi(t), \psi(t)$ son linealmente independientes, calculamos su wronskiano.

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \varphi(t) \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt \\ \varphi'(t) & \varphi'(t) \displaystyle\int \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi^2(t)}\, dt + \frac{e^{-A_1(t)}}{\varphi(t)} \end{vmatrix} = e^{-A_1(t)} \neq 0.$$

Ejemplo

- Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden
$$x'' + \frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x = 0.$$
- Es fácil comprobar que $\varphi(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, es una solución.
- Sea el cambio $x = ty$.
- Entonces $x' = y + ty'$, $x'' = 2y' + ty''$. Sustituyendo en la ecuación,
$$2y' + ty'' + \frac{1}{t}y + y' - \frac{1}{t}y = 0 \Rightarrow ty'' + 3y' = 0$$
- Tomando el cambio $z = y'$, tenemos
$$tz' + 3z = 0.$$
- Resolviendo por variables separadas, $z = t^{-3}$ es una solución.
- De $y' = z = t^{-3}$ se sigue que $y = -\frac{1}{2}t^{-2}$.
- Finalmente, $x = ty = -\frac{1}{2t}$. $\Big($También valdría $x = \frac{1}{t}$. ¿Por qué?$\Big)$

3.6. Resolución de la ecuación lineal completa

- Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n
$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t),$$
siendo $b \not\equiv 0$.
- Recordemos que el conjunto Z_b de soluciones de esta ecuación tiene estructura de espacio afín, es decir,
$$Z_b = x_p + Z_0,$$
siendo Z_0 el conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada y x_p una solución particular (o sea, $L[x_p] = b$).
- Todo esto nos permite determinar Z_b si somos capaces de resolver la ecuación homogénea (o sea, si conocemos Z_0) y de calcular una solución de la completa (es decir, alguna x_p).

- Ejemplo
  - Sea la ecuación $x'' - x = t$.
  - $Z_0 = \{c_1 e^t + c_2 e^{-t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.
  - $x_p(t) = -t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución particular.
  - $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t, \forall t \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es el conjunto de soluciones de $x'' - x = t$.

Variación de constantes

- Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden (con $b \not\equiv 0$)
$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$
- Supongamos que $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.
- Vamos a buscar una solución particular de la forma $x_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$.
- Derivando, $x_p'(t) = c_1'(t)\varphi_1(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + c_2(t)\varphi_2'(t)$.
- Suponemos que $c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0$ y volvemos a derivar,
$$x_p''(t) = c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_1(t)\varphi_1''(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + c_2(t)\varphi_2''(t).$$
- Sustituimos en la ecuación de partida, (quitando las t's para simplificar las expresiones),
$$c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2'' + a_1(c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2') + a_0(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = b(t) \Rightarrow$$
$$c_1(\varphi_1'' + a_1\varphi_1' + a_0\varphi_1) + c_2(\varphi_2'' + a_1\varphi_2' + a_0\varphi_2) + c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t) \Rightarrow c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = b(t).$$
- El sistema a resolver para hallar $c_1(t), c_2(t)$ es
$$\left.\begin{array}{l} c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) = b(t) \end{array}\right\}.$$
- Debemos observar que el determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es $W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$, que es distinto de cero por ser $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ linealmente independientes.

Ejemplo

- Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden (con $b \not\equiv 0$)
$$x'' - 2x' + x = t.$$
- Podemos comprobar que $\left\{\varphi_1(t) = e^t, \varphi_2(t) = te^t\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.
- Vamos a buscar una solución particular de la forma $x_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$.
- Derivando, $x_p'(t) = c_1'(t)e^t + c_1(t)e^t + c_2'(t)te^t + c_2(t)(1+t)e^t$.
- Suponemos que $c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t = 0$ y volvemos a derivar,
$$x_p''(t) = c_1'(t)e^t + c_1(t)e^t + c_2'(t)(1+t)e^t + c_2(t)(2+t)e^t.$$
- Sustituimos en la ecuación de partida, (quitando, cuando se pueda, las t's para simplificar las expresiones),
$$c_1'e^t + c_1e^t + c_2'(1+t)e^t + c_2(2+t)e^t - 2(c_1e^t + c_2(1+t)e^t) + c_1e^t + c_2te^t = t \Rightarrow$$
$$c_1(e^t - 2e^t + e^t) + c_2((2+t)e^t - 2(1+t)e^t + te^t) + c_1'e^t + c_2'(1+t)e^t = t \Rightarrow$$
$$c_1'e^t + c_2'(1+t)e^t = t.$$

Ejemplo (sigue)

- El sistema a resolver para hallar $c_1(t), c_2(t)$ es

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t = 0 \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(1+t)e^t = t \end{array}\right\}.$$

- El determinante de la matriz de coeficientes es

$$W(e^t, te^t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = (1+t)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t}.$$

- Para resolver el sistema empleamos la regla de Cramer.

$$c_1'(t) = \frac{1}{e^{2t}} \begin{vmatrix} 0 & te^t \\ t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = -t^2e^{-t} \Rightarrow c_1(t) = -\int t^2 e^{-t}\,dt = (t^2+2t+2)e^{-t}.$$

$$c_2'(t) = \frac{1}{e^{2t}} \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & t \end{vmatrix} = te^{-t} \Rightarrow c_2(t) = \int te^{-t}\,dt = -(t+1)e^{-t}.$$

- Una solución particular es $x_p(t) = (t^2+2t+2)e^{-t}e^t - (t+1)e^{-t}te^t = t+2.$

- El método de variación de constantes funciona siempre que se conozca un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada.
- Sin embargo, el proceso de cálculo puede resultar bastante tedioso.
- En muchos casos (que no es siempre) funciona el método de los coeficientes indeterminados, que consiste en buscar soluciones particulares del mismo tipo que la función $b(t)$.
- Así, si $b(t)$ es una función polinómica entonces hay una solución particular polinómica; si $b(t)$ es trigonométrica entonces la solución es trigonométrica; etc.

Ejemplo

- Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden (con $b \not\equiv 0$)

$$x'' - 2x' + x = t.$$

- Como $b(t) = t$, buscamos una solución particular de la forma $x_p(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$.
- Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$0 - 2\alpha_1 + \alpha_1 t + \alpha_0 = t \Leftrightarrow \alpha_1 t + (\alpha_0 - 2\alpha_1) = t$$

- Puesto que dos polinomios son iguales si, y sólo si, sus coeficientes son iguales, es fácil ver que la última igualdad es cierta si, y sólo si, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 = 2$.
- Así, $x_p(t) = t + 2$ es una solución particular (como ya vimos en la página 32).

- Son ecuaciones diferenciales de la forma
$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b(t), \tag{1}$$
donde $n \geq 1$ es un número natural, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $b : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I (intervalo abierto).

- En estas ecuaciones siempre es posible calcular un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada y, por tanto, calcular el conjunto de soluciones de la completa.
- Para ver que esto es así, usaremos el operador diferencial $L : C^n(I) \to C(I)$ definido (como es de esperar) de la forma
$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x.$$
- Nos centraremos en el cálculo del sistema fundamental pues, para hallar soluciones particulares, es suficiente con ello.

- Observemos que las soluciones de la ecuación $x' + a_0 x = 0$ son de la forma $x(t) = Ke^{-a_0 t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Vamos a buscar condiciones para que una función del tipo e^{rt} sea solución de la ecuación de orden n, o sea, que $L[e^{rt}] = 0$.

$$\begin{gathered} L[e^{rt}] = (e^{rt})^{(n)} + a_{n-1}(e^{rt})^{(n-1)} + \ldots + a_1(e^{rt})' + a_0 e^{rt} = 0 \Leftrightarrow \\ r^n e^{rt} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rt} + \ldots + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0 \Leftrightarrow \\ (r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0) e^{rt} = 0. \end{gathered}$$

- Consideremos el polinomio $p(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0$, que denominaremos "polinomio característico" asociado a la ecuación $L[x] = 0$.

Resultado

- *La función $x(t) = e^{rt}, \forall t \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación $L[x] = 0$ si, y sólo si, r es una raíz del polinomio característico de dicha ecuación.*

Ejemplos (raíces reales simples y dobles)

1) Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' - x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 - 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = -1$ y $r = 1$.
- Por tanto, e^{-t}, e^t son soluciones linealmente independientes de la ecuación.
- Se concluye que $\{e^{-t}, e^t\}$ es un sistema fundamental de $x'' - x = 0$.

2) Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' - 2x' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 - 2r + 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = 1$ y $r = 1$ (es decir, $r = 1$ doble).
- Por tanto, e^t es una solución de la ecuación.
- Pero la ecuación es de orden 2. Luego necesitamos otra solución (linealmente independiente de e^t) para tener un sistema fundamental.
- ¿Qué podemos hacer? (Antes de dar respuesta a esta pregunta, veamos otro posible inconveniente que tiene un arreglo inmediato.)

3) Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 + 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = -i$ y $r = i$.
- Se puede ver que e^{-it} y e^{it} son "soluciones" linealmente independientes.
- Pero estas son funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.
- Evitamos este problema tomando
  - ★ $\cos(t) = \Re(e^{it}) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ (parte real de $e^{it} = \cos(t) + i\,\text{sen}(t)$).
  - ★ $\text{sen}(t) = \Im(e^{it}) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ (parte imaginaria de e^{it}).
- $\cos(t)$, $\text{sen}(t)$ son soluciones linealmente independientes de $x'' + x = 0$.

- En general, si $\alpha + i\beta$ es solución de un polinomio característico, entonces $\alpha - i\beta$ también es solución.
  - Tomando (recuerda que $e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}\cos(\alpha t) + ie^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$)
    - ★ $e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \Re(e^{\alpha t+i\beta t}) = \frac{e^{\alpha t+i\beta t}+e^{\alpha t-i\beta t}}{2}$ (parte real de $e^{\alpha t+i\beta t}$).
    - ★ $e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t) = \Im(e^{\alpha t+i\beta t}) = \frac{e^{\alpha t+i\beta t}+e^{\alpha t-i\beta t}}{2i}$ (parte imaginaria de $e^{\alpha t+i\beta t}$).
  - $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$ serán soluciones linealmente independientes.

- Supongamos que r, $r+h$ son raíces del polinomio característico (con $h \neq 0$).
- Entonces e^{rt}, $e^{(r+h)t}$ serán soluciones (linealmente independientes) de la ecuación correspondiente.
- Es claro que e^{rt}, $\frac{e^{(r+h)t}-e^{rt}}{h}$ también serán soluciones (linealmente independientes) de la ecuación correspondiente.
- Teniendo en cuenta que
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(r+h)t}-e^{rt}}{h} = te^{rt},$$
podemos concluir que e^{rt}, te^{rt} serán soluciones (linealmente independientes) de una ecuación cuyo polinomio característico tenga a r como raíz doble.
- Un argumento similar nos permite asegurar que, si el polinomio característico admite una raíz r triple, entonces e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt} son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación correspondiente.
- ¿Puedes conjeturar que ocurre si tenemos una raíz con multiplicidad m?

Ejemplos (raíces dobles)

2) Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x'' - 2x' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^2 - 2r + 1$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = 1$ y $r = 1$ (es decir, $r = 1$ doble).
- Por tanto, e^t, te^t son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación.

4) Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden $x^{iv)} + 2x'' + x = 0$.

- El polinomio característico es $p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2$.
- Las raíces de $p(r)$ son $r = i$ y $r = -i$, ambas dobles.
- Por tanto, $e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}$ son soluciones de la ecuación.
- Combinando e^{it}, e^{-it} tenemos $\cos(t), \operatorname{sen}(t)$. Y combinando te^{it}, te^{-it} tenemos $t\cos(t), t\operatorname{sen}(t)$.
- Por tanto, $\cos(t), t\cos(t), \operatorname{sen}(t), t\operatorname{sen}(t)$ son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación.

Resultado

- *Consideremos una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.*
- *Sea r una raíz, con multiplicidad m, del polinomio característico asociado.*
  - *Si r es real entonces $e^{rt}, te^{rt}, \ldots, t^{m-1}e^{rt}$ son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación dada.*
  - *Si $r = a + ib$ es compleja y no real ($b \neq 0$) entonces*

    $$e^{at}\cos bt,\ e^{at}\operatorname{sen} bt,\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\operatorname{sen} bt,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{at}\cos bt,\ t^{m-1}e^{at}\operatorname{sen} bt,$$

    son soluciones (linealmente independientes) de la ecuación dada.
- *El conjunto formado por la unión de los grupos de soluciones (de cada una de las raíces del polinomio carcaterístico) es un sistema fundamental de la ecuación dada.*

Circuito eléctrico simple: Circuito RLC (en serie)

- Existe una fuente (de tensión) dada por una función $E(t)$ que produce una corriente de intensidad $i(t)$.
- Existe una resistencia de constante R: $E_R(t) = Ri(t)$.
- Existe una bobina (inductor) de constante L (inductancia): $E_L(t) = L\frac{di}{dt}(t)$.
- Existe un condensador de constante C (capacitancia) que produce una carga $q(t)$: $E_C(t) = \frac{1}{C}q(t)$.
- Segunda ley de Kirchhoff: $E(t) = E_R(t) + E_L(t) + E_C(t)$.

Circuito RLC (en serie)

- La ecuación que rige el circuito es
$$L\frac{di}{dt}(t)+Ri(t)+\frac{1}{C}q(t)=E(t). \tag{2}$$
- Teniendo en cuenta que $i(t)=\frac{dq}{dt}(t)$, podemos tener una ecuación de segundo orden para $q(t)$,
$$L\frac{d^2q}{dt^2}(t)+R\frac{dq}{dt}(t)+\frac{1}{C}q(t)=E(t), \tag{3}$$
o para $i(t)$,
$$L\frac{d^2i}{dt^2}(t)+R\frac{di}{dt}(t)+\frac{1}{C}i(t)=\frac{dE}{dt}(t). \tag{4}$$
Según se quiera determinar $q(t)$ o $i(t)$ se usará una u otra.

Circuitos eléctricos: casos particulares

- Circuito RL
  - Si suponemos que no hay condensador, de (2) se sigue que $i(t)$ debe verificar la ecuación
$$L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = E(t). \tag{5}$$
- Circuito RC
  - Si suponemos que no hay bobina, de (3) se sigue que $q(t)$ debe verificar la ecuación
$$R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t). \tag{6}$$

Oscilador libre no amortiguado

- Sea un sistema compuesto por un muelle (con constante elástica $k > 0$) y una masa m unida al muelle.
- Si el sistema está en equilibrio (posición $x = 0$), entonces el muelle no ejerce fuerza sobre la masa.
- Si la masa se desplaza una distancia x, entonces el muelle ejerce una fuerza sobre la masa igual a $-kx$. (El signo (-) indica que se opone al movimiento.)
- Si suponemos que no hay rozamiento entonces, por la segunda ley de Newton, la masa se mueve según la ecuación
$$mx'' = -kx. \tag{7}$$
- Para simplificar el estudio, se toma la ecuación
$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{8}$$
donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Oscilador libre amortiguado

- Si en el sistema anterior hay un rozamiento proporcional a la velocidad del desplazamiento (según una constante $c > 0$), entonces la masa se mueve según la ecuación

$$mx'' = -cx' - kx. \tag{9}$$

- De nuevo, para simplificar el estudio, se considera la ecuación

$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = 0, \tag{10}$$

  donde $2b = \frac{c}{m}$.

- En la relación de ejercicios de este tema se verá como influye el valor de $b^2 - \omega^2$ en el comportamiento de las oscilaciones.

Oscilador forzado

- Si en el sistema del oscilador libre (amortiguado) interviene una fuerza externa dada por la función $F(t)$, entonces la masa se mueve según la ecuación del oscilador forzado amortiguado,

$$mx'' = -cx' - kx + F(t). \tag{11}$$

- Una vez más, para simplificar el estudio, se considera la ecuación

$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = f(t), \tag{12}$$

  donde $f(t) = \frac{1}{m}F(t)$.

- Como caso particular tenemos el oscilador forzado no amortiguado (esto es, sin rozamiento) que viene modelado por la ecuación

$$x'' + \omega^2 x = f(t). \tag{13}$$

- Esta es una ecuación diferencial lineal del tipo
$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 t x' + a_0 x = 0, \tag{14}$$
donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- Es conveniente observar que las soluciones de estas ecuaciones admiten dos intervalos maximales posibles: $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$ y $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$.

- Si consideramos el intervalo $]0, +\infty[$ y el cambio de variable independiente $t = t(s) = e^s$ con cambio inverso $s = s(t) = \ln(t)$, entonces la ecuación (14) se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes.

- Ejemplo.
    - Sea la ecuación $t^2 x''(t) - 3tx'(t) + 4x(t) = 0$.
    - Para efectuar el cambio, escribimos $x(t) = x(s(t))$ y derivamos dos veces.
        - $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{1}{t}$.
        - $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{1}{t} + \frac{dx}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{1}{t}\right)^2 - \frac{dx}{ds}\frac{1}{t^2}$.
    - Sustituyendo en la ecuación original, tenemos
    $$t^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{1}{t^2} - \frac{dx}{ds}\frac{1}{t^2}\right) - 3t\left(\frac{dx}{ds}\frac{1}{t}\right) + 4x = 0 \Rightarrow x''(s) - 4x'(s) + 4x(s) = 0.$$
    - Un sistema fundamental de esta ecuación es $\left\{e^{2s}, se^{2s}\right\}$.
    - Deshaciendo el cambio, un sistema fundamental de la ecuación original es $\left\{t^2, t^2\ln(t)\right\}$.

- R. Ortega. “Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 2”. http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec2.pdf.
- R. Ortega. “Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 5”. http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec5.pdf.
- R. Ortega. “Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 6”. http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec6.pdf.
- G.F. Simmons. “Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas (Segunda edición)”. McGraw-Hill, 2002.
- D.G. Zill. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Octava edición)”. Cengage Learning, 2009.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.