“Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico”

Tema 3. La ecuación diferencial lineal (primera parte)

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

3.1. Ecuación lineal de primer orden.

3.2. Ecuaciones lineales de orden *n*. Existencia y unicidad de solución.

3.3. Estructura algebraica del conjunto de soluciones.

3.4. La ecuación lineal homogénea. Sistema fundamental.
Independencia lineal de funciones. (El wronskiano.)

- Como vimos en el tema anterior, son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{1}$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en I (intervalo abierto).

- Se llama ecuación lineal homogénea asociada a (1) a la ecuación

$$x' = a(t)x. \tag{2}$$

- Todas las soluciones de (1) y (2) están definidas en el intervalo I.
- Sean $Z_0 = \{\text{Soluciones de (2)}\}$ y $Z_b = \{\text{Soluciones de (1)}\}$.
Se puede comprobar en cualquier ejemplo que,
  - *i)* si $x_h(t) \not\equiv 0$ es una solución de (2), entonces $Z_0 = \{Kx_h \mid K \in \mathbb{R}\}$;
  - *ii)* si $x_p(t)$ es una solución de (1), entonces $Z_b = \{x_p + Kx_h \mid K \in \mathbb{R}\}$.

1. $x' = x + t^2 - 2t - 2$ (completa)
   - $x' = x$ (homogénea)
   - Ambas ecuaciones están definidas en $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
     - ★ $Z_0 = \{Ke^t \mid K \in \mathbb{R}\}$
     - ★ $Z_b = \{Ke^t - t^2 + 2 \mid K \in \mathbb{R}\}$
     - ★ Todas las soluciones están definidas en $I = \mathbb{R}$.

2. $x' = x\,\mathrm{tg}(t) + 2$ (completa)
   - $x' = x\,\mathrm{tg}(t)$ (homogénea)
   - Ambas ecuaciones están definidas en $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$.
     - ★ $Z_0 = \left\{K \frac{1}{\cos(t)} \mid K \in \mathbb{R}\right\}$
     - ★ $Z_b = \left\{K \frac{1}{\cos(t)} + 2\,\mathrm{tg}(t) \mid K \in \mathbb{R}\right\}$
     - ★ Todas las soluciones están definidas en $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- Cuando no conozcamos ninguna solución particular a priori, podemos resolver (1) mediante el siguiente proceso.

  1. Resolvemos (2) como una ecuación en variables separadas. Así obtenemos
  $$x(t) = Ke^{A(t)},\ \forall t \in I,\ K \in \mathbb{R},$$
  donde $A(t)$ es una primitiva cualquiera de $a(t)$.
  2. Aplicamos a (1) el cambio de variable $x = ye^{A(t)}$.
  $$\left.\begin{array}{l} x' = y'e^{A(t)} + ye^{A(t)}A'(t) = y'e^{A(t)} + ye^{A(t)}a(t) \\ a(t)x + b(t) = a(t)ye^{A(t)} + b(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
  $$y'e^{A(t)} + ye^{A(t)}a(t) = a(t)ye^{A(t)} + b(t) \Rightarrow y'e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow$$
  $$y' = b(t)e^{-A(t)} \Rightarrow y(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt + K,\ K \in \mathbb{R}.$$
  3. Deshaciendo el cambio, tenemos la familia de soluciones de (1).
  $$x(t) = Ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}\,dt,\ \forall t \in I,\ K \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo

- Consideramos la ecuación $x' = x + t^2 - 2t - 2$ (definida en $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

1. Resolvemos la homogénea asociada.

$$x' = x \Rightarrow x(t) = Ke^t,\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

2. Aplicamos el cambio de variable $x = ye^t$ en la ecuación completa.

$$x' = y'e^t + ye^t = x + t^2 - 2t - 2 = ye^t + t^2 - 2t - 2 \Rightarrow$$
$$y'e^t = t^2 - 2t - 2 \Rightarrow y' = (t^2 - 2t - 2)e^{-t} \Rightarrow$$
$$y = \int (t^2 - 2t - 2)e^{-t}\, dt \Rightarrow$$
$$y(t) = (2 - t^2)e^{-t} + K,\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

3. Deshaciendo el cambio, las soluciones buscadas son

$$x(t) = 2 - t^2 + Ke^t,\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

- Son ecuaciones diferenciales de la forma
$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{3}$$
donde $n \geq 1$ es un número natural y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en I (intervalo abierto).

- Se llama ecuación lineal homogénea asociada a (3) a la ecuación
$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \tag{4}$$

- Diremos que (3) es completa si $b(t) \not\equiv 0$
(es decir, si $b(t)$ no es la función constantemente igual a cero).

- Ejemplos
  1) $x'' + x = \mathrm{sen}(t)$ $\quad (a_1(t) = 0,\ a_0(t) = 1,\ b(t) = \mathrm{sen}(t),\ I = \mathbb{R})$
  2) $x'' + x = 0$ $\quad (a_1(t) = 0,\ a_0(t) = 1,\ b(t) = 0,\ I = \mathbb{R})$
  3) $x' - \frac{1}{t}x = \ln(t)$ $\quad (a_0(t) = -\frac{1}{t},\ b(t) = \ln(t),\ I = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[)$
  4) $x''' + t^2x' + x = \cos(t)$ $\quad (a_2(t) = 0,\ a_1(t) = t^2,\ a_0(t) = 1,\ b(t) = \cos(t),\ I = \mathbb{R})$

- Definimos el operador diferencial $L : C^n(I) \to C(I)$ como

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

- Recordemos que $C(I)$ y $C^n(I)$ son espacios vectoriales
(con las operaciones habituales: suma de funciones y producto por números reales).

- Es fácil comprobar que L es una aplicación lineal.
$\left(L[x+y] = L[x] + L[y],\ L[\lambda x] = \lambda L[x],\ \forall x, y \in C^n(I), \forall \lambda \in \mathbb{R}\right)$

- Con esta notación, una ecuación diferencial lineal viene dada por la expresión

$$L[x] = b(t).$$

- Ejemplos (ver la página anterior)
  1) $L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ L[x] = x'' + x \quad \Rightarrow \quad L[x] = \operatorname{sen}(t)$
  2) $L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ L[x] = x'' + x \quad \Rightarrow \quad L[x] = 0$
  3) $L : C^1(\mathbb{R}^+) \to C(\mathbb{R}^+),\ L[x] = x' - \frac{1}{t}x \quad \Rightarrow \quad L[x] = \ln(t)$
  4) $L : C^3(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}),\ L[x] = x''' + t^2x' + x \quad \Rightarrow \quad L[x] = \cos(t)$

- Definimos el operador diferencial $L : C^1(I) \to C(I),\ L[x] = x' + x$.

  1) $L[e^t] = e^t + e^t = 2e^t$.

  2) $L[\text{sen}(t)] = \cos(t) + \text{sen}(t)$.

  3) Consideremos la función
  $$f(t) = \begin{cases} -t, & \text{si } t < 0, \\ t, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

  - ★ Es claro que f pertenece a $C(\mathbb{R})$ pero no a $C^1(\mathbb{R})$.
  - ★ $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ es una función de $C^1(\mathbb{R})$ pero no de $C^2(\mathbb{R})$. (Recuerda el Teorema fundamental del cálculo.)
  - ★ $L(F) = f + F$ pertenece a $C(\mathbb{R})$ pero no a $C^1(\mathbb{R})$.

Resultado (Teorema de existencia y unicidad)

- *Sea el operador* $L : C^n(I) \to C(I)$ *(donde* I *es un intervalo abierto) definido por*

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

Sea la función $b \in C(I)$*. Supongamos que* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ *son valores prefijados y que* $t_0 \in I$*.*

Entonces existe una única función $x \in C^n(I)$ *que*

i) *es solución de la ecuación* $L[x] = b(t)$*;*

ii) *cumple la condición inicial*

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

- Ejemplos

1) $x' - \frac{1}{t}x = \ln(t),\ x(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{t}{2}(\ln(t))^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$

2) $x'' + x = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\cos(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$

- Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$

- Sea el operador diferencial lineal $L : C^n(I) \to C(I)$ asociado

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

- Sea el conjunto $Z_b = \{\text{Soluciones de } L[x] = b\}$.
- Entonces
  - $Z = Z_0 = \{\text{Soluciones de } L[x] = 0\} = \{\text{Soluciones de la homogénea}\}$ tiene estructura de espacio vectorial.
    ($x + y, \lambda x \in Z, \ \forall x, y \in Z, \forall \lambda \in \mathbb{R}$)
  - $Z_b = \{\text{Soluciones de } L[x] = b\} = \{\text{Soluciones de la completa}\}$ tiene estructura de espacio afín (supuesto $b \not\equiv 0$).
    ($Z_b = x_p + Z_0,$ siendo x_p una solución particular de la completa, es decir, $L[x_p] = b$)

- La estructura de los conjuntos Z_b se puede justificar haciendo cuentas directamente.
- En el caso $Z = Z_0$ tenemos que
  - la suma de dos soluciones es otra solución;
  - el producto de una solución por un número (real) es otra solución.

- Pero nosotros vamos a aplicar el Álgebra Lineal.
  - Sean V, W espacios vectoriales.
  - Sea $L : V \to W$ una aplicación lineal.
  - Entonces
    - ★ $\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V;
    - ★ $L^{-1}(w) = \{v \in V \mid L(v) = w\}$ es un subespacio afín (supuesto $w \neq 0$).

- En nuestro caso basta tomar

  $$V = C^n(I), \;\; W = C(I), \;\; Z = \ker(L) \;\text{ y }\; Z_b = L^{-1}(b) \;\; (\text{para } b \not\equiv 0),$$

  siendo $L : C^n(I) \to C(I)$ el operador diferencial lineal asociado a la ecuación diferencial lineal.

- Sabemos que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea tiene estructura de espacio vectorial.
- Vamos a usar de nuevo el Álgebra Lineal para justificar que, si tenemos una ecuación de orden n, entonces $\dim(Z) = n$.

- Recordatorio.
  - Sean V, W espacios vectoriales (de dimensión finita).
  - Sea $L : V \to W$ un isomorfismo (es decir, una aplicación lineal y biyectiva).
  - Entonces V y W tienen la misma dimensión.

- En nuestro caso basta considerar el isomorfismo (fijado $t_0 \in I$)

$$\Phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^n, \; x \mapsto \big(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)\big),$$

  esto es, Φ_{t_0} asigna a cada solución su condición inicial en el punto t_0.

- Φ_{t_0} es un isomorfismo gracias al Teorema de existencia y unicidad.

1) Consideremos la ecuación diferencial $x' + x = 0$.

- $Z = \left\{ke^{-t} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.
- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z \to \mathbb{R},\ x(t) = ke^{-t} \mapsto x(0) = k$.
- $t_0 = 1 \Rightarrow \Phi_1 : Z \to \mathbb{R},\ x(t) = ke^{-t} \mapsto x(1) = ke^{-1}$.

2) Consideremos la ecuación diferencial $x'' + x = 0$.

- $Z = \left\{k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mid k \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z \to \mathbb{R}^2,\ x(t) = k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mapsto (x(0), x'(0)) = (k_2, k_1)$.
- $t_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi_{\frac{\pi}{2}} : Z \to \mathbb{R}^2,\ x(t) = k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mapsto \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (k_1, -k_2)$.

Sistema fundamental

- Recordemos que
  - todos los espacios vectoriales (de dimensión finita) tienen una base (finita);
  - en una base hay tantos elementos como dimensión del espacio vectorial considerado;
  - una base nos permite conocer todos los elementos de un espacio vectorial a partir de unos pocos (justo los de la base);

- Por tanto, dada una ecuación lineal homogénea, sería interesante saber calcular una base de Z.
- Estas bases se denominan *"sistema fundamental"* de la ecuación diferencial considerada.
- Ejemplos
  1) $\left\{e^{-t}\right\}$ es un sistema fundamental de la ecuación $x' + x = 0$.
  2) $\{\text{sen}(t), \cos(t)\}$ es un sistema fundamental de la ecuación $x'' + x = 0$.
  3) $\{\text{sen}(t) + \cos(t), \text{sen}(t) - \cos(t)\}$ es un sistema fundamental de $x'' + x = 0$.

- Recordemos que los isomorfismos entre espacios vectoriales transforman bases en bases.

1) Consideremos la ecuación diferencial $x' + x = 0$.

- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z \to \mathbb{R}$, $x(t) = e^{-t} \mapsto x(0) = 1$.
- $\{1\}$ es una base de $\mathbb{R} \Rightarrow \left\{e^{-t}\right\}$ es una base de $Z = \left\{ke^{-t} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.

2) Consideremos la ecuación diferencial $x'' + x = 0$.

- $t_0 = 0 \Rightarrow \Phi_0 : Z \to \mathbb{R}^2$,
  - $x(t) = \operatorname{sen}(t) \mapsto (\operatorname{sen}(0), \operatorname{sen}'(0)) = (0,1)$.
  - $x(t) = \cos(t) \mapsto (\cos(0), \cos'(0)) = (1,0)$.
- $\{(0,1),(1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

  $\{\operatorname{sen}(t), \cos(t)\}$ es una base de $Z = \left\{k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) \mid k \in \mathbb{R}^2\right\}$.

- Recordemos que, si V es un espacio vectorial de dimensión r,
  - una base de V tiene r elementos;
  - los elementos de una base son linealmente independientes.
- Por tanto, r elementos de un espacio vectorial r-dimensional V, que sean linealmente independientes, forman una base de V.

Resultado

- *Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, si calculamos n soluciones linealmente independientes, entonces tendremos un sistema fundamental de dicha ecuación.*

Pregunta

- ¿Que significa ser "linealmente independientes" cuando nos referimos a funciones?

Definición

- *Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ funciones pertenecientes a $C^n(I)$. Diremos que son linealmente independientes si la igualdad funcional*

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_r\varphi_r(t) = 0, \ \forall t \in I,$$

es sólo posible si $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$.

Resultado

- *Dos funciones no son linealmente independientes (es decir, son linealmente dependientes) si, y sólo si, una es múltiplo de la otra.*

- Ejemplos
  1) $\{1, t\}$ son funciones linealmente independientes.
  2) $\{\mathrm{sen}(t), \cos(t)\}$ son funciones linealmente independientes.
  3) $\{\mathrm{sen}(t), 2\,\mathrm{sen}(t)\}$ no son funciones linealmente independientes.

- Comprobemos que $\{1, t, t^2, t^3\}$ son cuatro funciones linealmente independientes en $C^3(\mathbb{R})$.
- Consideramos la combinación lineal
$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$
- Derivando tres veces sucesivamente, obtenemos el sistema
$$\left.\begin{aligned} c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 = 0 \\ 2c_2 + 6c_3 t = 0 \\ 6c_3 = 0 \end{aligned}\right\},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$
- Resolviendo de abajo arriba, tenemos que $c_3 = c_2 = c_1 = c_0 = 0$.

Ejemplo (los dominios influyen)

- Consideramos las leyes
  - $x(t) = 1$.
  - $y(t) = \begin{cases} 1 + t + e^{-t}, & \text{si } t \leq 0, \\ 2, & \text{si } t > 0. \end{cases}$
- $\{x(t), y(t)\}$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.
- $\{x(t), y(t)\}$ son linealmente dependientes en $C^1(\mathbb{R}^+)$.

- Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funciones pertenecientes a $C^{n-1}(I)$.
- Sea la combinación lineal
$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) = 0, \ \forall t \in I.$$
- Derivando $n-1$ veces esta expresión, obtenemos el sistema
$$\left.\begin{array}{r} c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) = 0 \\ c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) + \cdots + c_n\varphi_n'(t) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{array}\right\}, \ \forall t \in I.$$
- Consideremos que (para cada $t \in I$) este es un sistema donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son las incógnitas y la matriz de coeficientes está dada por
$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$
- Si el determinante de esta matriz fuera distinto de cero para algún $t \in I$, tendríamos que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ y, por tanto, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ serían linealmente independientes.

Definición

- Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funciones pertenecientes a $C^{n-1}(I)$.
- Llamaremos "wronskiano" de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a la función

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \forall t \in I.$$

Resultado

- Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funciones pertenecientes a $C^{n-1}(I)$.
- Si $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t)$ es distinto de cero (para algún $t \in I$) entonces $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son linealmente independientes.

- $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

- $\varphi_1(t) = \mathrm{sen}(t)$, $\varphi_2(t) = \cos(t)$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\mathrm{sen}(t) \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

- $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^2$, $\varphi_4(t) = t^3$ son linealmente independientes en $C^3(\mathbb{R})$.

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

- ¿Qué puedes decir sobre $\varphi_1(t) = 2t^2$, $\varphi_2(t) = t|t|$ como funciones de $C^1(\mathbb{R})$?
  ¿Y si las consideras funciones de $C^1(\mathbb{R}^+)$ o $C^1(\mathbb{R}^-)$?

Resultado

- *Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n ("definida" en un intervalo abierto I), es decir, elementos del espacio Z asociado a dicha ecuación.*
- *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*
  1) *$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son linealmente independientes en $C^{n-1}(I)$.*
  2) *$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t)$ es distinto de cero para todo $t \in I$.*
  3) *$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t_*)$ es distinto de cero para algún $t_* \in I$.*

- ¡OJO! Este resultado sólo es válido para conjuntos de funciones que sean solución de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Justificación del resultado

1) $\Rightarrow$ 2) A partir de los isomorfismos $\Phi_t : Z \to \mathbb{R}^n$.

2) $\Rightarrow$ 3) Evidente.

3) $\Rightarrow$ 1) A partir del resultado de la página 22.

Ejemplo

- Sean las funciones $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^3$. Su wronskiano es

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{vmatrix} = 2t^3 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0.$$

- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ son linealmente independientes en $C^1(\mathbb{R})$.
- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ no pueden ser soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos en $\mathbb{R}$.
- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sí pueden ser soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes continuos en intervalos que no contengan al cero. Por ejemplo,

$$x'' - \frac{3}{t}x' + \frac{3}{t^2}x = 0.$$

- $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sí pueden ser soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden superior a dos con coeficientes continuos en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, de la ecuación

$$x^{(4)} = 0.$$

En este caso $\{1, t, t^2, t^3\}$ es un sistema fundamental (teniéndose en cuenta el ejemplo de la página 19).

Referencias

- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 2". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec2.pdf.
- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 5". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec5.pdf.
- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 6". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec6.pdf.
- G.F. Simmons. "Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas (Segunda edición)". McGraw-Hill, 2002.
- D.G. Zill. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Octava edición)". Cengage Learning, 2009.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.