"Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico"

Tema 2. Métodos elementales de integración de ecuaciones diferenciales (de primer orden)

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

2.1. Cálculo de primitivas.

2.2. Cambio de variable (primera parte).
Cambio de incógnita con respecto a la incógnita.

2.3. Ecuaciones en variables separadas.

2.4. Cambio de variable (segunda parte).
Cambio de incógnita con respecto a la incógnita y la variable.

2.5. Ecuaciones homogéneas.

2.6. Ecuaciones lineales de primer orden.

- Las e.d.o. de primer orden más simples son las del tipo

$$x' = f(t) \quad (x'(t) = f(t)).$$

- Las soluciones para estas ecuaciones se corresponden con el cálculo de primitivas.

$$x(t) = \int f(t) + C.$$

- Un recurso habitual en el cálculo de primitivas es emplear cambios de variable.

Ejemplos

- $x' = 2 \Rightarrow x(t) = 2t + C$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
- $x' = t^3 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{4}t^4 + C$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.
- $x' = 2t\,\mathrm{sen}(1+t^2) \Rightarrow x(t) = -\cos(1+t^2) + C$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

  $\left(\int 2t\,\mathrm{sen}(1+t^2)\,dt = [u = 1+t^2] = \int \mathrm{sen}\,u\,du = -\cos u = -\cos(1+t^2)\right)$
- $x' = \frac{1}{t^2\sqrt{4-t^2}} \Rightarrow x(t) = \frac{-\sqrt{4-t^2}}{4t} + C$, $\forall t \in$ ¿? , $C \in \mathbb{R}$.

  ¿Cuál es el intervalo maximal de definición de esta familia de soluciones? Comprueba que hay dos intervalos maximales y que no dependen de la elección de C.

  $$\left(\int \frac{1}{t^2\sqrt{4-t^2}}\,dt = [t = 2\cos(u)] = \int \frac{-2\,\mathrm{sen}(u)}{4\cos^2(u)\,2\,\mathrm{sen}(u)}\,du = \int \frac{-1}{4\cos^2(u)}\,du = \frac{-1}{4}\,\mathrm{tg}(u) = \frac{-\sqrt{4-t^2}}{4t}\right)$$
- $x' = 2x$ no es una ecuación que se pueda resolver así.

  (¿Qué sentido tiene la expresión $x = x^2 + C$?)

- Algunas veces no habrá expresión "explícita" de las soluciones.
- $x' = e^{-t^2} \Rightarrow x(t) = \int e^{-t^2} + C,\ \forall t \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$
  La primitiva de e^{-t^2} existe pero no se puede expresar en términos de funciones elementales.

Resultado (Teorema fundamental del cálculo)

- *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Sea $t_0 \in I$ un punto fijo. Entonces la función*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds,\ \forall t \in I,$$

es una función de clase $C^1(I)$. Además, $F'(t) = f(t),\ \forall t \in I$.

- Como $f(t) = e^{-t^2},\ \forall t \in \mathbb{R}$, es continua, una primitiva suya es

$$F(t) = \int_0^t e^{-s^2}\,ds,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Nuestro objetivo es transformar una e.d.o. dada, que no sabemos resolver, en otra e.d.o que sí sepamos integrar.

- Consideramos la ecuación
$$x' = f(t,x). \tag{1}$$
- Cambiamos de incógnita por medio de la ley $x = \phi(y)$.
$$x' = \phi'(y)y' \text{ (Regla de la cadena)} \Rightarrow \phi'(y)y' = f(t,\phi(y)) \Rightarrow y' = \frac{f(t,\phi(y))}{\phi'(y)}$$
- La nueva ecuación es $\left(\text{siendo } g(t,y) = \frac{f(t,\phi(y))}{\phi'(y)}, \text{ con } \phi'(y) \neq 0\right)$
$$y' = g(t,y). \tag{2}$$
- Una vez resuelta (2), las soluciones de (1) se obtienen a partir de ϕ.

- Sea una función (el cambio) $\phi :]c,d[\to]a,b[$, $y \mapsto x = \phi(y)$, tal que
  1. ϕ es una biyección de $]c,d[$ en $]a,b[$, con inversa $\phi^{-1} = \psi$;
  2. $\phi \in C^1(]c,d[)$;
  3. $\phi'(y) \neq 0$, $\forall y \in]c,d[$.
- Dada la ecuación $(1), x' = f(x,t)$, el cambio lleva a la ecuación (2),

$$y' = g(t,y) = \frac{1}{\phi'(y)} f(t,\phi(y)).$$

- Si $y(t)$ es solución de (2), entonces $x(t) = \phi(y(t))$ es solución de (1).
- Además, si $x(t)$ es solución de (1), entonces $y(t) = \psi(x(t))$ es solución de (2).

- Las condiciones 2 y 3 permiten que la ecuación (2) esté bien definida.
- La condición 1 permite interrelacionar las soluciones de (1) y (2).

- Consideremos la ecuación
$$x' = 2\sqrt{x}\cos(t). \tag{3}$$
- Tomemos el cambio $\phi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $y \mapsto x = \phi(y) = y^2$.
- Aplicando el cambio:
$$x' = 2\sqrt{x}\cos(t) \Rightarrow 2yy' = 2\sqrt{y^2}\cos(t) = 2y\cos(t) \Rightarrow y' = \cos(t).$$
- Sabemos que $y(t) = \mathrm{sen}(t)$, $\forall t \in]0,\pi[$, es solución de $y' = \cos(t)$.
  - ¿Por qué tomamos el intervalo $]0,\pi[$?
  - ¿Podríamos considerar $\mathbb{R}$ como intervalo de definición de la solución?
- A partir del cambio, $x(t) = \mathrm{sen}^2(t)$, $\forall t \in]0,\pi[$, es solución de (3).

- Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = h(t)g(x), \tag{4}$$

donde $h :]r,s[\to \mathbb{R}$, $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas (dadas).

- El dominio de la ecuación (4) es el "rectángulo" $D =]r,s[\times]a,b[$.

- Ejemplos
  - $x' = tx$, $h(t) = t$, $g(x) = x$, $D = \mathbb{R}^2$.
  - $x' = tx$, $h(t) = \frac{1}{5}t$, $g(x) = 5x$, $D = \mathbb{R}^2$.
  - $x' = t\ln(x)$, $h(t) = t$, $g(x) = \ln(x)$, $D = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$.
  - $x' = \ln(x)$, $h(t) = 1$, $g(x) = \ln(x)$, $D = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$.
  - $x' = \sqrt{t}$, $h(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = 1$, $D =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.
  - $x' = e^{2t+3x}$, $h(t) = e^{2t}$, $g(x) = e^{3x}$, $D = \mathbb{R}^2$.
  - ¡Ojo! $x' = 2t + 3x$ no es de variables separadas.

- Consideramos la ecuación (4), $x' = h(t)g(x)$.
- En lugar de tomar $x = \phi(y)$, haremos la deducción con $y = \psi(x)^{(*)}$ (simplemente porque así es más directo el razonamiento).
- $y = \psi(x) \Rightarrow y' = \psi'(x)x' = \psi'(x)h(t)g(x) \Rightarrow y' = h(t)\,[\psi'(x)g(x)]$.
- Si conseguimos que $\psi'(x)g(x) = 1$, entonces nos queda la ecuación $y' = h(t)$, esto es, un "simple" cálculo de primitivas.
- Para que $\psi'(x)g(x) = 1$, basta con calcular la integral

$$\psi(x) = \int \frac{1}{g(x)}\,dx.$$

$^{(*)}$ Recuerda: ψ es la función inversa de ϕ.

Ejemplo 1 (de nuevo)

- Consideramos la ecuación (3)
$$x' = 2\sqrt{x}\cos(t).$$
- Tomamos $g(x) = 2\sqrt{x}$, $h(t) = \cos(t)$.
- Determinamos el cambio,
$$\psi(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; y = \psi(x) = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x = \phi(y) = y^2.$$
  ¿Cuáles son los dominios de definición de ψ y ϕ?
- Aplicando el cambio llegamos a la ecuación (ya conocida)
$$y' = \cos(t).$$

- Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = h(t)g(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

con $(t_0, x_0) \in]r, s[\times]a, b[$.

- Al resolver este problema surgen dos posibilidades.
  1. Si $g(x_0) = 0$ entonces $x(t) = x_0$, $\forall t \in]r, s[$, es solución (constante).
  2. Si $g(x_0) \neq 0$ entonces
     - el cambio $y = \psi(x)$ está bien definido (al menos, en un entorno de t_0);
     - la ecuación original se transforma en la ecuación $y' = h(t)$ (cuya solución es $y = \int h(t)\,dt + C$);
     - y, por último, si $\phi = \psi^{-1}$, la solución de (5) es $x(t) = \phi(y(t))$

       (función definida en un intervalo abierto I adecuado y donde C se determina a partir de la condición inicial).

- Sea la ecuación diferencial en variables separadas

$$x' = h(t)g(x).$$

Para resolverla se efectúan dos pasos:

1. Se calculan los ceros de la función $g(x)$. De esta forma obtenemos las soluciones constantes de la ecuación.
2. Para calcular el resto de soluciones (las no constantes),
   a) escribimos la ecuación en la forma $\frac{dx}{dt} = h(t)g(x)$;
   b) separamos los términos en t de los términos en x e integramos:
   $$\int \frac{1}{g(x)}\,dx = \int h(t)\,dt;$$
   c) si podemos efectuar las integrales, llegamos a la expresión
   $$G(x) = H(t) + C$$
   $\big($donde $G(x)$ es una primitiva de $\frac{1}{g(x)}$ y $H(t)$ lo es de $h(t)\big)$;
   d) finalmente, si podemos despejar x (es decir, si conocemos G^{-1}), tendremos una expresión explícita de la familia de soluciones de la ecuación dada.

Ejemplo 1 (una vez más)

- Resolvamos la ecuación (3)
$$x' = 2\sqrt{x}\cos(t).$$
- Consideraremos que el dominio de esta ecuación es $D = \mathbb{R}\times]0,\infty[$.

  1. La función $g(x) = \sqrt{x}$ no se anula en $]0,\infty[$. Por tanto la ecuación no tiene soluciones constantes.
  2. Para calcular el resto de soluciones (las no constantes)
     a) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}\cos(t)$;
     b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int \cos(t)\,dt$;
     c) $\sqrt{x} = \mathrm{sen}(t) + C$;
     d) $x(t) = (\mathrm{sen}(t) + C)^2$, $\forall t \in I$.
     (Determina, para cada valor del parámetro C, el intervalo maximal I.)

Ejemplo: una ecuación ya conocida

- Sea la ecuación $x' = \lambda x$ (donde λ es un parámetro real).
- El dominio de esta ecuación es $D = \mathbb{R}^2$.
- Si $\lambda = 0$, entonces tenemos la ecuación $x' = 0$, que (sólo) admite por solución a cualquier función constante ($x(t) = C,\ \forall t \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}$).
- Consideremos ahora $\lambda \neq 0$.
  1. La función $g(x) = x$ se anula sólo en $x = 0$.

     Por tanto la única solución constante es $x(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ (*la solución trivial*).
  2. Resto de soluciones (las no constantes):
     a) $\frac{dx}{dt} = \lambda x$;
     b) $\int \frac{1}{x}\, dx = \int \lambda\, dt$;
     c) $\ln(|x|) = \lambda t + C,\ C \in \mathbb{R}$;
     d) $|x| = e^{\lambda t + C} = e^C e^{\lambda t} = Ke^{\lambda t},\ K > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm Ke^{\lambda t},\ K > 0 \Rightarrow$
     $x = Ke^{\lambda t},\ K \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ke^{\lambda t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \neq 0.$
  - Las expresiones dadas en 1 y 2 se unifican en la expresión

$$x(t) = Ke^{\lambda t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

- Importante:
  - $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)$ conduciría sólo a soluciones positivas.
  - $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|)$ dice que $\ln(-x)$ es la primitiva de $\frac{1}{x}$ en $\mathbb{R}^-$ y $\ln(x)$ lo es en $\mathbb{R}^+$.

- Consideramos la ecuación
$$x' = f(t,x). \tag{6}$$

- Cambiamos de incógnita por medio de la ley $x = \phi(t,y)$.

  (Consideramos $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función de clase $C^1(D)$ tal que $\frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y) \neq 0$.)
$$x' = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y)y' \;\Rightarrow\; \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y)y' = f(t,\phi(t,y)) \;\Rightarrow\; y' = \frac{f(t,\phi(t,y)) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y)}.$$

- La nueva ecuación es
$$y' = g(t,y), \tag{7}$$
  donde
$$g(t,y) = \frac{f(t,\phi(t,y)) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y)}.$$

- Una vez resuelta (7), las soluciones de (6) se obtienen a partir de ϕ.

Ejemplo 2

- Consideremos la ecuación
$$x' = x - t + 1. \tag{8}$$
- Tomemos el cambio $x = \phi(t, y) = y + t$.
- Aplicando el cambio:
$$x' = y' + 1 \Rightarrow y' + 1 = (y + t) - t + 1 = y + 1 \Rightarrow y' = y.$$
- Sabemos que $y(t) = Ke^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, es la familia de soluciones de $y' = y$.
- A partir del cambio, $x(t) = Ke^t + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, es la familia de soluciones de (8).

- Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = q\left(\frac{x}{t}\right), \tag{9}$$

donde $q :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ es una función continua (dada).

- Para que (9) esté bien definida es necesario que $t \neq 0$ y $\alpha < \frac{x}{t} < \beta$. Por tanto, hay dos posibles dominios maximales para (9).
    1. $D_+ = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0,\ \alpha < \frac{x}{t} < \beta\right\}$,
    2. $D_- = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0,\ \alpha < \frac{x}{t} < \beta\right\}$.

    ¿Qué puedes decir sobre los dominios si $\alpha = -\infty$ y/o $\beta = +\infty$?

- Ejemplos (describe los dominios en cada ecuación)
    - $x' = \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{x}$ $\left(\text{en esta ecuación } q(\xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi}\right)$.
    - $x' = \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}$ $\left(\text{en esta } q(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}\right)$.
    - $x' = \cos(\frac{x}{t}) + \operatorname{sen}(\frac{t}{x})$ $\left(\text{aquí } q(\xi) = \cos(\xi) + \operatorname{sen}(\frac{1}{\xi})\right)$.

- Un tipo particular de ecuaciones homogéneas son las dadas por

$$x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}, \tag{10}$$

donde P y Q son funciones homogéneas del mismo grado. En tal caso, si $\lambda > 0$ y $m \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^m P(t,x),\ Q(\lambda t, \lambda x) = \lambda^m Q(t,x).$$

- Un caso habitual es que P y Q sean polinomios en dos variables.

- Ejemplos (describe los dominios en cada ecuación)
  - $x' = \frac{xt}{t^2+x^2} \qquad \left(q(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^2}\right).$
  - $x' = \frac{x^2}{t^2+x^2} \qquad \left(q(\xi) = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right).$
  - Algunas veces aparecen escritas de forma “algo diferente”: $x^2 dt - (t^2 + x^2) dx = 0$.

- Sea la ecuación diferencial homogénea

$$x' = q\left(\frac{x}{t}\right).$$

Consideramos el cambio $y = \frac{x}{t}$ y hacemos los cálculos con el cambio inverso $x = ty$.

1. Derivamos en el cambio (con respecto a t): $x' = y + ty'$.
2. Sustituimos en la ecuación y despejamos:

$$y + ty' = q(y) \Rightarrow y' = \frac{q(y) - y}{t}.$$

3. Resolviendo la ecuación en variables separadas resultante, obtenemos las soluciones $y = y(t)$.
4. Deshacemos el cambio y tenemos las soluciones de la ecuación original, $x(t) = ty(t)$.
5. Comprobamos que efectivamente las funciones obtenidas son las adecuadas (dominios, satisfacer la ecuación, etc.)

Ejemplo 3

- Consideremos la ecuación
$$x' = \frac{x}{t} + \frac{t}{x}. \tag{11}$$
- Tomamos el cambio $y = \frac{x}{t}$. Equivalentemente, $x = yt$.
- Aplicando el cambio llegamos a la ecuación en variables separadas
$$x' = y't + y \Rightarrow y't + y = y + \frac{1}{y} \Rightarrow y' = \frac{1}{ty}. \tag{12}$$
- Resolviendo (12): $y(t) = \pm\sqrt{2\ln(|t|) + C}$, $\forall t \in I$, $C \in \mathbb{R}$.
- A partir del cambio, $x(t) = \pm t\sqrt{2\ln(|t|) + C}$, $\forall t \in I$, $C \in \mathbb{R}$, es la familia de soluciones de la ecuación (11).

  (Determina los intervalos I adecuados para que efectivamente tengamos soluciones de (11).)

- Son ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{13}$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en I (intervalo abierto).

- Para resolverlas podemos seguir el siguiente procedimiento.
  1. Supuesto que $x_p(t)$ es una solución conocida, se aplica el cambio $x = y + x_p(t)$.
  2. Al aplicar el cambio se obtiene la ecuación en variables separadas $y' = a(t)y$.
  3. Tras resolver esta segunda ecuación, se recuperan las soluciones de la original usando el cambio.
  4. Pero, ¿cómo obtenemos $x_p(t)$? A esto responderemos en el Tema 3.
     (Como adelanto, es conveniente hacer los ejercicios 3 y 4 de la relación del Tema 2.)

Referencias

- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 1". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec1.pdf.
- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 2". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec2.pdf.
- R. Ortega. "Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 3". http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec3.pdf.
- D.G. Zill. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Octava edición)". Cengage Learning, 2009.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.