“Ecuaciones diferenciales y cálculo numérico”

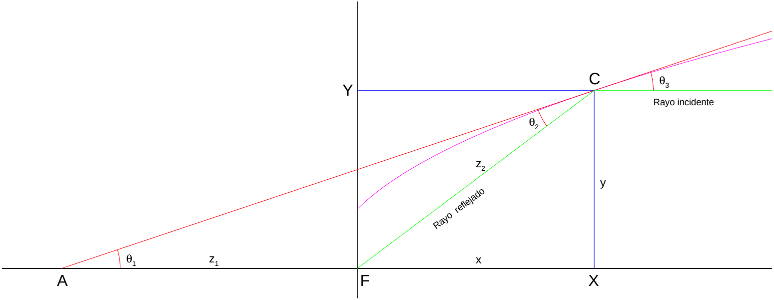
Tema 1. Ecuaciones diferenciales ordinarias: primeros conceptos y ejemplos

(Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación)

1.1. Introducción: ¿Por qué las antenas parabólicas sólo son parabólicas?

- Cuando se diseña una antena, el objetivo es conseguir que las ondas se reflejen en ella y converjan en el foco.
- Es sabido que la forma parábolica nos permite cumplir dicho objetivo.
- Pero, ¿es posible conseguirlo con una forma diferente de la antena?

- Consideremos la siguiente representación esquemática.



  - La curva $y = y(x)$ que determinará la antena aparece en color magenta.
  - (X,Y) es un punto cualquiera de la curva.
  - En color rojo aparece la tangente a la curva en el punto (X,Y).
  - F es el foco (situado en el origen de coordenadas).
  - z_1 = dist(A,F), z_2 = dist(C,F).
  - x = dist(F,X) = dist(Y,C), y = dist(C,X) = dist(F,Y).

- Observemos que
  - por reflexión: $\theta_2 = \theta_3$;
  - por paralelismo de rectas: $\theta_1 = \theta_3$.

  Como consecuencia $\theta_1 = \theta_2$ y ACF es un triángulo isósceles cuyos lados AF y FC son de igual longitud, o sea, $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$.

- Por otro lado, tenemos que
  - la pendiente de la recta tangente en el punto (X,Y) es la derivada y' de la curva en dicho punto;
  - dicha pendiente también es igual a $\mathrm{tg}(\theta_1) = \frac{y}{z_1+x}$.

- Por último, FCX es un triángulo rectángulo, por lo que $\mathrm{z}_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

- Todo lo anterior, lleva a que cualquier curva, que permita alcanzar nuestro objetivo, debe ser solución de la ecuación diferencial
$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Definición

- *Una "ecuación diferencial" es una ecuación compuesta por una función incógnita (en una o varias variables) junto con varias derivadas o derivadas parciales de dicha función.*
- *Si la función incógnita depende de una sola variable, hablaremos de "ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.)".*
- *Si la función incógnita depende de varias variables, hablaremos de "ecuación en derivadas parciales (e.d.p.)".*

- En los Temas 1, 2, 3 y 4 nos dedicaremos al estudio de las e.d.o.
- En el Tema 5 veremos la expresión general de una e.d.p de segundo orden, por ser estas de gran utilidad en las aplicaciones.

Definición

- *Una e.d.o. es una expresión de la forma*

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \tag{1}$$

donde

  - *t es la variable independiente (usaremos la letra t pues, en general, se referirá al tiempo);*
  - *$x(t)$ es la función incógnita (por esto empleamos la letra x en lugar de cualquiera otra);*
  - *F es una función (conocida) en $n+2$ variables.*

Diremos que n es el orden *de la ecuación* (1).

1. $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1 \to$ Ecuación de primer orden autónoma (esto es, no depende explícitamente del tiempo).

$$F_1(t,x,x') = 1 - x^2 - (x')^2 \quad \left(F_1(x_1,x_2,x_3) = 1 - x_2^2 - x_3^2\right)$$

2. $x''(t) + \operatorname{sen}(x(t)) = 1 \to$ Ecuación de segundo orden autónoma.

$$F_2(t,x,x',x'') = 1 - \operatorname{sen}(x) - x'' \quad (F_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1 - \operatorname{sen}(x_2) - x_4)$$

3. $x''(t) + x(t) = 1 \to$ Ecuación de segundo orden autónoma (se dice que es la ecuación *linealizada* de la del ejemplo 2).

$$F_3(t,x,x',x'') = 1 - x - x'' \quad (F_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = 1 - x_2 - x_4)$$

4. $x'(t) - 2\frac{x(t)}{t} = 0 \to$ Ecuación de primer orden no autónoma (esto es, sí depende explícitamente del tiempo).

$$F_4(t,x,x') = x' - 2\frac{x}{t} \quad \left(F_4(x_1,x_2,x_3) = x_3 - 2\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Notación (es decir, cómo se escribe usualmente)

- En la mayoría de los ejemplos, "x" será la función y "t" la variable independiente.
- En algunos casos (problemas geométricos), emplearemos "y" para la función y "x" para la variable independiente.
- Usualmente, puesto que la variable independiente será bien conocida (t, el tiempo, en nuestro caso), no se suele escribir la ecuación incluyéndola explíctamente. Así, los ejemplos anteriores quedarían:
    1. $x^2 + (x')^2 = 1 \rightarrow$ (t no está, es una ecuación autónoma).
    2. $x'' + \mathrm{sen}(x) = 1$.
    3. $x'' + x = 1$.
    4. $x' - 2\frac{x}{t} = 0 \rightarrow$ (t sí está, es una ecuación no autónoma).

Primer acercamiento al "Concepto de solución"

1. $x(t) = 1$ es una solución de $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$ pues

$$x(t) = 1 \Rightarrow x'(t) = 0 \Rightarrow$$

$$F_1(t,1,0) = 1 - 1^2 - 0^2 = 0.$$

2. $x(t) = \frac{\pi}{2}$ es una solución de $x''(t) + \text{sen}(x(t)) = 1$ ya que

$$x(t) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x'(t) = 0 \Rightarrow x''(t) = 0 \Rightarrow$$

$$F_2(t,\frac{\pi}{2},0,0) = 1 - \text{sen}(\frac{\pi}{2}) - 0 = 0.$$

Primer acercamiento al "Concepto de solución" (sigue)

3. $x(t) = 1 + \cos(t) - \operatorname{sen}(t)$ es una solución de $x''(t) + x(t) = 1$ pues

$$x(t) = 1 + \cos(t) - \operatorname{sen}(t) \Rightarrow$$

$$x'(t) = -\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \Rightarrow x''(t) = -\cos(t) + \operatorname{sen}(t) \Rightarrow$$

$$F_3(t, 1 + \cos(t) - \operatorname{sen}(t), -\operatorname{sen}(t) - \cos(t), -\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) =$$

$$1 - (1 + \cos(t) - \operatorname{sen}(t)) - (-\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) = 0.$$

4. ¿Es $x(t) = t^2$ solución de $x' - 2\frac{x}{t} = 0$?
    - ¿Seguro?
    - ¿Qué ocurre si $t = 0$?

Definición

- *Diremos que una e.d.o. está en forma normal si la derivada de mayor orden está despejada, es decir, tenemos una expresión del tipo*

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

siendo f una función (conocida) en $n+1$ variables.

- Observemos que, en los ejemplos 2, 3 y 4 vistos anteriormente, es muy fácil obtener la forma normal de la ecuación.
- Por contra, en el ejemplo 1, tenemos un problema al intentar despejar x'. ¿Cuál es dicho problema?

- Para las e.d.o. de primer orden podemos dar definiciones más detalladas de los elementos de la ecuación y sobre qué se entiende por solución. Estas ecuaciones son las que veremos en el Tema 2.
- Sea la e.d.o de primer orden en forma normal
$$x' = f(t,x), \tag{3}$$
donde $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua que está definida en un subconjunto (abierto y arco-conexo) D de $\mathbb{R}^2$.
    - Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto si no contiene a su frontera.
    - Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es arco-conexo si cualesquiera dos puntos suyos se pueden unir mediante una "curva" completamente contenida en D.

  Diremos que D es el *dominio* de la ecuación (3).

- Diremos que D es el *dominio maximal* de (3) si no está contenido (propiamente) en ningún otro posible dominio de (3).

Definición

- *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Diremos que la función $x : I \to \mathbb{R}$ es solución de* (3) *si se satisfacen las siguientes condiciones:*
  1. $x \in C^1(I)$ *(esto es, tanto x como x' son continuas en I);*
  2. $(t, x(t)) \in D$, $\forall t \in I$;
  3. $x'(t) = f(t, x(t))$, $\forall t \in I$.

  Diremos que I es el dominio *o* intervalo de definición *de la solución.*

- Diremos que I es un *intervalo maximal de definición* de la solución x si no existe otro intervalo de definición J (de x) tal que $I \subsetneq J$.

Ejemplo

- Consideremos la ecuación
$$x' = 2\,\frac{x}{t}. \tag{4}$$
  - Posibles dominios (maximales) de la ecuación:
  $$\bullet\; D_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \qquad \bullet\; D_- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t < 0\}$$
  - Posibles soluciones de la ecuación:
  $$\bullet\; x_1(t) = t^2,\ \forall t \in]0,1[\qquad \bullet\; x_2(t) = t^2,\ \forall t \in]1,2[\qquad \bullet\; x_3(t) = t^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^+$$
  $$\bullet\; x_4(t) = t^2,\ \forall t \in]-5,-3[\qquad \bullet\; x_5(t) = t^2,\ \forall t \in]-4,-2[\qquad \bullet\; x_6(t) = t^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^-$$
  - ¿Cuáles son los posibles intervalos maximales de definición para que la ley $x(t) = t^2$ sea solución de (4)?

- En general, una ecuación diferencial posee infinitas soluciones.
- En el caso de las e.d.o. de primer orden, las soluciones se agrupan en familias dependientes de un parámetro (esto es, familias uniparamétricas de soluciones).
- ¿Cómo podemos distinguir entre las distintas soluciones?

Definición

- *Llamamos* condición inicial *a cualquier par de puntos* $(t_0, x_0) \in D$.

- Fijada una condición inicial, nuestra esperanza es poder distinguir una única solución de entre todas las soluciones posibles.

Definición

- *Llamaremos* Problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) *a una e.d.o. junto con una condición inicial, es decir, a*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Resultado

- *Supongamos que, en el problema de valores iniciales* (5)*, la función* $f(t,x)$ *es continua y admite derivada parcial con respecto a "x" también continua. Entonces dicho problema tiene una única solución.*

- Consideremos el p.v.i.

$$\begin{cases} x' = 5x, \\ x(2) = 3. \end{cases} \tag{6}$$

  - Todas las soluciones de la ecuación $x' = 5x$ son de la forma $x(t) = Ke^{5t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde K es un parámetro real.
  - La única solución del problema es $x(t) = 3e^{5(t-2)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Consideremos el p.v.i.

$$\begin{cases} x' = 3x^{2/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

  Este problema admite, al menos, dos soluciones:

  - $x_1(t) = t^3$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
  - $x_2(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Consideremos la ecuación (en realidad, familia de ecuaciones)

$$x' = \lambda x. \tag{8}$$

  - Su dominio (maximal) es $\mathbb{R}^2$.
  - Todas sus soluciones tienen a $\mathbb{R}$ como intervalo maximal de definición.
  - Según λ tome valores positivos, negativo o nulo, las soluciones de (8) tienen distintos comportamientos.

- Si $\lambda = 0$ queda la ecuación $x' = 0$, que admite como única familia de soluciones a las constantes (justamente, aquellas funciones cuya gráfica son rectas horizontales, es decir, de pendiente nula).

- Si $\lambda > 0$ podemos saber previamente que
  - si una solución es positiva entonces será una función creciente;
  - si una solución es negativa entonces será una función decreciente.

  Lo anterior está claro si tenemos en cuenta que todas las posibles soluciones son (para cada valor de λ) de la forma

$$x(t) = Ke^{\lambda t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

- Si $\lambda < 0$ entonces todas las soluciones son de la misma forma que en el caso anterior. Sin embargo, su comportamiento es el contrario, esto es,
  - si una solución es positiva entonces será una función decreciente;
  - si una solución es negativa entonces será una función creciente.

Comprobemos con un razonamiento muy simple que la ecuación (8) no admite más soluciones que las mostradas.

1. Supongamos que $h(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución de (8), esto es, $h'(t) = \lambda h(t)$.
2. Sea la función auxiliar $g(t) = e^{-\lambda t} h(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
3. Derivando, $g'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} h(t) + e^{-\lambda t} h'(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
4. De 1 y 3, se sigue que $g'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} h(t) + e^{-\lambda t} \lambda h(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
5. Tenemos así que $g'(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por tanto $g(t)$ es constante, esto es, $g(t) = K$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
6. De 2 y 5, concluimos que $e^{-\lambda t} h(t) = K$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$h(t) = K e^{\lambda t}, \; \forall t \in \mathbb{R},$$

   que es precisamente lo que prentendíamos probar.

- Si $\lambda < 0$, la ecuación (8) modeliza el fenómeno de la radiactividad$^{(*)}$:
  se considera que una sustancia radiactiva$^{(*)}$ se desintegra de forma proporcional a la cantidad de materia presente en cada instante.
- La eliminación de alcohol en sangre (aunque no es un fenómeno radiactivo$^{(*)}$) también se modeliza con esta ecuación.

$^{(*)}$ Los términos radioactividad, radioactiva y radioactivo también son correctos.

- R. Ortega. “Apuntes de Métodos matemáticos de la Física IV, Tema 1”. http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/Lec1.pdf.
- G.F. Simmons. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas”. McGraw Hill, 2002.

Apuntes de clase elaborados por Aureliano M. Robles Pérez.