

Los sistemas de Lotka-Volterra

En este tema vamos a estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= (a + bx(t) + cy(t))x(t) \\ y'(t) &= (d + ex(t) + fy(t))y(t) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales y $x(t), y(t)$ son funciones que representan a dos poblaciones que se interrelacionan. Por comodidad escribiremos

$$\left. \begin{aligned} x' &= (a + bx + cy)x \\ y' &= (d + ex + fy)y \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Interpretación de las constantes

Las constantes que aparecen en estos sistemas se pueden interpretar, en términos biológicos, de la siguiente forma:

- a está relacionada con la tasa de crecimiento intrínseca de la población representada por x
- b representa la influencia de la población representada por x sobre sí misma.
- c representa la influencia de la población representada por y sobre la población representada por x .
- d está relacionada con la tasa de crecimiento intrínseca de la población representada por y
- e representa la influencia de la población representada por x sobre la población representada por y .
- f representa la influencia de la población representada por y sobre sí misma.

Clasificación

Atendiendo a los signos de c y e , podemos elaborar la siguiente clasificación de la interrelación que se puede dar entre dos poblaciones:

		Signo de c			
		$\overbrace{\hspace{10em}}$			
		+	0	-	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Signo de e</div>	{	+	Mutualismo	Comensalismo	Antagonismo
		0	Comensalismo	Neutralismo	Amensalismo
		-	Antagonismo	Amensalismo	Competencia

Observaciones

Debemos considerar las siguientes observaciones con respecto a esta tabla:

- Esta clasificación es usual entre los ecólogos.
- Algunas veces emplearemos el término “cooperación” como sinónimo de “mutualismo”.
- Entre los microbiólogos se prefiere el término “simbiosis” al término “mutualismo”.
- Para los ecólogos una relación simbiótica es una relación “íntima” entre dos especies, pudiendo obtener un beneficio o un perjuicio.
- Un caso particular del antagonismo es la relación presa-depredador. En muchos textos matemáticos sólo se habla de la relación presa-depredador en lugar de antagonismo. Esto es así por razones históricas; los primeros estudios matemáticos sobre la relación entre especies (Lotka, Volterra, etc.) se centraban en el caso presa-depredador.
- Según la clasificación dada, la relación que mantiene un hombre con un parásito interno es una relación de antagonismo y simbiótica: la relación es íntima, el parásito se beneficia y el hombre sale perjudicado. Extrapolando, el parásito es un depredador y el hombre es su presa.
- Las ecuaciones que aparecen en el sistema (1) se pueden justificar como una extensión del modelo de Verhulst (ecuación logística) dado para el estudio de una especie sola.

Equilibrios

Para calcular las soluciones constantes de los sistemas del tipo (1), recurrimos a los puntos de equilibrio de dichos sistemas. Estos son:

- Trivial: $(x, y) = (0, 0)$. Siempre está en este tipo de sistemas.
- Semitriviales: puede haber dos puntos de equilibrio semitriviales en este tipo de sistemas. Si existen se obtendrán como solución de los siguientes sistemas de ecuaciones numéricas:

$$\left. \begin{array}{l} a + bx = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ d + fy = 0 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Este tipo de puntos tendrá interés en el estudio de poblaciones cuando el valor no nulo sea positivo.

- Puede haber más puntos de equilibrio, los que son solución del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + bx + cy = 0 \\ d + ex + fy = 0 \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Como en el caso anterior, nos interesan aquellos puntos cuyas coordenadas sean positivas. Si existen estos puntos (con coordenadas positivas) los denominaremos *estados (positivos) de coexistencia*.