

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x - 7y + z = 0 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \\ -x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \end{cases}, \quad (d) \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases},$$

$$(e) \begin{cases} 3x + 2y - z = -15 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 11 \\ 11x + 7y = -30 \end{cases}, \quad (f) \begin{cases} x - 2y + z - 4w = 1 \\ x + 3y + 7z + 2w = 2 \\ x - 12y - 11z - 16w = 5 \end{cases}.$$

3. Da un ejemplo, si es posible, de

- (a) un sistema lineal compatible determinado con más ecuaciones que incógnitas.
- (b) un sistema lineal compatible determinado con más incógnitas que ecuaciones.
- (c) un sistema lineal compatible determinado con igual número de ecuaciones e incógnitas.
- (d) un sistema lineal compatible indeterminado con más ecuaciones que incógnitas.
- (e) un sistema lineal compatible indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.
- (f) un sistema lineal compatible indeterminado con igual número de ecuaciones e incógnitas.
- (g) un sistema lineal incompatible con más ecuaciones que incógnitas.
- (h) un sistema lineal incompatible con más incógnitas que ecuaciones.
- (i) un sistema lineal incompatible con igual número de ecuaciones e incógnitas.

4. Estudia, según los valores de a , el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas

$$(a) \begin{cases} x + y = 2 \\ ay = -a \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} u + v = a \\ av = a^2 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}, \quad (d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \\ (a^2 - 4)x_3 = a - 2 \end{cases}.$$

5. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} .$$

Se verifica que

- (a) el sistema es compatible indeterminado.
- (b) el sistema es homogéneo.
- (c) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$ es solución del sistema.
- (d) el conjunto de soluciones depende de dos parámetros.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Se verifica que

- (a) el sistema asociado es compatible.
- (b) el conjunto de soluciones del sistema asociado es $\{(1, -s, s) / s \in \mathbb{R}\}$.
- (c) el conjunto de soluciones del sistema asociado depende de dos parámetros.

7. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 4z = 5 \end{cases}$$

- (a) tiene una única solución.
- (b) no tiene solución.
- (c) $(1, 0, 0)$ es solución.
- (d) el conjunto de soluciones del sistema es $\{(1 - s, s, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

8. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + t = 4 \\ x - y + t = 2 \\ 2x + 3y + z + \alpha t = 3 \end{cases} .$$

- (a) Si $\alpha = 0$ entonces el sistema no tiene solución.
- (b) Si $\alpha = 0$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
- (c) Si $\alpha \neq 0$ entonces el sistema no tiene solución.
- (d) Si $\alpha \neq 0$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

9. Señala las afirmaciones verdaderas:

- (a) Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son siempre compatibles determinados.
- (b) Un sistema lineal de ecuaciones con más incógnitas que ecuaciones no puede ser compatible y determinado.
- (c) Si un sistema lineal de 3 ecuaciones y 4 incógnitas es compatible, su conjunto de soluciones depende de uno o más parámetros.
- (d) Un sistema lineal de 3 ecuaciones y 2 incógnitas es siempre incompatible.

10. Tres especies interaccionan de forma que sus respectivas poblaciones evolucionan según el sistema

$$\begin{cases} x' = (5 - 3y + 2z)x \\ y' = (-2 + 2x - 2z)y \\ z' = (-8 + 4x - 20y)z \end{cases} .$$

¿Existe algún estado de equilibrio en el que no desaparezca ninguna de las especies?

(Este es el ejercicio 4 de la relación N^o 5).

11. Se consideran tres variedades de arbustos que conviven en la estepa rusa. El sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza la interrelación entre las variedades es

$$\begin{cases} x' = (2 - x - y + 9z)x \\ y' = (12 - 5x - 6y + 45z)y \\ z' = (b + 4x - 3y - b^2z)z \end{cases}$$

donde b es un parámetro que depende de las condiciones del hábitat. Se sabe que el estado de coexistencia (si existe) se obtiene como solución del sistema cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 & 2 \\ 5 & 6 & -45 & 12 \\ -4 & 3 & b^2 & b \end{pmatrix} .$$

(a) Comprueba que el sistema dado tiene las mismas soluciones que el sistema cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & b^2 - 36 & b - 6 \end{pmatrix} .$$

(b) Se pide que determines justificadamente

- i. para qué valores de b el sistema no tiene solución.
- ii. para qué valores de b el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula el conjunto de soluciones.
- iii. para qué valores de b el sistema tiene solución única. Calcula la solución.
- iv. para qué valores de b el sistema tiene estados (positivos) de coexistencia. Calcúlalos.
- v. de manera explícita, las soluciones del sistema para $b = 7$.