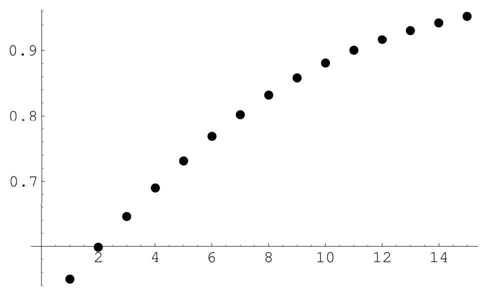
Matemáticas - (Ldo. en Biología. Primer Curso)

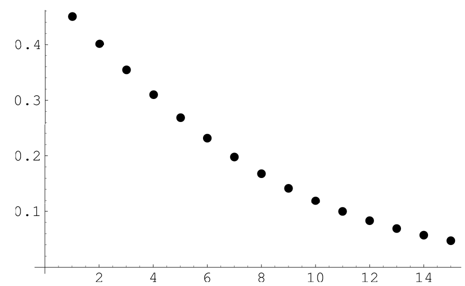
Relación de ejercicios Nº 4. Curso 2008-2009.

1. *Considera las siguientes nubes de puntos obtenidas en diversos experimentos.*

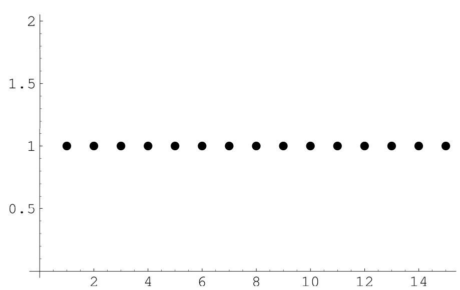
a)



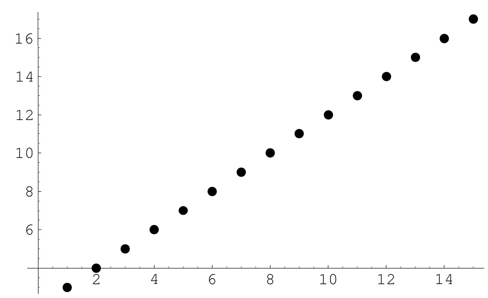
b)



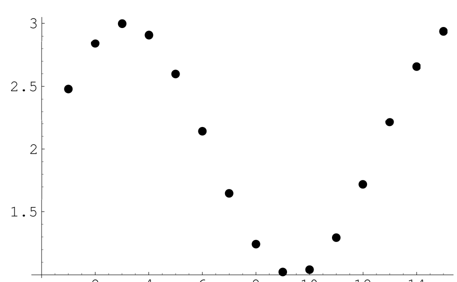
c)



d)



e)



Por otra parte, considera los siguientes modelos biológicos.

(a) $N'(t) = r$ *donde* r *es una constante.*

(b) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función positiva no constante.*

(c) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función negativa no constante.*

(d) $N'(t) = f(N(t))$ *donde* f *es una función positiva y negativa.*

Relaciona, justificando la elección, las gráficas con los modelos.

2. Considera los siguientes problemas de valores iniciales.

$$\begin{array}{llll} (i) & x' = (x-1)(x-4), \;\; x(0) = 6; & \quad ii) & x' = (x-1)(x-4), \;\; x(0) = 3; \\ (iii) & x' = (x-1)(x-4), \;\; x(0) = 0. & & \end{array}$$

(a) *Comprueba que (además de la función $x(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$) la familia de funciones*

$$x(t) = \frac{4 - Ae^{3t}}{1 - Ae^{3t}}, \ \forall t \in I, \ A \in \mathbb{R},$$

donde I es un intervalo adecuado, es un conjunto de soluciones para la ecuación diferencial considerada en los problemas de valores iniciales.

(b) *Resuelve cada uno de los problemas de valores iniciales propuestos.*

(c) *A partir de un estudio cualitativo de la ecuación diferencial, realiza un esbozo de las gráficas de las soluciones obtenidas en el apartado anterior.*

(d) *Estudia la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación diferencial considerada en los problemas de valores iniciales.*

3. Considera el problema de valores iniciales

$$x' = 2t(x-1)(x-4), \ x(0) = 3$$

(a) *Comprueba que la función*

$$x(t) = \frac{8 + e^{3t^2}}{2 + e^{3t^2}}, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

es solución del problema propuesto.

(b) *Intenta esbozar la gráfica de la solución dada.*

4. Una población cumple

$$\frac{dP}{dt} = 0'2P \ln \frac{4}{P}, \ P(0) = 3.$$

(a) *Haz un estudio cualitativo de la solución a partir de la ecuación diferencial.*

(b) *Estudia la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación del problema de valores iniciales.*

(c) *Esboza la gráfica de la solución del problema de valores iniciales.*

5. Considera el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+2), \ x(0) = 0.$$

(a) *Haz un estudio cualitativo de la solución del problema de valores iniciales a partir de la ecuación diferencial.*

(b) *Esboza la gráfica de la solución del problema de valores iniciales.*

(c) *Estudia la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación del problema de valores iniciales.*

6. Una generalización del modelo de Verhulst es el modelo de Beverton-Holt/Smith. La ecuación diferencial para este modelo es

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\frac{1}{1+\alpha N(t)},$$

donde r es el parámetro malthusiano, K es la capacidad de carga y α es un parámetro no negativo.

Dibuja el retrato de fases y estudia la convexidad de las soluciones para el caso $r = 0'1$, $K = 8$ y $\alpha = 1$. Además, estudia la estabilidad de las soluciones constantes.

7. Considera el problema de valores iniciales

$$x'(t) = 15\left(1 - \frac{x(t)}{5}\right)x(t), \quad x(0) = 2.$$

(a) A partir de la ecuación diferencial, estudia el crecimiento, la convexidad y los límites en (más y menos) infinito de la solución del problema de valores iniciales.

(b) Esboza la gráfica de la solución del problema de valores iniciales.

(c) ¿Cuál es el valor de $x''(0)$?

8. Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.

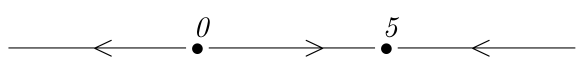
(a) Se considera la ecuación diferencial

$$x' = 15\left(1 - \frac{x}{5}\right)x.$$

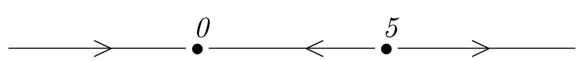
i. La ecuación tiene dos puntos de equilibrio.

ii. $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable.

iii. El retrato de fases viene dado por



iv. El retrato de fases viene dado por



(b) La población, $P(t)$, de una determinada especie se ajusta a la ley

$$P'(t) = 15\left(1 - \frac{P(t)}{5}\right)P(t).$$

i. Si $P(0) = 2$ la población decrece.

ii. La población límite es 5.

iii. La población límite es 3.

iv. $P(t) = 5$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es una solución constante.