Matemáticas - (Ldo. en Biología. Primer Curso)

Relación de ejercicios Nº 3. Curso 2008-2009.

1. *Determina cuáles de las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial que se indica:*

(a) $x(t) = e^{-t/2}$, $2x' + x = 0$;	*(b)* $x(t) = e^{-t^2/2}$, $2x' + x = 0$;
(c) $x(t) = \operatorname{sen} t$, $x^2 + (x')^2 = 1$;	*(d)* $y(t) = 5\operatorname{tg}(5t)$, $y' = 25 + y^2$;
(e) $y(x) = \operatorname{sen} x$, $y' = xy$;	*(f)* $y(x) = 2x$, $y' - \frac{y}{x} = 0$.

2. *Comprueba que la familia de funciones $x(t) = Ce^{-t/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$, es un conjunto de soluciones para la ecuación diferencial $2x' + x = 0$. ¿Cuál de estas soluciones es la que vale 3 si $t = 2$?*

3. *Se sabe que la tasa de crecimiento de un determinado cultivo de bacterias es constante, de forma que si se denota por $N(t)$ el número de bacterias (en millones) que hay en el cultivo después de t minutos, $N'(t) = rN(t)$ para algún valor de r constante.*

   (a) Comprueba que el siguiente conjunto de funciones es una familia de soluciones de la ecuación,

$$N(t) = Ae^{rt},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}.$$

   (b) Si en un principio se introducen 2.000.000 de bacterias en el cultivo (N(0)=2) y al cabo de 3 minutos el número de bacterias se ha duplicado (N(3)=4), calcula el tiempo que ha de transcurrir para tener 32.000.000 bacterias en el cultivo.

4. *La población de una determinada comunidad se rige por la ley de Malthus, es decir, si $P(t)$ es la población en el instante t, $P'(t) = rP(t)$, para algún valor de r. Si la población se duplica en 2 años, ¿cuánto tardará en triplicarse? ¿Y en cuadruplicarse?*

   (Sugerencia: comprueba que una familia de soluciones de la ecuación viene dada por el conjunto de funciones $P(t) = Ae^{rt}$, $\forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$).

5. *Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado en el que hay 100 estudiantes. Se supone que la rapidez de propagación del virus es proporcional al número de estudiantes contagiados y al de estudiantes que quedan por contagiar, es decir, si $x(t)$ es el número de estudiantes contagiados al cabo de t días,*

$$x'(t) = rx(t)(100 - x(t)).$$

   (a) Comprueba que el siguiente conjunto de funciones es una familia de soluciones de la ecuación (además de la función $x(t) = 100, \forall t \in \mathbb{R}$),

$$x(t) = \frac{100Ae^{100rt}}{1 + Ae^{100rt}},\ \forall t \in I,\ A \in \mathbb{R},$$

   donde I es un intervalo adecuado.

   (b) Determina el número de estudiantes contagiados después de 6 días si a los 4 días hay 35 enfermos en el campus.

6. *Una población de células sigue la ley de Gompertz*

$$P'(t) = rP(t)\ln\left(\frac{K}{P(t)}\right).$$

   Comprueba que el siguiente conjunto de funciones es una familia de soluciones de la ecuación,

$$P(t) = Ke^{-Ae^{-rt}},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}.$$

   ¿Es la función $P(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ una solución de la ecuación dada?

7. *Una población de delfines sigue la ley logística (modelo de Verhulst)*

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}P\left(1 - \frac{P}{10}\right),$$

donde $P = P(t)$ *representa la cantidad de dichos animales (en cientos) que hay en el instante* t. *Se sabe que en un principio había 800 delfines* ($P(0) = 8$). *Se pide:*

   (a) *Comprueba que el siguiente conjunto de funciones es una familia de soluciones de la ecuación (además de la función* $P(t) = 10, \forall t \in \mathbb{R}$*),*

   $$P(t) = \frac{10Ae^{t/2}}{1 + Ae^{t/2}}, \ \forall t \in I, \ A \in \mathbb{R},$$

   donde I *es un intervalo adecuado.*

   (b) *Calcula la solución que satisface la condición inicial dada.*

   (c) *¿Crecerá la población en el futuro? ¿Se extinguirá esta especie a largo plazo?*

   Realiza de nuevo los apartados (b) y (c) suponiendo que en un principio había 1200 delfines (es decir, $P(0) = 12$*).*

8. *El crecimiento de una determinada especie de peces se rige por el modelo de Von Bertalanffy, esto es, si* $L(t)$ *indica el tamaño medio de los individuos (en centímetros) en el instante* t *(en meses), entonces*

$$L'(t) = r(L_\infty - L(t)),$$

donde L_∞ *representa el tamaño medio máximo esperado.*

   (a) *Comprueba que el siguiente conjunto de funciones es una familia de soluciones de la ecuación,*

   $$L(t) = L_\infty + Ae^{-rt}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ A \in \mathbb{R}.$$

   (b) *Suponiendo que*

   - *el tamaño medio máximo esperado de la especie es de 60 cm,*
   - *el tamaño medio de nuestros peces es de 1 cm al comenzar el experimento,*
   - *el tamaño medio al cabo de 1 mes ha aumentado en 9 cm,*

   ¿en que instante se alcanzará una longitud media de 42 cm?

9. *Determina las constantes para que la familia de funciones*

$$N(t) = Ae^{rt}$$

sea solución de la ecuación de Malthus

$$N'(t) = 2N(t).$$

¿Cuál de tales soluciones es la que vale 2 si $t = 1$*?*

10. *Determina las constantes para que la familia de funciones*

$$P(t) = \frac{AKe^{rt}}{1 + Ae^{rt}}$$

sea solución de la ecuación de Verhulst o (logística)

$$P'(t) = 2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{3}\right).$$

¿Cuál de tales soluciones verifica que $P(5) = 3$*?*

11. *Determina las constantes para que la familia de funciones*

$$P(t) = Ke^{-Ae^{-rt}}$$

sea solución de la ecuación de Gompertz

$$P'(t) = 3P(t)\ln\left(\frac{2}{P(t)}\right).$$

¿Cuál de tales soluciones es la que vale 1 si $t = 2$?

12. *Determina las constantes para que la familia de funciones*

$$L(t) = L_\infty + Ae^{-rt}$$

sea solución de la ecuación de Von Bertalanffy

$$L'(t) = 5(75 - L(t)).$$

¿Cuál de tales soluciones verifica que $L(3) = 5$?

13. *Indica las afirmaciones que sean correctas. No es necesario justificar las respuestas.*

(a) *Se considera la ecuación diferencial*

$$x'(t) = 3x(t) + 10\operatorname{sen}(t).$$

i. $x(t) = Ae^{2t} - 2\operatorname{sen}(t) - \cos(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$, *es una familia de soluciones.*
ii. $x(t) = Ae^{3t} - 3\operatorname{sen}(t) - \cos(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$, *es una familia de soluciones.*
iii. $x(t) = Ae^{3t} + \operatorname{sen}(t) - 3\cos(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$, *es una familia de soluciones.*
iv. $x(t) = e^{C+3t} - 3\operatorname{sen}(t) - \cos(t),\ \forall t \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}$, *es una familia de soluciones.*

(b) *Una población responde al modelo logístico*

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right).$$

Tras diversas pruebas se ha comprobado que $r = 0'08$ y $K = 4$.

i. $P'(t) = 0'08P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{4}\right)$ *es una ecuación del modelo.*
ii. $P'(t) = 0'08P(t)\,(4 - P(t))$ *es una ecuación del modelo.*
iii. $P'(t) = 0'02P(t)\,(4 - P(t))$ *es una ecuación del modelo.*
iv. $P'(t) = 0'02P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{4}\right)$ *es una ecuación del modelo.*

(c) *El crecimiento de una planta responde al modelo de von Bertalanffy de acuerdo con la siguiente función*

$$L(t) = 40 + Ae^{-0'02t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R},$$

con el tiempo medido en días y la altura en centímetros. A los 100 días del inicio del experimento se ha medido una altura de 39 cm.

i. $L(t) = 40 - e^{2-0'02t},\ \forall t \in \mathbb{R}$, *es una función que mide el crecimiento de la planta.*
ii. $L(t) = 40 - e^{2}e^{-0'02t},\ \forall t \in \mathbb{R}$, *es una función que mide el crecimiento de la planta.*
iii. $L(0) = 32'61$.
iv. $L(0) = 1$.

(d) *El crecimiento de una planta responde al modelo de von Bertalanffy*

$$L'(t) = r\,(K - L(t))\,.$$

Tras diversas pruebas se ha comprobado que $r = 0'08$ *y* $K = 4$.

i. $L'(t) = 0'08\,(4 - L(t))$ *es una ecuación del modelo.*
ii. $L'(t) = 0'08\left(1 - \frac{L(t)}{4}\right)$ *es una ecuación del modelo.*
iii. $L'(t) = 0'32\left(1 - \frac{L(t)}{4}\right)$ *es una ecuación del modelo.*
iv. $L'(t) = 0'32\,(4 - L(t))$ *es una ecuación del modelo.*

(e) *Una población responde al modelo logístico de acuerdo con la siguiente función*

$$P(t) = \frac{40Ae^{0'02t}}{1 + Ae^{0'02t}},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R},$$

con el tiempo medido en días y la población en miles. A los 100 días del inicio de las observaciones se han contabilizado 39 mil individuos.

i. $P(t) = \dfrac{1560e^{-2}e^{0'02t}}{1 + 39e^{-2}e^{0'02t}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *es una función para contabilizar la población.*
ii. $P(t) = \dfrac{1560e^{-2+0'02t}}{1 + 39e^{-2+0'02t}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *es una función para contabilizar la población.*
iii. $P(0) = 33'63$.
iv. $P(0) = 1$.

(f) *El crecimiento de una planta responde al modelo de Gompertz*

$$L'(t) = rL(t)\ln\frac{K}{L(t)}.$$

Tras diversas pruebas se ha comprobado que $r = 0'08$ *y* $K = 4$.

i. $L'(t) = 0'08L(t)\ln\frac{4}{L(t)}$ *es una ecuación del modelo.*
ii. $L'(t) = 0'08L(t)\ln\frac{1}{0'25L(t)}$ *es una ecuación del modelo.*
iii. $L'(t) = 0'08(\ln 4 + \ln L(t))L(t)$ *es una ecuación del modelo.*
iv. $L'(t) = 0'08(\ln 4 - \ln L(t))L(t)$ *es una ecuación del modelo.*

(g) *En un monte se han encontrado restos arqueológicos de una determinada especie. Para su datación se utiliza el modelo malthusiano, aplicado a la desintegración del carbono-14, de acuerdo con la siguiente función*

$$N(t) = Ae^{-\frac{\ln 2}{5730}t},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R},$$

con el tiempo medido en años y la cantidad de carbono-14 en tanto por ciento. Se sabe que la cantidad de carbono-14 de los restos, en el momento del hallazgo, corresponde al $16'29\%$ *de la cantidad que un espécimen vivo tiene. Se sabe que un espécimen vivo tiene una cantidad de carbono-14 correspondiente al* 100%.

i. $N(t) = 16'29e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *es una función para medir la cantidad de carbono 14.*
ii. $N(t) = 83'71e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *es una función para medir la cantidad de carbono 14.*
iii. *Los restos tienen una antigüedad de aproximadamente 15.000 años.*
iv. *Los restos tienen una antigüedad de aproximadamente 30.000 años.*