Los dobles de un semigrupo numérico

A.M. Robles-Pérez[1⋆], J.C. Rosales[2⋆⋆] y P. Vasco[3]

[1] Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada, España. arobles@ugr.es
[2] Departamento de Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada, España. jrosales@ugr.es
[3] Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, 5001-801 Vila Real, Portugal. pvasco@utad.pt

Resumen. Sea S un semigrupo numérico. Entonces $\frac{S}{2} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \in S\}$ también es un semigrupo numérico llamado la mitad del semigrupo numérico S. En un sentido dual, se dice que S es un doble del semigrupo numérico $\frac{S}{2}$. En esta nota caracterizamos el conjunto de todos los dobles de un semigrupo numérico dado y obtenemos varias aplicaciones a partir de tal caracterización.

Palabras clave: Semigrupo numérico, hueco, grado de singularidad, número de Frobenius, simétrico, pseudo-simétrico.

1 Introducción

Si se denota por $\mathbb{N}$ al conjunto de los enteros no negativos, se dice que S es un *semigrupo numérico* si es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que es cerrado para la suma, contiene al cero y $\mathbb{N} \setminus S$ es finito.

Sea S un semigrupo numérico y p un entero positivo. En [13] se prueba que $\frac{S}{p} = \{x \in \mathbb{N} \mid px \in S\}$ también es un semigrupo numérico. A $\frac{S}{p}$ lo denominaremos el *cociente* de S por p. Cuando $p = 2$ diremos que $\frac{S}{2}$ es la mitad de S; si $p = 4$ diremos que $\frac{S}{4}$ es el cuarto de S. Dualmente, diremos que S es un doble de $\frac{S}{2}$.

Dado un semigrupo numérico S denotaremos por $\mathrm{D}(S)$ al conjunto de todos los posibles dobles de S, es decir, $\mathrm{D}(S) = \left\{\bar{S} \mid \frac{\bar{S}}{2} = S\right\}$. En la Sección 2 se verá que cualquier elemento de $\mathrm{D}(S)$ viene determinado, de forma única, por un par (m, H), donde m es un entero impar de S y H es un subconjunto de $\mathbb{N}\setminus S$ verificando ciertas condiciones.

Recordemos que los elementos del conjunto $\mathrm{G}(S) = \mathbb{N}\setminus S$ son los llamados *huecos* de S y la cardinalidad de $\mathrm{G}(S)$, que se denota por $\mathrm{g}(S)$, es un destacado

⋆ Investigación parcialmente financiada por MTM2005-03483, MEC (España).
⋆⋆ Investigación financiada por MTM2004-01446, MEC (España).

valor asociado a S conocido bien como el *grado de singularidad* de S (ver [2]) o bien como el *genero* de S (ver [4]).

Otro valor destacado asociado de S es el llamado *número de Frobenius* de S (ver [6]), que se denota por $\mathrm{F}(S)$ y se define como el mayor entero que no pertenece a S. En la Subsección 3.1 damos fórmulas para el grado de singularidad y el número de Frobenius de los dobles de un semigrupo numérico fijado.

Como aplicación del estudio realizado, en la Subsecciones 3.2 y 3.3, veremos que todo semigrupo numérico es la mitad de infinitos semigrupos numéricos simétricos y un cuarto de infinitos semigrupos numéricos pseudo-simétricos equilibrados. Recuperamos y mejoramos así varios resultados de [8,11,12].

Una versión extendida de este trabajo ([7]) está en proceso de “referee” en este momento.

2 Una representación de los elementos de $\mathrm{D}(S)$

Sea S un semigrupo numérico. El principal objetivo es obtener el Teorema 1, que nos permitirá representar de forma única todos los elementos de $\mathrm{D}(S)$.

Recordemos previamente alguna notación usual. Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ se define su suma por $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$. También utilizaremos el conjunto $2A = \{2a \mid a \in A\}$ (no confundir con $A + A$).

Para construir los elementos de $\mathrm{D}(S)$, empezaremos determinando los dobles tales que el menor impar positivo m que contienen se ha prefijado de antemano. Al conjunto de tales dobles lo denotaremos por $\mathrm{D}_m(S)$.

Es claro que, si $\bar{S} \in \mathrm{D}_m(S)$, entonces $2S \subset \bar{S}$, $2S + \{m\} \subset \bar{S}$ y $m \in S$. Además, si denotamos $S(m) = 2S \cup (2S + \{m\})$, tenemos un primer resultado que es básico en este trabajo.

Lema 1. *Sea S un semigrupo numérico y $m \in S$ un entero impar. Entonces $S(m) \in \mathrm{D}_m(S)$. Además, $S(m) \subseteq \bar{S}$ si $\bar{S} \in \mathrm{D}_m(S)$.*

Sea $m \in S$ un entero impar fijado. Entonces consideramos la partición $\mathrm{G}(S) = \mathrm{G}_0(S) \cup \mathrm{G}_{m-}(S) \cup \mathrm{G}_{m+}(S)$ donde $\mathrm{G}_0(S)$ está formado por los huecos de valor par y $\mathrm{G}_{m-}(S)$ (respectivamente $\mathrm{G}_{m+}(S)$) por los huecos de valor impar y menor (respectivamente mayor) que m. A partir de aquí se sigue el siguiente lema.

Lema 2. *Sea S un semigrupo numérico con $\mathrm{G}(S) = \{h_1 < h_2 < \ldots < h_{g(S)}\}$. Entonces $\mathrm{G}(S(m)) = \mathrm{G}_0(S(m)) \cup \mathrm{G}_{m-}(S(m)) \cup \mathrm{G}_{m+}(S(m))$, donde*

1. $\mathrm{G}_0(S(m)) = 2\mathrm{G}(S) = \{2h_1 < 2h_2 < \ldots < 2h_{g(S)}\}$;
2. $\mathrm{G}_{m-}(S(m)) = \{1, 3, \ldots, m - 2\}$;
3. $\mathrm{G}_{m+}(S(m)) = 2\mathrm{G}(S) + \{m\} = \{2h_1 + m < \ldots < 2h_{g(S)} + m\}$.

Observación 1. Sea $\bar{S} \in \mathrm{D}_m(S)$. A partir de los Lemas 1 y 2, podemos verificar que $\mathrm{G}(\bar{S}) = \mathrm{G}_0(S(m)) \cup \mathrm{G}_{m-}(S(m)) \cup \mathrm{G}_{m+}(\bar{S})$ con $\mathrm{G}_{m+}(\bar{S}) \subseteq \mathrm{G}_{m+}(S(m))$. Por tanto, para determinar los elementos de $\mathrm{D}_m(S)$, bastará con hallar los posibles $\mathrm{G}_{m+}(\bar{S})$. Equivalentemente, necesitamos encontrar los subconjuntos $\mathrm{H} = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_r\} \subseteq \mathrm{G}(S)$ tales que $\bar{S} = S(m) \cup (2\mathrm{H} + \{m\}) \in \mathrm{D}_m(S)$.

La equivalencia señalada es clara a partir del siguiente lema.

Lema 3. *Si* $\bar{S} = S(m) \cup (2\mathrm{H} + \{m\})$ *entonces* $\mathrm{G}_0(\bar{S}) = \mathrm{G}_0(S(m))$, $\mathrm{G}_{m-}(\bar{S}) = \mathrm{G}_{m-}(S(m))$ *y* $\mathrm{G}_{m+}(\bar{S}) = 2(\mathrm{G}(S) \backslash \mathrm{H}) + \{m\}$.

En el siguiente lema damos condiciones necesarias que han de satisfacer los posibles subconjuntos H. Recordemos la siguiente relación de orden en $\mathrm{G}(S)$:

$$g_1 \leq_S g_2 \text{ si y sólo si } g_2 - g_1 \in S.$$

Lema 4. *Sea* S *un semigrupo numérico y sea* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}(S)$ *tal que* $\bar{S} = S(m) \cup (2\mathrm{H} + \{m\}) \in \mathrm{D}_m(S)$. *Entonces* H *satisface las siguientes condiciones:*

(H1) $\mathrm{H} + \{m\} \subset S$ ($\Leftrightarrow (\mathrm{H} + \{m\}) \cap \mathrm{G}(S) = \emptyset$).
(H2) $\mathrm{H} + \mathrm{H} + \{m\} \subset S$ ($\Leftrightarrow (\mathrm{H} + \mathrm{H} + \{m\}) \cap \mathrm{G}(S) = \emptyset$).
(H3) Si $h \in \mathrm{H}$, *entonces* $\{g \in \mathrm{G}(S) \mid h \leq_S g\} \subseteq \mathrm{H}$.

Demostración.
(H1) Basta operar con m y $2k + m$ para $k \in \mathrm{H}$.
(H2) Basta operar con $2k_1 + m$ y $2k_2 + m$ para $k_1, k_2 \in \mathrm{H}$.
(H3) Sean $k \in \mathrm{H}$ y $g \in \mathrm{G}(S)$ tales que $g = k + s$ para algún $s \in S$. Entonces $2g + m = (2k + m) + 2s \in \bar{S}$, pues $2k + m \in 2\mathrm{H} + \{m\}$, $2s \in S(m)$ y $\bar{S}$ tiene estructura de semigrupo. Por la definición de $\bar{S}$, concluimos que $g \in \mathrm{H}$. □

Observación 2. Podemos expresar la condición (H3) diciendo que H es un subconjunto superior de $\mathrm{G}(S)$ con respecto al orden $\leq_S$. Por este motivo, en lo sucesivo diremos que H es un subconjunto m-superior de $\mathrm{G}(S)$ si es un subconjunto de $\mathrm{G}(S)$ que satisface (H1), (H2) y (H3).

Antes de probar que (H1), (H2) y (H3) son también condiciones suficientes, veamos un ejemplo que establece la independencia entre sí de las mísmas.

Ejemplo 1. Sea $S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\} = \{0, 3, 5, 6\} \cup \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 8\}$. Entonces se verifica que $\mathrm{G}(S) = \{1, 2, 4, 7\}$. Sea $m = 5$.

1. $\mathrm{H} = \{2, 7\}$ satisface (H2) y (H3) pero no (H1).
2. $\mathrm{H} = \{1, 4, 7\}$ satisface (H1) y (H3) pero no (H2).
3. $\mathrm{H} = \{4\}$ satisface (H1) y (H2) pero no (H3).

En los tres casos podemos comprobar que $\bar{S} = S(5) \cup (2\mathrm{H} + \{5\})$ no es un semigrupo numérico.

Lema 5. *Sean S un semigrupo numérico, m un entero impar perteneciente a S y H un subconjunto m-superior de $\mathrm{G}(S)$. Entonces*

1. $\bar{S} = (2S) \cup (2S + \{m\}) \cup (2\mathrm{H} + \{m\})$ *es un semigrupo numérico.*
2. $S = \frac{\bar{S}}{2}$.
3. *m es el menor entero impar perteneciente a $\bar{S}$.*

Demostración.

1. Por el Lema 1, es claro que $0 \in \bar{S}$ y que $\mathbb{N} \backslash \bar{S}$ es finito. Por tanto, para probar que $\bar{S}$ es un semigrupo numérico, basta con ver que $\bar{S}$ es cerrado para la suma. Sean $x, y \in \bar{S}$; consideramos los siguientes casos:
   a) Si $x, y \in 2S \cup (2S + \{m\})$ se aplica el Lema 1.
   b) Si $x \in 2S + \{m\}$ e $y \in 2\mathrm{H} + \{m\}$ se aplica (H1).
   c) Si $x, y \in 2\mathrm{H} + \{m\}$ se aplica (H2).
   d) Si $x \in 2S$ e $y \in 2\mathrm{H} + \{m\}$ se aplica (H3).
2. Observar que $2S = \big\{x \in \bar{S} \mid x \text{ es par}\big\}$.
3. Inmediato por la definición de $\bar{S}$. □

En las condiciones del Lema 5, denotaremos por $S(m, \mathrm{H})$ al semigrupo numérico $(2S) \cup (2S + \{m\}) \cup (2\mathrm{H} + \{m\})$. Obsérvese que $S(m)$ se corresponde con la elección $\mathrm{H} = \emptyset$, es decir, $S(m) = S(m, \emptyset)$.

Ejemplo 2. Continuando con el Ejemplo 1 ($S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$), las elecciones posibles son $\mathrm{H_a} = \emptyset$, $\mathrm{H_b} = \{7\}$ y $\mathrm{H_c} = \{4, 7\}$. En tales casos:

1. $\bar{S}_a = S(5, \mathrm{H_a}) = S(5, \emptyset) = S(5) = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\}$.
2. $\bar{S}_b = S(5, \mathrm{H_b}) = S(5) \cup (2\mathrm{H_b} + \{5\}) = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, \rightarrow\}$.
3. $\bar{S}_c = S(5, \mathrm{H_c}) = S(5) \cup (2\mathrm{H_c} + \{5\}) = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow\}$.

Teorema 1. *Sean S un semigrupo numérico y $m \in S$ impar. Entonces*

$$\mathrm{D}_m(S) = \{S(m, \mathrm{H}) \mid \mathrm{H} \textit{ es un subconjunto } m\textit{-superior de } \mathrm{G}(S)\}.$$

Además, $S(m_a, \mathrm{H}_a) = S(m_b, \mathrm{H}_b)$ si y sólo si $m_a = m_b$ y $\mathrm{H}_a = \mathrm{H}_b$.

Demostración. Sea $\bar{S} \in \mathrm{D}_m(S)$. A partir de los Lemas 1 y 4 y la Observación 1, se sigue que $\bar{S}$ es de la forma $S(m, \mathrm{H})$ con H un subconjunto m-superior de $\mathrm{G}(S)$. A partir del Lema 5 se tiene la inclusión contraria. La prueba de la unicidad es trivial. □

Observación 3. Puesto que cada doble $\bar{S}$ tiene un único entero impar mínimo m, que determina el conjunto $\mathrm{D}_m(S)$ al que pertenece, y la unicidad dada por el Teorema 1, es claro que $\{\mathrm{D}_m(S) \mid m \in S \text{ es impar}\}$ es una partición de $\mathrm{D}(S)$.

Observación 4. La posibilidad de tomar $\mathrm{H} = \mathrm{G}(S)$ surge de manera inmediata. Es interesante notar que, en tal caso, obtenemos el mayor elemento de $\mathrm{D}_m(S)$ en el siguiente sentido: "Si $\bar{S} \in \mathrm{D}_m(S)$ y $\mathrm{G}(S)$ es un subconjunto m-superior de $\mathrm{G}(S)$ entonces $\bar{S} \subseteq S(m, \mathrm{G}(S))$". Esto se debe a que $\mathrm{G}_{m+}(S(m, \mathrm{G}(S))) = \emptyset$. Además, es fácil comprobar que $S(m, \mathrm{G}(S)) = 2S \cup (2\mathbb{N} + \{m\})$.

Como respuesta a la posibilidad planteada tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. $\mathrm{G}(S)$ *es un subconjunto m-superior de* $\mathrm{G}(S)$ *si y sólo si m es mayor que el número de Frobenius de S (es decir, $m > \mathrm{F}(S)$).*

3 Consecuencias

En esta sección, salvo que se indique otra cosa, S denota un semigrupo numérico, m es un impar de S y H es un subconjunto m-superior de $\mathrm{G}(S)$.

3.1 El grado de singularidad y el número de Frobenius de los elementos de D(S)

Partiendo de la descomposición del Lema 3, un simple recuento de los elementos de $\mathrm{G}_0(S(m, \mathrm{H}))$, $\mathrm{G}_{m-}(S(m, \mathrm{H}))$ y $\mathrm{G}_{m+}(S(m, \mathrm{H}))$ nos permite obtener una fórmula para $\mathrm{g}(S(m, \mathrm{H}))$ y una pseudo-fórmula para $\mathrm{F}(S(m, \mathrm{H}))$ en función de $\mathrm{g}(S)$ y $\mathrm{F}(S)$ respectivamente. Como es usual, $\#A$ denota el cardinal de un conjunto A.

Proposición 2. $\mathrm{g}(S(m, \mathrm{H})) = 2\mathrm{g}(S) + \frac{m-1}{2} - \#\mathrm{H}$.

Proposición 3. *1.* $\mathrm{F}(S(m, \mathrm{H})) = \max\{2\mathrm{F}(S), m - 2\}$ *si* $\mathrm{H} = \mathrm{G}(S)$.
2. $\mathrm{F}(S(m, \mathrm{H})) = \max\{2\mathrm{F}(S), 2(\max(\mathrm{G}(S) \backslash \mathrm{H})) + m\}$ *si* $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}(S)$.

Como consecuencia de la Proposición 3, tenemos la siguiente fórmula.

Corolario 1. *Si $F(S) \notin \mathrm{H}$ entonces* $\mathrm{F}(S(m, \mathrm{H})) = 2\mathrm{F}(S) + m$.

Observación 5. Si $S(m, \mathrm{H})$ tiene número de Frobenius $\mathrm{F}(S(m, \mathrm{H}))$ par entonces este debe ser el mayor entero par que no pertenece a $2S$. Por tanto, $\mathrm{F}(S(m, \mathrm{H})) = 2\mathrm{F}(S)$. Como sólo puede existir un número finito de semigrupos numéricos con número de Frobenius igual a $2\mathrm{F}(S)$, se sigue que $\left\{\bar{S} \in \mathrm{D}(S) \mid \mathrm{F}(\bar{S}) \text{ es par}\right\}$ es un conjunto finito. Por otra parte, ya que $\mathrm{D}(S)$ es un conjunto infinito (pues S tiene infinitos impares) entonces también es infinito $\left\{\bar{S} \in \mathrm{D}(S) \mid \mathrm{F}(\bar{S}) \text{ es impar}\right\}$.

3.2 Todo semigrupo numérico es la mitad de infinitos semigrupos numéricos simétricos.

Se dice que un semigrupo numérico S es simétrico si para todo $x \in \mathbb{Z} \backslash S$ se verifica que $\mathrm{F}(S) - x \in S$. En tal caso S siempre tiene número de Frobenius $\mathrm{F}(S)$ impar. Estos semigrupos se corresponden con los semigrupos numéricos cuyo anillo de semigrupo asociado es Gorenstein (ver [2,5]).

En esta subsección veremos que todo semigrupo numérico es la mitad de infinitos semigrupos numéricos simétricos por medio de una demostración diferente a la expuesta en [12] (un resultado parcial aparece en [11]). Para ello consideraremos el subconjunto de los llamados huecos de segunda clase:

$$\mathrm{H}_2(S) = \{x \in \mathrm{G}(S) \mid \mathrm{F}(S) - x \in \mathrm{G}(S)\}\,.$$

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A - B$ el conjunto $\{a - b \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Observación 6. Si consideramos $N(S) = \{s \in S \mid s < \mathrm{F}(S)\}$, es claro que $\{0, 1, \ldots, \mathrm{F}(S)\}$ es la unión disjunta de $\mathrm{G}(S)$ y $N(S)$. Por tanto, se verifica que $\mathrm{F}(S) + 1 = \mathrm{g}(S) + \#N(S)$. Puesto que $\mathrm{H}_2(S) = \mathrm{G}(S) \backslash (\{\mathrm{F}(S)\} - N(S))$, un simple cálculo prueba que $\#\mathrm{H}_2(S) = 2\mathrm{g}(S) - \mathrm{F}(S) - 1$.

Recordando (ver [3]) que un semigrupo numérico S es simétrico si y sólo si $\mathrm{g}(S) = \frac{\mathrm{F}(S)+1}{2}$, llegamos (vía la Observación 6) al siguiente resultado.

Proposición 4. *Si* $\mathrm{H}_2(S)$ *es un subconjunto* m*-superior de* $\mathrm{G}(S)$ *entonces* $S(m, \mathrm{H}_2(S))$ *es un semigrupo numérico simétrico.*

En el siguiente lema damos una condición suficiente para que $\mathrm{H}_2(S)$ sea un subconjunto m-superior de $\mathrm{G}(S)$.

Lema 6. $\mathrm{H}_2(S)$ *es un subconjunto* m*-superior de* $\mathrm{G}(S)$ *si* $m > \mathrm{F}(S)$.

Ejemplo 3. Sea $S = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$. Entonces $\mathrm{G}(S) = \{1, 2, 3, 6\}$ y $\mathrm{F}(S) = 6$. Es claro que $\mathrm{H}_2(S) = \{3\}$ es un subconjunto 5-superior de $\mathrm{G}(S)$. Por tanto, el recíproco del Lema 6 es falso.

Sea $S = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$. Entonces $\mathrm{G}(S) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ y $\mathrm{F}(S) = 7$. En este caso $\mathrm{H}_2(S) = \{1, 6\}$ no es un subconjunto 5-superior de $\mathrm{G}(S)$.

Como todo semigrupo numérico S tiene infinitos impares mayores que $\mathrm{F}(S)$, por la unicidad dada en el Teorema 1 y por la Proposición 4 se prueba el resultado anunciado.

Corolario 2. *Todo semigrupo numérico es la mitad de infinitos simétricos.*

3.3 Todo semigrupo numérico es un cuarto de infinitos semigrupos numéricos pseudo-simétricos equilibrados

Se dice que un semigrupo numérico S es pseudo-simétrico si $\mathrm{F}(S)$ es par y para todo $x \in \mathbb{Z} \backslash S$ se verifica que $\mathrm{F}(S) - x \in S$ o que $x = \frac{\mathrm{F}(S)}{2}$. Estos semigrupos se corresponden con los semigrupos numéricos cuyo anillo de semigrupo asociado es de tipo Kunz (ver [2,9]).

En lo que sigue denotaremos por $\mathrm{G}_0(S)$ (respectivamente $\mathrm{G}_1(S)$) al subconjunto de $\mathrm{G}(S)$ formado por los huecos de valor par (respectivamente impar). Además, se definen $\mathrm{g}_0(S) = \#\mathrm{G}_0(S)$ y $\mathrm{g}_1(S) = \#\mathrm{G}_1(S)$. Diremos que un semigrupo numérico es *equilibrado* si $\mathrm{g}_0(S) = \mathrm{g}_1(S)$.

En [8] se prueba que todo semigrupo numérico es un cuarto de infinitos semigrupos numéricos pseudo-simétricos. A continuación veremos una mejora de este resultado: todo semigrupo numérico es un cuarto de infinitos pseudo-simétricos equilibrados. Comenzamos con una sencilla caracterización de los equilibrados.

Lema 7. *S es equilibrado si y sólo si* $\mathrm{g}(S) = 2\mathrm{g}\left(\frac{S}{2}\right)$.

Teniendo en cuenta que $\mathrm{F}(S) \geq \mathrm{g}(S) \geq \frac{\mathrm{F}(S)+1}{2}$ (ver [3]), podemos probar el siguiente resultado a partir de la Proposiciones 1, 2 y 3.

Proposición 5. $\bar{S} = S(2g(S)+1, \mathrm{G}(S))$ *es un semigrupo numérico equilibrado. Además,* $\mathrm{F}(\bar{S}) = 2\mathrm{F}(S)$ *y* $\mathrm{g}(\bar{S}) = 2\mathrm{g}(S)$.

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. *Todo semigrupo numérico es la mitad de un equilibrado.*

Observación 7. A partir de la Proposición 2, es claro que $\mathrm{g}_0(S(m,\mathrm{H})) = \mathrm{g}(S)$ y $\mathrm{g}_1(S(m,\mathrm{H})) = \frac{m-1}{2} + \mathrm{g}(S) - \#\mathrm{H}$. De aquí se sigue que $S(m,\mathrm{H})$ es equilibrado si y sólo si $m = 2\#\mathrm{H} + 1$. En particular, m ha de ser menor que $2\mathrm{g}(S) + 1$ para poder tener semigrupos numéricos equilibrados. Acabamos de ver que el conjunto $\left\{\bar{S} \in \mathrm{D}(S) \mid \bar{S} \text{ es equilibrado}\right\}$ es finito.

Recordemos (ver [2]) que un semigrupo numérico S es pseudo-simétrico si y sólo si $\mathrm{g}(S) = \frac{\mathrm{F}(S)+2}{2}$. Este hecho permite dar una nueva caracterización de los simétricos a partir de la Proposición 5.

Lema 8. *S es simétrico si y sólo si* $S(2g(S)+1, \mathrm{G}(S))$ *es pseudo-simétrico.*

En particular, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 6. *Todo simétrico es la mitad de un pseudo-simétrico equilibrado.*

Puesto que $\frac{S/a}{b} = \frac{S}{ab}$ para cualesquiera a, b enteros positivos, del Corolario 2 y la Proposición 6 se sigue el siguiente resultado.

Corolario 4. *Todo semigrupo numérico es un cuarto de infinitos pseudo-simétricos equilibrados.*

Nota 1. Utilizando los *conjuntos de Apéry* (ver [1]), es posible probar que todo semigrupo numérico S es mitad de un semigrupo numérico equilibrado $\bar{S}$ de manera que ambos tengan el mismo m entero impar mínimo. En tal caso, diremos que $\bar{S}$ es totalmente equilibrado.

Referencias

[1] R. Apéry. Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222: 1198–2000, 1946.

[2] V. Barucci, D.E. Dobbs and M. Fontana. *Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 598, 1997.

[3] R. Fröberg, G. Gottlieb and R. Häggkvist. On numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 35: 63–83, 1987.

[4] J. Komeda. Non-Weierstrass numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 57: 157–185, 1998.

[5] E. Kunz. The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25: 748–751, 1970.

[6] J.L. Ramírez Alfonsín. *The diophantine Frobenius problem.* Oxford Univ. Press, 2005.

[7] A.M. Robles-Pérez, J.C. Rosales, and P. Vasco. The doubles of a numerical semigroup. *Submitted.*

[8] J.C. Rosales. One half of a pseudo-symmetric numerical semigroup. *Bull. London Math. Soc.*, 40: 347–352, 2008.

[9] J.C. Rosales and M.B. Branco. Irreducible numerical semigroups. *Pacific J. Math.*, 209: 131–143, 2003.

[10] J.C. Rosales and P.A. García-Sánchez. *Finitely generated commutative monoids.* Nova Science Publishers, New York, 1999.

[11] J.C. Rosales and P.A. García-Sánchez. Every numerical semigroup is one half of a symmetric numerical semigroup. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136: 475-477, 2008.

[12] J.C. Rosales and P.A. García-Sánchez. Every numerical semigroup is one half of infinitely many symmetric numerical semigroups. *Communications in Algebra, (to appear).*

[13] J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, J.I. García-García and J.M. Urbano-Blanco. Proportionally modular Diophantine inequalities. *J. Number Theory*, 103: 281–294, 2003.