El problema de Frobenius para algunos semigrupos numéricos de dimensión de inmersión tres ⋆

A.M. Robles-Pérez[1] y J.C. Rosales[2]

[1] Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada, España. `arobles@ugr.es`
[2] Departamento de Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada, España. `jrosales@ugr.es`

Resumen. Sea S un semigrupo numérico de dimensión de inmersión tres tal que sus generadores minimales son números primos relativos dos a dos. Entonces existen números enteros positivos a, b, c, d tales que $\mathrm{mcd}\{a, b\} = \mathrm{mcd}\{a, c\} = \mathrm{mcd}\{b, d\} = 1$, $c \in \{2, \ldots, a-1\}$ y $cb-da > 0$, de forma que $S = \langle a, b, cb-da \rangle$. Si además se supone que el intervalo $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right]$ contiene algún número entero, se obtienen fórmulas para el género, el número de Frobenius y el conjunto de pseudo-números de Frobenius de S en función de a, b, c, d.

Palabras clave: Problema de Frobenius, semigrupos numéricos, conjunto de Apéry.

1 Introducción

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros no negativos. Un *semigrupo númerico* es un conjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que es cerrado para la suma, $0 \in S$ y $\mathbb{N} \setminus S$ es finito. Los elementos de $\mathbb{N} \setminus S$ son los *huecos* de S y al cardinal de dicho conjunto se le denomina *género* de S, denotándose por $\mathrm{g}(S)$. El *número de Frobenius* de S es el mayor entero que no pertenece a S y se denota por $\mathrm{F}(S)$.

Sea un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$. Se denota por $\langle A \rangle$ al submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ generado por A, es decir, al conjunto

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_1, \ldots, a_n \in A,\ \text{and } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}\}.$$

En [10] se demuestra que $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico si y sólo si $\mathrm{mcd}\{A\} = 1$, siendo mcd el *máximo común divisor* de un conjunto dado.

Es bien conocido (véase [10]) que para cada semigrupo numérico S existe un único subconjunto finito $G \subseteq S$ tal que $S = \langle G \rangle$ y ningún subconjunto propio de G genera a S. Se dice que G es un *sistema minimal de generadores* de S Al cardinal de G se le conoce como la *dimensión de inmersión* de S y se denota por $\mathrm{e}(S)$.

⋆ Trabajo financiado por el MEC por medio del proyecto de investigación MTM2007-62346

El problema de Frobenius (véase [5]) consiste en encontrar fórmulas que permitan calcular, en términos del sistema minimal de generadores de un semigrupo numérico dado, el número de Frobenius y el género de dicho semigrupo numérico. Este problema fue resuelto por Sylvester y Curran Sharp (véase [12]) en el caso de dimensión de inmersión dos. Por contra, para el caso de dimensión tres, Curtis demostró en [2] que es imposible dar una expresión polinomial que permita calcular el número de Frobenius. La motivación de este trabajo es proporcionar una familia amplia de semigrupos numéricos de dimensión de inmersión tres para la que se resuelve tal problema y, además, la solución obtenida tiene una expresión sencilla.

Para llevar a cabo este trabajo nos centraremos en el caso de semigrupos numéricos cuyos generadores minimales n_1, n_2, n_3 son números primos relativos dos a dos. Esta reducción podemos hacerla gracias a las igualdades (véase [4,7])

$$\mathrm{F}(S) = d\,\mathrm{F}\left(\langle\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, n_3\rangle\right) + (d-1)n_3,$$

$$\mathrm{g}(S) = d\mathrm{g}\left(\langle\frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, n_3\rangle\right) + \frac{(d-1)(n_3-1)}{2}.$$

Herramienta principal será el *conjunto de Apéry* de m en S (véase [1]). Recordemos que si S es un semigrupo numérico y $m \in S \setminus \{0\}$ entonces se define $\mathrm{Ap}(S,m) = \{s \in S \mid s - m \notin S\}$. Es fácil probar que, siendo $w(i)$ el menor elemento de S congruente con i módulo m, se verifica la igualdad $\mathrm{Ap}(S,m) = \{w(0) = 0, w(1), \ldots, w(m-1)\}$. De aquí podemos afirmar que $\mathrm{F}(S) = \mathrm{máx}\{\mathrm{Ap}(S,m)\} - m$. Además, en [11] se da una fórmula para $\mathrm{g}(S)$ en función de los elementos de $\mathrm{Ap}(S,m)$.

Otro concepto a utilizar será el de *pseudo-número de Frobenius* (véase [9]). Si, como es usual, $\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros, se dice que $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ es un pseudo-número de Frobenius de S si $x + s \in S$ para todo $s \in S \setminus \{0\}$. Se denota por $\mathrm{PF}(S)$ al conjunto de pseudo-números de Frobenius de S. A partir de la definición se sigue que $\mathrm{F}(S) = \mathrm{máx}\{\mathrm{PF}(S)\}$.

Resumamos a continuación el contenido del trabajo. En primer lugar, observaremos que todo semigrupo numérico de dimensión de inmersión tres, cuyos generadores minimales son números primos relativos dos a dos, pertenece a una cierta familia $\mathcal{F}$ de semigrupos numéricos determinados a partir de cuatro parámetros. Considerando $S = \langle a, b, cb - da\rangle \in \mathcal{F}$, el principal resultado de la Sección 2 es el Teorema 1, donde damos explícitamente $\mathrm{Ap}(S,a)$ cuando añadimos una condición sobre los valores a, b, c, d. Como consecuencia de tal resultado, mostramos las fórmulas para $\mathrm{F}(S)$, $\mathrm{g}(S)$ y $\mathrm{PF}(S)$. En la Sección 3 se dan las pautas para probar los resultados mostrados.

Para acabar esta introducción, indicar que una versión de este trabajo ([6]), con todas las demostraciones en detalle aunque con menos ejemplos, está en proceso de “referee” en este momento.

2 Resultados y ejemplos

Comenzamos con un lema que permite establecer la relación entre los semigrupos númericos de dimensión de inmersión tres, cuyos generadores minimales son números primos relativos dos a dos, y la familia

$$\mathcal{F} = \{\langle a, b, cb - da\rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathrm{mcd}\{a, b\} = \mathrm{mcd}\{a, c\} =$$

$$\mathrm{mcd}\{b, d\} = 1,\ 2 \le c \le a - 1,\ cb - da > 0\}\,.$$

Lema 1. *Sea un semigrupo numérico S con sistema minimal de generadores dado por $\{n_1, n_2, n_3\}$. Si $\mathrm{mcd}\{n_1, n_2\} = 1$ entonces existe un único número $k \in \{2, \ldots, n_1 - 1\}$ y existe un único número $t \in \{1, \ldots, n_2 - 1\}$ tales que $n_3 = kn_2 - tn_1$.*

Nota 1. Sea el semigrupo numérico $S = \langle n_1, n_2, n_3\rangle$. Si n_1, n_2, n_3 son números primos relativos dos a dos, tomando $a = n_1$, $b = n_2$, $c = k$, $d = t$ y $cb - da = kn_2 - tn_1 = n_3$, a partir del Lema 1 deducimos que $S \in \mathcal{F}$.

En el siguiente teorema se describe explícitamente el conjunto de Apéry $\mathrm{Ap}(S, a)$ cuando $S = \langle a, b, cb - da\rangle \in \mathcal{F}$ y se añade cierta condición.

Teorema 1. *Sea el semigrupo numérico $S = \langle a, b, cb-da\rangle \in \mathcal{F}$. Si se verifica la desigualdad $cb - da \ge d((-a) \bmod c)$ entonces*

$$\mathrm{Ap}(S, a) = \left\{\alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da \mid \alpha \in \{0, \ldots, a - 1\}\right\}.$$

Observación 1. Sean dos números enteros p, q tales que $q \neq 0$. Se denota por $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$ y $p \bmod q$ al cociente y al resto, respectivamente, de la división entera de p por q. Además, considérese $\lceil r\rceil = \mathrm{mín}\{z \in \mathbb{Z} \mid r \le z\}$ para cualquier número racional r. Ya que $\left\lceil \frac{x}{c} \right\rceil c = x + (-x) \bmod c$, para todo $x \in \mathbb{N}$, entonces

$$cb - da \ge d((-a) \bmod c) \Leftrightarrow cb - da \ge d\left(\left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil c - a\right) \Leftrightarrow \frac{b}{d} \ge \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil.$$

Ahora bien, como $cb - ad > 0$, tenemos que $\frac{b}{d} > \frac{a}{c}$. A partir de aquí podemos afirmar que existen infinitos semigrupos numéricos que satisfacen las hipótesis del Teorema 1. Desafortunadamente no todos las cumplen, como vemos en el ejemplo que damos a continuación.

Por último, observemos que la condición $\frac{b}{d} \ge \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil$ es equivalente a suponer que el intervalo $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right]$ contenga algún número entero. Para abreviar, a partir de ahora, llamaremos *condición (C)* a la condición expuesta.

Ejemplo 1. Sea el semigrupo numérico $S = \langle 16, 19, 21\rangle$. Como elemento de $\mathcal{F}$, es factible cualquiera de las siguientes expresiones

- $S = \langle 16, 19, 7 \times 19 - 7 \times 16\rangle = \langle 19, 16, 12 \times 16 - 9 \times 19\rangle$,

- $S = \langle 16, 21, 7 \times 21 - 8 \times 16 \rangle = \langle 21, 16, 13 \times 16 - 9 \times 21 \rangle$,
- $S = \langle 19, 21, 8 \times 21 - 8 \times 19 \rangle = \langle 21, 19, 13 \times 19 - 11 \times 21 \rangle$.

Es claro que los intervalos $\left[\frac{16}{7}, \frac{19}{7}\right]$, $\left[\frac{19}{12}, \frac{16}{9}\right]$, $\left[\frac{16}{7}, \frac{21}{8}\right]$, $\left[\frac{21}{13}, \frac{16}{9}\right]$, $\left[\frac{19}{8}, \frac{21}{8}\right]$ y $\left[\frac{21}{13}, \frac{19}{11}\right]$ no contienen números enteros. Por tanto no es posible aplicar el Teorema 1 en este caso.

Observación 2. Se define la *multiplicidad* de un semigrupo numérico S como su menor elemento entero positivo. Pensamos que el semigrupo numérico dado en el Ejemplo 1 es el semigrupo numérico que tiene la menor multiplicidad posible y al que no es posible aplicar el Teorema 1.

Observación 3. En el Ejemplo 1 hemos visto que varias cuartetas a, b, c, d dan lugar a un mismo semigrupo numérico como elemento de $\mathcal{F}$. En el ejemplo siguiente se ve como puede ocurrir que para algunas elecciones se puede aplicar el Teorema 1 y no para otras, aunque estén asociadas a un mismo semigrupo numérico.

Ejemplo 2. Sea $S = \langle 5, 7, 3 \times 7 - 2 \times 5 \rangle = \langle 5, 7, 11 \rangle$. Ya que $\frac{7}{2} \geq \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil$, por el Teorema 1 tenemos que

$$\mathrm{Ap}(S, 5) = \left\{ \alpha \times 7 - \left\lfloor \frac{\alpha}{3} \right\rfloor \times 2 \times 5 \mid \alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \right\} = \{0, 7, 14, 11, 18\}.$$

Si consideramos $S = \langle 5, 11, 2 \times 11 - 3 \times 5 \rangle = \langle 5, 11, 7 \rangle$, ya que $\frac{11}{3} \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil$, obtenemos de nuevo

$$\mathrm{Ap}(S, 5) = \left\{ \alpha \times 11 - \left\lfloor \frac{\alpha}{2} \right\rfloor \times 3 \times 5 \mid \alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \right\} = \{0, 11, 7, 18, 14\}.$$

Por contra, si tomamos $S = \langle 7, 11, 3 \times 11 - 4 \times 7 \rangle = \langle 7, 11, 5 \rangle$ entonces no es posible aplicar el Teorema 1 pues $\frac{11}{4} < \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil$.

Como primera consecuencia del Teorema 1, en el resultado siguiente se calcula el género de los semigrupos de dimensión de inmersión 3 que pertenecen a $\mathcal{F}$ y satisfacen la condición (C).

Proposición 1. *Sea un semigrupo numérico $S = \langle a, b, cb - da \rangle \in \mathcal{F}$ que satisfaga la condición (C). Entonces*

$$\mathrm{g}(S) = \frac{(b-1)(a-1)}{2} - d \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor \left(a - \frac{c}{2} \left(\left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor + 1 \right) \right).$$

Ejemplo 3. Sea $S = \langle 5, 7, 3 \times 7 - 2 \times 5 \rangle = \langle 5, 7, 11 \rangle$. Aplicando la Proposición 1 tenemos que

$$\mathrm{g}(S) = \frac{6 \times 4}{2} - 2 \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor \left(5 - \frac{3}{2} \left(\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 1 \right) \right) = 12 - 4 = 8.$$

Para $S = \langle 5, 11, 2 \times 11 - 3 \times 5 \rangle = \langle 5, 7, 11 \rangle$ obtenemos la misma conclusión,

$$\mathrm{g}(S) = \frac{10 \times 4}{2} - 3 \lfloor 2 \rfloor (5 - 1 (\lfloor 2 \rfloor + 1)) = 20 - 12 = 8.$$

Como segunda consecuencia del Teorema 1, en el siguiente resultado damos explícitamente el conjunto de pseudo-números de Frobenius.

Proposición 2. *Sea un semigrupo numérico* $S = \langle a, b, cb - da\rangle \in \mathcal{F}$ *que satisfaga la condición (C). Entonces*

$$\mathrm{PF}(S) = \left\{ \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b - a, (a-1)b - \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor da - a \right\}.$$

Ejemplo 4. Sea $S = \langle 5, 7, 3 \times 7 - 2 \times 5\rangle = \langle 5, 7, 11\rangle$. Aplicando la Proposición 2 tenemos que $\mathrm{PF}(S) = \{9, 13\}$. Como es de suponer, el mismo resultado se obtiene para $S = \langle 5, 11, 2 \times 11 - 3 \times 5\rangle$.

Observación 4. Consideremos $S = \langle 7, 11, 3 \times 11 - 4 \times 7\rangle = \langle 5, 7, 11\rangle$. Entonces no se verifica la condición (C) (véase el Ejemplo 2) y no podemos aplicar las dos proposiciones dadas. De hecho, si se aplican, los resultados que se obtienen son incorrectos.

Concluimos esta sección con un corolario que se deduce de forma inmediata de la Proposición 2.

Corolario 1. *Sea un semigrupo numérico* $S = \langle a, b, cb - da\rangle \in \mathcal{F}$ *que satisfaga la condición (C). Entonces*

$$\mathrm{F}(S) = \begin{cases} (a-1)b - \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor da - a, & si\ 1 > \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor \frac{c}{a} + \frac{d}{b}, \\ \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b - a, & si\ 1 \leq \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor \frac{c}{a} + \frac{d}{b}. \end{cases}$$

Ejemplo 5. Sea $S = \langle 5, 7, 11\rangle$. Si consideramos $S = \langle 5, 7, 3 \times 7 - 2 \times 5\rangle$, se aplica el primer caso del Corolario 1 pues $1 > \left\lfloor \frac{5-1}{3} \right\rfloor \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$. Por contra, para la elección $S = \langle 5, 11, 2 \times 11 - 3 \times 5\rangle$ se aplica el segundo pues $1 \leq \left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor \frac{2}{5} + \frac{3}{11}$.

Nota 2. No todos los elementos de $\mathcal{F}$ tienen dimensión de inmersión 3. Por ejemplo, $S = \langle 3, 13, 2 \times 13 - 7 \times 3\rangle = \langle 3, 13, 5\rangle \in \mathcal{F}$ y, puesto que $13 \in \langle 3, 5\rangle$, entonces $\mathrm{e}(S) = 2$. Si se quiere eliminar este inconveniente, una posibilidad es considerar la familia

$$\mathcal{F}^* = \{\langle a, b, cb - da\rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathrm{mcd}\{a, b\} = \mathrm{mcd}\{a, c\} =$$
$$\mathrm{mcd}\{b, d\} = 1,\ 2 \leq c \leq a - 1,\ a < b < cb - da\}.$$

La misma idea de la Nota 1 permite asegurar que todo semigrupo numérico de dimensión de inmersión tres está en $\mathcal{F}^*$. Además, si $\langle a_1, b_1, c_1 b_1 - d_1 a_1\rangle = \langle a_2, b_2, c_2 b_2 - d_2 a_2\rangle \in \mathcal{F}^*$ entonces $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$. Sin embargo, puede ocurrir que la cuarteta a, b, c, d concreta para estar en $\mathcal{F}^*$ no satisfaga la condición (C).

Ejemplo 6. Para $S = \langle 6, 7, 5 \times 7 - 4 \times 6\rangle = \langle 6, 7, 11\rangle \in \mathcal{F}^*$ no se satisface la condición C. Sin embargo, para $S = \langle 11, 7, 4 \times 7 - 2 \times 11\rangle = \langle 11, 7, 6\rangle \in \mathcal{F}$ sí se cumple.

3 Esquemas de las demostraciones

En esta sección indicaremos brevemente las líneas para demostrar los resultados de la sección previa. Señalar que las demostraciones son esencialmente iguales ya se considere la familia $\mathcal{F}$ o la familia $\mathcal{F}^*$.

Demostración (Lema 1). Se sigue de [10, Lema 2.6] y tener en cuenta que (véase [11]) $\mathrm{Ap}(S, n_1) = \{0, n_2, 2n_2, \ldots, (n_1 - 1)n_2\}$, donde n_1, n_2 son dos números enteros positivos tales que $\mathrm{mcd}\{n_1, n_2\} = 1$ y $S = \langle n_1, n_2 \rangle$. □

Para la demostración del Teorema 1 es necesario un lema técnico.

Lema 2. *Sean cuatro números enteros positivos a, b, c, d tales que* $\mathrm{mcd}\{a, b\} = 1$ *y satisfagan la condición (C). Sea el semigrupo numérico*

$$S = \left\langle \left\{ \alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da \mid \alpha \in \{0, \ldots, a-1\} \right\} \cup \{a\} \right\rangle .$$

Entonces

$$\mathrm{Ap}(S, a) = \left\{ \alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da \mid \alpha \in \{0, \ldots, n_1 - 1\} \right\} .$$

Demostración. A partir de [8, Lema 3.3], es suficiente con probar los dos siguientes asertos.

1. Si $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, a-1\}$ y $\alpha + \beta \leq a - 1$ entonces
$$\alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da + \beta b - \left\lfloor \frac{\beta}{c} \right\rfloor da \geq (\alpha + \beta) b - \left\lfloor \frac{\alpha + \beta}{c} \right\rfloor da.$$
2. Si $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, a-1\}$ y $\alpha + \beta \geq a$ entonces
$$\alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da + \beta b - \left\lfloor \frac{\beta}{c} \right\rfloor da \geq (\alpha + \beta - a) b - \left\lfloor \frac{\alpha + \beta - a}{c} \right\rfloor da.$$

□

Demostración (Teorema 1). Sea el semigrupo numérico

$$\bar{S} = \left\langle \left\{ \alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da \mid \alpha \in \{0, \ldots, a-1\} \right\} \cup \{a\} \right\rangle .$$

Por el Lema 2 se sabe que

$$\mathrm{Ap}(\bar{S}, a) = \left\{ \alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da \mid \alpha \in \{0, \ldots, a-1\} \right\} .$$

Para acabar la demostración basta con probar la igualdad $S = \bar{S}$. □

La demostración de la Proposición 1 es una consecuencia directa del Teorema 1 y el siguiente resultado que aparece en [11].

Lema 3. *Si T es un semigrupo numérico y $m \in T \setminus \{0\}$ entonces*

$$\mathrm{g}(T) = \left(\frac{1}{m} \sum_{w \in \mathrm{Ap}(T,m)} w \right) - \frac{m-1}{2}.$$

Terminamos la sección con la demostración de la Proposición 2. En ella se utiliza la siguiente consecuencia de [3, Proposición 7].

Lema 4. *Sea un semigrupo numérico T y un número $m \in T \setminus \{0\}$. Consideremos* $\max_{\leq_T}\{\mathrm{Ap}(T,m)\} = \{w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{it}\}$*. Entonces*

$$\mathrm{PF}(T) = \{w_{i1} - m, w_{i2} - m, \ldots, w_{it} - m\}.$$

Recordemos que, si T es un semigrupo numérico, podemos considerar el orden parcial definido por

$$x \leq_T y \text{ si } y - x \in T.$$

Si $A \subseteq T$, se denota por $\max_{\leq_T}\{A\}$ al conjunto de elementos maximales de A con respecto a dicho orden parcial.

Demostración (Proposición 2). A partir del Teorema 1, teniendo en cuenta que $\alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da = \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor (cb - da) + \left(\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor c\right) b$ y que $a - 1 - \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor c \neq c - 1$, se sigue que

$$\max_{\leq_S}\{\mathrm{Ap}(S,a)\} = \left\{ \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b, (a-1)b - \left\lfloor \frac{a-1}{c} \right\rfloor da \right\}.$$

Aplicando el Lema 4 se concluye el resultado. □

Referencias

[1] R. Apéry. Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222:1198–1200, 1946.

[2] F. Curtis. On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup. *Math. Scand.*, 67:190–192, 1990 .

[3] R. Fröberg, G. Gottlieb, and R. Häggkvist. On numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 35:63–83, 1987.

[4] S. M. Johnson. A linear Diophantine problem. *Canad. J. Math.*, 12:390–398, 1960.

[5] J. L. Ramírez Alfonsín. *The Diophantine Frobenius problem.* Oxford Univ. Press, 2005.

[6] A.M. Robles-Pérez and J.C. Rosales. The Frobenius problem for some numerical semigroups with embedding dimension equal to three. *Submitted.*

[7] Ö. J. Rödseth. On a linear Diophantine problem of Frobenius. *J. Reine Angew. Math.*, 301:171–178, 1978.

[8] J. C. Rosales. On numericals semigroups. *Semigroup Forum*, 52:307–318, 1996.

[9] J. C. Rosales and M. B. Branco. Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups. *J. Pure Appl Algebra*, 171(2-3):303–314, 2002.

[10] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez. *Numerical semigroups. Developments in Mathematics, vol. 20.* Springer, New York, 2009.

[11] E. S. Selmer. On the linear Diophantine problem of Frobenius. *J. Reine Angew. Math.*, 293/294:1–17, 1977.

[12] J. J. Sylvester. Problem 7382. *The Educational Times, and Journal of the College of Preceptors, New Series*, 36(266):177, 1883. Solution by W. J. Curran Sharp. *ibid.*, 36(271):315, 1883.