El problema de Frobenius para algunos semigrupos numéricos de dimensión de inmersión tres

A.M. Robles-Pérez, J.C. Rosales

VII-JMDA

Castro Urdiales (Cantabria), 7 de julio de 2010

Definiciones

Definición (Semigrupo numérico)

S es un semigrupo numérico *si es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que es cerrado para la suma, contiene al cero y $\mathbb{N} \setminus S$ es finito.*

- $\mathrm{H}(S)$ es el conjunto de elementos de $\mathbb{N}$ que no están en S: *conjunto de huecos* de S.
- $\mathrm{g}(S)$ es el cardinal de $\mathrm{H}(S)$: *genero* de S o *grado de singularidad* de S.
- $\mathrm{F}(S)$ es el máximo de $\mathrm{H}(S)$ (esto es, el mayor entero que no está en S): *número de Frobenius* de S.

Definiciones

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_1, \ldots, a_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}\}$$

es el submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ generado por A.

Definición (Sistema minimal de generadores)

Para cada semigrupo numérico S existe un único subconjunto finito $G \subseteq S$ tal que $S = \langle G \rangle$ y ningún subconjunto propio de G genera a S.

- $\mathrm{e}(S)$ es el cardinal de G: *dimensión de inmersión* de S.

Ejemplo

$$S = \{0,3,5,6,8,\rightarrow\} = \{0,3,5,6\} \cup \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 8\}$$

$$\mathrm{H}(S) = \{1,2,4,7\}$$

$$\mathrm{g}(S) = 4$$

$$\mathrm{F}(S) = 7$$

$$S = \langle 3,5 \rangle$$

$$\mathrm{e}(S) = 2$$

Problema de Frobenius

Problema de Frobenius

Sea $S = \langle G \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Encontrar fórmulas que permitan calcular $\mathrm{g}(S)$ y $\mathrm{F}(S)$ en función de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

n=2

- $\mathrm{F}(S) = a_1 a_2 - a_1 - a_2$
- $\mathrm{g}(S) = \frac{a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1}{2}$

Ejemplo ($S = \langle 3, 5 \rangle$)

- $\mathrm{F}(S) = 3 \times 5 - 3 - 5 = 7$
- $\mathrm{g}(S) = \frac{3 \times 5 - 3 - 5 + 1}{2} = 4$

Problema de Frobenius

n=3

Problema abierto

Lema (Reducción)

Sean $S = \langle G \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ *y* $\delta = \mathrm{mcd}\{a_1, a_2\}$.

- $\mathrm{F}(S) = \delta \mathrm{F}\left(\langle \frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}, a_3 \rangle\right) + (d-1)a_3$
- $\mathrm{g}(S) = \delta \mathrm{g}\left(\langle \frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}, a_3 \rangle\right) + \frac{(\delta-1)(a_3-1)}{2}$

Hipótesis

$S = \langle G \rangle = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$, siendo n_1, n_2, n_3 primos relativos dos a dos.

Conjunto de Apéry

Definición (*Conjunto de Apéry* de m en S)

Sea S semigrupo numérico. Sea $m \in S \setminus \{0\}$.

$$\mathrm{Ap}(S,m) = \{s \in S \mid s - m \notin S\}$$

Lema

- $\mathrm{F}(S) = \max\{\mathrm{Ap}(S,m)\} - m$
- $\mathrm{g}(S) = \frac{1}{3}\left(\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,m)} w\right) - 1$

Conjunto de Apéry

Ejemplo

$$S = \langle 3,5,7 \rangle = \{0,3,5,\rightarrow\} = \{0,3\} \cup \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 5\}$$

$$\mathrm{Ap}(S,3) = \{0,5,7\}$$

- $\mathrm{F}(S) = \max\{0,5,7\} - 3 = 4$
- $\mathrm{g}(S) = \frac{1}{3}(0+5+7) - 1 = 3$

Conjunto de Apéry

Lema (Reducción)

Sean $S = \langle G \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\delta = \mathrm{mcd}\{a_1, a_2\}$ *y* $T = \langle \frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}, a_3 \rangle$.

- $\mathrm{Ap}(S, a_3) = \delta(\mathrm{Ap}(T, a_3))$

Ejemplo

- $\mathrm{Ap}(\langle 5, 6, 7 \rangle, 7) = \{0, 15, 16, 10, 11, 5, 6\}$
- $\mathrm{Ap}(\langle 10, 12, 7 \rangle, 7) = \{0, 22, 30, 10, 32, 12, 20\}$

Pseudo-número de Frobenius

Definición (*Pseudo-número de Frobenius*)

$$x \in \mathbb{Z} \setminus S \ \ \textit{tal que} \ \ x + s \in S \ \ \textit{para todo} \ \ s \in S \setminus \{0\}$$

- $\mathrm{PF}(S)$ es el conjunto de pseudo-números de Frobenius de S.
- $\mathrm{t}(S)$ es el cardinal de $\mathrm{PF}(S)$: *tipo* de S.

Lema

- $\mathrm{F}(S) = \max\{\mathrm{PF}(S)\}$
- $\mathrm{t}(S) = 2$ *(si $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ con n_1, n_2, n_3 primos relativos dos a dos)*

$S_1 = \langle 5, 7, 11 \rangle$

- $\mathrm{Ap}(S_1, 5) = \{0, 11, 7, 18, 14\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 11 & 18 & 25 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 7 & 18 \\ 14 & 25 \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{Ap}(S_1, 7) = \{0, 15, 16, 10, 11, 5, 20\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 11 & 16 & 21 & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 5 & 16 \\ 10 & 21 \\ 15 & \\ 20 & \end{bmatrix}$$

$S_1 = \langle 5, 7, 11 \rangle$

- $\mathrm{Ap}(S_1, 11) = \{0, 12, 24, 14, 15, 5, 17, 7, 19, 20, 10\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & \color{blue}{20} \\ 7 & 12 & 17 & \color{red}{22} & \\ 14 & 19 & \color{blue}{24} & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 \\ 5 & 12 & 19 \\ 10 & 17 & \color{blue}{24} \\ 15 & \color{red}{22} & \\ \color{blue}{20} & & \end{bmatrix}$$

- $$\mathrm{PF}(S_1) = \{14-5, 18-5\} = \{20-7, 16-7\} =$$
$$\{20-11, 24-11\} = \{9, 13\}$$

$S_2 = \langle 6, 7, 11 \rangle$

- $\mathrm{Ap}(S_2, 6) = \{0, 7, 14, 21, 22, 11\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 & 21 \\ 11 & 18 & & \\ 22 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 \\ 7 & 18 & \\ 14 & & \\ 21 & & \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{Ap}(S_2, 7) = \{0, 22, 23, 17, 11, 12, 6\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 11 & 17 & 23 \\ 22 & 28 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 11 & 22 \\ 6 & 17 & 28 \\ 12 & 23 & \end{bmatrix}$$

$S_2 = \langle 6, 7, 11 \rangle$

- $\mathrm{Ap}(S_2, 11) = \{0, 12, 13, 14, 26, 27, 6, 7, 19, 20, 21\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 7 & 13 & 19 \\ 14 & 20 & 26 \\ 21 & 27 & 33 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 7 & 14 & 21 \\ 6 & 13 & 20 & 27 \\ 12 & 19 & 26 & 33 \end{bmatrix}$$

- $$\mathrm{PF}(S_2) = \{21-6, 22-6\} = \{23-7, 22-7\} =$$ $$\{26-11, 27-11\} = \{15, 16\}$$

$S_3 = \langle 16, 19, 21 \rangle$

- $\mathrm{Ap}(S_3, 16)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 19 & 38 & 57 & 76 \\ 21 & 40 & 59 & 78 & 97 \\ 42 & 61 & 80 & & \\ 63 & 82 & & & \\ 84 & 103 & & & \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{Ap}(S_3, 19)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 16 & 32 & 48 & 64 \\ 21 & 37 & 53 & 69 & 85 \\ 42 & 58 & 74 & 90 & 106 \\ 63 & 79 & 95 & & \\ 84 & 100 & & & \end{bmatrix}$$

$S_2 = \langle 6, 7, 11 \rangle$

- $\mathrm{Ap}(S_3, 21)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 16 & 32 & 48 & 64 \\ 19 & 35 & 51 & 67 & 83 \\ 38 & 54 & 70 & 86 & {\color{blue}102} \\ 57 & 73 & 89 & {\color{red}105} & \\ 76 & 92 & {\color{blue}108} & & \end{bmatrix}$$

-

$$\mathrm{PF}(S_3) = \{97-16, 103-16\} = \{106-19, 100-19\} =$$

$$\{102-21, 108-21\} = \{81, 87\}$$

Familias

Familia 1

$$\mathcal{F} = \{\langle a,b,cb-da\rangle \mid a,b,c,d \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \mathrm{mcd}\{a,b\} = \mathrm{mcd}\{a,c\} = \mathrm{mcd}\{b,d\} = 1,\ 2 \leq c \leq a-1,\ cb-da > 0\}$$

Familia 2

$$\mathcal{F}^* = \{\langle a,b,cb-da\rangle \mid a,b,c,d \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \mathrm{mcd}\{a,b\} = \mathrm{mcd}\{a,c\} = \mathrm{mcd}\{b,d\} = 1,\ 2 \leq c \leq a-1,\ a < b < cb-da\}$$

Ejemplos

$S_0 = \langle 3, 5, 13 \rangle$

- $S_0 = \langle 3, 13, 2 \times 11 - 3 \times 5 \rangle \in \mathcal{F}, \notin \mathcal{F}^*$
- $\mathrm{e}(S_0) = 2$

$S_1 = \langle 5, 7, 11 \rangle$

- $S_1 = \langle 5, 7, 3 \times 7 - 2 \times 5 \rangle \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^*$
- $S_1 = \langle 7, 5, 5 \times 5 - 2 \times 7 \rangle \in \mathcal{F}, \notin \mathcal{F}^*$
- $S_1 = \langle 5, 11, 2 \times 11 - 3 \times 5 \rangle = \langle 11, 5, 8 \times 5 - 3 \times 11 \rangle \in \mathcal{F}, \notin \mathcal{F}^*$
- $S_1 = \langle 7, 11, 3 \times 11 - 4 \times 7 \rangle = \langle 11, 7, 7 \times 7 - 4 \times 11 \rangle \in \mathcal{F}, \notin \mathcal{F}^*$

Condición (C)

Definición

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N} \setminus 0$. *Se satisface la* condición (C) *si*

$$\frac{b}{d} \geq \left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil.$$

$S_1 = \langle 5, 7, 11 \rangle$

- $\langle 5, 7, 3 \times 7 - 2 \times 5 \rangle = \langle 5, 11, 2 \times 11 - 3 \times 5 \rangle = \langle 7, 5, 5 \times 5 - 2 \times 7 \rangle$ satisfacen la condición (C).
- $\langle 7, 11, 3 \times 11 - 4 \times 7 \rangle = \langle 11, 5, 8 \times 5 - 3 \times 11 \rangle = \langle 11, 7, 7 \times 7 - 4 \times 11 \rangle$ no satisfacen la condición (C).

Condición (C)

$S_2 = \langle 6, 7, 11 \rangle$

- $\langle 7, 6, 3\times 6 - 1\times 7\rangle = \langle 11, 6, 3\times 6 - 1\times 7\rangle = \langle 11, 7, 4\times 7 - 2\times 11\rangle$ satisfacen la condición (C).
- $\langle 6, 7, 5\times 7 - 4\times 6\rangle = \langle 6, 11, 5\times 11 - 8\times 6\rangle = \langle 7, 11, 5\times 11 - 7\times 7\rangle$ no satisfacen la condición (C).

$S_2 = \langle 16, 19, 21 \rangle$

- $\langle 16, 19, 7\times 19 - 7\times 16\rangle = \langle 16, 21, 7\times 21 - 8\times 16\rangle = \langle 19, 16, 12\times 16 - 9\times 19\rangle = \langle 19, 21, 8\times 21 - 8\times 19\rangle = \langle 21, 16, 13\times 16 - 9\times 21\rangle = \langle 21, 19, 13\times 19 - 11\times 21\rangle$ no satisfacen la condición (C).

Resultado principal

Teorema

Sea el semigrupo numérico $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle = \langle a, b, cb - da \rangle \in \mathcal{F}$ *verificando la condición (C). Entonces*

$$\mathrm{Ap}(S,a) = \left\{ \alpha b - \left\lfloor \frac{\alpha}{c} \right\rfloor da \mid \alpha \in \{0, \ldots, a-1\} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix}
0 & n_2 & \cdots & in_2 & \cdots & (c-1)n_2 \\
n_3 & n_2+n_3 & \cdots & in_2+n_3 & \cdots & (c-1)n_2+n_3 \\
2n_3 & n_2+2n_3 & \cdots & in_2+2n_3 & \cdots & (c-1)n_2+2n_3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\left(\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor - 1\right)n_3 & n_2+\left(\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor - 1\right)n_3 & \cdots & in_2+\left(\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor - 1\right)n_3 & \cdots & (c-1)n_2+\left(\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor - 1\right)n_3 \\
\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor n_3 & n_2+\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor n_3 & \cdots & in_2+\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor n_3 & (i+1)n_2+\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor n_3 &
\end{bmatrix}$$

siendo $i = a - \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor c - 1$.

Consecuencias

Proposición

Sea el semigrupo numérico $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle = \langle a, b, cb - da \rangle \in \mathcal{F}$ *verificando la condición (C). Entonces*

$$\mathrm{g}(S) = \frac{(b-1)(a-1)}{2} - d\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor \left(a - \frac{c}{2}\left(\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + 1 \right) \right).$$

Proposición

Sea el semigrupo numérico $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle = \langle a, b, cb - da \rangle \in \mathcal{F}$ *verificando la condición (C). Entonces*

$$\mathrm{PF}(S) = \left\{ \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b - a, (a-1)b - \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor da - a \right\}.$$

Consecuencias

Corolario

Sea el semigrupo numérico $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle = \langle a, b, cb - da \rangle \in \mathcal{F}$ verificando la condición (C). Entonces

$$\mathrm{F}(S) = \begin{cases} (a-1)b - \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor da - a, & si\ 1 > \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor \frac{c}{a} + \frac{d}{b}, \\ \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor (cb - da) + da - b - a, & si\ 1 \leq \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor \frac{c}{a} + \frac{d}{b}. \end{cases}$$

Observación

Tanto el Teorema, como las dos Proposiciones y el Corolario anteriores son válidos si consideramos la familia $\mathcal{F}^*$ en lugar de la familia $\mathcal{F}$.

Referencias

R. Apéry.
Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques.
C. R. Acad. Sci. Paris, 222:1198–1200, 1946.

F. Curtis.
On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup.
Math. Scand., 67:190–192, 1990 .

R. Fröberg, G. Gottlieb, and R. Häggkvist.
On numerical semigroups.
Semigroup Forum, 35:63–83, 1987.

S. M. Johnson.
A linear Diophantine problem.
Canad. J. Math., 12:390–398, 1960.

Referencias

J. L. Ramírez Alfonsín.
The Diophantine Frobenius problem.
Oxford Univ. Press, 2005.

A.M. Robles-Pérez and J.C. Rosales.
The Frobenius problem for some numerical semigroups with embedding dimension equal to three.
Submitted.

Ö. J. Rödseth.
On a linear Diophantine problem of Frobenius.
J. Reine Angew. Math., 301:171–178, 1978.

J. C. Rosales.
On numericals semigroups.
Semigroup Forum, 52:307–318, 1996.

Referencias

J. C. Rosales and M. B. Branco.
Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups.
J. Pure Appl Algebra, 171(2-3):303–314, 2002.

J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez.
Numerical semigroups. *Developments in Mathematics, vol. 20*.
Springer, New York, 2009.

E. S. Selmer.
On the linear Diophantine problem of Frobenius.
J. Reine Angew. Math., 293/294:1–17, 1977.

J. J. Sylvester.
Problem 7382.
The Educational Times, and Journal of the College of Preceptors, New Series, 36(266):177, 1883.
Solution by W. J. Curran Sharp.
ibid., 36(271):315, 1883.