

Longitudes de frases y semigrupos numéricos

Aureliano M. Robles-Pérez

Universidad de Granada

Charla basada en un trabajo conjunto con José Carlos Rosales

Seminario de semigrupos numéricos – Jerez 2013
15-16 de julio de 2013

Introducción

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- S es un semigrupo numérico.
- A es un conjunto finito de palabras y \smile es un símbolo.

Definición

- Una (A, \smile) -secuencia es una concatenación finita de elementos de $A \cup \{\smile\}$.
- Una (A, \smile) -secuencia f es una frase si verifica las siguientes condiciones:
 - i) el símbolo \smile no es ni el primero ni el último de los caracteres de f ;
 - ii) el símbolo \smile no aparece dos veces consecutivamente en f .
- La longitud de una frase f es el número de caracteres que aparecen en f y se denota por $\ell(f)$.

Introducción

Ejemplo

- $A = \{\text{pedro, carlos, aureliano}\}$
- $f = \text{carlospedroaureliano_pedrocarlospedro_aureliano}$
- $\ell(f) = 47$.

Nota

- *Lo importante de una palabra es su longitud, no los caracteres que la forman.*

Notación

- $\mathcal{F}(A, _)$ es el conjunto de todas las frases que se pueden construir a partir de A y $_$.
- $\mathcal{L}(A, _) = \{\ell(f) \mid f \in \mathcal{F}(A, _)\}$

LPL-semigrupos

Proposición

- Sea A un conjunto finito no vacío de palabras y el símbolo \smile . Entonces $\mathcal{L}(A, \smile)$ es semigrupo numérico.

Definición

- Un semigrupo numérico S es un LPL-semigrupo si existe un conjunto de palabras no vacío A tal que $S = \mathcal{L}(A, \smile)$.

Ejemplo

- $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$ no es un LPL-semigrupo pues $2 \cdot 5 + 1 = 11 \notin S$.

LPL-semigrupos

Teorema

- Sea S un semigrupo numérico. Son equivalentes las siguientes condiciones:
 - i) S es un LPL-semigrupo.
 - ii) Si $a, b \in S \setminus \{0\}$ entonces $a + b + 1 \in S$.

Referencia

- M. Bras-Amorós, P. A. García-Sánchez, A. Vico-Oton. Nonhomogeneous patterns on numerical semigroups. Por aparecer en Internat. J. Algebra Comput.

LPL-semigrupos

- Sea S un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_1, \dots, n_p\}$.
- Si $s \in S$ entonces denotaremos por

$$L(s) = \max \{a_1 + \dots + a_p \mid a_1 n_1 + \dots + a_p n_p = s, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición

- Sea S un semigrupo numérico cuyo sistema minimal de generadores es $\{n_1, \dots, n_p\}$. Son equivalentes las siguientes condiciones:
 - i) S es un LPL-semigrupo.
 - ii) Si $i, j \in \{1, \dots, p\}$ entonces $n_i + n_j + 1 \in S$.
 - iii) Si $s \in S \setminus \{0, n_1, \dots, n_p\}$ entonces $s + 1 \in S$.
 - iv) Si $s \in S \setminus \{0\}$ entonces $s + \{0, \dots, L(s) - 1\} \subseteq S$.

Ejemplo

- $S = \langle 4, 5, 6 \rangle$ es un *LPL*-semigrupo ya que

- ▶ $4 + 4 + 1 = 9,$
- ▶ $4 + 5 + 1 = 10,$
- ▶ $4 + 6 + 1 = 11,$
- ▶ $5 + 5 + 1 = 11,$
- ▶ $5 + 6 + 1 = 12,$
- ▶ $6 + 6 + 1 = 13,$

son elementos de S .

Variedad de Frobenius de los LPL-semigrupos

- Sea S un semigrupo numérico. Denotaremos por $F(S)$ a su número de Frobenius.

Definición

- Una variedad de Frobenius es una familia de semigrupos numéricos \mathcal{V} verificando las siguientes condiciones:
 - i) si $S, T \in \mathcal{V}$ entonces $S \cap T \in \mathcal{V}$;
 - ii) si $S \in \mathcal{V}$ y $S \neq \mathbb{N}$ entonces $S \cup \{F(S)\} \in \mathcal{V}$.

Proposición

- El conjunto $\mathcal{C} = \{S \mid S \text{ es un LPL-semigrupo}\}$ es una variedad de Frobenius.

Consecuencia: el árbol de los LPL-semigrupos

- Definimos el grafo $G(C)$ de la siguiente forma:
 - C es el conjunto de vértices;
 - $(S, S') \in C \times C$ es un lado de $G(C)$ si $S' = S \cup \{F(S)\}$.
En tal caso se dice que S' es hijo de S .

Teorema

- El grafo $G(C)$ es un árbol con raíz \mathbb{N} .
- El único hijo de \mathbb{N} es el semigrupo numérico $\langle 2, 3 \rangle$.
- Los hijos de un vértice $S \in C$ (distinto de \mathbb{N}) son los semigrupos numéricos de la forma $S \setminus \{x\}$ donde x es un generador minimal de S mayor que $F(S)$ tal que $x - 1$ es o bien un generador minimal de S o bien igual a $F(S)$.

El árbol de los LPL-semigrupos

Proposición

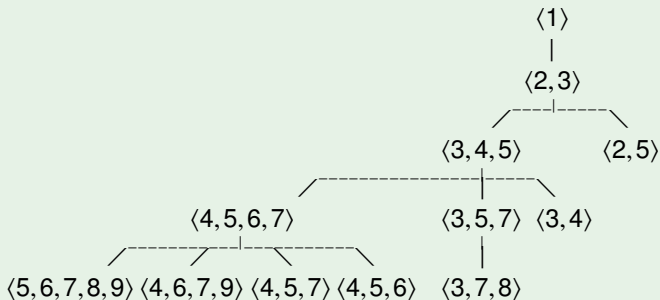
- Sea S un semigrupo numérico minimalmente generado por $\{n_1, \dots, n_p\}$. Si $m(S) = n_1 < n_p$ y $n_p > F(S)$ entonces el sistema minimal de generadores de $S \setminus \{n_p\}$ es
 - ▶ $\{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ si $n_p + n_1 - n_i \in S$ para algún $i \in \{2, \dots, p-1\}$;
 - ▶ $\{n_1, \dots, n_{p-1}, n_p + n_1\}$ en otro caso.

Ejemplo

- $S = \langle 4, 6, 7, 9 \rangle$ es un LPL-semigrupo con $F(S) = 5$. Sus hijos son
 - ▶ $S \setminus \{6\} = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$;
 - ▶ $S \setminus \{7\} = \langle 4, 6, 9, 11 \rangle$.

El árbol de los LPL-semigrupos

Ejemplo: primeras filas del árbol



LPL-semigrupos con multiplicidad prefijada

- Sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Denotamos por $C(m)$ al conjunto formado por todos los LPL-semigrupos con multiplicidad m .

Proposición

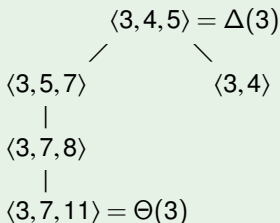
- Considerando el orden de inclusión,
 - ▶ $\Delta(m) = \{0, m, \rightarrow\}$ es el máximo de $C(m)$.
 - ▶ $\Theta(m) = \langle m, 2m + 1, \dots, m^2 + (m - 1) \rangle$ es el mínimo de $C(m)$.
- $C(m)$ es finito.

Corolario

- $\Delta(m)$ y $\Theta(m)$ son de máxima dimensión de inmersión.
- $F(\Delta(m)) = m - 1$; $g(\Delta(m)) = m - 1$.
- $F(\Theta(m)) = m^2 - 1$; $g(\Theta(m)) = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$.

LPL-semigrupos con multiplicidad prefijada

Ejemplo: árbol para una multiplicidad prefijada



Proposición

- $\{g(S) \mid S \in C(m)\} = \left\{ m-1, \dots, \frac{(m-1)(m+2)}{2} \right\}$.
- $\{F(S) \mid S \in C(m)\} = (\Delta(m) \setminus \Theta(m)) \cup \{m-1\}$.

Menor LPL-semigrupo para un conjunto prefijado

- Sean $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Denotamos por $\mathcal{S}(n_1, \dots, n_p)$ al conjunto

$$\{a_1 n_1 + \dots + a_p n_p + r \mid a_1, \dots, a_p, r \in \mathbb{N}, r < a_1 + \dots + a_p\} \cup \{0\}.$$






Proposición

- Si $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ entonces $\mathcal{S}(n_1, \dots, n_p)$ es el menor LPL-semigrupo que contiene al conjunto $\{n_1, \dots, n_p\}$.

Ejemplo

- $\mathcal{S}(7, 9, 11) = \langle 7, 9, 11, 15, 17, 19 \rangle$.
- $\mathcal{S}(7, 9) = \langle 7, 9, 15, 17, 19 \rangle$.
- $\mathcal{S}(7, 11) = \langle 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 \rangle$.
- $\mathcal{S}(9, 11) = \langle 9, 11, 19, 21, 23, 35 \rangle$.

Referencias

-  M. Bras-Amorós, P. A. García-Sánchez, A. Vico-Oton.
Nonhomogeneous patterns on numerical semigroups.
Por aparecer en *Internat. J. Algebra Comput.*
-  A. M. Robles-Pérez and J. C. Rosales.
Frobenius pseudo-varieties in numerical semigroups.
Sometido.
-  J. C. Rosales.
Families of numerical semigroups closed under finite intersections and for the Frobenius number.
Houston J. Math. **34** (2008), 339–348.
-  J. C. Rosales, M. B. Branco, and D. Torrão.
Monoids bracelet.
Sometido.
-  J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez.
“Numerical semigroups”.
Developments in Mathematics, vol. **20**. Springer, New York, 2009.

¡MUCHAS GRACIAS
POR SU ATENCIÓN!