Longitudes de frases y semigrupos numéricos

Aureliano M. Robles-Pérez

Universidad de Granada

Charla basada en un trabajo conjunto con José Carlos Rosales

Seminario de semigrupos numéricos – Jerez 2013
15-16 de julio de 2013

Introducción

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- S es un semigrupo numérico.
- A es un conjunto finito de palabras y $\smile$ es un símbolo.

Definición

- *Una $(A, \smile)$-secuencia es una concatenación finita de elementos de $A \cup \{\smile\}$.*
- *Una $(A, \smile)$-secuencia f es una frase si verifica las siguientes condiciones:*
  - *i) el símbolo $\smile$ no es ni el primero ni el último de los caracteres de f;*
  - *ii) el símbolo $\smile$ no aparece dos veces consecutivamente en f.*
- *La longitud de una frase f es el número de caracteres que aparecen en f y se denota por $\ell(f)$.*

Introducción

Ejemplo

- $A = \{\text{pedro, carlos, aureliano}\}$
- $f = \text{carlospedroaureliano}\smile\text{pedrocarlospedro}\smile\text{aureliano}$
- $\ell(f) = 47$.

Nota

- *Lo importante de una palabra es su longitud, no los caracteres que la forman.*

Notación

- $\mathcal{F}(A,\smile)$ *es el conjunto de todas las frases que se pueden construir a partir de* A *y* $\smile$.
- $\mathcal{L}(A,\smile) = \{\ell(f) \mid f \in \mathcal{F}(A,\smile)\}$

LPL-semigrupos

Proposición

- *Sea A un conjunto finito no vacío de palabras y el símbolo $\smile$. Entonces $\mathcal{L}(A,\smile)$ es semigrupo numérico.*

Definición

- *Un semigrupo numérico S es un LPL-semigrupo si existe un conjunto de palabras no vacío A tal que $S = \mathcal{L}(A,\smile)$.*

Ejemplo

- $S = \langle 5,7,9 \rangle$ no es un LPL-semigrupo pues $2 \cdot 5 + 1 = 11 \notin S$.

LPL-semigrupos

Teorema

- *Sea S un semigrupo numérico. Son equivalentes las siguientes condiciones:*
  - *i)* *S es un LPL-semigrupo.*
  - *ii)* *Si $a, b \in S \setminus \{0\}$ entonces $a + b + 1 \in S$.*

Referencia

- M. Bras-Amorós, P. A. García-Sánchez, A. Vico-Oton. Nonhomogeneous patterns on numerical semigroups. Por aparecer en Internat. J. Algebra Comput.

LPL-semigrupos

- Sea S un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_1,\ldots,n_p\}$.
- Si $s \in S$ entonces denotaremos por

$$L(s) = \max\left\{a_1 + \cdots + a_p \mid a_1 n_1 + \cdots a_p n_p = s,\ a_1,\ldots a_p \in \mathbb{N}\right\}.$$

Proposición

- *Sea S un semigrupo numérico cuyo sistema minimal de generadores es $\{n_1,\ldots,n_p\}$. Son equivalentes las siguientes condiciones:*
  - *i) S es un LPL-semigrupo.*
  - *ii) Si $i,j \in \{1,\ldots,p\}$ entonces $n_i + n_j + 1 \in S$.*
  - *iii) Si $s \in S \setminus \{0,n_1,\ldots,n_p\}$ entonces $s+1 \in S$.*
  - *iv) Si $s \in S \setminus \{0\}$ entonces $s + \{0,\ldots,L(s)-1\} \subseteq S$.*

LPL-semigrupos

Ejemplo

- $S = \langle 4,5,6 \rangle$ es un *LPL*-semigrupo ya que
  - $4+4+1 = 9$,
  - $4+5+1 = 10$,
  - $4+6+1 = 11$,
  - $5+5+1 = 11$,
  - $5+6+1 = 12$,
  - $6+6+1 = 13$,

  son elementos de S.

Variedad de Frobenius de los LPL*-semigrupos*

- Sea S un semigrupo numérico. Denotaremos por $\mathrm{F}(S)$ a su número de Frobenius.

Definición

- *Una variedad de Frobenius es una familia de semigrupos numéricos $\mathcal{V}$ verificando las siguientes condiciones:*
  i) *si $S, T \in \mathcal{V}$ entonces $S \cap T \in \mathcal{V}$;*
  ii) *si $S \in \mathcal{V}$ y $S \neq \mathbb{N}$ entonces $S \cup \{\mathrm{F}(S)\} \in \mathcal{V}$.*

Proposición

- *El conjunto $C = \{S \mid S$ es un LPL-semigrupo$\}$ es una variedad de Frobenius.*

Consecuencia: el árbol de los LPL*-semigrupos*

- Definimos el grafo $\mathrm{G}(\mathcal{C})$ de la siguiente forma:
  - $\mathcal{C}$ es el conjunto de vértices;
  - $(S,S') \in \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ es un lado de $\mathrm{G}(\mathcal{C})$ si $S' = S \cup \{\mathrm{F}(S)\}$.

    En tal caso se dice que S' es hijo de S.

Teorema

- *El grafo $\mathrm{G}(\mathcal{C})$ es un árbol con raíz $\mathbb{N}$.*
- *El único hijo de $\mathbb{N}$ es el semigrupo numérico $\langle 2,3\rangle$.*
- *Los hijos de un vértice $S \in \mathcal{C}$ (distinto de $\mathbb{N}$) son los semigrupos numéricos de la forma $S\setminus\{x\}$ donde x es un generador minimal de S mayor que $\mathrm{F}(S)$ tal que $x-1$ es o bien un generador minimal de S o bien igual a $\mathrm{F}(S)$.*

El árbol de los LPL-semigrupos

Proposición

- *Sea S un semigrupo numérico minimalmente generado por $\{n_1, \ldots, n_p\}$. Si $\mathrm{m}(S) = n_1 < n_p$ y $n_p > \mathrm{F}(S)$ entonces el sistema minimal de generadores de $S \setminus \{n_p\}$ es*
  - *$\{n_1, \ldots, n_{p-1}\}$ si $n_p + n_1 - n_i \in S$ para algún $i \in \{2, \ldots, p-1\}$;*
  - *$\{n_1, \ldots, n_{p-1}, n_p + n_1\}$ en otro caso.*

Ejemplo

- $S = \langle 4, 6, 7, 9 \rangle$ es un *LPL*-semigrupo con $\mathrm{F}(S) = 5$. Sus hijos son
  - $S \setminus \{6\} = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$;
  - $S \setminus \{7\} = \langle 4, 6, 9, 11 \rangle$.

El árbol de los LPL*-semigrupos*

Ejemplo: primeras filas del árbol

$$\langle 1\rangle$$

$$\langle 2,3\rangle$$

$$\langle 3,4,5\rangle \qquad \langle 2,5\rangle$$

$$\langle 4,5,6,7\rangle \qquad \langle 3,5,7\rangle \quad \langle 3,4\rangle$$

$$\langle 5,6,7,8,9\rangle \; \langle 4,6,7,9\rangle \; \langle 4,5,7\rangle \; \langle 4,5,6\rangle \qquad \langle 3,7,8\rangle$$

LPL-semigrupos con multiplicidad prefijada

- Sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Denotamos por $\mathcal{C}(m)$ al conjunto formado por todos los LPL-semigrupos con multiplicidad m.

Proposición

- *Considerando el orden de inclusión,*
  - $\Delta(m) = \{0, m, \rightarrow\}$ *es el máximo de* $\mathcal{C}(m)$.
  - $\Theta(m) = \langle m, 2m+1, \ldots, m^2 + (m-1) \rangle$ *es el mínimo de* $\mathcal{C}(m)$.
- $\mathcal{C}(m)$ *es finito.*

Corolario

- $\Delta(m)$ *y* $\Theta(m)$ *son de máxima dimensión de inmersión.*
- $\mathrm{F}(\Delta(m)) = m-1$; $\mathrm{g}(\Delta(m)) = m-1$.
- $\mathrm{F}(\Theta(m)) = m^2-1$; $\mathrm{g}(\Theta(m)) = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$.

LPL-semigrupos con multiplicidad prefijada

Ejemplo: árbol para una multiplicidad prefijada

$$
\begin{array}{ccc}
 & \langle 3,4,5\rangle = \Delta(3) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\langle 3,5,7\rangle & & \langle 3,4\rangle \\
| & & \\
\langle 3,7,8\rangle & & \\
| & & \\
\langle 3,7,11\rangle = \Theta(3) & &
\end{array}
$$

Proposición

- $\{\mathrm{g}(S) \mid S \in \mathcal{C}(m)\} = \left\{m-1, \ldots, \frac{(m-1)(m+2)}{2}\right\}$.
- $\{\mathrm{F}(S) \mid S \in \mathcal{C}(m)\} = (\Delta(m) \setminus \Theta(m)) \cup \{m-1\}$.

Menor LPL-semigrupo para un conjunto prefijado

- Sean $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Denotamos por $\mathcal{S}(n_1, \ldots, n_p)$ al conjunto

$$\left\{a_1 n_1 + \cdots + a_p n_p + r \mid a_1, \ldots, a_p, r \in \mathbb{N},\ r < a_1 + \ldots + a_p\right\} \cup \{0\}.$$

Proposición

- *Si $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ entonces $\mathcal{S}(n_1, \ldots, n_p)$ es el menor LPL-semigrupo que contiene al conjunto $\left\{n_1, \ldots, n_p\right\}$.*

Ejemplo

- $\mathcal{S}(7,9,11) = \langle 7,9,11,15,17,19 \rangle$.
- $\mathcal{S}(7,9) = \langle 7,9,15,17,19 \rangle$.
- $\mathcal{S}(7,11) = \langle 7,11,15,19,23,27,31 \rangle$.
- $\mathcal{S}(9,11) = \langle 9,11,19,21,23,35 \rangle$.

Referencias

M. Bras-Amorós, P. A. García-Sánchez, A. Vico-Oton.
Nonhomogeneous patterns on numerical semigroups.
Por aparecer en *Internat. J. Algebra Comput.*

A. M. Robles-Pérez and J. C. Rosales.
Frobenius pseudo-varieties in numerical semigroups.
Sometido.

J. C. Rosales.
Families of numerical semigroups closed under finite intersections and for the Frobenius number.
Houston J. Math. **34** (2008), 339–348.

J. C. Rosales, M. B. Branco, and D. Torrão.
Monoids bracelet.
Sometido.

J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez.
“Numerical semigroups”.
Developments in Mathematics, vol. **20**. Springer, New York, 2009.

¡MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN!