El problema de Frobenius para semigrupos numéricos de dimensión de inmersión tres

A.M. Robles-Pérez, J.C. Rosales

Seminario de "Semigrupos Numéricos"
Cádiz, 18-20 de abril de 2011

Definiciones

Definición

S es un semigrupo numérico *si es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que es cerrado para la suma, contiene al cero y $\mathbb{N} \setminus S$ es finito.*

- $\mathrm{H}(S)$ es el conjunto de elementos de $\mathbb{N}$ que no están en S: *conjunto de huecos* de S.
- $\mathrm{g}(S)$ es el cardinal de $\mathrm{H}(S)$: *genero* de S o *grado de singularidad* de S.
- $\mathrm{F}(S)$ es el máximo de $\mathrm{H}(S)$ (esto es, el mayor entero que no está en S): *número de Frobenius* de S.

Definiciones

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$.

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_1, \ldots, a_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}\}$$

es el submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ generado por A.

Definición (*Sistema minimal de generadores*)

Para cada semigrupo numérico S existe un único subconjunto finito $G \subseteq S$ tal que $S = \langle G \rangle$ y ningún subconjunto propio de G genera a S.

- $\mathrm{e}(S)$ es el cardinal de G: *dimensión de inmersión* de S.

Ejemplo

$$S = \{0,3,5,6,8,\rightarrow\} = \{0,3,5,6\} \cup \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 8\}$$

$$\mathrm{H}(S) = \{1,2,4,7\}$$

$$\mathrm{g}(S) = 4$$

$$\mathrm{F}(S) = 7$$

$$S = \langle 3,5 \rangle$$

$$\mathrm{e}(S) = 2$$

Problema de Frobenius

Problema de Frobenius

Sea $S = \langle G \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Encontrar fórmulas que permitan calcular $\mathrm{g}(S)$ y $\mathrm{F}(S)$ en función de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

n=2

- $\mathrm{F}(S) = a_1 a_2 - a_1 - a_2$
- $\mathrm{g}(S) = \frac{a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1}{2}$

Ejemplo ($S = \langle 3, 5 \rangle$)

- $\mathrm{F}(S) = 3 \times 5 - 3 - 5 = 7$
- $\mathrm{g}(S) = \frac{3 \times 5 - 3 - 5 + 1}{2} = 4$

Problema de Frobenius

n=3

Problema abierto

Aportaciones

1. Algoritmos
   - Ö. J. Rödseth: 1978, 1979.
   - H. Greenberg: 1988.
   - J. L. Ramírez Alfonsín y Ø. J. Rødseth: 2009.
   - ...
2. Estimaciones y cálculos analíticos
   - L. G. Fel.
   - ...

Problema de Frobenius

Lema (Reducción - Johnson-Rödseth)

Sean $S = \langle G \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ *y* $d = \mathrm{mcd}\{a_1, a_2\}$.

- $\mathrm{F}(S) = d\,\mathrm{F}\left(\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3 \rangle\right) + (d-1)a_3$
- $\mathrm{g}(S) = d\,\mathrm{g}\left(\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3 \rangle\right) + \frac{(d-1)(a_3-1)}{2}$

Hipótesis

$S = \langle G \rangle = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$, siendo n_1, n_2, n_3 primos relativos dos a dos.

Pseudo-número de Frobenius

Definición (*Pseudo-número de Frobenius*)

$$x \in \mathbb{Z} \setminus S \ \ \textit{tal que} \ \ x + s \in S \ \ \textit{para todo} \ \ s \in S \setminus \{0\}$$

- $\mathrm{PF}(S)$ es el conjunto de pseudo-números de Frobenius de S.
- $\mathrm{t}(S)$ es el cardinal de $\mathrm{PF}(S)$: *tipo* de S.

Lema

- $\mathrm{F}(S) = \max\{\mathrm{PF}(S)\}$
- $\mathrm{t}(S) = 2$ *(si $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ con n_1, n_2, n_3 primos relativos dos a dos) (Fröberg-Gottlieb-Häggkvist)*

Six(S)

Sea S generado minimalmente por $\{m_1 < m_2 < m_3\}$.
Sean $c_i = \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid xm_i \in \langle m_j, m_k \rangle\}$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Lema (Rosales-García Sánchez)

Existen enteros no negativos $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32}$ *tales que*

$$\begin{cases} c_1 m_1 = r_{12} m_2 + r_{13} m_3 \\ c_2 m_2 = r_{21} m_1 + r_{23} m_3 \\ c_3 m_3 = r_{31} m_1 + r_{32} m_2 \end{cases} \tag{1}$$

Definición

$\mathrm{Six}(S) = (r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{32}, r_{21}, r_{31})$.

$\mathrm{Six}(S)$

Lema (Rosales-García Sánchez)

Si m_1, m_2, m_3 son primos relativos dos a dos, entonces $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32}$ son estrictamente positivos.
Además, se conocen fórmulas del número de Frobenius y del genero de S en función de $\mathrm{Six}(S)$.

Notación ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$\mathfrak{L}(m) = \{\text{Semigrupos numéricos } S \mid \text{multiplicidad} = m,\ \mathrm{e}(S) = 3, \text{ generadores minimales primos relativos dos a dos}\}.$$

Objetivo

Fijado m, obtener una fórmula de $\mathrm{Six}(S)$ para cada $S \in \mathfrak{L}(m)$.

Sistema a resolver

Definición

Decimos que $(a_1,\ldots,a_n)$ *es una* n-tupla entera *si* $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}$.
Decimos que la n-tupla $(a_1,\ldots,a_n)$ *es* fuertemente positiva *si* $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Teorema (Rosales-García Sánchez)

Sean m_1, m_2, m_3 *enteros positivos primos relativos dos a dos.*

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 = x_{12}x_{13} + x_{12}x_{23} + x_{13}x_{32} \\ m_2 = x_{13}x_{21} + x_{21}x_{23} + x_{23}x_{31} \\ m_3 = x_{12}x_{31} + x_{21}x_{32} + x_{31}x_{32} \end{array}\right. \tag{2}$$

tiene una solución entera fuertemente positiva si y sólo si $\mathrm{e}(\langle m_1, m_2, m_3\rangle) = 3$. *Además, si existe, dicha solución es única.*

Sistema a resolver

A partir de ahora, consideramos que m_1, m_2, m_3 son enteros positivos primos relativos dos a dos tales que

1. $m_1 < m_2 < m_3$,
2. $\mathrm{e}(\langle m_1, m_2, m_3 \rangle) = 3$.

Lema (Rosales-García Sánchez)

1. $(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}, x_{21}, x_{31}) = \mathrm{Six}(\langle m_1, m_2, m_3 \rangle)$ *es la única solución entera fuertemente positiva del sistema (2).*
2. $c_i = r_{ji} + r_{ki}$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Sistema a resolver

Teorema (Rosales-García Sánchez)

$S = \langle m_1, m_2, m_3 \rangle$.

1. $\mathrm{g}(S) = \frac{1}{2}((c_1-1)m_1 + (c_2-1)m_2 + (c_3-1)m_3 - c_1c_2c_3 + 1)$.
2. $\mathrm{PF}(S) = \Big\{\frac{1}{2}((c_1-2)m_1 + (c_2-2)m_2 + (c_3-2)m_3 + \Delta),$
   $\frac{1}{2}((c_1-2)m_1 + (c_2-2)m_2 + (c_3-2)m_3 - \Delta)\Big\}$.
3. $\mathrm{F}(S) = \frac{1}{2}((c_1-2)m_1 + (c_2-2)m_2 + (c_3-2)m_3 + \Delta)$.

$$\left(\Delta = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3} c_i m_i\right)^2 - 4(c_1m_1c_2m_2 + c_1m_1c_3m_3 + c_2m_2c_3m_3 - m_1m_2m_3)}\right)$$

Idea

Fijado m_1 en el sistema (2)

$$\left\{\begin{array}{r} m_1 = x_{12}x_{13} + x_{12}x_{23} + x_{13}x_{32} \\ m_2 = x_{13}x_{21} + x_{21}x_{23} + x_{23}x_{31} \\ m_3 = x_{12}x_{31} + x_{21}x_{32} + x_{31}x_{32}, \end{array}\right.$$

determinaremos todas las soluciones de la primera ecuación y, a partir de ellas, resolveremos el sistema completo considerando m_2 y m_3 parámetros.

Sean m_1, m_2, m_3 son enteros positivos primos relativos dos a dos. Entonces existe $k \in \{1, \ldots, m_1 - 1\}$ tal que

1. $m_3 \equiv k m_2 \pmod{m_1}$,
2. $\gcd\{k, m_1\} = 1$.

Proposición (RP-Rosales)

Sea $(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}) = (a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$ una solución entera fuertemente positiva de $m_1 = x_{12}x_{13} + x_{12}x_{23} + x_{13}x_{32}$. Entonces existen a_{21}, a_{31} enteros positivos tal que $(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}, a_{21}, a_{31})$ es una solución entera fuertemente positiva de (2) si y sólo si:

1. $a_{12} + a_{32} - k a_{23} \equiv 0 \pmod{m_1}$;
2. $k a_{13} + k a_{23} - a_{32} \equiv 0 \pmod{m_1}$;
3. $\frac{a_{23}}{a_{12}+a_{32}} < \frac{m_2}{m_3} < \frac{a_{13}+a_{23}}{a_{32}}$.

Observación

La solución entera fuertemente positiva de (2) es solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{12}x_{13}+x_{12}x_{23}+x_{13}x_{32} & = & m_1 \\ x_{12}+x_{32}-kx_{23} & \equiv & 0 \pmod{m_1} \\ kx_{13}+kx_{23}-x_{32} & \equiv & 0 \pmod{m_1}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Notación

Si $(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$ es una solución entera fuertemente positiva de (3),

$$\mathrm{I}(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}) = \left] \frac{a_{23}}{a_{12}+a_{32}}, \frac{a_{13}+a_{23}}{a_{32}} \right[.$$

- $\max\{a_{23}, a_{12}+a_{32}, a_{13}+a_{23}, a_{32}\} \leq m_1 - 1.$
  $(m_1 = a_{12}a_{13}+a_{12}a_{23}+a_{13}a_{32})$

Hacia la concreción

Lema (RP-Rosales)

Sea $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un conjunto de soluciones enteras fuertemente positivas de (3) tal que:

1. *el extremo inicial de $\mathrm{I}(s_1)$ es igual a $\frac{1}{k}$;*
2. *para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, el extremo final de $\mathrm{I}(s_i)$ es igual al extremo inicial de $\mathrm{I}(s_{i+1})$;*
3. *el extremo final de $\mathrm{I}(s_1)$ es mayor o igual que 1.*

Entonces existe un único $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\frac{m_2}{m_3} \in \mathrm{I}(s_i)$.

Definición

Decimos que X es un conjunto de soluciones encadenadas *de (3) si satisface las hipótesis del lema anterior.*

La concreción

Teorema

Sea $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$ *conjunto de soluciones encadenadas de (3).*

Si $\frac{m_2}{m_3} \in \mathrm{I}(s_i)$ *y* $s_i = (a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$, *entonces*

$$\mathrm{Six}(\langle m_1, m_2, m_3 \rangle) = \left(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}, \frac{1}{m_1}((a_{12} + a_{32})m_2 - a_{23}m_3), \right.$$
$$\left. \frac{1}{m_1}((a_{13} + a_{23})m_3 - a_{32}m_2) \right).$$

Ejemplo: $S \in \mathfrak{L}(10)$

- $\gcd\{10, k\} = 1 \Rightarrow k \in \{3, 7, 9\}$

($k \neq 1$ puesto que $\{m_1, m_2, m_3\}$ es un sistema minimal de generadores)

$k = 3$

- $X = \{(1, 3, 1, 2)\}$
- $\mathrm{I}(1, 3, 1, 2) = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{1}\right[$
- $\frac{m_2}{m_3} \in \left]\frac{1}{3}, 2\right[\Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(1, 3, 1, 2, \frac{3m_2 - m_3}{10}, \frac{2m_3 - m_2}{5}\right)$

Ejemplo: $S \in \mathfrak{L}(10)$

$k = 7$

- $X = \{(3,1,1,4),(3,1,2,1)\}$
-
  - $\mathrm{I}(3,1,1,4) = \left]\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right[$
  - $\frac{m_2}{m_3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(3,1,1,4,\frac{7m_2-m_3}{10},\frac{m_3-2m_2}{5}\right)$
-
  - $\mathrm{I}(3,1,2,1) = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{1}\right[$
  - $\frac{m_2}{m_3} > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(3,1,2,1,\frac{2m_2-m_3}{5},\frac{3m_3-m_2}{10}\right)$

Ejemplo: $S \in \mathfrak{L}(10)$

$k = 9$

- $X = \{(1,1,1,8),(1,1,2,7),(1,1,3,6),(1,1,4,5)\}$
-
  - $\mathrm{I}(1,1,1,8) = \left]\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right[$
  - $\frac{m_2}{m_3} < \frac{1}{4} \Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(1,1,1,8,\frac{9m_2-m_3}{10},\frac{m_3-4m_2}{5}\right)$
-
  - $\mathrm{I}(1,1,2,7) = \left]\frac{1}{4},\frac{3}{7}\right[$
  - $\frac{1}{4} < \frac{m_2}{m_3} < \frac{3}{7} \Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(1,1,2,7,\frac{4m_2-m_3}{5},\frac{3m_3-7m_2}{10}\right)$
-
  - $\mathrm{I}(1,1,3,6) = \left]\frac{3}{7},\frac{2}{3}\right[$
  - $\frac{3}{7} < \frac{m_2}{m_3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(1,1,3,6,\frac{7m_2-3m_3}{10},\frac{2m_3-3m_2}{5}\right)$
-
  - $\mathrm{I}(1,1,4,5) = \left]\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right[$
  - $\frac{m_2}{m_3} > \frac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{Six}(S) = \left(1,1,4,5,\frac{3m_2-2m_3}{5},\frac{m_3-m_2}{2}\right)$

Lemas técnicos

Lema

$$(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}) = \left(m_1 \mod k, \left\lfloor \frac{m_1}{k} \right\rfloor, 1, k - m_1 \mod k\right)$$

es una solución entera fuertemente positiva de (3).

Lema

Sea $(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}) = (a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$ *una solución entera fuertemente positiva de (3) tal que* $a_{32} > a_{12}$. *Entonces*

$$(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}) = (a_{12}, a_{13}, a_{23} + a_{13}, a_{32} - a_{12})$$

es otra solución entera fuertemente positiva de (3).

Construcción A

Proposición

Sean

1. $\alpha = \left\lfloor \frac{k-1}{m_1 \mod k} \right\rfloor - 1$;
2. $s_i = \left(m_1 \mod k, \left\lfloor \frac{m_1}{k} \right\rfloor, 1 + i\left\lfloor \frac{m_1}{k} \right\rfloor, k - (i+1)(m_1 \mod k)\right)$, $i \in \{0, \ldots, \alpha\}$.

Entonces $X = \{s_1, s_2, \ldots, s_\alpha\}$ es un conjunto de soluciones enteras fuertemente positivas de (3) que satisface las condiciones 1) y 2) del Lema "Concepto".

$m_1 = 36$, $k = 23$

$\alpha = 0$, $X = \{(13, 1, 1, 10)\}$, $\mathrm{I}(13, 1, 1, 10) = \left]\frac{1}{23}, \frac{1}{5}\right[$

Lemas técnicos

Lema

Sea $(x_{12},x_{13},x_{23},x_{32})=(a_{12},a_{13},a_{23},a_{32})$ *una solución entera de (3). Sea* t *un entero. Entonces,*

$$(x_{12},x_{13},x_{23},x_{32})=(a_{12}-(t-1)a_{32},ta_{13}+(t-1)a_{23},a_{13}+a_{23},ta_{32}-a_{12})$$

es otra solución entera de (3).

- No hemos considerado soluciones fuertemente positivas.
- Para tener una 4-upla fuertemente positiva es necesario que $\frac{a_{12}}{a_{32}}<t<\frac{a_{12}}{a_{32}}+1$.

Lema

Sea $(x_{12},x_{13},x_{23},x_{32})=(a_{12},a_{13},a_{23},a_{32})$ *una solución entera fuertemente positiva de (3). Entonces*

1. $\gcd\{a_{12},a_{32}\}=1$.
2. *Si* $a_{32}=1$*, el extremo final de* $\mathrm{I}(a_{12},a_{13},a_{23},a_{32})$ *es mayor que 1.*

Construcción B

Proposición

Sea $(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}) = (a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$ *una solución entera fuertemente positiva de (3) tal que*

1. $a_{12} \geq a_{32}$;
2. *el extremo final de* $\mathrm{I}(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$ *es menor que 1.*

Entonces $(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}) =$

$$(a_{12} - (t-1)a_{32}, ta_{13} + (t-1)a_{23}, a_{13} + a_{23}, ta_{32} - a_{12})$$

es otra solución entera fuertemente positiva de (3) si $t = \left\lfloor \frac{a_{12}}{a_{32}} \right\rfloor + 1$.

Además, el extremo final de $\mathrm{I}(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32})$ *es igual al extremo inicial de* $\mathrm{I}(a_{12} - (t-1)a_{32}, ta_{13} + (t-1)a_{23}, a_{13} + a_{23}, ta_{32} - a_{12})$.

Teorema

Existe un conjunto de soluciones encadenadas de (3).

$m_1 = 36$, $k = 23$

- Como punto de partida tenemos $X_1 = \{(13, 1, 1, 10)\}$, con $\mathrm{I}(13, 1, 1, 10) = \left]\frac{1}{23}, \frac{1}{5}\right[$.
- Aplicando la construcción B, con $t = \left\lfloor \frac{13}{10} \right\rfloor + 1 = 2$, llegamos a
$$X_2 = \{(13, 1, 1, 10), (3, 3, 2, 7)\}$$
con $\mathrm{I}(3, 3, 2, 7) = \left]\frac{1}{5}, \frac{5}{7}\right[$.
- Aplicando la construcción A llegamos a
$$X = \{(13, 1, 1, 10), (3, 3, 2, 7), (3, 3, 5, 4)\}$$
con $\mathrm{I}(3, 3, 5, 4) = \left]\frac{5}{7}, 2\right[$.

Referencias

F. Curtis.
On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup.
Math. Scand., 67:190–192, 1990 .

J. L. Ramírez Alfonsín.
The Diophantine Frobenius problem.
Oxford Univ. Press, 2005.

J. J. Sylvester.
Problem 7382.
The Educational Times, and Journal of the College of Preceptors, New Series, 36(266):177, 1883.
Solution by W. J. Curran Sharp.
ibid., 36(271):315, 1883.

Referencias

R. Fröberg, G. Gottlieb, and R. Häggkvist.
On numerical semigroups.
Semigroup Forum, 35:63–83, 1987.

J. Herzog.
Generators and relations of abelian semigroups and semigroup ring.
Manuscripta Math., 3:175–193, 1970.

S. M. Johnson.
A linear Diophantine problem.
Canad. J. Math., 12:390–398, 1960.

Referencias

H. Greenberg.
Solution to a Diophantine equation for nonnegative integers.
J. Algorithms, 9:343–353, 1988.

Ö. J. Rödseth.
On a linear Diophantine problem of Frobenius.
J. Reine Angew. Math., 301:171–178, 1978.

Ö. J. Rödseth.
On a linear Diophantine problem of Frobenius II.
J. Reine Angew. Math., 307/308:431–440, 1979.

J. L. Ramírez Alfonsín and Ø. J. Rødseth.
Numerical semigroups: Apéry sets and Hilbert series.
Semigroup Forum, 79:323–340, 2009.

Referencias

J. C. Rosales and M. B. Branco.
Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups.
J. Pure Appl Algebra, 171(2-3):303–314, 2002.

J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez.
Numerical semigroups with embbeding dimension three.
Arch. Math. (Basel), 83:488–496, 2004.

J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez.
Numerical semigroups. *Developments in Mathematics, vol. 20*.
Springer, New York, 2009.

A. M. Robles-Pérez and J. C. Rosales.
The Frobenius problem for numerical semigroups with embedding dimension equal to three.
To appear in Math. Comput.