Resolución de un problema de transporte mediante semigrupos numéricos[1]

A. M. Robles-Pérez[2] and J. C. Rosales[3]

1: *Este trabajo está respaldado por el proyecto MTM2014-55367-P, financiado por Ministerio de Economía y Competitividad y por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional FEDER, y por los grupos de investigación FQM-343 y FQM-5849 de la Junta de Andalucía.*

2: *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada; e-mail: arobles@ugr.es*
3: *Departmento de Álgebra, Universidad de Granada; e-mail: jrosales@ugr.es*

Universidad de Granada

Planteamiento del problema

Cierta empresa de transportes tiene la contrata para el traslado de vehículos, de una fábrica a uno de sus concesionarios, en las siguientes condiciones: dispone de camiones de transporte con capacidad de 4 y 7 vehículos; cada viaje representa un coste de 1500 euros si emplea camiones de 4 vehículos y de 1800 euros si usa los de 7; por cada vehículo transportado le cobra 300 euros a la fábrica; ante posibles contingencias, en cada viaje lleva un vehículo de más que no supone un cargo adicional para la fábrica.

A la empresa de transportes se le plantea la siguiente cuestión: ¿cuántos vehículos debe llevar en cada viaje para no tener pérdidas económicas? Esto es, ¿cuáles son los valores n para los que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} n \le 4x + 7y - 1 \\ 1500x + 1800y < 300n \end{array}\right\} \tag{1}$$

tiene soluciones $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ (siendo $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros no negativos)?

Simplificando la segunda inecuación del sistema (1), el conjunto

$$\begin{aligned} S &= \{n \in \mathbb{N} \mid 5x + 6y < n \le 4x + 7y - 1 \text{ tiene solución en } \mathbb{N}^2\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \mid 5x + 6y < n < 4x + 7y \text{ tiene solución en } \mathbb{N}^2\} \end{aligned}$$

estará formado por los valores para los que el problema planteado tiene respuesta afirmativa.

El problema descrito se puede generalizar del siguiente modo: dados $a = (a_1, \ldots, a_p)$ y $b = (b_1, \ldots, b_p)$ dos elementos de $\mathbb{N}^p$, determínese el conjunto

$$S(a, b) = \left\{n \in \mathbb{N} \mid a_1x_1 + \cdots + a_px_p < n < b_1x_1 + \cdots + b_px_p \ \text{ para algún } \ (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p\right\}.$$

Así, en el caso de la empresa de transportes, se trataría de determinar el conjunto $\mathcal{S} = S((5, 6), (4, 7))$.

Preliminares

Un *submonoide* de $(\mathbb{N}^q, +)$ es un subconjunto $M \subseteq \mathbb{N}^q$ que es cerrado para la suma y contiene al elemento cero. Un *semigrupo numérico* es un submonoide S de $(\mathbb{N}, +)$ tal que $\mathbb{N} \setminus S$ es finito.

Sea M un submonoide de $(\mathbb{N}^q, +)$ y sea X un subconjunto de M. Se dice que X es un *sistema de generadores de M* si $M = \langle X\rangle = \{\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x_1, \ldots, x_n \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}\}$. Se dice que X es un *sistema minimal de generadores de M* (denotado por msg(M)) si ningún subconjunto propio de X es un sistema de generadores de M.

Es bien conocido que todo submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ (en particular, todo semigrupo numérico) tiene un sistema minimal de generadores que, además, es finito.

Definición 1 *Sea M un submonoide de $(\mathbb{N}^2, +)$. Diremos que un entero positivo n* está acotado por *M si existe $(a, b) \in M$ tal que $a < n < b$. Denotaremos $\mathrm{A}(M) = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ está acotado por $M\}$.*

Si M es un submonoide de $(\mathbb{N}^2, +)$ tal que $\mathrm{A}(M) \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{A}(M) \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico.

Definición 2 *Diremos que un semigrupo numérico S es un $\mathcal{A}$*-semigrupo numérico *si existe M, submonoide de $(\mathbb{N}^2, +)$, tal que $S = \mathrm{A}(M) \cup \{0\}$.*

Teorema 3 *Sea S un semigrupo numérico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *S es un $\mathcal{A}$-semigrupo numérico.*
2. *$\{x + y - 1, x + y + 1\} \subseteq S$, para todo $x, y \in S \setminus \{0\}$.*
3. *$S = \mathrm{A}(M) \cup \{0\}$ para algún submonoide finitamente generado M de $(\mathbb{N}^2, +)$.*
4. *Existen $a, b \in \mathbb{N}^p$ tales que $S = S(a, b) \cup \{0\}$.*

Sea S un semigrupo numérico con $\mathrm{msg}(S) = \{n_1, \ldots, n_p\}$. Si $s \in S$, se dice que el *orden de s en S* es $\mathrm{ord}(s; S) = \max\{a_1 + \cdots + a_p \mid a_1n_1 + \cdots + a_pn_p = s$, con $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{N}\}$. Si no hay ambigüedad, escribimos $\mathrm{ord}(s)$.

Proposición 4 *Sea S un semigrupo numérico con $\mathrm{msg}(S) = \{n_1, \ldots, n_p\}$. Son equivalentes las siguientes condiciones.*

1. *S es un $\mathcal{A}$-semigrupo numérico.*
2. *Si $s \in S \setminus \left\{0, n_1, \ldots, n_p\right\}$, entonces $\{s - 1, s + 1\} \subseteq S$.*
3. *Si $s \in S \setminus \{0\}$, entonces $s + z \in S$ para todo número entero z tal que $|z| < \mathrm{ord}(s)$.*

Definición 5 *Sea M un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$. Diremos que M es un $\mathcal{A}$*-monoide *si puede expresarse como la intersección de $\mathcal{A}$-semigrupos numéricos.*

Sea X un subconjunto de $\mathbb{N}$. Puesto que la intersección de $\mathcal{A}$-monoides es un $\mathcal{A}$-monoide, podemos definir el *$\mathcal{A}$-monoide generado por X*, que denotaremos por $\mathcal{A}(X)$, como la intersección de todos los $\mathcal{A}$-monoides que contengan a X. Observemos que $\mathcal{A}(X)$ es el menor $\mathcal{A}$-monoide que contiene a X.

Proposición 6 *Si $X \subseteq \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{A}(X)$ es la intersección de todos los $\mathcal{A}$-semigrupos numéricos que contienen a X. Además, si $X \neq \emptyset$ y $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces $\mathcal{A}(X)$ es un $\mathcal{A}$-semigrupo numérico.*

Algoritmo 7 INPUT: Un conjunto finito X de números enteros positivos.
OUTPUT: El sistema minimal de generadores de $\mathcal{A}(X)$.
(1) $Y = \mathrm{msg}(\langle X\rangle)$.
(2) $Z = Y \cup \left(\bigcup_{a,b\in Y}\{a + b - 1, a + b + 1\}\right)$.
(3) Si $\mathrm{msg}(\langle Z\rangle) = Y$, entonces se devuelve Y.
(4) Se toma $Y = \mathrm{msg}(\langle Z\rangle)$ y se vuelve a (2).

El proceso más complejo del Algoritmo 7 es el cálculo de $\mathrm{msg}(\langle Z\rangle)$ en el tercer paso. Para esto podemos usar el paquete `numericalsgps` de `GAP` (véase [2]).

Resolución del problema

Sea $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{Z}^p$ (donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros). Definamos el conjunto

$$\mathrm{A}(z) = \left\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid z_1x_1 + \cdots + z_px_p \ge 0\right\}.$$

Es bien conocido que $\mathrm{A}(z)$ es un submonoide finitamente generado de $(\mathbb{N}^p, +)$. Además, existen algoritmos eficientes para determinar un sistema finito de generadores de $\mathrm{A}(z)$ (por ejemplo, véase [1]). Sin embargo, vamos a describir un proceso algorítmico simple alternativo. Para ello, sea

$$\mathrm{B}(z) = \left\{(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid z_1x_1 + \cdots + z_px_p - x_{p+1} = 0\right\}.$$

Es bien conocido (véase [5]) que $\mathrm{B}(z)$ es un submonoide finitamente generado de $(\mathbb{N}^{p+1}, +)$ y que sus generadores minimales son los elementos minimales (con respecto al orden usual en $\mathbb{N}^{p+1}$) del conjunto $\mathrm{B}(z) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Además, se sabe (véase [3]) que, si $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ es un elemento minimal de $\mathrm{B}(z) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, entonces $x_1 + \cdots + x_{p+1} \le |z_1| + \cdots + |z_p| + 2$. Por último, es fácil comprobar que, si $\mathrm{msg}(\mathrm{B}(z)) = \{b_1, \ldots, b_q\}$, entonces $\{\pi(b_1), \ldots, \pi(b_q)\}$ es un sistema de generadores para $\mathrm{A}(z)$ (donde $\pi(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) = (x_1, \ldots, x_p)$).

Con la ayuda del conjunto $\mathrm{A}(z)$, vamos a resolver el problema planteado mediante sucesivas transformaciones sobre $S(a, b) = S((a_1, \ldots, a_p), (b_1, \ldots, b_p))$.

Sea $\{m_1, \ldots, m_q\} = \mathrm{msg}(\mathrm{A}(b - a))$, donde $m_i = (m_{i1}, \ldots, m_{ip})$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. Además, sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, donde $\alpha_i = a_1m_{i1} + \cdots + a_pm_{ip}$ and $\beta_i = b_1m_{i1} + \cdots + b_pm_{ip}$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$. Obsérvese que $\alpha_i \le \beta_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, q\}$.

Proposición 8 *Con la notación dada,* $\mathrm{S}(a, b) = \mathrm{S}(\alpha, \beta)$.

A partir de este resultado podemos suponer que $a_i \le b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Proposición 9 *Si $\{1, \ldots, r\} = \{i \in \{1, \ldots, p\} \mid a_i = b_i\}$, entonces $\mathrm{S}(a, b) = S' + \langle a_1 \ldots, a_r\rangle$, donde*

$$S' = \left\{n \in \mathbb{N} \mid a_{r+1}x_{r+1} + \cdots + a_px_p < n < b_{r+1}x_{r+1} + \cdots + b_px_p \textit{ para algún } (x_{r+1}, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^{p-r}\right\}.$$

Como consecuencia del anterior resultado podemos considerar que $a_i < b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. Por otra parte, denotemos por $\frac{X}{k}$ al conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid kn \in X\}$, donde $X \subseteq \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposición 10 *Con la notación dada,* $\mathrm{S}(a, b) = \frac{\mathrm{S}(2a,2b)}{2}$.

En este momento podemos asumir que $a_i + 2 \le b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. Además, denotemos por $]x, y[$ al conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid x < n < y\}$.

Teorema 11 *Con la notación dada, si $a_i + 2 \le b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$, entonces $\mathrm{S}(a, b) \cup \{0\}$ es el menor $\mathcal{A}$-semigrupo numérico que contiene al conjunto $\bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i[$, es decir,*

$$\mathrm{S}(a, b) = \mathcal{A}\left(\bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i[\right) \setminus \{0\}.$$

Ejemplo

Vamos a resolver el problema (1) mediante el cálculo del conjunto

$$\mathcal{S} = S((5, 6), (4, 7)) = \left\{n \in \mathbb{N} \mid 5x + 6y < n < 4x + 7y \ \text{ para algún } \ (x, y) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Primero hallamos un sistema de generadores de $\mathrm{A}(-1, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid -x + y \ge 0\}$, para lo que determinamos los minimales de $\mathrm{B}(-1, 1) \setminus \{(0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid -x + y - z = 0\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Ya que, si (x, y, z) es un minimal de $B \setminus \{(0, 0, 0)\}$, entonces $x + y + z \le 4$, deducimos fácilmente que los elementos buscados son $\{(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0)\}$. Así, $\{\pi(0, 1, 1), \pi(1, 1, 0)\} = \{(0, 1), (1, 1)\} = \mathrm{msg}(\mathrm{A}(-1, 1))$.

Gracias a la notación dada previamente a la Proposición 8, si $\alpha_1 = 6, \beta_1 = 7, \alpha_2 = 11$ y $\beta_2 = 11$, podemos asegurar que $\mathcal{S} = S((6, 11), (7, 11)) = \{n \in \mathbb{N} \mid 6x + 11y < n < 7x + 11y \ \text{ para algún } \ (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$.

Ahora, $\mathcal{S} = S' + \langle 11\rangle = \{n \in \mathbb{N} \mid 6x < n < 7x \ \text{ para algún } \ x \in \mathbb{N}\} + \langle 11\rangle$, por la Proposición 9, y sabemos que $S' = \frac{S''}{2}$, con $S'' = \{n \in \mathbb{N} \mid 12x < n < 14x \ \text{ para algún } \ x \in \mathbb{N}\}$, por la Proposición 10.

En este instante $\mathcal{S} = \frac{T}{2} + \langle 11\rangle$, con $T = \{n \in \mathbb{N} \mid 12x < n < 14x \ \text{ para algún } \ x \in \mathbb{N}\}$. Pero, por el Teorema 11, $T \cup \{0\}$ es el menor $\mathcal{A}$-semigrupo numérico que contiene a $]12, 14[= \{13\}$. Aplicando el Algoritmo 7, deducimos que $T = \{13, 25, 26, 27, 37, 38, 39, 40, 41, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 85, \rightarrow\}$ (donde $\rightarrow$ significa que todo entero mayor que 85 pertenece a T) y, por tanto, $\frac{T}{2} = \{13, 19, 20, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 43, \rightarrow\}$.

Finalmente, concluimos que $\mathcal{S} = \frac{T}{2} + \langle 11\rangle = \{13, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 30, \rightarrow\}$.

Referencias

[1] F. Ajili, E. Contejean, Avoiding slack variables in the solving of linear diophantine equations and inequations, *Theoretical Computer Science* **173(1)**, (1997), 183–208.

[2] M. Delgado, P. A. García-Sánchez, and J. Morais. *"numericalsgps": a* GAP *package on numerical semigroups*. `http://www.gap-system.org/Packages/numericalsgps.html`.

[3] L. Pottier, Bornes et algorithme de calcul des générateurs des solutions de systèmes diophantiens linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **311** (1990), 813–816.

[4] A. M. Robles-Pérez, and J. C. Rosales, Numerical semigroups in a problem about cost-effective transport. To appear in *Forum Math.*

[5] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids* (Nova Science Publishers, New York, 1999).