Tema 2.- Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Ejemplo.- Población estructurada por edades

Crías : 0-2 años
Jóvenes : 2-4 años
Adultos : 4-6 años

- Recuentos cada 2 años
- Tasas de fertilidad y ~~mortalidad~~ supervivencia constantes
- $P_0 = \begin{pmatrix} C_0 \\ J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$

* Tasas de supervivencia:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "l_1"] \arrow[rr, bend right, "l_1 \cdot l_2"'] & J \arrow[r, "l_2"] & A \end{tikzcd} \qquad 0 \leq l_i \leq 1 \quad i = 1,2$$

* Tasas de fertilidad:

$$\begin{cases} C \to m_1 \\ J \to m_2 \\ A \to m_3 \end{cases} \qquad m_i \geq 0, \; i = 1,2,3$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= m_1 C_0 + m_2 J_0 + m_3 A_0 \\ J_1 &= l_1 C_0 \\ A_1 &= l_2 J_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ J_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ J_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot P_0 = P_1$$

En general:

$P_1 = L \cdot P_0$

$P_2 = L \cdot P_1 = L \cdot L \cdot P_0 = L^2 P_0$

$P_3 = L \cdot P_2 = L \cdot L^2 \cdot P_0 = L^3 P_0$

$\vdots$

$P_n = L^n P_0$ ¿Cómo se calcula L^n?

Matrices

Una matriz es un ordenamiento de números por filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 1/6 \end{pmatrix}$$ Matriz con 2 filas y 3 columnas.

$A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ (matriz de orden 2×3)

Casos particulares:

* Matrices cuadradas.- Tienen el mismo número de filas y columnas. $\mathcal{M}_{p\times p} = \mathcal{M}_p$.
* Vector fila.- $\mathcal{M}_{1\times p}$ (Sólo una fila)
* Vector columna.- $\mathcal{M}_{p\times 1}$ (Sólo una columna)
* Los números.- $\mathcal{M}_{1\times 1}$

Suma de matrices.- Se realiza entre matrices del mismo orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 1/6 \end{pmatrix}_{2\times 3} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & -1/6 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-1) & (-3)+5 \\ 4+3 & (-5)+7 & 1/6+(-1/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

* Matriz cero: todos sus elementos son iguales a cero.
* Matriz opuesta: la resultante de cambiar el signo a todos los elementos.

Producto de matrices.- Veamos un ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 4} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 1\cdot(-3)+2\cdot 5+(-3)\cdot 7 & 1\cdot 2+2\cdot 1+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 3+(-3)\cdot 5 \\ 4\cdot 4+(-5)\cdot 1+1\cdot 2 & 4\cdot(-3)+(-5)\cdot 5+1\cdot 7 & 4\cdot 2+(-5)\cdot 1+1\cdot 0 & 4\cdot 0+(-5)\cdot 3+1\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -14 & 4 & -9 \\ 13 & -30 & 3 & -10 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

"Se juega con las filas de la primera matriz y las columnas de la segunda"

Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda:

$A \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $B \in \mathcal{M}_{r\times s}$

$A\cdot B$ tiene sentido sólo si $q=r$. Si es así, entonces $A\cdot B \in \mathcal{M}_{p\times s}$.

* Matriz identidad: es una matriz cuadrada con 1's en la diagonal y 0's en el resto de elementos.

$$I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Juegan el mismo papel que el 1 en la multiplicación de números.

* Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_r$, diremos que $B \in \mathcal{M}_r$ es su inversa si $A \cdot B = B \cdot A = I_{r \times r}$.

Hay muchas matrices que tienen inversa y otras muchas que no. (también vale invertible)

Para saber si una matriz es inversible o no, utilizaremos el método de Gauss:

$$(A \mid I) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \cdots \rightsquigarrow (I \mid B)$$

Esta es la inversa

$$(A \mid I) \overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow} \cdots \rightsquigarrow (\quad \mid \quad)$$

Si no puedo obtener aquí la identidad es que A no es inversible.

Ejemplos

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ si tiene inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}\cdot 1^a f}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{7}\cdot 2^a f}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3^a f - 5\cdot 2^a f}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 & -5/7 & 1 \end{array}\right) \overset{7\cdot 3^a f}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a - \frac{4}{7}\cdot 3^a]{1^a - 3\cdot 3^a} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 15 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{1^a - 2\cdot 2^a}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 9 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 9 & -13 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ no tiene inversa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a - 2\cdot 1^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

↳ No se puede obtener la identidad.

Potencia de una matriz

$$A^n = A\cdot A\cdot A \cdot \overset{n}{\cdots\cdots} \cdot A$$

$$A^2 = A\cdot A$$

$$A^3 = A\cdot A\cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}$$

Para matrices diagonales la potencia es más simple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^5 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si

$$A = QDQ^{-1}$$

con D diagonal y Q inversible. En este caso:

$$A^2 = QDQ^{-1}QDQ^{-1} = QDIDQ^{-1} = QDDQ^{-1} = QD^2Q^{-1}$$

En general:

$$A = QDQ^{-1} \Rightarrow A^n = QD^nQ^{-1}.$$

El problema es encontrar las matrices Q y D.

~~...~~ Es posible casi siempre (sólo casi).

Diagonalización

Queremos saber si $A \in \mathcal{M}_{3\times3}$ es diagonalizable, esto es, si existen $D, Q \in \mathcal{M}_{3\times3}$ con D diagonal, Q inversible, y tal que:

$$A = QDQ^{-1}.$$

~~Fijémos~~ Observemos las columnas de Q y los elementos no nulos de D:

$$Q = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right)$$ v_1, v_2, v_3 son vectores columna $\quad\Big\|\quad$ $$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$A = QDQ^{-1} \Leftrightarrow AQ = QDQ^{-1}Q = QDI = QD$$

$$A\left(v_1 \mid v_2 \mid v_3\right) = \left(v_1 \mid v_2 \mid v_3\right)\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(Av_1 \mid Av_2 \mid Av_3\right) = \left(d_1v_1 \mid d_2v_2 \mid d_3v_3\right)$$

Por tanto, A es diagonalizable si podemos encontrar tres vectores (v_1, v_2, v_3) y tres números (d_1, d_2, d_3) tales que:

$$Av_1 = d_1 v_1 \quad , \quad Av_2 = d_2 v_2 \quad , \quad Av_3 = d_3 v_3 .$$

$\left.\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}\right\}$ Vectores propios de A

$\left.\begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}\right\}$ Valores propios de A

v es un vector propio de A si $v \neq 0$ y $Av = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
λ es un valor propio de A asociado a v.

Como queremos que Q sea invertible, necesitamos que v_1, v_2, v_3 sean distintos del vector cero.

Cálculo de valores y vectores propios

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow$$

$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow$ Esto es discutir un sistema homogéneo con parámetros.

Ejemplo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2y = \lambda x \\ 0'5x = \lambda y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 0'5x - \lambda y = 0 \end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0'5 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Como queremos encontrar $v \neq 0$, necesitamos los valores de λ que hacen que el sistema tenga infinitas soluciones. Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0'5 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \overset{1^a f \leftrightarrow 2^a f}{\sim} \begin{pmatrix} 0'5 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{2 \cdot 1^a f}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{2^a f - (1-\lambda)1^a f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2+(1-\lambda)2\lambda & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda-2\lambda^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $2+2\lambda-2\lambda^2 \neq 0$ entonces el sistema tendrá como única solución $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por contra, si

$2+2\lambda-2\lambda^2=0$, el sistema tendrá infinitas soluciones.

Por tanto:

$$2+2\lambda-2\lambda^2=0 \iff \lambda^2-\lambda-1=0 \iff \lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Así, los valores propios de $L=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0'5 & 0\end{pmatrix}$ son:

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como vectores propios tendremos:

*) $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix}1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 2 & 0\\ 0'5 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1 & -1-\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+(-1-\sqrt{5})y=0\\ 0=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=(1+\sqrt{5})y$$

Si tomamos $y=1 \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\ 1\end{pmatrix}$

Si tomamos $y=\frac{1}{2+\sqrt{5}} \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\\ \frac{1}{2+\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

Si tomamos $y=\frac{100}{2+\sqrt{5}} \Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}\frac{100(1+\sqrt{5})}{2+\sqrt{5}}\\ \frac{100}{2+\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

Nos servirá cualquiera de estos vectores. Además, cada uno tiene una interpretación biológica.

*) $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix}1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 2 & 0\\ 0'5 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1 & -1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+(-1+\sqrt{5})y=0\\ 0=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=(1-\sqrt{5})y$$

Si tomamos $y = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

Si tomamos $y = -1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Cualquiera nos servirá.

Hemos de observar que:

*) $|\lambda_1| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \approx |1'618| = 1'618$

$|\lambda_2| = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \approx |-0'618| = 0'618$

$\Rightarrow |\lambda_1| > |\lambda_2|$

*) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

*) Todas las componentes de cualquier v_1 son o todas positivas o todas negativas ($y = -1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}$). Sin embargo todos los posibles v_2 tienen simultáneamente componentes positivas y negativas. Esto no es casualidad.

En los ejemplos y aplicaciones a la biología que veremos (y bajo condiciones muy simples) este hecho es "lo usual".

*) En este ejemplo, a λ_1 se le denomina valor propio dominante de L y a cualquiera de los v_1 se les llama vector propio dominante.

Otra forma de calcular valores y vectores propios

Si se sabe calcular el determinante de una matriz, tenemos otra vía para hallar valores propios.

* Determinante de una matriz 2×2:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

* Determinante de una matriz 3×3 (Regla de Sarrus):

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$a\cdot e\cdot i + d\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - (c\cdot e\cdot g + b\cdot d\cdot i + a\cdot f\cdot h)$$

Gráficamente:

Otra forma más:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \\ - & - & -\,+ & + & + \end{array}$$

* Para matrices de orden superior los cálculos son simples también pero bastante tediosos.

Ejemplos

1) $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(L-\lambda I) = |L-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0'5 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2\cdot 0'5 =$$

$$-\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

A partir de aquí se sigue como en lás páginas 8 y 9.

2) $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$Lv = \lambda v \Longleftrightarrow Lv - \lambda v = 0 \Longleftrightarrow Lv - \lambda I v = 0 \Longleftrightarrow (L-\lambda I)v = 0$$

$$L - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(L-\lambda I) = |L - \lambda I| =$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0^3 - 4(-\lambda)\cdot 0 - (-\lambda)\cdot 0\cdot\frac{1}{2} - (-\lambda)\cdot 0\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\lambda^3 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \end{array} \right. \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \text{Valores propios complejos}$$

Este ejemplo no es "bueno" pues $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, esto es el módulo ("algo así" como el valor absoluto) de los tres valores propios es igual a 1.

Valores propios dominantes y vectores propios dominantes

*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sus valores propios (pueden estar repetidos o, incluso, ser complejos). Supongamos que tomamos módulos (≈ valores absolutos) y obtenemos:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|.$$

En este caso diremos que λ_1 es un valor propio dominante de A. Si v_1 es un vector propio de A asociado a λ_1 (esto es, $Av_1 = \lambda_1 v_1$), entonces diremos que v_1 es un vector propio dominante.

*) Si se verifica que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_m|$$

entonces diremos que λ_1 es un valor propio estrictamente dominante. A un vector v_1 asociado a λ_1 le llamaremos vector propio estrictamente dominante.

*) Veremos condiciones para tener valores y vectores propios estrictamente dominantes en las aplicaciones.

Ejemplos

1) $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightsquigarrow \text{valor propio estrictamente dominante} \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}\right\} \text{Valores propios dominantes no estrictamente dominantes} \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

Método de las potencias

Cuando una matriz tiene un valor propio estrictamente dominante entonces podemos utilizar el método de las potencias para calcularlo. Dicho método también proporcionará un vector propio estrictamente dominante.

Veamos mediante un ejemplo como es el método de las potencias.

$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix} \qquad w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Como v_0 se puede tomar cualquier vector que no sea vector propio ya.)

$$w_1 = L v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0'5 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = L v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0'5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1'5 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = L v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1'5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 3'5 \end{pmatrix}, w_5 = \begin{pmatrix} 18 \\ 5'5 \end{pmatrix}, w_6 = \begin{pmatrix} 29 \\ 9 \end{pmatrix}, w_7 = \begin{pmatrix} 47 \\ 14'5 \end{pmatrix}, w_8 = \begin{pmatrix} 76 \\ 23'5 \end{pmatrix},$$

$$w_9 = \begin{pmatrix} 123 \\ 38 \end{pmatrix}, w_{10} = \begin{pmatrix} 199 \\ 61'5 \end{pmatrix}, w_{11} = \begin{pmatrix} 322 \\ 99'5 \end{pmatrix}, w_{12} = \begin{pmatrix} 521 \\ 161 \end{pmatrix}, \ldots$$

Hagamos los cocientes de la primera componente de cada vector y la primera componente del vector anterior:

$$\frac{3}{1} = 3;\ \frac{4}{3} \approx 1'333;\ \frac{7}{4} = 1'75;\ \frac{11}{7} \approx 1'571;\ \frac{18}{11} \approx 1'636;$$

$$\frac{29}{18} \approx 1'611;\ \frac{47}{29} \approx 1'621;\ \frac{76}{47} \approx 1'617;\ \frac{123}{76} \approx 1'618;$$

$$\frac{199}{123} \approx 1'618;\ \frac{322}{199} \approx 1'618;\ \frac{521}{322} \approx 1'618;\ \ldots$$

Si hacemos lo mismo con la segunda componente:

$$\frac{0'5}{1} = 0'5;\ \frac{1'5}{0'5} = 3;\ \frac{2}{1'5} \approx 1'333;\ \frac{3'5}{2} = 1'75;\ \frac{5'5}{3'5} \approx 1'571;$$

$$\frac{9}{5'5} \approx 1'636;\ \frac{14'5}{9} \approx 1'611;\ \frac{23'5}{14'5} \approx 1'621;\ \frac{38}{23'5} \approx 1'617;$$

$$\frac{61'5}{38} \approx 1'618;\ \frac{99'5}{61'5} \approx 1'618;\ \frac{161}{99'5} \approx 1'618;\ \ldots$$

En ambos casos hemos obtenido una sucesión de números que se aproxima cada vez más a 1'618. Precisamente el valor estrictamente dominante de $L=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix}$ es $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1'618$.

Nota.- Para no alargar demasiado el ejemplo hemos hecho todos los cálculos con 3 decimales. Si hubiéramos tomado más decimales tendríamos que haber calculado más vectores w_i antes de llegar al valor de λ_1 con los decimales exigidos.

Nota.- Como en el ejemplo todos los vectores tienen sus componentes positivas, también funciona hacer los cocientes de las sumas de las componentes:

$\frac{3+0'5}{1+1} = \frac{3'5}{2} = 1'75$; $\frac{4+1'5}{3+0'5} = \frac{5'5}{3'5} \approx 1'571$; $\frac{7+2}{4+1'5} = \frac{9}{5'5} \approx 1'636$;

$\frac{11+3'5}{7+2} = \frac{14'5}{9} \approx 1'611$; $\frac{18+5'5}{11+3'5} = \frac{23'5}{14'5} \approx 1'621$; $\frac{29+9}{18+5'5} = \frac{38}{23'5} \approx 1'617$;

$\frac{47+14'5}{29+9} = \frac{61'5}{38} \approx 1'618$; $\frac{76+23'5}{47+14'5} = \frac{99'5}{61'5} \approx 1'618$; $\frac{123+38}{76+23'5} = \frac{161}{99'5} \approx 1'618$;

$\frac{199+61'5}{123+38} = \frac{260'5}{161} \approx 1'618$; $\frac{322+99'5}{199+61'5} = \frac{421'5}{260'5} \approx 1'618$; $\frac{521+161}{322+99'5} = \frac{682}{421'5} \approx 1'618$; ...

Por otra parte, recordemos (ver página 9) que si v_1 es un vector propio de L asociado a λ_1 entonces:

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = (1+\sqrt{5})\, y \Rightarrow \frac{x}{y} = 1+\sqrt{5} \approx 3'236.$$

Si dividimos la primera componente de cada vector w_i entre la segunda componente de dicho vector tenemos:

$$\frac{1}{1} = 1;\ \frac{3}{0'5} = 6;\ \frac{4}{1'5} \approx 2'667;\ \frac{7}{2} = 3'5;\ \frac{11}{3'5} \approx 3'143;$$

$$\frac{18}{5'5} = 3'273;\ \frac{29}{9} \approx 3'222;\ \frac{47}{14'5} \approx 3'242;\ \frac{76}{23'5} \approx 3'234;\ \frac{123}{38} \approx 3'211;$$

$$\frac{199}{61'5} \approx 3'236;\ \frac{322}{99'5} \approx 3'236;\ \frac{521}{161} \approx 3'236;\ \ldots$$

Esto nos indica que w_n, cuanto mayor es n, se va "pareciendo" más a un vector propio de L asociado a λ_1.

Nota.- El método de las potencias se ~~corresponde~~ ~~puede~~ interpretará biológicamente como un proceso en el que vamos calculando vectores que nos indican como varían las distintas clases de una población (ver la aplicación "Poblaciones estructuradas por edades" en las páginas 20 y siguientes).

Matrices positivas y matrices estrictamente positivas

Diremos que una matriz es positiva si todos sus elementos son no negativos, esto es, o son positivos o nulos.

Diremos que una matriz es estrictamente positiva si todos sus elementos son estrictamente positivos, esto es, ni pueden ser negativos ni nulos.

Ejemplos

1) $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix}$ es positiva pero no estrictamente positiva.

2) $A = \begin{pmatrix} 0'3 & 0'6 \\ 0'7 & 0'4 \end{pmatrix}$ es positiva y estrictamente positiva.

3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ni es positiva ni estrictamente positiva.

Nota.- Si una matriz es estrictamente positiva entonces es positiva.

Existe un resultado matemático que asegura que toda matriz estrictamente positiva tiene un valor propio estrictamente dominante que admite un vector propio con todas sus componentes estrictamente positivas (es decir, ni negativas ni nulas). Además, funciona bien el método de las potencias.

En las aplicaciones que veremos, en bastantes ocasiones surgen matrices estrictamente positivas. Esto implica que tendremos un valor propio estrictamente dominante, vectores propios estrictamente dominantes y que funciona el método de las potencias. Además, podremos hacer interpretaciones biológicas de todos estos hechos.

También veremos aplicaciones en las que surgen matrices positivas no estrictamente positivas. Aunque en estos casos no está asegurada la existencia de valores y vectores propios estrictamente dominantes, veremos condiciones "naturales" que obviarán este problema.

Aplicaciones en Biología

1) Poblaciones estructuradas por edades

Subdividimos una población en grupos según la edad de los individuos teniendo en cuenta que:

*) Los intervalos de edad que determinan cada grupo son de igual duración.

*) Cada individuo pertenece a un grupo único.

*) El tiempo que transcurre entre dos recuentos consecutivos de la población es igual a la duración de los intervalos de edad.

*) Como consecuencia de las condiciones anteriores, si un individuo pertenece, en un recuento, a un grupo de edad entonces, si sobrevive al siguiente recuento, forzosamente estará en el grupo de edad siguiente.

Ejemplo

Consideremos el ejemplo de la página 1. Tenemos una población que se recuenta cada 2 años y en la que hay 3 grupos de edad: crías (de 0 a 2 años), jóvenes (de 2 a 4 años) y adultos (de 4 a 6 años).

Supongamos que las tasas de supervivencia son:

*) de cría a joven: 0'5,

*) de joven a adulto: 0'5,

// ¿Cuál es la tasa de supervivencia de cría a adulto?

y que las tasas de fertilidad son:

*) crías ⇝ 0,

*) jóvenes ⇝ 0,

*) adultos ⇝ 4.

Si $P_0 = \begin{pmatrix} C_0 \\ J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ es el vector que representa la población inicial, entonces después de 2 años (es decir, en el primer recuento) tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0\cdot C_0 + 0\cdot J_0 + 4\cdot A_0 \\ J_1 = 0'5\cdot C_0 \\ A_1 = 0'5\cdot J_0 \end{array}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0'5 & 0 & 0 \\ 0 & 0'5 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} C_0 \\ J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}}_{P_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ J_1 \\ A_1 \end{pmatrix}}_{P_1}$$

L se denomina matriz de Leslie y es la que nos permite pasar de P_n a P_{n+1}.

Se puede comprobar que $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0'5 & 0 & 0 \\ 0 & 0'5 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene valor propio estrictamente dominante. Por ello se tiene la siguiente situación "curiosa":

$$P_0 = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_1 = \begin{pmatrix} 96 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_2 = \begin{pmatrix} 36 \\ 48 \\ 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P_3 = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = P_0 \ !!$$

Tenemos que no funciona el método de las potencias. Para evitar esto tenemos el siguiente resultado:

"Si en un modelo de población estructurada por edades existen 2 grupos de edad consecutivos con tasas de fertilidad estrictamente positivas (es decir, ni negativas ni nulas) entonces existe el valor propio estrictamente dominante. Además, dicho valor es estrictamente positivo y es el único que admite un vector propio con todas sus componentes estrictamente positivas. Por tanto, funciona el método de las potencias y tiene interpretación biológica."

Ejemplo

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$C \xrightarrow{0'5} J \xrightarrow{0'5} A$ Tasas de supervivencia

$\left.\begin{array}{l} C \rightsquigarrow 0 \\ J \rightsquigarrow 2 \\ A \rightsquigarrow 4 \end{array}\right\}$ Tasas de fertilidad

Se puede comprobar que el valor propio estrictamente dominante de L es, aproximadamente, $1'32472$. Además, también aproximadamente, un vector propio estrictamente dominante es $(65'7938, 24'8332, 9'3730)^t$.

Apliquemos el método de las potencias tomando $w_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$:

$$w_1 = L \cdot w_0 = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad w_2 = L \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad w_3 = L \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 140 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 180 \\ 70 \\ 25 \end{pmatrix}; \quad w_5 = \begin{pmatrix} 240 \\ 90 \\ 35 \end{pmatrix}; \quad w_6 = \begin{pmatrix} 320 \\ 120 \\ 45 \end{pmatrix}; \quad w_7 = \begin{pmatrix} 420 \\ 160 \\ 60 \end{pmatrix};$$

$$w_8 = \begin{pmatrix} 560 \\ 210 \\ 80 \end{pmatrix}; \quad w_9 = \begin{pmatrix} 740 \\ 280 \\ 105 \end{pmatrix}; \quad w_{10} = \begin{pmatrix} 980 \\ 370 \\ 140 \end{pmatrix}; \quad w_{11} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 490 \\ 185 \end{pmatrix};$$

$$w_{12} = \begin{pmatrix} 1720 \\ 650 \\ 245 \end{pmatrix}; \quad w_{13} = \begin{pmatrix} 2280 \\ 860 \\ 325 \end{pmatrix}; \quad w_{14} = \begin{pmatrix} 3020 \\ 1140 \\ 430 \end{pmatrix}; \quad w_{15} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 1510 \\ 570 \end{pmatrix};$$

$$w_{16} = \begin{pmatrix} 5300 \\ 2000 \\ 755 \end{pmatrix}; \quad w_{17} = \begin{pmatrix} 7020 \\ 2650 \\ 1000 \end{pmatrix}; \quad w_{18} = \begin{pmatrix} 9300 \\ 3510 \\ 1325 \end{pmatrix}; \quad w_{19} = \begin{pmatrix} 12320 \\ 4650 \\ 1755 \end{pmatrix};$$

$$w_{20} = \begin{pmatrix} 16320 \\ 6160 \\ 2325 \end{pmatrix}; \; - - -$$

Si consideramos $w_i = P_i = \begin{pmatrix} C_i \\ J_i \\ A_i \end{pmatrix}$, podemos comprobar que los cocientes $\frac{C_{i+1}}{C_i}$, $\frac{J_{i+1}}{J_i}$, $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ y $\frac{C_{i+1}+J_{i+1}+A_{i+1}}{C_i+J_i+A_i}$ se aproximan, cuanto mayor es i, cada vez más a 1'32472.

Esto nos indica que tanto cada grupo de edad como la población total se estabilizan en su crecimiento con una tasa de 1'32472 aproximadamente:

$$w_{18}=\begin{pmatrix}9300\\3510\\1325\end{pmatrix},\quad w_{19}=\begin{pmatrix}12320\\4650\\1755\end{pmatrix},\quad w_{20}=\begin{pmatrix}16320\\6160\\2325\end{pmatrix}$$

$$\frac{12320}{9300}\approx 1'32473,\quad \frac{4650}{3510}\approx 1'32479,\quad \frac{1755}{1325}\approx 1'32453,\quad \frac{18725}{14135}\approx 1'32473,$$

$$\frac{16320}{12320}\approx 1'32467,\quad \frac{6160}{4650}\approx 1'32473,\quad \frac{2325}{1755}\approx 1'32479,\quad \frac{24805}{18725}\approx 1'32470.$$

Además, los vectores $\begin{pmatrix}\frac{C_i}{T_i}\\ \frac{J_i}{T_i}\\ \frac{A_i}{T_i}\end{pmatrix}$, con $T_i=C_i+J_i+A_i$, se ~~parecen~~ aproximan, cuanto mayor es i, cada vez más al vector $\begin{pmatrix}0'657938\\0'248332\\0'093730\end{pmatrix}$. Esto nos indica que la proporción de cada grupo de edad, cuando la población tiene un crecimiento estabilizado, viene dada por los elementos de dicho vector:

$$w_{18}=\begin{pmatrix}9300\\3510\\1325\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}9300/14135\\3510/14135\\1325/14135\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0'657941\\0'248320\\0'093739\end{pmatrix},$$

$$w_{19}=\begin{pmatrix}12320\\4650\\1755\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}12320/18725\\4650/18725\\1755/18725\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0'657944\\0'248331\\0'093725\end{pmatrix},$$

$$w_{20}=\begin{pmatrix}16320\\6160\\2325\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}16320/24805\\6160/24805\\2325/24805\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0'657932\\0'248337\\0'093731\end{pmatrix}.$$

2) Modelos de estado (poblaciones estructuradas por estados)

En estos modelos la subdivisión en clases se realiza por características distintas de la edad. Los caracteres no han de corresponderse necesariamente con cantidades numéricas. Ahora bien, si los caracteres se asocian a valores numéricos, entonces las divisiones suelen ser uniformes.

Al contrario que en las poblaciones estructuradas por edad, de un recuento al siguiente, un individuo puede permanecer en la misma clase o cambiar a cualquier otra.

Una característica de estos modelos es que trabajaremos con matrices de probabilidad, esto es, matrices en las que los elementos de cada columna son no negativos y con suma igual a 1. En estos casos, $\lambda = 1$ es siempre valor propio de la matriz. Además, nos interesará que $\lambda = 1$ sea valor propio estrictamente dominante.

Ejemplo 1.- Distribución por pesos

Consideremos un grupo de individuos constante, esto es, siempre son los mismos. Según su peso los dividimos en 3 clases:

C → menos de 50 kg.

S → entre 50 y 70 kg.

T → más de 70 kg.

Supongamos que entre dos recuentos sucesivos se observa que:

- La mitad de los individuos de la clase C permanecen en C, 3/8 pasan a la clase S y 1/8 pasa a T.
- 1/8 de los individuos de la clase S pasa a la clase C, 3/4 permanece en S y 1/8 pasa a T.
- 1/9 de los individuos de la clase T pasa a la clase C, 5/9 pasa a S y 1/3 permanece en T.

Si C_n, S_n, T_n indica el número de individuos en cada clase en el n-ésimo recuento entonces:

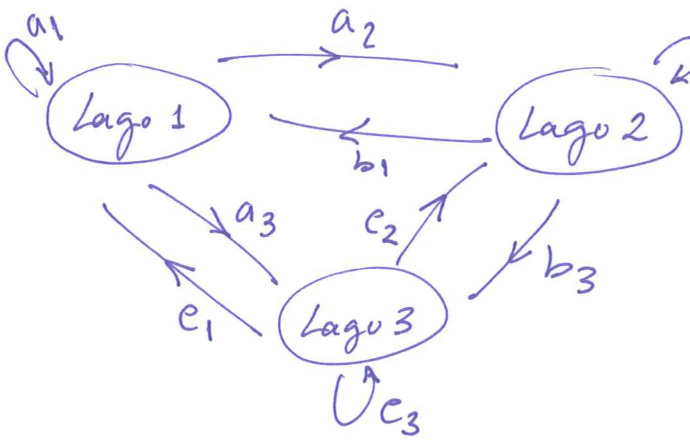
$$\left.\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{1}{2}C_n + \frac{1}{8}S_n + \frac{1}{9}T_n \\ S_{n+1} &= \frac{3}{8}C_n + \frac{3}{4}S_n + \frac{5}{9}T_n \\ T_{n+1} &= \frac{1}{8}C_n + \frac{1}{8}S_n + \frac{1}{3}T_n \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 & 1/9 \\ 3/8 & 3/4 & 5/9 \\ 1/8 & 1/8 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ S_n \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{n+1} \\ S_{n+1} \\ T_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 & 1/9 \\ 3/8 & 3/4 & 5/9 \\ 1/8 & 1/8 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se denomina "matriz de transición" y es una matriz de probabilidad.

Ejemplo 2

Consideremos un grupo de ciervos constante, es decir, siempre son los mismos. Viven en un bosque en el que hay 3 pequeños lagos a los que acuden cada mañana. Cada día cada ciervo visita sólo un lago y al día siguiente puede ir al mismo o cambiar. Supongamos que siempre se reproduce el siguiente esquema entre dos días consecutivos:



$a_i \geq 0,\ b_i \geq 0,\ c_i \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3=1 \\ b_1+b_2+b_3=1 \\ c_1+c_2+c_3=1 \end{array}\right\}$$

Los valores a_i, b_i, c_i representan la proporción de individuos que repiten o cambian de lago.

Sean A_n el número de ciervos en el Lago 1 en el n-ésimo día, B_n el número de ciervos en el Lago 2 en el n-ésimo día y C_n el número de ciervos en el Lago 3 en el n-ésimo día. Entonces:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix}$$

Matriz de transición (es una matriz de probabilidad).

Matrices ergódicas

Sea A una matriz cuadrada con todos sus elementos no negativos. Diremos que A es ergódica si existe una potencia de A con todos sus elementos estrictamente positivos.

Ejemplos

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es ergódica pues $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es ergódica pues $A^n = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ para cualquier $n = 1, 2, 3, 4, \dots$.

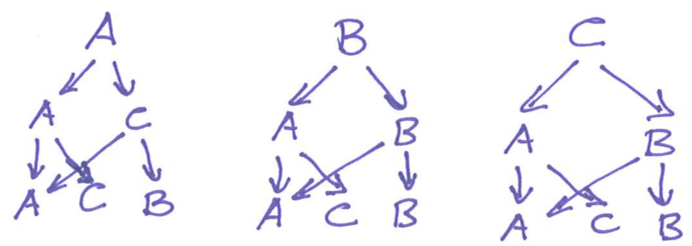
Resultado

Sea A una matriz de probabilidad. Si A es ergódica entonces $\lambda = 1$ es el valor propio estrictamente dominante de A. Además, es el único valor propio que admite un vector propio con todas sus componentes estrictamente positivas.

<u>Observación</u>.- No es simple comprobar si una matriz es ergódica a partir de la definición. Sin embargo la cuestión se simplifica en matrices de probabilidad. En efecto, si A es una matriz de probabilidad entonces es ergódica si representa un modelo tal que, empezando con cualquiera y cada una de las clases de la población, tras varios recuentos se obtienen todas las clases de manera simultánea.

<u>Ejemplos</u>

1) $$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Esta matriz es ergódica.

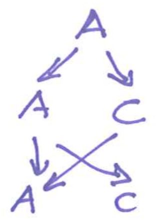
2) $$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$$

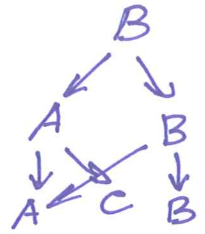
Esta matriz no es ergódica pues, aunque "van apareciendo" todas las clases lo hacen de forma alternante, no lo hacen de manera simultánea.

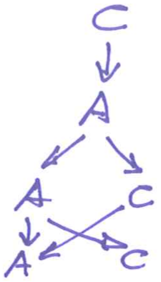
Además, no tiene valor propio estrictamente dominante.

3) $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



No aparece nunca B





No aparece nunca B

Esta matriz no es ergódica. Sin embargo, $\lambda=1$ es el valor propio estrictamente dominante. Pero $v=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ es un vector propio estrictamente dominante con una componente igual a cero.

4) Las matrices de Leslie, en general, no son ni de probabilidad ni ergódicas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0'5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0'7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0'6 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es de Leslie y no es de probabilidad ni ergódica. Sin embargo, como 2 clases consecutivas tienen tasa de fertilidad estrictamente positiva, tiene valor propio estrictamente dominante que es estrictamente positivo y existe un vector propio estrictamente dominante con todas sus componentes estrictamente positivas.

3) Genética

Consideremos un carácter determinado por 2 alelos: A y a (Herencia autosómica).

Tenemos 3 posibles genotipos: AA, Aa y aa. Para simplificar los cálculos, consideraremos que hay 3 fenotipos (≡apariencia exterior), esto es, un fenotipo por cada genotipo.

Si el carácter considerado está ligado al cromosoma X entonces dicho carácter viene determinado por un único alelo: X^A ó X^a (Herencia ligada al sexo).

3.1. Herencia autosómica

En la siguiente tabla representamos la posibilidad de obtener un fenotipo u otro según se realice una combinación u otra:

	AA×AA	AA×Aa	AA×aa	Aa×Aa	Aa×aa	aa×aa
AA	1	1/2	0	1/4	0	0
Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
aa	0	0	0	1/4	1/2	1

Como ejemplo consideremos el "Don Diego de Noche" con los siguientes genotipos:

AA ⇝ Rojo; Aa ⇝ Rosa; aa ⇝ Blanco.

Para dar un modelo mediante un sistema de ecuaciones en diferencias, supongamos que polinizamos siempre con el mismo genotipo, por ejemplo con AA (flores rojas). Si en una generación tenemos:

x_n = proporción de rojas (AA),

y_n = proporción de rosas (Aa),

z_n = proporción de blancas (aa),

entonces en la siguiente generación tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tfrac{1}{2} y_n \\ y_{n+1} &= \tfrac{1}{2} y_n + z_n \\ z_{n+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}_{P_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}}_{P_{n+1}}.$$

La matriz M es una matriz de probabilidad pero no es ergódica. A pesar de todo, podemos aplicar el método de las potencias. Si tomamos

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, esto es, si consideramos que la generación inicial está compuesta por igual número de flores rojas, rosas y blancas, tenemos que:

$$P_1 = M \cdot P_0 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = M \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 13/8 \\ 3/8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 45/16 \\ 3/16 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_5 = \begin{pmatrix} 93/32 \\ 3/32 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ldots$$

Es claro que, para n "muy grande", $P_n \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, a largo plazo sólo tendremos flores rojas.

<u>Nota</u>.- Recordemos que $P_n = M^n \cdot P_0$. Haciendo cuentas se tiene que, para n "muy grande",

$$M^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, para cualquier vector $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$:

$$P_n = M^n \cdot P_0 \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 + z_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, nuevamente se justifica que sólo tendremos flores rojas.

Por cierto, $\lambda = 1$ es el valor propio estrictamente dominante de M y un vector propio estrictamente dominante es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.2. Herencia ligada al sexo

En este caso la tabla que nos indica como se transmiten los caracteres es la siguiente:

	Pareja padres ⇝	$X^AX^A \times X^AY$	$X^AX^A \times X^aY$	$X^AX^a \times X^AY$	$X^AX^a \times X^aY$	$X^aX^a \times X^AY$	$X^aX^a \times X^aY$
Descendencia ♂	X^AY	1	1	1/2	1/2	0	0
	X^aY	0	0	1/2	1/2	1	1
Descendencia ♀	X^AX^A	1	0	1/2	0	0	0
	X^AX^a	0	1	1/2	1/2	1	0
	X^aX^a	0	0	0	1/2	0	1

Experimentos.- Tomamos un macho y una hembra al azar y los cruzamos. De su descendencia escogemos un "hijo" y una "hija", al azar, que a su vez se cruzan. Si seguimos este proceso indefinidamente, ¿qué ocurre a largo plazo?

Consideremos la siguiente notación:

b_n ⇝ proporción de parejas $X^AX^A \times X^AY$

c_n ⇝ proporción de parejas $X^AX^A \times X^aY$

$d_n \rightsquigarrow$ proporción de parejas $X^AX^a \times X^AY$

$f_n \rightsquigarrow$ proporción de parejas $X^AX^a \times X^aY$

$g_n \rightsquigarrow$ proporción de parejas $X^aX^a \times X^AY$

$h_n \rightsquigarrow$ proporción de parejas $X^aX^a \times X^aY$

La matriz de transición viene dada por:

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b & \;c & \;d & \;\;f & \;g & \;h \end{matrix} \end{array}.$$

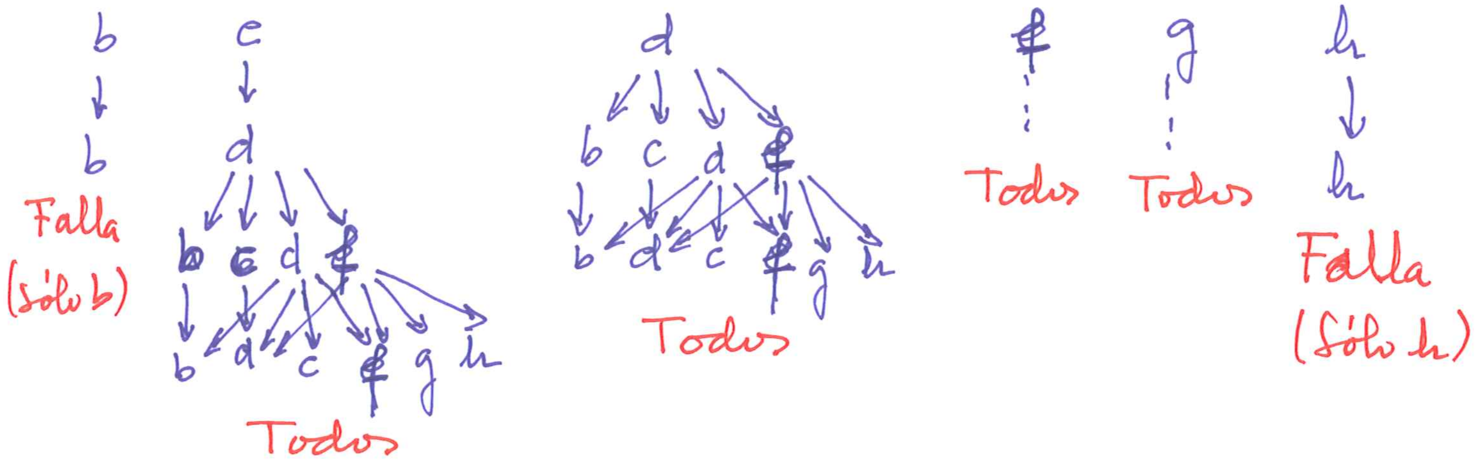
Haciendo cuentas para valores "muy grandes" de n se tiene que:

$$M^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos indica que, a largo plazo, sólo tendremos parejas del tipo $X^AX^A \times X^AY$ o del tipo $X^aX^a \times X^aY$ (cruzamiento y deriva genética). Por ejemplo, la tercera columna de M^n representa que, si iniciamos el experimento con una pareja del tipo $X^AX^a \times X^AY$ entonces, a largo plazo, tendremos una pareja del tipo $X^AX^A \times X^AY$ con una probabilidad de $2/3$ y una pareja del tipo $X^aX^a \times X^aY$ con una probabilidad de $1/3$.

Por cierto, $\lambda = 1$ es un valor propio, de M, estrictamente dominante que no es "simple" sino "doble" (es valor propio "dos veces"). Por tanto, al aplicar el método de las potencias obtenemos, en general, un vector de la forma $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in [0,1]$, esto es, v tiene componentes nulas.

Todo esto se debe a que M no es ergódica:



Experimento 2.- Supongamos que el alelo X^a está relacionado con una enfermedad de forma que:

* un macho está sano (X^AY) o enfermo (X^aY)
* una hembra está sana (X^AX^A), es portadora sin llegar a estar enferma (X^AX^a) o está enferma (X^aX^a).

Supongamos además que las hembras enfermas no son fértiles. Si repetimos el experimento 1 en este caso, sólo hay cuatro tipos de parejas "viables" posibles: b_n, c_n, d_n y f_n.

La matriz de transición es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

y para valores "muy grandes" de n:

$$M^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto significa que, a largo plazo, sólo tendremos parejas del tipo $X^AX^A \times X^AY$.

Nuevamente, en este caso M es una matriz de probabilidad pero no es ergódica. Así, aunque $\lambda = 1$ es el valor propio estrictamente dominante y simple, los vectores propios estrictamente dominantes son de la forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir, tienen componentes nulas. A pesar de todo, el método de las potencias funciona:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \\ 7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/16 \\ 7/16 \\ 17/16 \\ 13/16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125/64 \\ 17/64 \\ 71/64 \\ 43/64 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{-----} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \\ f_n \end{pmatrix}}_{n \text{ "muy grande"}} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$