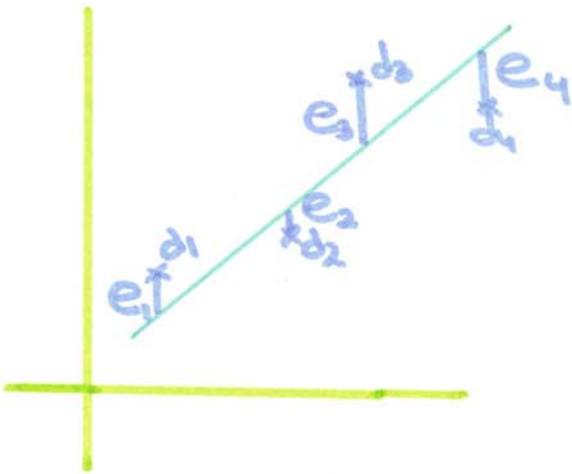
PRÁCTICA 1.

- CONCEPTO DE APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS.

Consideramos una serie de datos que se disponen en una nube de puntos. Nuestro objetivo es buscar una curva que (se) aproxime a tales datos.

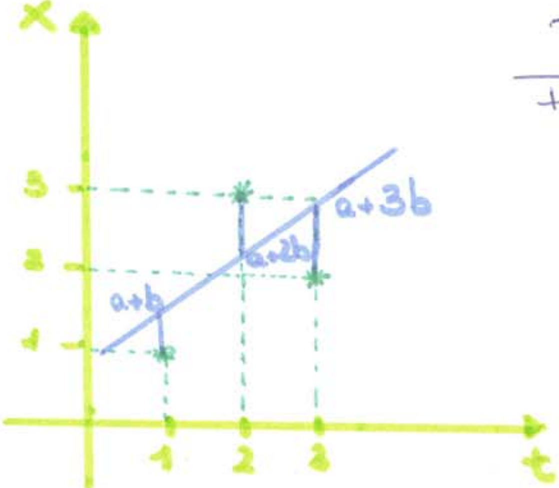
El problema que surge primero es cómo medir en cuánto nos equivocamos al tomar una curva u otra. Una posibilidad es usar el error cuadrático.



- Error cuadrático $= e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = E_2$

El método de aproximación por mínimos cuadrados consiste en buscar una curva (de una familia de curvas dada) que haga que el error cuadrático sea el menor posible.

• Ejemplo: Recta de mínimos cuadrados.



Datos: (1,1), (2,3), (3,2)

Familia de rectas:

$x(t) = a + bt$

Parámetros.

$$\boxed{\varepsilon_2 = (1-a-b)^2 + (3-a-2b)^2 + (2-a-3b)^2}$$

Al buscar el mínimo error surge un problema de cálculo de mínimos para funciones de varias variables:

$$\boxed{\text{"Mínimo de } F(a,b) = (1-a-b)^2 + (3-a-2b)^2 + (3-a-3b)^2\text{"}}$$

Para buscar el mínimo utilizamos las derivadas parciales de F:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 0 \end{aligned}\right|$$

Tenemos un sistema de ecuaciones fácil de resolver.

Cuando utilizamos familias de curvas correspondientes a funciones polinómicas, los sistemas obtenidos son fáciles de resolver. Otra cuestión es ajustar por funciones exponenciales, logarítmicas, logísticas, etc.

· MÍNIMOS CUADRADOS ⇝ LINEALIZACIÓN.

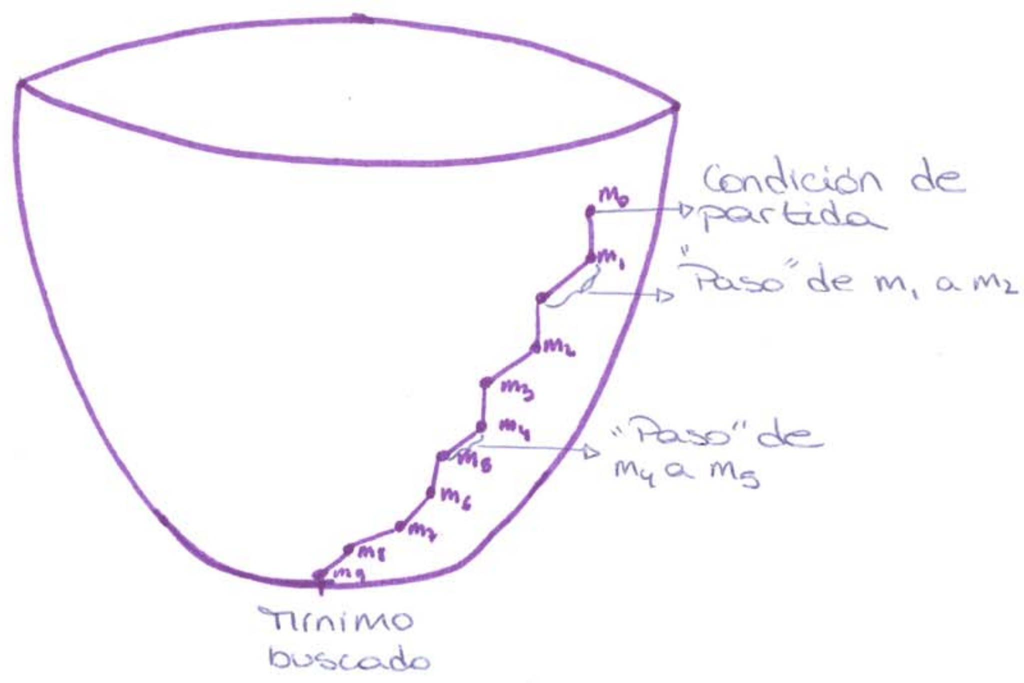
Cuando ajustamos por familias generales, una posibilidad de obtener sistemas fáciles de resolver es emplear el método de linealización. Esto lo veremos en el Tema 4.

· MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS.

Otra posibilidad para ajustar por familias de curvas generales es usar métodos de resolución aproximada de los sistemas obtenidos.

En la Práctica 1 seguiremos este camino: para resolver los sistemas obtenidos utilizaremos un método perteneciente a la familia de los métodos de gradiente.

Gráficamente este método consiste en:



1). Comenzamos con unos valores concretos de los parámetros (m_0)

2). "Avanzamos buscando" el mínimo ($m_0 \to m_1 \to m_2 \ldots$)

3). Obtenemos una sucesión de puntos $\{m_n\}_{n\geq 0}$ que se corresponden con sucesivas elecciones de los parámetros.

4). "Si todo va bien", nuestra sucesión estará cada vez más cerca del mínimo.

Surgen varias cuestiones:

I). ¿Dónde empezamos (m_0)?

II). ¿Cuánto avanzamos cada vez (paso de m_n a m_{n+1})?

III). ¿Cuándo hemos llegado al mínimo?

IV). ¿Podemos llegar al mínimo?

En la Práctica 1. intentaremos responder a estas preguntas.

• ERROR MEDIO EN %

Para poder comparar ajustes correspondientes a distintas familias, utilizaremos el "error medio en %"

Si denotamos por ϵ_2 al error cuadrático, el "error medio en %" viene dado por la expresión:

$$\boxed{\frac{\sqrt{\epsilon_2/n}}{\text{Media de los datos}} \times 100}$$

Como los datos se corresponderán con magnitudes positivas (población, altura, peso, etc) no hay problema con el caso "media = 0".

- FAMILIA EXPONENCIAL.

$$\boxed{x' = cx \rightsquigarrow x(t) = ae^{c(t-t_0)}}$$

$a \equiv$ valor en t_0 $(x(t_0))$

$t_0 \equiv$ punto medio de los datos.

$c \equiv$ tasa de crecimiento $\left(\frac{x'}{x}\right)$

$ac \equiv$ pendiente en t_0 $(x'(t_0))$

Al ajustar con esta familia, realmente sólo necesitamos dos parámetros. Como tenemos tres, (a, t_0, c) fijaremos t_0; esto es: t_0 será un valor concreto que fijaremos nosotros.

- FAMILIA LOGÍSTICA.

$$x' = \frac{c}{a} x (a - x) \Rightarrow x(t) = \frac{a}{1 + e^{-c(t-t_0)}}$$

$$\left[x' = cx\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right]$$

$a \equiv$ valor límite en $+\infty$ $\left(\lim_{t \to +\infty} x(t) = a\right)$ si $c > 0$

$t_0 \equiv$ punto de inflexión.

$c/2 \equiv$ tasa de crecimiento en t_0 $\left(\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}\right)$

$ac/4 \equiv$ pendiente en t_0 $(x'(t_0))$

- FAMILIA DE GOMPERTZ.

$$x' = cx(\ln a - \ln x) \Rightarrow x(t) = a e^{-e^{-c(t-t_0)}}$$

$$\left[x' = cx \ln \frac{a}{x}\right]$$

$a \equiv$ Valor límite en $+\infty$ $\left(\lim_{t \to +\infty} x(t) = a\right)$ si $c > 0$

$t_0 \equiv$ Punto de inflexión.

$c \equiv$ Tasa de crecimiento en t_0 $\left(\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}\right)$

$\frac{ac}{e} \equiv$ Pendiente en t_0 $(x'(t_0))$