Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 1. Curso 2008-2009.

1. *Considera la ecuación en diferencias*

$$x_{n+1} = ax_n(b - x_n)$$

donde a y b son parámetros reales. Determina los valores de estos parámetros para que se satisfaga cada una de las siguientes situaciones:

   a) $\{1, 2, 3, \ldots\}$ *es una solución.*

   b) $\{1, 1, 1, 1, \ldots\}$ *es una solución estable asintóticamente.*

   c) $\{3, 1, 3, 1, \ldots\}$ *es un 2-ciclo.*

2. *Determina, justificadamente, si las siguientes sucesiones pueden ser solución de una ecuación en diferencias:*

   a) $\{1, 2, 4, 7, \ldots\}$.

   b) $\{1, 2, 3, 1, 4, \ldots\}$.

   c) $\{3, 1, 2, 4, 6, 3, 1, 2, 4, 6, \ldots\}$.

3. *La dinámica de una determinada especie responde a la siguiente ecuación en diferencias*

$$x_{n+1} = 2x_n e^{1-x_n}.$$

Responde, de forma justificada, a las siguientes cuestiones:

   a) *¿Cuáles son los puntos fijos?*

   b) *¿Cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?*

4. *Considera la ecuación en diferencias*

$$P_{n+1} = P_n e^{P_n - 2}.$$

   a) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación.*

   b) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones calculadas en el apartado anterior.*

5. *Considera la familia de ecuaciones en diferencias*

$$x_{n+1} = (\lambda - x_n)x_n$$

donde λ es un parámetro real.

   a) *Para cada valor de λ, ¿cuáles son los puntos fijos?*

   b) *Para cada valor de λ, ¿cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?*

   c) *Realiza un estudio gráfico de la estabilidad cuando el valor absoluto de la derivada sea igual a 1.*

6. *Repite el ejercicio anterior para la ecuación en diferencias*

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n.$$

7. *Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por*

$$f(P) = \frac{1}{2} \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P}$$

respectivamente.

   a) *Determina la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.*
   b) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.*
   c) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*
   d) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

8. *Para una determinada especie de gamos se considera que P es la proporción de individuos que como máximo pueden pertenecer a un hábitat concreto (esto es, $P = 0$ indica que no hay gamos, $P = 1$ indica que no caben más gamos). Además, se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad son, respectivamente, las siguientes:*

$$f(P) = \frac{3a}{8}(1-P) \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}P,$$

siendo a un número real comprendido entre 2 y 6.

   a) *Comprueba, de manera justificada, que la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población viene dada por la expresión:*

$$P_{n+1} = \frac{a}{2}P_n(1-P_n).$$

   b) *Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.*
   c) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.*
   d) *Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.*

9. *Se considera la serie de pesos (expresada en kilos)*

$$p_{37} = 1'35; \quad p_{38} = 2'90; \quad p_{39} = 1'74; \quad p_{40} = 3'06; \quad p_{41} = 1'35.$$

que se ajusta a una ecuación en diferencias del tipo

$$x_{n+1} = x_n(a - x_n)$$

donde a es un parámetro por determinar.

   a) *Estima el valor de a (con precisión de un decimal).*
   b) *Determina los puntos fijos para la ecuación en diferencias dada.*
   c) *Estudia la estabilidad de los puntos fijos.*

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 2. Curso 2008-2009.

1. *Decide si las siguientes matrices admiten inversa. En caso afirmativo, calcula dicha inversa.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -9 & -18 & 26 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. *Decide, en cada caso, si el vector v es vector propio de la matriz dada:*

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 0 & 34 & 6 \\ 0 & -6 & 71 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. *Sea una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}$ tal que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ son sus valores propios con vectores propios $v_1 = (1, -2)^T$ y $v_2 = (1, 0)^T$ respectivamente. Calcula A.*

4. *En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en tres grupos de edad (G_1, G_2 y G_3). La matriz de Leslie es*

$$\begin{pmatrix} 0'1 & 0'9 & 0'2 \\ 0'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0'3 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_2? ¿Y de G_2 a G_3? ¿Y de G_1 a G_3?*

   b) *¿Cuáles son las tasas de fertilidad?*

   c) *Se supone que la población inicial está dada por $X_0 = (10, 20, 15)^T$. Calcula la población tras dos periodos.*

5. *Una población se estructura en dos grupos de edad (G_1 y G_2). La tasa de fecundidad de G_1 es 1'2 y la de G_2 es 2'3. Además, la tasa de supervivencia para G_1 es $0'6$. Determina la matriz de Leslie L para esta población y decide qué ocurrirá con la población a largo plazo. (Sugerencia: método de las potencias)*

6. *La dinámica de una población, dividida en cuatro grupos de edad, viene dada por la ecuación $X_{n+1} = LX_n$, donde L es una matriz de Leslie que tiene como valor propio dominante $\lambda = 1'01$ y con un vector propio dominante dado por $v = (2, 3, 4, 1)^t$.*

   a) *¿Qué puedes decir sobre el aumento o disminución de la población total a largo plazo?*

   b) *¿Qué puedes decir sobre la distribución por grupos de la población a largo plazo?*

   c) *Esboza la pirámide de edades.*

7. *Una determinada planta puede presentar flores de uno de estos tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Considera el siguiente programa de polinización:*

   - *Las plantas de flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).*
   - *Las plantas de flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).*
   - *Las plantas de flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).*

   Se pide que

   a) *calcules la matriz de transición de dicho diseño.*

   b) *sabiendo que la matriz obtenida en el apartado anterior es de probabilidad y ergódica, justifiques cuál será el vector de proporción para este experimento, esto es, qué proporción de cada color se dará a largo plazo.*

8. *Interpreta, desde un punto de vista biológico, el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0'3 & 0'5 \\ 0'4 & 0 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 & 0 \end{pmatrix} P_n.$$

9. *Considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0'35 & 0'52 \\ 0'65 & 0'48 \end{pmatrix} P_n.$$

   a) *Plantea una situación real que se ajuste a esta ecuación en diferencias.*
   b) *Comprueba, de manera justificada, que el vector $v = (4,5)^T$ es un vector propio de la matriz asociada al sistema.*
   c) *Determina, de manera justificada, cuál es el valor propio asociado al vector dado en b).*
   d) *Sabiendo que la matriz asociada al sistema es de probabilidad y ergódica, haz una interpretación, para la situación propuesta en a), de los elementos calculados en los apartados b) y c).*

10. *Se considera una población estructurada en dos estados (E_1 y E_2). Se sabe que la matriz de transición viene dada por*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   a) *Teniendo en cuenta que $(5,8)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ y que $b = 2'5a$, calcula los valores de a, b, c, d.*
   b) *¿Es M ergódica?*
   c) *¿Qué puedes decir sobre el comportamiento de la población considerada a largo plazo?*

11. *Para una población estructurada por edades se sabe que la matriz de Leslie viene dada por*

$$L = \begin{pmatrix} 0'3 & 0'2 \\ 0'2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, $v = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$ *es un vector propio de L.*

   a) *Calcula el valor propio de la matriz de Leslie asociado al vector dado.*
   b) *Justifica por qué el valor propio calculado en el apartado anterior es dominante.*
   c) *¿Qué puedes decir sobre el comportamiento de la población considerada a largo plazo?*

12. *En un parque natural, en el que hay caballos en libertad, existen tres abrevaderos, A, B y C. Los encargados del parque han observado que la distribución de los caballos cada mañana en los diferentes abrevaderos viene determinada por la expresión*

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'2 & 0'6 & 0'3 \\ 0'4 & 0 & 0'2 \\ 0'4 & 0'4 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix},$$

donde A_n, B_n y C_n denotan, respectivamente, los caballos que han bebido en A, B y C en un determinado día.

   a) *Determina la proporción de caballos que un día beben en B y al siguiente se van a A.*
   b) *Determina la proporción de caballos que un día beben en B y al siguiente se van a C.*
   c) *Determina la proporción de caballos que un día beben en C y al siguiente vuelven a C.*
   d) *Justifica que $v = \left(\frac{3}{2}, 1, 2\right)^t$ es un vector propio dominante de la matriz de transición asociada al modelo anterior.*
   e) *Si dispones de 9 toneladas de comida para ayudar a la alimentación de los caballos en una época de sequía, ¿cómo debes distribuir la comida entre los abrevaderos para que el reparto sea equitativo?*

Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

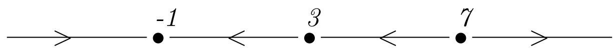
Relación de ejercicios Nº 3. Curso 2008-2009.

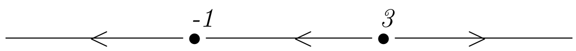
1. *Determina el retrato de fases para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas.*

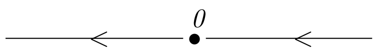
   a) $x' = x(7-x)$ *b)* $x' = x^2(7-x)$ *c)* $x' = x(7-x)^2$ *d)* $x' = \cos x$

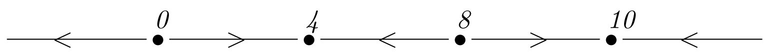
   Estudia, en cada caso, las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

2. *Reconstruye la gráfica de la soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ según el retrato de fases dado.*

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

   Indica los puntos de equilibrio en cada caso y estudia la estabilidad de dichos puntos.

3. *Esboza el retrato de fases para los siguientes sistemas correspondientes a modelos de interacción entre especies de tipo antagonismo.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (-1+2x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-3+3x-y)x \\ y' = (1+x-y)y \end{array}\right\}$

   Realiza un análisis de los resultados obtenidos.

4. *Ejercicio análogo al anterior para los siguientes modelos de competición.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x-y)x \\ y' = (3-2x-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (3-2x-y)x \\ y' = (6-4x-2y)y \end{array}\right\}$

5. *Ejercicio análogo al tercero para los siguientes modelos de mutualismo (cooperación).*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (4-2x+y)x \\ y' = (3+x-3y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (-1-x+y)x \\ y' = (3+x-2y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (-x+y)x \\ y' = (1+2x-y)y \end{array}\right\}$

6. *Ejercicio análogo al tercero para los siguientes modelos.*

   a) $\left.\begin{array}{l} x' = (2-x)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x)x \\ y' = (2-x-y)y \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x' = (1-x+y)x \\ y' = (1-y)y \end{array}\right\}$

7. *La dinámica de una población viene determinada por la ecuación diferencial*

   $$P' = P(P-0'3)(8-P),$$

   siendo $P(t)$ el número de individuos (en miles) que hay en el hábitat en el instante t.

   a) *Determina los puntos de equilibrio de esta ecuación diferencial.*
   b) *Dibuja el retrato de fases correspondiente y estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio.*
   c) *Explica el significado de lo que has obtenido en el apartado anterior en términos de la dinámica de la población.*
   d) *¿Qué ocurrirá con esta población a largo plazo si en el instante inicial hay 250 individuos en el hábitat? ¿Y si hay 500?*

8. *Se considera el siguiente modelo de interrelación entre especies*

   $$\left.\begin{array}{l} x' = (1-x-y)x \\ y' = (4-5x-ay)y \end{array}\right\}$$

   donde a es un parámetro estrictamente positivo.

   a) *Para cada valor de a, ¿qué tipo de interrelación existe?*
   b) *Calcula los valores de a para los que existe un estado de coexistencia.*