

*Consideraciones sobre la óptica de los
medios turbios, especialmente soluciones
coloidales; por Gustav Mie*

**(Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell
kolloidaller Metallösungen; von Gustav Mie)**

ANNALEN DER PHYSIK. N° 4. VOL. 25, pp. 377-445 (1908)

Traducción: Arturo Quirantes Sierra (aquiran@ugr.es)
[Comentarios del traductor entre corchetes]

1. Las diversas coloraciones de los metales en el estado coloidal han experimentado interpretaciones de distinto tipo en el transcurso del tiempo. Al principio se tendía mucho a la opinión de que los metales en cuestión (además de la plata) se encontraban en muchas modificaciones distintas de coloración. Más tarde se llegó a la opinión de que los colores estaban basados en resonancia óptica. Esta opinión fue establecida sobre todo por F. Ehrenhaft¹⁾. Finalmente, J. C. Maxwell-Garnett²⁾ señaló recientemente que los colores de los metales coloidales, cuando las partículas de metal en suspensión son muy pequeñas, pueden explicarse perfectamente mediante la teoría que L. Lorenz³⁾ ha desarrollado para medios ópticamente inhomogéneos. Para una suspensión metálica muy menuda, en la que las dimensiones de las partículas son muy pequeñas en comparación con la longitud de onda, y con su distancia recíproca, la teoría arroja una curva de absorción bastante definida, la cual se puede calcular a partir de las constantes ópticas del metal y, por consiguiente, si bien resulta absolutamente diferente de la curva de absorción del metal sólido, no tiene sin embargo nada que ver con resonancia en el sentido que tiene esa palabra para Ehrenhaft, Wood et al. Así pudo Maxwell-Garnett, entre otras cosas, deducir de modo natural a partir de la teoría lorenziana el color rojo de muchas soluciones de oro, las cuales había interpretado Ehrenhaft como efecto de resonancia. La teoría arroja otros colores cuando las partículas se juntan más, y se pueden conseguir, como Maxwell-Garnett demostró mediante el cálculo, todas las transiciones posibles desde el color de la suspensión metálica a dilución infinita hasta metal sólido. Así se explica también de una manera sencilla la interesante transformación de color que han observado F. Kirchner y R. Zsigmondy⁴⁾ en gelatina secante que contenía oro.

Aunque está bien la explicación llevada a cabo en algunos casos afortunados por Maxwell-Garnett, no es el caso en propiedades ópticas peculiares de metales coloidales en muchos otros casos. Puede también obtenerse, en soluciones *muy diluidas* del mismo metal, los diversos colores, en tanto que debería mostrar siempre la misma curva de absorción de la teoría de Lorenz. Por otro lado, la opinión defendida por Ehrenhaft sobre la resonancia de las partículas ahora se basa en la suposición, absolutamente inadmisible, de que puede verse el metal como conductor perfecto también desde el punto de vista óptico. Renunciando (a ello) por la objeción que debe elevarse contra tal suposición desde el punto de vista de la teoría⁵⁾, se demuestra directamente su inexactitud, primero por el hecho de que las soluciones con partículas muy pequeñas no reflejan difusamente en los colores violeta y azul de modo predominante y no parecen rojo-amarillento a la vista, sino que tanto en luz directa como indirecta se indica otra cosa sobre los colores característicos del metal en cuestión, segundo por el hecho de que en las soluciones con partículas muy pequeñas la luz dispersa no tiene su máximo de polarización en 120°, como la teoría defendida por Ehrenhaft afirma, sino, como en la turbidez de medios no conductores, en 90°, donde la luz está casi totalmente polarizada.

Para decidir definitivamente la pregunta de si en las soluciones metálicas coloidales de distintos colores se presentan distintas modificaciones alótropas del material, que no se hallan en

¹⁾ F. Ehrenhaft, Wiener Sitzungber. Ila. **112**, p. 181. 1903; **114**, p. 1115. 1905.

²⁾ J.C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. **203**, p. 385. 1904; **205**, p. 237. 1906. F. Kirchner, en su disertación de Leipzig, señaló la validez de las fórmulas de Lorenz también para el índice de refracción de las emulsiones de plata en gelatina (Ann. d. Phys. **13**, p. 239. 1904).

³⁾ L. Lorenz, Wied. Ann. **11**, p. 70. 1880.

⁴⁾ R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. **15**, p. 573. 1904.

⁵⁾ Compárese con la discusión entre F. Pockels y F. Ehrenhaft en la Physik. Zeitschr. **5**, p. 152, 387, 460. 1904.

estado compacto, o si se puede explicar mediante partículas de la misma naturaleza física que el metal compacto, que sólo se diferencian en tamaño y forma, es absolutamente necesario, tanto crear más material experimental, como desarrollar asimismo la teoría de modo más exacto.

Es por eso que en el Instituto de Greifswald han sido realizadas, por el Sr. Steubing, medidas cuidadosas en diversas suspensiones de oro. Yo he hecho un informe provisional sobre una pequeña parte de estas medidas en el Naturforscherversammlung de Dresde. El trabajo realizado será publicado próximamente por el Sr. Steubing.

La teoría óptica, en todo caso, debe ser desarrollada en más direcciones. Si bien los metales en general cristalizan en forma regular, principalmente en forma de octaedro, es asimismo muy posible que mediante una rápida separación de la solución se formen cristales fuertemente distorsionados suspendidos en el líquido y con forma de hojas o bastoncillos. Por otro lado pueden desarrollarse cristales muy regulares, como se observan p. ej. en hermosos octaedros de cobre en el llamado vidrio Avanturin. La teoría permite que tales cristales, desarrollados homogéneamente en todas partes, como octaedros regulares, cubos y demás, se sustituyan por esferas sencillas, y también que las hojas y bastoncillos se sustituyan por elipsoides aplanados o alargados. Quiero no obstante mencionar, que las observaciones señaladas por el Sr. Steubing sobre la polarización de la luz dispersa establecen, sobre lo cual volveré en el punto 20., el concepto inmediato de que verdaderamente no tenemos nada que ver con esferas u otros cuerpos simples parecidos.

El siguiente trabajo se ocupa sólo del caso más simple, en el que se atribuye forma esférica a las partículas.

Coordenadas polares.

2. Por simplicidad, vamos a pensar numéricamente (1,2,3) en los tres ejes de coordenadas (x,y,z) . Sea el sistema de coordenadas a derechas. En lo sucesivo se indicará con r el radiovector de un punto (x,y,z) , sea θ el ángulo de r con el eje 1, y sea φ el ángulo de la proyección del eje r sobre el plano (2,3) con el eje 2 (Fig.1). Así, (r, θ, φ) son también coordenadas polares del punto. Queremos en adelante simbolizar las componentes de las intensidades de campo eléctrico y magnético en este sistema de coordenadas polares como $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\varphi$ y $\mathbf{H}_r, \mathbf{H}_\theta, \mathbf{H}_\varphi$. Se puede demostrar fácilmente que las ecuaciones de Maxwell adoptan la siguiente forma:

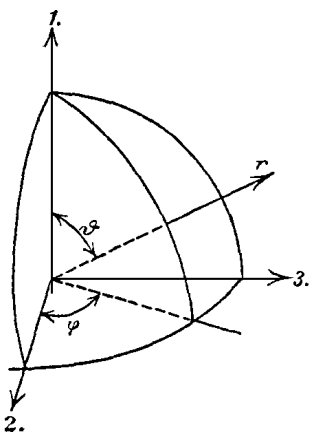


Fig. 1. Sistema de coordenadas.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} r^2 \cdot \text{sen}\vartheta \left(k \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathbf{E}_r \right) = \frac{\partial(r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \mathbf{H}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(r \cdot \mathbf{H}_\vartheta)}{\partial \varphi} \\ r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \left(k \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_\vartheta}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathbf{E}_\vartheta \right) = \frac{\partial(r \cdot \mathbf{H}_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \mathbf{H}_\varphi)}{\partial r} \\ r \cdot \left(k \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_\varphi}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathbf{E}_\varphi \right) = \frac{\partial(r \cdot \mathbf{H}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial \vartheta} \\ -r^2 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial t} = \frac{\partial(r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \mathbf{E}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(r \cdot \mathbf{E}_\vartheta)}{\partial \varphi} \\ -r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial(r \cdot \mathbf{E}_r)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \mathbf{E}_\varphi)}{\partial r} \\ -r \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial(r \cdot \mathbf{E}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \vartheta} \end{array} \right.$$

[N.T. Las variables en negrilla aparecen en el original como letras góticas. No implican una representación de magnitudes vectoriales]

Aquí se representan por k , Λ , μ la constante dieléctrica, conductividad y permeabilidad, todo en el mismo sistema de unidades. En un medio no conductor se tiene $k\mu = 1/v^2$, donde v es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el medio.

Se puede, mediante eliminaciones apropiadas, formar fácilmente una ecuación diferencial de segundo orden para \mathbf{E}_r y \mathbf{H}_r que no contenga las restantes incógnitas. Queremos, sin embargo, realizar tal cosa después de que hayamos modificado las ecuaciones de forma especial para el problema de oscilaciones regulares.

Por ello, ponemos:

$$(2) \quad \mathbf{E}_r = E_r \cdot e^{2\pi i n t}, \quad \mathbf{H}_r = H_r \cdot e^{2\pi i n t} \quad \text{etc.}$$

donde E_r y H_r sólo dependen de las coordenadas, pero no del tiempo, y n es el número de ondas por segundo. En lo sucesivo sea:

$$(3) \quad 4\pi^2 \cdot n^2 \cdot \mu \cdot k - 2\pi i \cdot n \cdot \mu \cdot \Lambda = \frac{4\pi^2 \cdot m^2}{\lambda^2}$$

y aquí λ es la longitud de onda de la respectiva oscilación en el vacío, m es el índice de refracción complejo del medio para luz de la longitud de onda λ . En un medio no absorbente (p. ej. agua) m es igual al índice de refracción usual, por contra para metales es $m = v \cdot (1 - i\kappa)$, donde v es el acostumbrado índice de refracción definido como cantidad real y κ es el coeficiente de absorción.

Finalmente queremos introducir las siguientes definiciones:

$$(4) \quad -\frac{i \cdot n \cdot \mu \cdot \lambda}{m} \cdot H_r = M_r \quad \text{etc.}$$

$$(5) \quad \frac{2\pi m r}{\lambda} = x$$

Así obtenemos las siguientes ecuaciones, donde se presentan las cantidades E y M de manera bastante sencilla:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot E_r = \frac{\partial(x \cdot \text{sen}\vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(x \cdot M_\vartheta)}{\partial\varphi} \\ x \cdot \text{sen}\vartheta \cdot E_\vartheta = \frac{\partial M_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(x \text{sen}\vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial x} \\ x \cdot E_\varphi = \frac{\partial(x \cdot M_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial M_r}{\partial\vartheta} \\ x^2 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot M_r = \frac{\partial(x \text{sen}\vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(x E_\vartheta)}{\partial\varphi} \\ x \cdot \text{sen}\vartheta \cdot M_\vartheta = \frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(x \cdot \text{sen}\vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x} \\ x \cdot M_\varphi = \frac{\partial(x \cdot E_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta} \end{array} \right.$$

Consideremos una partícula pequeña de forma esférica y radio ρ , cuyo centro coincida con el origen de coordenadas, y con el solvente en la parte de afuera (p. ej. agua). Distinguiremos las cantidades de campo en la esfera y en el medio con los sufijos i y a , y sean los dos índices de refracción m y m_0 . Respecto a la permeabilidad, supondremos que es igual dentro y fuera: $\mu_i = \mu_a$. La variable x sufre un salto en la superficie de la esfera, así

$$x_i = \frac{2\pi m}{\lambda} \cdot r, \quad x_a = \frac{2\pi m_0}{\lambda} r = \frac{2\pi}{\lambda'} \cdot r$$

donde λ' es la longitud de onda en el medio. En la superficie de la esfera deben satisfacerse las siguientes condiciones de frontera:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\vartheta a} = E_{\vartheta i} \quad E_{\varphi a} = E_{\varphi i} \\ (x \cdot M_\vartheta)_a = (x \cdot M_\vartheta)_i \quad (x \cdot M_\varphi)_a = (x \cdot M_\varphi)_i \end{array} \right.$$

Soluciones de las ecuaciones de Maxwell.

3. Para resolver las ecuaciones (6), se pueden simplemente emplear los métodos desarrollados en "Theory of Sound" por Lord Rayleigh. Fue explicado con detalle, por ejemplo, por Fr. Hasenöhr⁶⁾ para otros propósitos. Yo doy a continuación una breve deducción de las integrales, con objeto de organizarlas de la manera más clara posible para la discusión de las fórmulas utilizadas.

Como hemos mencionado anteriormente, se formará una ecuación de segundo orden para E_r y M_r mediante eliminaciones adecuadas en las ecuaciones (6):

⁶⁾ Fr. Hasenöhr, Wiener Ber. Ila. 111. p. 1229. 1902.

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2(x^2 E_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\text{sen}\vartheta \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + x^2 E_r = 0 \\ \frac{\partial^2(x^2 M_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\text{sen}\vartheta \cdot \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 M_r}{\partial \varphi^2} + x^2 M_r = 0 \end{cases}$$

Podemos ya separar todas las soluciones del sistema de ecuaciones (6) en tres grupos. El primer grupo describe las ondas que se forman por oscilaciones eléctricas de la esfera, y se caracteriza por

$$E_r \neq 0, \quad M_r = 0.$$

El segundo grupo describe las ondas que se forman mediante oscilaciones magnéticas de la esfera. Para este grupo es:

$$E_r = 0, \quad M_r \neq 0.$$

El tercer grupo contiene todas las integrales de las ecuaciones de Maxwell que describen las oscilaciones periódicas regulares. Pueden obtenerse sumando integrales del grupo I con integrales del tipo II.

Suponiendo que hubiésemos encontrado una solución de la ecuación diferencial para E_r , podrían entonces obtenerse las restantes componentes, que en el caso que correspondiesen al grupo I se obtendrían muy fácilmente mediante el siguiente método: se hace $M_r = 0$ en la segunda y tercera ecuaciones del sistema (6), y se sustituyen para M_θ y M_φ los valores de la quinta y sexta ecuaciones. Ahora se tienen ecuaciones que deben servir para el cálculo de E_θ y E_φ a partir de E_r conocido. Sólo se tienen E_r , E_θ y E_φ , así que se hallan naturalmente M_θ y M_φ a partir de las dos últimas ecuaciones del sistema (6). Resulta así el siguiente sistema de fórmulas:

$$(9) \quad \begin{aligned} E_r, & & M_r = 0, \\ \frac{\partial^2(x \cdot E_\theta)}{\partial x^2} + x \cdot E_\theta &= \frac{\partial^2 E_r}{\partial \vartheta \partial x}, & \frac{\partial(x \cdot M_\theta)}{\partial x} = x \cdot E_\varphi, \\ \frac{\partial^2(x \cdot \text{sen}\vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x^2} + x \text{sen}\vartheta \cdot E_\varphi &= \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi \partial \vartheta}, & \frac{\partial(x \cdot M_\varphi)}{\partial x} = -x \cdot E_\theta \end{aligned}$$

De manera análoga se realiza el cálculo para el grupo II. En lo sucesivo puede calcularse E_r en general como una suma de elementos, cada uno de los cuales cumple por separado la ecuación (8), y que es un producto de una función de x con una función de los ángulos θ , φ son también coordenadas polares del punto. Queremos. Sea el elemento ν -ésimo:

$$E_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot P_\nu(\vartheta, \varphi)$$

Entonces, K_ν y P_ν deben satisfacer las siguientes dos ecuaciones:

$$(10) \quad \frac{d^2 K_\nu}{dx^2} + \left(1 - \frac{c_\nu}{x^2}\right) = 0$$

$$(11) \quad \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\text{sen}\vartheta \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 P_\nu}{\partial \varphi^2} + c_\nu \cdot P_\nu = 0$$

donde c_ν puede ser un número real o complejo cualquiera. Queremos utilizar solamente funciones K_ν y P_ν para las que

$$(12) \quad c_\nu = \nu \cdot (\nu + 1)$$

P_ν , entonces, es una función esférica de ambas variables θ y φ de orden entero ν , K_ν es una función parecida a las funciones cilíndricas con índice semientero (denominador 2). Las ecuaciones (9) dan la siguiente solución de las ecuaciones de Maxwell:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot P_\nu(\vartheta, \varphi) \\ E_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K'_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \\ E_\varphi^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K'_\nu(x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \\ M_r^{(\nu)} = 0 \\ M_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \\ M_\varphi^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \end{array} \right.$$

Con ello hemos encontrado las soluciones del primer grupo ($M_r = 0$). No obstante, y debido a la simetría de las ecuaciones diferenciales (6) respecto a E y M , podemos escribir sin más las soluciones del grupo II ($E_r = 0$), a saber:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r^{(\nu)} = 0 \\ E_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \\ E_\varphi^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial B_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \\ M_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot B_\nu(\vartheta, \varphi) \\ M_\vartheta^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K'_\nu(x)}{x} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} \\ M_\varphi^{(\nu)} = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \frac{K'_\nu(x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

donde K_ν y B_ν son soluciones cualesquiera de las ecuaciones (10) y (11), en las que se fija $c_\nu = \nu \cdot (\nu + 1)$.

Todo depende solamente de una onda plana, a saber, la incidente para las partículas de forma esférica y expresada con ayuda de (13) y (14). No obstante, debemos en primer lugar conocer los atributos más importantes de las soluciones de (10) y (11) que se van a usar.

Las funciones K_ν e I_ν

4. La ecuación diferencial (10)

$$\frac{d^2 K_\nu}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{x^2} \right) \cdot K_\nu = 0$$

se deja integrar fácilmente para el caso $\nu = 0$. Dos integrales particulares son:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= e^{ix}, \\ K_0(-x) &= e^{-ix} \end{aligned}$$

En adelante se conoce una solución de la ecuación de orden ν , K_ν , así que mediante inserción puede demostrarse fácilmente que se puede calcular una solución de la ecuación de orden $(\nu+1)$ como sigue:

$$(15) \quad K_{\nu+1}(x) = i \cdot \left((\nu+1) \cdot \frac{K_\nu}{x} - \frac{dK_\nu}{dx} \right)$$

Cuando se elige $K_0 = e^{ix}$, estas fórmulas de recurrencia dan:

$$(16) \quad K_\nu(x) = e^{ix} \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!(\nu-\mu)!} \cdot \frac{i^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu}$$

En (15), cuando se diferencia una vez, se halla dK_ν/dx y con ayuda de (10) también se elimina d^2K_ν/dx^2 :

$$(17) \quad K_{\nu-1}(x) = -i \cdot \left(\nu \cdot \frac{K_\nu}{x} + \frac{dK_\nu}{dx} \right)$$

A partir de (15) y (17), se obtienen las siguientes relaciones que se usarán con frecuencia:

$$(18) \quad \begin{cases} (2\nu+1) \cdot \frac{K_\nu(x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1} + \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1} \\ (2\nu+1) \cdot \frac{dK_\nu}{dx} = (\nu+1) \cdot i \cdot K_{\nu-1} - \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1} \end{cases}$$

Una segunda solución particular de (10) se obtiene sin más, ya que en (10) sólo se halla la segunda potencia de x y de dx , cuando se invierte el signo en la primera solución $K_\nu(-x)$. La solución general es así:

$$A \cdot K_\nu(x) + B \cdot K_\nu(-x)$$

En lo que sigue usaremos directamente la solución $K_\nu(x)$, así que sería bueno escribir una vez más la relación obtenida cuando en (15), (16), (17), (18) se invierte el signo de x :

$$(19) \quad K_\nu(-x) = e^{-ix} \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!(\nu-\mu)!} \cdot \frac{(-i)^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu}$$

$$(20) \quad \begin{cases} K_{\nu+1}(-x) = -i \cdot \left((\nu+1) \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} - K'_{\nu-1} \right) \\ K_{\nu-1}(-x) = +i \cdot \left(\nu \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} + K'_{\nu-1} \right) \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} -(2\nu+1) \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1}(-x) + \frac{1}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x) \\ -(2\nu+1) \cdot K'_{\nu}(-x) = i \cdot (\nu+1) \cdot K_{\nu-1}(-x) - \frac{\nu}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x) \end{cases}$$

5. Cuando en las expresiones (16) y (17) se desarrollan e^{ix} y e^{-ix} en serie de potencias y posteriormente se multiplica y ordena en potencias de x , se obtiene el desarrollo en serie de potencias para $K_\nu(x)$ y $K_\nu(-x)$, que naturalmente contienen una cantidad finita de potencias con exponentes negativos y enteros. Se obtiene así:

$$K_\nu(x) = \sum_{r=-\nu}^{+\infty} i^r \cdot x^r \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(\nu + \mu)! (-1)^\mu}{(\mu + r)! \mu! (\nu - \mu)! 2^\mu}$$

Se puede demostrar, no obstante, que:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \cdot (\nu + \mu)!}{2^\mu \cdot (\mu + r)! \mu! (\nu - \mu)!} = \frac{(r - \nu + 1) \cdot (r - \nu + 3) \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!}$$

Este término es interesante, ya que hasta $r=\nu$ se alternan términos iguales y distintos a cero. Hasta la potencia x^ν , asimismo, solamente sobreviven en la serie elementos de la forma $x^{-\nu+2\mu}$. Insertando el coeficiente $r=-\nu+2\mu$, obtenemos:

$$\frac{(r - \nu + 1) \cdot (r - \nu + 3) \dots (r + \nu - 1)}{(r + \mu)!} = (-1)^{\nu+\mu+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\nu - 2\mu - 1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{(2\mu)!}$$

Asimismo:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_\nu(x) = -i^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu - 2 - 1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{(2\mu)!} \cdot x^{-\nu+2\mu} \\ + \sum_{r=\nu+1}^{+\infty} \frac{(r - \nu + 1)(r - \nu + 3) \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!} \cdot i^r \cdot x^r \end{array} \right.$$

Y del mismo modo:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_\nu(-x) = -(-i)^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{1 \cdot 3 \dots (2\nu - 2 - 1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2\mu - 1)}{(2\mu)!} \cdot x^{-\nu+2\mu} \\ + \sum_{r=\nu+1}^{+\infty} \frac{(r - \nu + 1)(r - \nu + 3) \dots (r + \nu - 1)}{(r + \nu)!} \cdot (-i)^r \cdot x^r \end{array} \right.$$

[N.T: El numerador de la primera sumatoria acababa en $(2\mu-2)$ en el original]

Se ve aquí que la ecuación diferencial (10) tiene también una solución que se desarrolla a partir del punto cero en serie de potencias sin potencias negativas. Indiquemos esa solución con la letra I_ν y hagamos:

$$(24) \quad I_\nu(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{K_\nu(x)}{i^\nu} - \frac{K_\nu(-x)}{(-i)^\nu} \right)$$

La serie de potencias para I_ν contiene solamente coeficientes reales, y es:

$$(25) \quad I_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \cdot x^{\nu+2\mu+1}}{(2\mu+1)!(2\mu+3)(2\mu+5)\dots(2\mu+2\nu+1)}$$

A partir de (18) y (19) se obtienen dos importantes relaciones:

$$(26) \quad \begin{cases} (2\nu+1) \cdot \frac{I_\nu}{x} = I_{\nu-1} + I_{\nu+1} \\ (2\nu+1) \cdot \frac{dI_\nu}{dx} = (\nu+1) \cdot I_{\nu-1} - \nu \cdot I_{\nu+1} \end{cases}$$

6. Para el cálculo de las funciones $K_\nu(-x)$, $I_\nu(x)$ y sus derivadas primera (las cuales se encuentran solas en la fórmula final) se usarán como mucho los siguientes términos:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1(-x) = -\frac{i}{x} \cdot e^{-ix} \cdot (1+ix) \\ K_2(-x) = -\frac{3}{x^2} \cdot e^{-ix} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{3}x^2 \right) + i \cdot x \right) \\ K_3(-x) = +\frac{15 \cdot i}{x^3} \cdot e^{-ix} \cdot \left(\left(1 - \frac{2}{5}x^2 \right) + i \cdot x \cdot \left(1 - \frac{1}{15}x^2 \right) \right) \\ K_\nu(-x) = (-i)^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot (2\nu-1)}{x^\nu} \cdot e^{-ix} \\ \cdot \left\{ \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(-1)}{2}} \frac{(\nu-\sigma)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3)\dots(2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \cdot (2\sigma+1)} \right] \right. \\ \left. + ix \cdot \left[I + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(+1)-1}{2}} \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3)\dots(2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \cdot (2\sigma+1)} \right] \right\} \end{array} \right.$$

[N.T. El término derecho en la segunda ecuación viene dado como $-3/x^3$ en el original]

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
K_1'(-x) &= +\frac{i}{x^2} \cdot e^{-ix} \cdot (1-x^2) + ix \\
K_2'(-x) &= +\frac{6}{x^3} \cdot e^{-ix} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2}x^2 \right) + ix \cdot \left(1 - \frac{1}{6}x^2 \right) \right) \\
K_3'(-x) &= -\frac{45 \cdot i}{x^4} \cdot e^{-ix} \cdot \left(\left(1 - \frac{7}{15}x^2 + \frac{1}{45}x^4 \right) + ix \cdot \left(1 - \frac{1}{6}x^2 \right) \right) \\
K_\nu'(-x) &= -(-i)^\nu \cdot \nu \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot (2\nu-1)}{x^{\nu+1}} \cdot e^{-ix} \\
&\cdot \left[\left[1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(+1)}{2}} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma)_\sigma + \frac{2\sigma-1}{\nu} \cdot (\nu-\sigma)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3)\dots(2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \cdot (2\sigma-1)} \right] \right. \\
&\left. + ix \cdot \left[1 + \sum_{\sigma=1}^{\frac{\nu(-1)}{2}} (-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma + \frac{2\sigma+1}{\nu} \cdot (\nu-\sigma-1)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3)\dots(2\nu-2\sigma+1)} \cdot \frac{x^{2\sigma}}{1 \cdot 3 \cdot (2\sigma+1)} \right] \right]
\end{aligned} \right]
\end{aligned}
\tag{28}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{x^2}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3}{7} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3}{9} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\
I_2(x) &= \frac{x^2}{15} \cdot \left(1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 9} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\
I_3(x) &= \frac{x^4}{105} \cdot \left(1 - \frac{3}{9} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\
I_\nu(x) &= \frac{x^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \cdot (2\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{3}{2\nu+3} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{3 \cdot 5}{(2\nu+3)(2\nu+5)} \cdot \frac{x^4}{5!} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+7)} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}
\tag{29}$$

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} I_1'(x) = \frac{2 \cdot x}{3} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{3!} + 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{x^4}{5!} - 4 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\ I_2'(x) = \frac{3 \cdot x^2}{15} \cdot \left(1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{5}{9} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{5}{11} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\ I_3'(x) = \frac{4 \cdot x^3}{105} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 11} \cdot \frac{x^4}{5!} - \frac{5}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\ \dots \dots \dots \\ I_\nu'(x) = \frac{(\nu+1)x^\nu}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{\nu+3}{\nu+1} \cdot \frac{3}{2\nu+3} \cdot \frac{x^2}{3!} + \frac{\nu+5}{\nu+1} \cdot \frac{3 \cdot 5}{(2\nu+3)(2\nu+5)} \cdot \frac{x^4}{5!} - \dots \right) \end{array} \right.$$

[N.T. En el manuscrito original, el término derecho de la tercera ecuación en (30) aparece como $4x^3/104$, y el denominador del término x^4 de la última línea aparecía como $(2\nu+1)(2\nu+5)$]

Estas series, en la mayoría de los casos, resultan más cómodas para cálculos numéricos que los términos finitos que se obtienen de (24) para I_ν e I_ν' . Para otros fines, no obstante, deben conocerse también estas series:

$$(29a) \left\{ \begin{array}{l} I_1(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} \\ I_2(x) = -\sin x - \frac{3 \cdot \cos x}{x} + \frac{3 \cdot \sin x}{x^2} \\ I_3(x) = +\cos x - \frac{6 \cdot \sin x}{x} - \frac{15 \cdot \cos x}{x^2} + \frac{15 \cdot \sin x}{x^3} \\ \dots \dots \dots \\ I_\nu(x) = \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} \right) + \sum_{r=1}^{\nu} \sin \left(x - \frac{(\nu-r)\pi}{2} \right) \cdot \frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)!r!} \cdot \frac{1}{2^r \cdot x^r} \end{array} \right.$$

$$(30a) \left\{ \begin{array}{l} I_1'(x) = +\sin x + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \\ I_2'(x) = -\cos x + \frac{3 \cdot \sin x}{x} + \frac{6 \cdot \cos x}{x^2} - \frac{6 \cdot \sin x}{x^3} \\ I_3'(x) = -\sin x - \frac{6 \cdot \cos x}{x} + \frac{21 \cdot \sin x}{x^2} + \frac{45 \cdot \cos x}{x^3} - \frac{45 \cdot \sin x}{x^4} \\ \dots \dots \dots \\ I_\nu'(x) = \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} \right) + \sum_{r=1}^{\nu} \cos \left(x - \frac{(\nu-r)\pi}{2} \right) \cdot \frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)!r!} \cdot \frac{1}{2^r \cdot x^r} \end{array} \right.$$

Las funciones esféricas.

7. Para el presente problema no se utilizarán las conocidas funciones esféricas que solamente dependen de una variable (las funciones esféricas zonales). Veremos en la siguiente sección que para la solución son necesarias funciones de los siguientes dos tipos:

$$(31) \quad P_\nu(\vartheta, \varphi) = \Pi_\nu(v) \cdot \cos \vartheta$$

$$(32) \quad B_\nu(\vartheta, \varphi) = \Pi_\nu(v) \cdot \operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$(33) \quad v = \operatorname{sen} \vartheta \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

La función Π_ν , tal como puede comprobarse mediante sustitución de los términos de P_ν y B_ν en (11), debe obedecer la siguiente ecuación diferencial:

$$(34) \quad \frac{d^2}{dv^2} \left((1-v^2) \cdot \Pi_\nu \right) + \nu \cdot (\nu+1) \cdot \Pi_\nu = 0$$

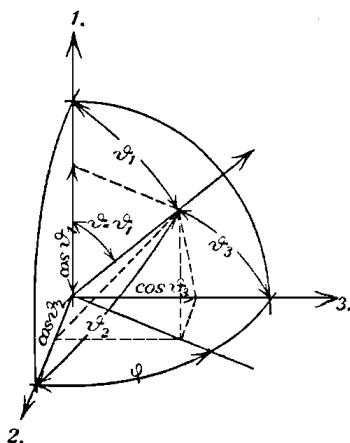


Fig. 2. Relaciones trigonométricas.

El significado geométrico de las tres funciones angulares encontradas en (31), (32) y (33)

$$\cos \vartheta, \quad \operatorname{sen} \vartheta \cdot \operatorname{sen} \varphi, \quad \operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \varphi$$

es claro sin más. Llamemos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ a los ángulos que forma el radiovector del punto en cuestión con los ejes 1, 2, 3 (compare con 2.), así que, como puede verse fácilmente de la fig. 2, resulta:

$$(35) \quad \begin{cases} \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta \\ \cos \vartheta_2 = \operatorname{sen} \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \cos \vartheta_3 = \operatorname{sen} \vartheta \cdot \operatorname{sen} \varphi = v \end{cases}$$

Queremos ahora agrupar las fórmulas más importantes de las funciones Π_ν . Como se sabe, una solución particular de la ecuación diferencial de las funciones esféricas es racional y entera en las funciones trigonométricas de las coordenadas angulares θ, φ . Sólo esas soluciones nos interesan. Las hemos hallado para un orden (p. ej. $\nu=1$), así que podemos calcularlas para todo los otros órdenes con ayuda de la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(36) \quad \frac{d\Pi_{\nu+1}}{dv} = v \cdot \frac{d\Pi_\nu}{dv} + (\nu+2) \cdot \Pi_\nu$$

Esta fórmula puede verificarse sin más mediante su inserción en (34). Una solución de (34) para el caso $\nu=1$ es:

$$(37) \quad \Pi_1(v) = 1$$

De ahí, aplicando (36), resulta:

$$(38) \quad \begin{cases} \Pi_0 = (v) = 0, \quad \Pi_1(v) = 1 \\ \Pi_2 = 3v \\ \Pi_3 = \frac{15}{2} \cdot v^2 - \frac{3}{2} \\ \Pi_4 = \frac{35}{2} \cdot v^3 - \frac{15}{2} v \\ \Pi_\nu = \frac{1}{2^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{\frac{\nu(+1)-1}{2}} (-1)^s \cdot \frac{(2\nu-2s)!}{(\nu-s)!s!} \cdot \frac{v^{\nu-2s-1}}{(\nu-2s-1)!} \end{cases}$$

Otro desarrollo en serie para Π_ν es el siguiente:

$$(39) \quad \Pi_\nu = \sum_{s=0}^{\frac{\nu(+1)-1}{2}} (-1)^s \cdot \frac{(\nu+1)!}{s!(s+1)!} \cdot \frac{v^{\nu-2s-1} \cdot (1-v^2)^s}{(\nu-2s-1)! 2^{2s+1}}$$

Para el caso especial $v=0$, la ecuación (38) da:

$$(40) \quad \begin{cases} \Pi_\nu(0) = 0, & \text{cuando } v \text{ es par} \\ \Pi_\nu(0) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{(\nu+1)!}{2^\nu \left(\frac{\nu+1}{2}\right)! \left(\frac{\nu+1}{2}\right)!}, & \text{cuando } v \text{ es impar} \end{cases}$$

y para la primera derivada:

$$(41) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\Pi_\nu}{dv}\right)_{v=0} = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot \frac{(\nu+1)!}{2^{\nu-1} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}, & v \text{ par} \\ \left(\frac{d\Pi_\nu}{dv}\right)_{v=0} = 0, & v \text{ impar} \end{cases}$$

De modo similar puede, a partir de (39), calcularse los valores de la función Π_ν y su derivada para $v=1$.

8. Igualmente a las funciones K_ν e I_ν anteriormente mencionadas existe para las Π_ν , aparte de la fórmula de recurrencia (36), una segunda relación que puede demostrarse de forma parecida a (36):

$$(42) \quad \frac{d\Pi_{\nu-1}}{dv} = v \cdot \frac{d\Pi_\nu}{dv} - (\nu-1) \cdot \Pi_\nu$$

Con (36) y (42) se obtienen las siguientes dos fórmulas útiles:

$$(43) \quad \begin{cases} (2\nu+1) \cdot \Pi_\nu = \frac{d\Pi_{\nu+1}}{dv} - \frac{d\Pi_{\nu-1}}{dv} \\ (2\nu+1) \cdot v \cdot \Pi_\nu = \nu \cdot \Pi_{\nu+1} + (\nu+1) \cdot \Pi_{\nu-1} \end{cases}$$

9. Finalmente se anotan aquí las derivadas parciales de P_ν y B_ν hallados en las fórmulas (13) y (14):

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_\nu = \Pi_\nu \cdot \cos\vartheta \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = -\frac{d(\nu \cdot \Pi_\nu)}{d\nu} \cdot \text{sen}\vartheta + \frac{d\Pi_\nu}{d\nu} \cdot \sigma \varepsilon \nu \varphi \\ \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} = \frac{d\Pi_\nu}{d\nu} \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \end{array} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_\nu = \Pi_\nu \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} = \frac{d(\nu \cdot \Pi_\nu)}{d\nu} \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} = -\frac{d(\nu \cdot \Pi_\nu)}{d\nu} \cdot \text{sen}\varphi + \frac{d\Pi_\nu}{d\nu} \cdot \text{sen}\vartheta \end{array} \right.$$

Para el caso especial de los dos primeros órdenes tenemos:

$$\begin{array}{ll} P_1 = \cos\vartheta, & P_2 = 3 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \text{sen}\varphi \\ \frac{\partial P_1}{\partial \vartheta} = -\text{sen}\vartheta, & \frac{\partial P_2}{\partial \vartheta} = 3 \cdot \cos 2\vartheta \cdot \text{sen}\varphi \\ \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} = 0, & \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} = 3 \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ B_1 = \text{sen}\vartheta \cdot \text{sen}\varphi, & B_2 = 3 \cdot \text{sen}^2\vartheta \cdot \text{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \\ \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} = \cos\vartheta \cdot \text{sen}\varphi, & \frac{\partial B_2}{\partial \vartheta} = 3 \cdot \text{sen} 2\vartheta \cdot \text{sen}\varphi \cdot \cos\varphi \\ \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} = \text{sen}\vartheta, & \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} = 3 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \cos 2\varphi \end{array}$$

Valores integrales de las funciones esféricas.

10. En lo que sigue se deberá resolver el tema de calcular la radiación completa que se refleja en una esfera. Veremos que este problema se reduce a hallar las integrales de superficie:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \text{sen}\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad \text{y} \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} B_\nu \cdot B_\mu \cdot \text{sen}\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

Estas integrales se pueden calcular fácilmente, por ejemplo, según el método indicado en el Treatise on Electricity de Maxwell⁷⁾. Resulta:

⁷⁾ Tomo I p. 200 de la traducción alemana.

$$(46) \quad \begin{cases} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} B_\nu \cdot B_\mu \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = 0 \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_\nu^2 \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} B_\nu^2 \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = 2\pi \cdot \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2\nu + 1} \end{cases}$$

Onda plana.

11. El presente problema se puede considerar resuelto en cuanto consigamos descomponer la onda plana que incide sobre la esfera en términos de la forma (13) y (14).

Como dirección de avance tomaremos el eje 3 en sentido negativo. La luz será linealmente polarizada, con el eje 1 como dirección de la oscilación eléctrica y el eje 2 como dirección de la magnética.

Llamaremos z a la coordenada de un punto en la dirección del eje 3, así que según (35) resulta:

$$z = r \cdot \cos \vartheta_3 = r \cdot \nu$$

La onda plana será asimismo representada por las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} E_1 &= e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}, & E_2 &= E_3 = 0 \\ H_1 &= 0, & H_2 &= -\sqrt{\frac{k}{\mu}} \cdot e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}, & H_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aquí k y μ son la constante dieléctrica y permeabilidad en el sentido de la ecuación (1), la conductividad del medio conductor (el agua) la hemos tomado como cero, y λ' es la longitud de onda en el medio (agua). Haremos (compárese con (5))

$$\frac{2\pi i z}{\lambda'} = \frac{2\pi i \cdot r \cdot \nu}{\lambda'} = i \cdot x \cdot \nu$$

con lo que se pueden reescribir sin más las cantidades $E_{r,\dots}$ y $M_{r,\dots}$, que anteriormente (fórmulas (2) y (4)) hemos introducido:

$$(47) \quad \begin{cases} E_r = \cdot e^{ix\nu} \cdot \cos \vartheta, & M_r = i \cdot e^{ix\nu} \cdot \text{sen} \vartheta \cdot \cos \varphi \\ E_\vartheta = -\cdot e^{ix\nu} \cdot \text{sen} \vartheta, & M_\vartheta = i \cdot e^{ix\nu} \cdot \cos \vartheta \cos \varphi \\ E_\varphi = 0, & M_\varphi = -i \cdot e^{ix\nu} \cdot \text{sen} \varphi \end{cases}$$

Sin embargo, pueden desarrollarse fácilmente las funciones exponenciales anteriores en términos de funciones I y II. Resulta:

$$(48) \quad e^{ix\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu + 1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu(x)}{x^2} \cdot \Pi_\nu(\nu)$$

Puede demostrarse fácilmente la exactitud de esta fórmula de manera más fácil mediante una diferenciación en x y ν . A saber es, si llamamos $f(x, \nu)$ a la serie, y a partir de (26) y (43):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu-1} \cdot (2\nu+1) \cdot \left(\frac{dI_{\nu}}{dx} - 2 \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \right) \cdot \Pi_{\nu}(v) \right\} \\
&= \frac{i}{x^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left((\nu-1) \cdot i^{\nu-2} \cdot I_{\nu-1} + (\nu+2) \cdot i^{\nu} \cdot I_{\nu+1} \right) \cdot \Pi_{\nu}(v) \\
&= i \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot (\nu \cdot \Pi_{\nu+1} + (\nu+1) \cdot \Pi_{\nu-1}) \\
&= i \cdot v \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot \Pi_{\nu}(v) \\
&= i \cdot v \cdot f(x, v)
\end{aligned}$$

Asimismo puede demostrarse que:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = i \cdot x \cdot f(x, v)$$

Finalmente es:

$$(f(x, v))_{x=0} = I$$

Así

$$f(x, v) = e^{ixv}$$

Por consiguiente tenemos los desarrollos en serie buscados para E_r y M_r :

$$\begin{aligned}
E_r &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu} \\
M_r &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot B_{\nu}
\end{aligned}$$

donde P_{ν} y B_{ν} son las funciones definidas en (31) y (32).

Se puede ahora, partiendo de la cantidad E_r y con ayuda de la fórmula (13), construir una solución del grupo I, y partiendo de M_r una solución del grupo II, la suma de las cuales debe ser la solución integral de las ecuaciones de Maxwell que nos devuelve a la onda plana. Puede uno convencerse mediante cálculo directo que el desarrollo en serie obtenido es en efecto idéntico al de las expresiones (47).

A partir de las relaciones (26) y (43), cuando se observa la ecuación diferencial (10):

$$\frac{I}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(\frac{d^2 I_{\nu}}{dx^2} + I_{\nu} \right) = \frac{I_{\nu}}{x^2}$$

pueden deducirse las siguientes dos ecuaciones:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(i^{\nu-1} \cdot I_{\nu} \cdot \frac{d(\nu \Pi_{\nu})}{d\nu} + i^{\nu} \cdot \frac{dI_{\nu}}{dx} \cdot \frac{d\Pi_{\nu}}{d\nu} \right) = 0, \\ & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(i^{\nu-1} \cdot I_{\nu} \cdot \frac{d\Pi_{\nu}}{d\nu} + i^{\nu} \cdot \frac{dI_{\nu}}{dx} \cdot \frac{d(\nu \cdot \Pi_{\nu})}{d\nu} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot \frac{d\Pi_{\nu}}{d\nu} \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \Pi_{\nu} \\ & \qquad \qquad \qquad = i \cdot x \cdot e^{ixv} \end{aligned} \right.$$

Mediante las fórmulas (13) y (14) se construyen p. ej.

$$E_{\vartheta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu'}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \varphi}$$

así que con el uso de las fórmulas (44), (45) y (49) resulta:

$$E_{\vartheta} = -e^{ixv} \cdot \text{sen} \vartheta$$

Asimismo resulta:

$$E_{\varphi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \vartheta} = 0$$

De modo parecido (se hallan) M_r y M_{ν} . Para la onda plana se puede asimismo, en vez de las expresiones (47), utilizar las siguientes:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu} \\ E_{\vartheta} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu'}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \varphi} \\ E_{\varphi} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \vartheta} \\ M_r &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x^2} \cdot P_{\nu} \\ M_{\vartheta} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu'}}{x} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \vartheta} \\ M_{\varphi} &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_{\nu}}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu} \cdot \frac{I_{\nu}}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \varphi} \end{aligned} \right.$$

Ondas refractada y reflejada.

12. Cuando pasamos a interpretar también, mediante expresiones de la forma (13) y (14), la onda en el interior de la esfera y la onda emitida desde ella hacia el exterior, debe prestarse atención a lo siguiente: primero, que en el interior de la esfera solamente se puede usar la integral indicada como I_ν en la ecuación (10), porque todas las otras integrales particulares para $x=0$, es decir, en el centro de la esfera, se hacen infinitas; segundo, que en el exterior hay que usar K_ν ($-x$), puesto que sólo éstas tienen el factor

$$e^{-ix} = e^{\frac{2\pi ir}{\lambda}}$$

así que las componentes de las intensidades eléctrica y magnética contienen el tiempo tan sólo en la combinación

$$e^{2\pi i \left(nt - \frac{r}{\lambda} \right)}$$

que es la característica de una radiación emergente de una esfera.

La radiación en el interior de la esfera puede presentarse como sigue:

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{ri} = \sum_{\nu=1}^{\infty} i \cdot b_\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot P_\nu \\ E_{\vartheta i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{b_\nu i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} \right) \\ E_{\varphi i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} \right) \\ M_{ri} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot B_\nu \\ M_{\vartheta i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} \right) \\ M_{\varphi i} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{b_\nu \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{I'_\nu}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} \right) \end{array} \right.$$

Los coeficientes b_ν y q_ν , a los que se ha añadido el factor i solamente para que con ello estas últimas fórmulas queden más elegantes, se determinan, junto a los a_ν y b_ν de las siguientes ecuaciones (52), mediante las condiciones de frontera (7).

En el exterior va al encuentro de la onda plana (50), la radiación reflejada

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{ra} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} i \cdot \frac{K_{\nu}(-x)}{x} P_{\nu} \\ E_{\vartheta a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_{\nu}(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{p_{\nu}}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_{\nu}(-x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \varphi} \right) \\ E_{\varphi a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_{\nu}(-x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \varphi} - \frac{p_{\nu}}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_{\nu}(-x)}{x} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \vartheta} \right) \\ M_{ra} = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu} \cdot \frac{K_{\nu}(-x)}{x} B_{\nu} \\ M_{\vartheta a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_{\nu}(-x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{p_{\nu}}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_{\nu}(-x)}{x} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \vartheta} \right) \\ M_{\varphi a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{a_{\nu} \cdot i}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K_{\nu}(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_{\nu}}{\partial \vartheta} + \frac{p_{\nu}}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{K'_{\nu}(-x)}{x \cdot \text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_{\nu}}{\partial \varphi} \right) \end{array} \right.$$

Determinación de los coeficientes.

13. Hemos definido el radio de la esfera pequeña con ρ , el índice de refracción del medio (agua) con m_0 y el índice de refracción complejo del material de la esfera con m . Queremos definir de nuevo las cantidades x_a y x_i , para el valor especial $r=\rho$, con α y β , y en lo que sigue definimos el índice de refracción relativo m/m_0 como m'

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2\pi \cdot m_0 \cdot \rho}{\lambda} = \frac{2\pi \rho}{\lambda'} \\ \beta = \frac{2\pi \cdot m \cdot \rho}{\lambda} = \frac{m}{m_0} \cdot \alpha = m' \cdot \alpha \end{array} \right.$$

Finalmente usaremos las abreviaciones:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{ll} I_{\nu}(\alpha) = A_{\nu} & I'_{\nu}(\alpha) = A'_{\nu} \\ I_{\nu}(\beta) = B_{\nu} & I'_{\nu}(\beta) = B'_{\nu} \\ K_{\nu}(-\alpha) = C_{\nu} & K'_{\nu}(-\alpha) = C'_{\nu} \end{array} \right.$$

Establecemos en las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} (E_{\vartheta} + E_{\vartheta a})_{r=\rho} &= (E_{\vartheta i})_{r=\rho} \\ (E_{\varphi} + E_{\varphi a})_{r=\rho} &= (E_{\varphi i})_{r=\rho} \\ \alpha \cdot (M_{\vartheta} + M_{\vartheta a})_{r=\rho} &= \beta \cdot (M_{\vartheta i})_{r=\rho} \\ \alpha \cdot (M_{\varphi} + M_{\varphi a})_{r=\rho} &= \beta \cdot (M_{\varphi i})_{r=\rho} \end{aligned}$$

las expresiones (50), (52), (51), y ya que tienen dos pares de ecuaciones que se puede demostrar que son idénticas, se obtienen para a_{ν} , b_{ν} , p_{ν} , q_{ν} las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
-(2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A'_\nu}{\alpha} + a_\nu \cdot \frac{C'_\nu}{\alpha} &= b_\nu \cdot \frac{B'_\nu}{\beta} \\
-(2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot A_\nu + a_\nu \cdot C_\nu &= b_\nu \cdot B_\nu \\
(2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu}{\alpha} + p_\nu \cdot \frac{C_\nu}{\alpha} &= q_\nu \cdot \frac{B_\nu}{\beta} \\
(2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot A'_\nu + p_\nu \cdot C'_\nu &= q_\nu \cdot B'_\nu
\end{aligned}$$

De aquí se calcula:

$$(55) \quad \begin{cases} a_\nu = + (2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A'_\nu \cdot B_\nu \cdot \beta - B'_\nu \cdot A_\nu \cdot \alpha}{C'_\nu \cdot B_\nu \cdot \beta - C_\nu \cdot A'_\nu \cdot \alpha} \\ p_\nu = - (2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu \cdot B'_\nu \cdot \beta - B_\nu \cdot A'_\nu \cdot \alpha}{C_\nu \cdot B'_\nu \cdot \beta - B_\nu \cdot C'_\nu \cdot \alpha} \end{cases}$$

Fórmulas para el cálculo práctico.

14. Se muestran tan sencillas a primera vista las fórmulas (55), como difícil resulta discutirlos. Complicación adicional es, en el caso de esferas metálicas, que β y con ello B_ν y B'_ν son cantidades complejas. Pero también en el caso de esferas no absorbentes, donde β es real, permanecen entre otras dificultades dos cantidades complejas, a saber, C_ν y C'_ν en las expresiones.

Para esferas no muy grandes siempre resulta más cómodo calcular con las fórmulas (27), (28), (29), (30). Podemos poner:

$$(56) \quad \begin{cases} A_\nu = \frac{\alpha^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu+1)} \cdot f_\nu \\ B_\nu = \frac{\beta^{\nu+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu+1)} \cdot g_\nu \\ C_\nu = (-1)^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)}{\alpha^\nu} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu) \\ A'_\nu = \frac{(\nu+1) \cdot \alpha^\nu}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu+1)} \cdot f'_\nu \\ B'_\nu = \frac{(\nu+1) \cdot \beta^\nu}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu+1)} \cdot g'_\nu \\ C'_\nu = -\nu \cdot (-i)^\nu \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)}{\alpha^{\nu+1}} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu) \end{cases}$$

Los factores f_ν, f'_ν son series de potencias que convergen en α^2 rápidamente; g_ν, g'_ν son las mismas series en β^2 ; $h_\nu, k_\nu, h'_\nu, k'_\nu$ son sumas finitas de potencias en α^2 , así todas las expresiones resultan relativamente fáciles de calcular. Se puede deducir esto directamente de las fórmulas (27) a (30). Todas las sumas, f_ν, f'_ν etc. comienzan con el elemento 1, y para esferas

cuyo diámetro respecto a las longitudes de onda de luz interior y exterior es muy pequeño, dichas sumas se aproximan mucho al valor 1, y por tanto se obtienen para A_ν y A_ν' expresiones muy sencillas. Insértese (56) en (55) y escríbase para abreviar:

$$(57) \quad u_\nu = e^{i\alpha} \frac{f'_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu}, \quad v_\nu = \frac{f'_\nu \cdot g'_\nu}{f'_\nu \cdot g'_\nu}, \quad w_\nu = \frac{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu} \cdot \frac{g'_\nu}{g_\nu}$$

[N.T. El último término aparece en el manuscrito original como g_ν/g']

$$(58) \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{m^2}{m_0^2} = m'^2$$

así que resultan las siguientes fórmulas prácticas:

$$(59) \quad \begin{cases} a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{I^2 \cdot 3^2 \cdot (2\nu-1)^2} \cdot u_\nu \cdot \frac{m'^2 - \nu_\nu}{m'^2 + \frac{\nu+1}{\nu}} \cdot w_\nu \\ p_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{I^2 \cdot 3^2 \cdot (2\nu-1)^2} \cdot u_\nu \cdot \frac{I - \nu_\nu}{I + \frac{\nu+1}{\nu}} \cdot w_\nu \end{cases}$$

15. No resulta difícil estimar aproximadamente cómo varía a_ν conforme crece el tamaño de la partícula. Para α pequeño los f_ν , g_ν etc. se aproximan de manera bastante exacta a 1 y por consiguiente pueden usarse las ecuaciones aproximadas:

$$(60) \quad \begin{cases} a_\nu \sim \alpha^{2\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{C_\nu}{I^2 \cdot 3^2 \cdot (2\nu-1)^2} \\ C_\nu = \frac{m'^2 - I}{m'^2 + \frac{\nu+1}{\nu}} \cdot (-1)^{\nu-1} \end{cases}$$

Aquí C_ν es un número complejo, cuyo valor absoluto no se aleja demasiado de 1⁸⁾. Mientras que a_ν , como se indica en (60), comienza con la potencia $(2\nu+1)$ -ésima en α , la curva de los valores a_ν se desvía para valores mayores de α y nunca sobrepasa una cierta cantidad. Ello puede verse al tomar los valores de I_ν y K_ν de (29a) y (19) para argumentos muy grandes. En ese caso α es real y $\beta = \beta' - i\beta''$, así que se tiene:

$$\begin{aligned} K_\nu(-\alpha) &\sim e^{-i\alpha}, & K'_\nu(-\alpha) &\sim -i \cdot e^{-i\alpha} \\ I_\nu(\alpha) &\sim \text{sen}\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right), & I'_\nu(\alpha) &\sim \text{cos}\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) \\ I_\nu(\beta) &\sim -\frac{i}{2} e^{\beta''} e^{i\left(\beta' - \frac{\pi\nu}{2}\right)}, & I'_\nu(\beta) &\sim \frac{1}{2} e^{\beta''} e^{i\left(\beta' - \frac{\pi\nu}{2}\right)} \end{aligned}$$

Asimismo, cuando esto es insertado en (55), se consiguen los valores de frontera para α muy grandes:

⁸⁾ En esferas pequeñas de oro, por ejemplo, el valor absoluto de C_1 se encuentra entre 0,9 y 2,5 según el color de la luz.

$$(61) \quad \begin{cases} a_\nu \sim (2\nu + 1) \cdot c_\nu \\ c_\nu = \frac{i^\nu \cdot e^{i\alpha}}{1 + m'} \cdot \left(\text{sen} \left(\alpha - \frac{\pi\nu}{2} \right) + i \cdot m' \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi\nu}{2} \right) \right) \end{cases}$$

c_ν es aquí una cantidad compleja, que varía periódicamente con α y cuyo valor absoluto siempre permanece cercano a 1.

En (60) tenemos la potencia $\alpha^{2\nu+1}$, sin embargo además el denominador aumenta rápidamente con ν , así que a_1 debe descollar con mucho sobre los demás coeficientes. Cuando a_1 tiende a su valor límite (61), sigue el a_2 , en tanto que todos los demás siguen siendo pequeños. Más tarde se unen a esos dos también el a_3 y así sucesivamente. A partir de las fórmulas para f_ν , g_ν etc se puede ver que la fórmula (60) para los coeficientes posteriores sigue siendo válida.

De esta reflexión resulta en adelante que, sea α lo grande que se quiera, siempre se tiene que a partir de un ν determinado todos los coeficientes resultan tan pequeños con relación al primero que pueden despreciarse.

La radiación reflejada por una esfera pequeña puede siempre ponerse esencialmente como un número finito de ondas parciales combinadas, pero el número de ondas parciales crece cuando la esfera se hace más grande.

Esta frase se demuestra en principio no solamente para las "oscilaciones eléctricas" de la partícula, a cuyos coeficientes a_ν corresponden, sino también para las "oscilaciones magnéticas" que excitan las ondas incidentes, esto es, se confirman los coeficientes p_ν que discutiremos en 17.

En el ejemplo numérico que introduzco posteriormente para aclarar mejor los atributos ópticos de las suspensiones metálicas coloidales, llegaré hasta un valor del diámetro de $2\rho = 180$ nm. Este valor se encuentra en el límite de la resolución microscópica, y también corresponde aproximadamente al del máximo valor de las partículas de suspensiones coloidales. *Asimismo, para el valor mayor del diámetro $2\rho = 180$ nm se tiene que a partir de $\nu = 3$ las "oscilaciones parciales eléctricas" (de orden) superior son despreciables frente a las dos primeras, así que necesitaremos calcular a_1 y a_2 .*

Frente a ello, p. ej. en el problema de arco iris, que también se puede atacar empleando el método aquí utilizado, se debe considerar un número bastante grande de ondas parciales, y se habrá de chocar con una dificultad de cálculo mucho mayor.

Los dos primeros coeficientes son:

$$(62) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cdot \alpha^3 \cdot u_1 \cdot \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1} \\ a_2 = -\frac{1}{6} \cdot \alpha^5 \cdot u_2 \cdot \frac{m'^2 - v_2}{m'^2 + \frac{3}{2}w_2} \end{cases}$$

Cuando α es muy pequeño, se pueden tomar u, v, w iguales a 1 y obtener:

$$(63) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cdot \alpha^3 \cdot \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2} \\ a_2 = -\frac{1}{6} \cdot \alpha^5 \cdot \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + \frac{3}{2}} \end{cases}$$

Por supuesto, para α pequeño resulta a_2 mucho menor que a_1 y queda solamente la primera onda parcial, cuya existencia fue demostrada teóricamente por primera vez por Lord Rayleigh, razón por la cual la denominaré a veces, para abreviar, la *radiación de Rayleigh*.

16. Sea ahora brevemente el caso especial de que la esfera esté compuesta de un material totalmente conductor. Como se sabe, este caso fue discutido por vez primera por J. J. Thomson, y F. Ehrenhaft se ha referido a la posibilidad de aplicar la teoría sobre la óptica de soluciones coloidales desarrollada por Thomson. Si bien no entra en los motivos mencionados en **1.**, este caso tiene interés histórico y teórico en general. Pongamos:

$$m'^2 = -i \cdot \infty \quad (\text{compárese con (3)})$$

y en consecuencia descuidemos en la fórmula (55) los elementos con el factor α frente a los que llevan el factor β . Resulta así:

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A'_\nu}{C'_\nu}$$

Para α pequeño tenemos también:

$$a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{I^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)^2} \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{f'_\nu}{h'_\nu + i\alpha \cdot k'_\nu}$$

Para α grandes (19) y (30a) arrojan:

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^{\nu+1} \cdot e^{i\alpha} \cdot \text{sen} \left(\alpha - \frac{\nu-1}{2} \pi \right)$$

El valor absoluto de esta cantidad fluctúa periódicamente de manera regular entre 0 y $(2\nu+1)$.

De particular interés es la onda de Rayleigh. El valor exacto de a_1 es:

$$(64) \quad a_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{\alpha \cdot \cos \alpha - (1 - \alpha^2) \cdot \text{sen} \alpha}{i\alpha + (1 - \alpha^2)}$$

Para α infinitamente pequeño se tiene:

$$(65) \quad a_1 = 2 \cdot \alpha^3$$

La diferencia característica de esta fórmula frente a la (63) es que en aquélla aparece el factor $(m'^2-1)/(m'^2+2)$, el cual, como más adelante se verá, no puede ponerse aproximadamente igual a 1 para metales, y que varía muy fuertemente con la longitud de onda. Otra diferencia muy importante es que en (65) a_1 es una cantidad real, mientras que lo apropiado para a_1 calculado según (63) sería tener una parte imaginaria considerable. Esta parte causa, como veremos, la absorción en las soluciones metálicas coloidales.

17. Vamos ahora a la discusión de las "oscilaciones magnéticas," esto es, los coeficientes p_ν . Para partículas extremadamente pequeñas no se necesita la fórmula (59), donde $(1-\nu_\nu)$ se aproxima a cero. Según (57), (29) y (30) resulta:

$$1 - \nu_\nu = \frac{I}{f'_\nu \cdot g'_\nu} \cdot (f'_\nu \cdot g'_\nu - f_\nu \cdot g'_\nu)$$

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 - \nu_\nu &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu+1)(2\nu+3)} \frac{1}{f'_\nu \cdot g_\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\nu+5} \cdot \frac{\alpha+\beta}{2!} \right. \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{(2\nu+5)(2\nu+7)} \cdot \frac{\alpha^4 + 2 \frac{2\nu+5}{2\nu+3} \alpha^2 \beta^2 + \beta^4}{4!} + \dots \left. \right) \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu+1)(2\nu+3)} \cdot \frac{l_\nu}{f'_\nu \cdot g_\nu} \end{aligned} \right.$$

Aquí l_ν significa algo similar a los f_ν, f'_ν etc. una serie de potencias en α^2 y β^2 rápidamente convergente, que para diámetros de partícula pequeños se hace igual a 1. Definamos

$$(67) \quad s_\nu = e^{i\alpha} \cdot \frac{l_\nu}{g_\nu} \cdot \frac{1}{h'_\nu + i\alpha k'_\nu} = u_\nu \cdot \frac{l_\nu}{f'_\nu \cdot g_\nu}$$

así la fórmula (59) da para p_ν :

$$(68) \quad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu \cdot (2\nu+3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2\nu-1)^2} s_\nu \frac{m'^2 - 1}{1 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot w_\nu}$$

Para diámetros muy pequeños se puede aproximar por:

$$(69) \quad p_\nu \approx \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2\nu-1)^2} (m'^2 - 1)$$

Para diámetros mayores, cuando las cantidades A_ν, A'_ν etc. se calculan con (29a) y (19), la ec. (55) arroja:

$$(70) \quad p_\nu \sim (2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{m' \operatorname{sen}(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}) + i \cdot \cos(\alpha - \frac{\nu\pi}{2})}{m' + 1}$$

También se puede describir el desarrollo de p_ν como se hizo en (15) con a_ν .

Para partículas pequeñas p_ν crece con el tamaño de la partícula aproximadamente como:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} p_\nu &\sim \alpha^{2\nu+3} \cdot \frac{C'_\nu}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2\nu-1)^2 \cdot (2\nu+1)(2\nu+3)} \\ C'_\nu &= (m'^2 - 1) \cdot (-1)^\nu \end{aligned} \right.$$

El valor absoluto de C'_ν no se aleja mucho de 1. Para valores mayores de α se desvía la curva de los valores p_ν y cambia finalmente para valores de α muy grandes, con ulteriores diámetros de partícula, de forma periódica:

$$(72) \quad p_\nu \sim (2\nu+1) \cdot c'_\nu$$

c'_ν es un número complejo que varía de forma periódica, cuya amplitud no se desvía de 1.

Para las oscilaciones parciales magnéticas valen los mismos teoremas que para las eléctricas, y la oscilación magnética ν -ésima va aproximadamente de forma paralela a la $(\nu+1)$ -ésima eléctrica.

Mediante comparación de las fórmulas (69) y (70) con (60) y (61) se ve que el valor absoluto de p_ν en general queda ligeramente por debajo del de $a_{\nu+1}$.

La primera oscilación parcial magnética p. ej. es para todos los tamaños de partícula siempre del mismo orden de magnitud que la segunda eléctrica.

Las partículas muy pequeñas siempre radian lateralmente solo la onda de Rayleigh, en la que para las partículas aproximadamente iguales en la suspensión coloidal se reúnen la segunda oscilación parcial eléctrica y la primera magnética.

En los próximos ejemplos numéricos tomaré en consideración solamente tres coeficientes, a saber: a_1, a_2, p_1 . Y calcularé p_1 para partículas grandes con la siguiente fórmula:

$$(73) \quad p_1 = -2 \cdot \alpha^3 \cdot u_1 \frac{1 - v_1}{1 + 2w_1}$$

donde u_1, v_1, w_1 son las mismas cantidades que en (62). Para partículas pequeñas se tiene la forma aproximada:

$$(74) \quad p_1 = -\frac{\alpha^5}{15} \cdot (m^2 - 1)$$

18. Si bien la suposición de una conductividad perfecta ante oscilaciones eléctricas parciales ha llevado a resultados que en todo caso pueden compararse con la teoría exacta, proporciona resultados completamente diferentes para las oscilaciones magnéticas. Hagamos β infinitamente grande en (55), y obtendremos:

$$p_\nu = -(2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu}{C_\nu}$$

Asimismo para diámetros pequeños (27) y (29) dan:

$$a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)^2} e^{i\alpha} \cdot \frac{f_\nu}{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu}$$

un valor que es del mismo orden de magnitud que el valor de a_ν hallado bajo la misma suposición.

Si suponemos que las esferulas suspendidas en el medio son conductoras perfectas, llegamos al resultado equivocado de que la oscilación parcial magnética de ν -ésimo orden va paralela a la oscilación parcial eléctrica del mismo orden (en vez de la de orden inmediato superior). En el caso especial de partículas muy pequeña llegamos al resultado falso de que, en comparación con la onda de Rayleigh, la primera oscilación magnética se presenta en aproximadamente el mismo orden de magnitud.

J. J. Thomson, quien demostró por primera vez la última parte de este teorema, indicó notoriamente que el examen de la polarización de la luz lateral dispersa por las soluciones coloidales metálicas lleva a que el resultado es falso. El peculiar fenómeno de la polarización, que F. Ehrenhaft⁹⁾ y E. Müller¹⁰⁾ observaron posteriormente, no pueden de modo alguno interpretarse como validez parcial de la hipótesis de una conductividad perfecta. Veremos más adelante que la teoría exacta no lo aclara totalmente.

⁹⁾F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. **11**, p. 489. 1903.

¹⁰⁾E. Müller, Ann. d. Phys. **24**, p. 1. 1907.

Deseamos, debido a la discusión numérica que sigue, notar el valor de p_v como:

$$(75) \quad p_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\text{sen}\alpha - \alpha \cdot \text{cos}\alpha}{1 + i\alpha}$$

Para valores muy pequeños de α tenemos

$$(76) \quad p_1 = \alpha^3$$

Comparando (76) con (65) vemos que la amplitud de la oscilación magnética para partículas muy pequeñas y perfectamente conductoras es la mitad de lo que debería ser la eléctrica.

Las ondas parciales.

19. Para lo que sigue será provechoso hacer una presentación de cómo cambia, de punto a punto, la intensidad y dirección de oscilación de las ondas parciales aisladas (en especial la primera) sobre una esfera grande en cuyo centro se encuentra la partícula considerada.

No necesitamos considerar las componentes \mathbf{E}_r y \mathbf{H}_r , ya que según el teorema de Poynting no interesan en la transmisión de la energía hacia el exterior. Quedan solamente las componentes que cruzan tangencialmente a la superficie esférica. Según (13) y (14), no obstante, para cada onda parcial se da:

$$E_\theta \cdot M_\theta + E_\varphi \cdot M_\varphi = 0$$

las eléctricas. Es por ello suficiente, para obtener una idea clara de la radiación, dar el desarrollo de las líneas de fuerza eléctricas sobre la superficie esférica.

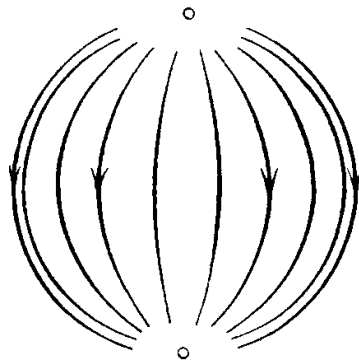


Fig. 3. Primera oscilación parcial eléctrica.

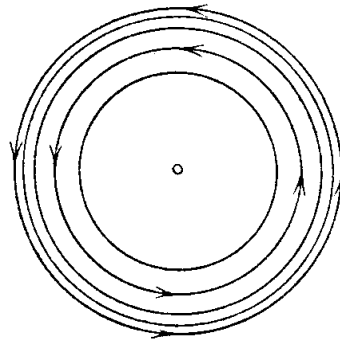


Fig. 4. Primera oscilación parcial magnética.

En las figuras 3 - 10 se han dibujado las líneas de campo sobre una superficie esférica que contiene a la partícula, para las cuatro primeras oscilaciones parciales eléctricas y magnéticas. Como plano del dibujo se ha elegido el plano (1. 3.), esto es, el plano de oscilación del haz de luz que causa las ondas. Este es un plano de simetría del suceso, y fácilmente se puede completar la hemisfera delantera representada en la figura con la que yace bajo el plano del dibujo, pues las curvas de ambas son congruentes. En las oscilaciones magnéticas resulta $E_r=0$, las líneas se comportan como curvas esféricas cerradas y existen, en cada una de las dos hemisferas, v puntos centrales sobre el ecuador ($\theta=\pi/2$) en los que la intensidad es nula y en torno a los cuales giran las líneas de campo, en v grupos distintos. Para las oscilaciones eléctricas, por contra, las líneas de campo se dirigen en superficies cónicas señaladas que

atraviesan (la esfera) por v diámetros cónicos que yacen en el plano del dibujo. Las curvas dibujadas son las curvas de corte de dichas superficies cónicas sobre la esfera. Esas curvas acaban en el polo v , que es atravesado por el diámetro v . En realidad las líneas de campo se desvían pasada la superficie de la esfera para que, según como sea la fase de la oscilación, se cierren, bien sea dentro de la esfera, bien sea fuera, puesto que naturalmente no pueden tener comienzo o fin (según se ve indirectamente de las líneas sobre las partículas iluminadas).

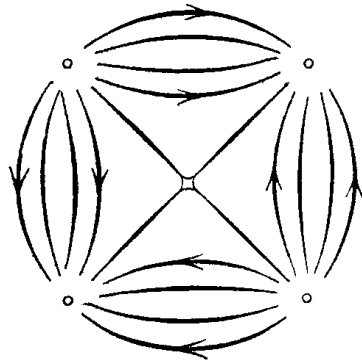


Fig. 5. Segunda oscilación parcial eléctrica.

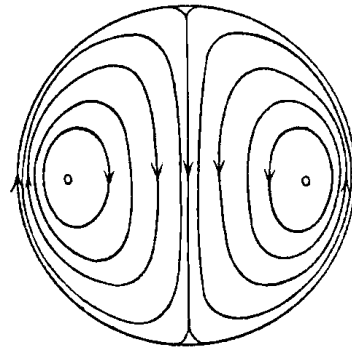


Fig. 6. Segunda oscilación parcial magnética.

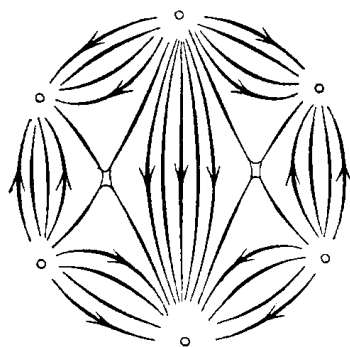


Fig. 7. Tercera oscilación parcial eléctrica.

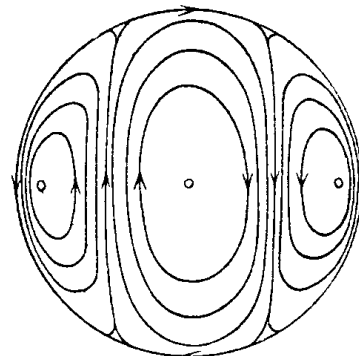


Fig. 8. Tercera oscilación parcial magnética.

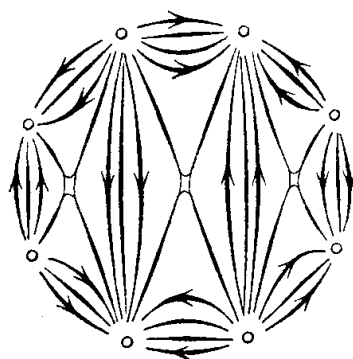


Fig. 9. Cuarta oscilación parcial eléctrica.

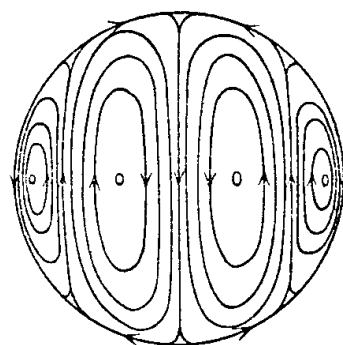


Fig. 10. Cuarta oscilación parcial magnética.

Puede hacerse fácilmente una imagen de las líneas magnéticas de campo. El grupo I reproducido da sin más las líneas magnéticas de campo del grupo II y a la inversa cuando giramos 90° , esto es, cuando se intercambian los ejes 1 y 2.

La radiación difusa lateralmente.

20. Observando desde una distancia infinita de la partícula, hemos insertado en (52):

$$K_\nu(-x) = e^{-ix}$$

como se ve de la fórmula (19). Así tenemos:

$$K'_\nu(-x) = -i \cdot e^{-ix}$$

y también:

$$(77) \quad \begin{cases} E_{\vartheta a} = +i \cdot M_{\varphi a} = -i \cdot \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi ir}{\lambda'}}}{r} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} \right) \\ E_{\varphi a} = -i \cdot M_{\vartheta a} = -i \cdot \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi ir}{\lambda'}}}{r} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} \right) \end{cases}$$

Se supone que la luz que incide sobre la solución es linealmente polarizada, y de tal modo que la dirección de oscilación eléctrica define el eje 1. De (47) resulta:

$$E_1 = -i \cdot M_2 = e^{\frac{2\pi ir}{\lambda'}}$$

Si tomamos la intensidad de la luz incidente como unidad, la intensidad de la luz dispersa es:

$$(78) \quad \begin{cases} J_\vartheta = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} \right) \right|^2 \\ J_\varphi = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{1}{\text{sen} \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} \right) \right|^2 \end{cases}$$

En estas fórmulas debe aludirse mediante las líneas verticales a que de las dos cantidades complejas hay que tomar sus valores absolutos. Puede distinguirse en (78) lo que es ya claro, que la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r . Las dos intensidades J_θ y J_φ aluden a las componentes paralelas al meridiano (J_θ) y al círculo de latitud (J_φ). Ambas componentes tienen en general una diferencia de fase bien fija y que puede hallarse cuando se calculen de la manera habitual las fases de ambas cantidades complejas mediante la fórmula (77). Si se observa la suspensión oblicuamente respecto a la luz incidente, debe obtenerse en general luz elípticamente polarizada, supuesto que la radiación incidente sea polarizada linealmente y que las partículas en suspensión sean tan grande que, fuera de la radiación de Rayleigh (solamente polarizada lineal), también sean notorias las ondas parciales de orden superior.

Excepción ha de hacerse de las direcciones que caen en los dos planos de simetría 1. 3. y 2. 3. De la figura de la sección 19. puede deducirse sin más:

Si se ilumina la suspensión coloidal con luz linealmente polarizada y se observa en una dirección perpendicular a la dirección de su oscilación eléctrica, resulta que la luz lateralmente dispersa es linealmente polarizada, y su oscilación es paralela a la de la radiación incidente. Si

se gira la dirección de oscilación de la luz incidente 90° sin modificar la dirección de visión, se vuelve a obtener luz linealmente polarizada, aunque su dirección de oscilación gira asimismo 90° respecto a la anterior.

El primer caso vendrá caracterizado en nuestras fórmulas mediante $\theta=\pi/2$, el segundo mediante $\varphi=\pm\pi/2$.

Aunque el teorema anteriormente descrito pueda mostrarse tan simple como se desee, es no obstante muy importante. Las observaciones que el Sr. Steubing (compárese con 1.) ha realizado sobre la polarización de la luz dispersa lateralmente han arrojado que, incluso cuando se ilumina con luz linealmente polarizada de la manera anteriormente descrita, se observa no obstante que la luz lateralmente dispersa presenta un muy pequeño comportamiento de luz no-polarizada frente al predominante comportamiento polarizado. Yo tiendo a deducir de ello, para acabar, *que las partículas suspendidas en la solución coloidal no pueden ser esferas, incluso si las demás propiedades ópticas estuvieran en consonancia con esta suposición.*

El caso de que se ilumine con luz no-polarizada se puede discutir rápidamente. Puede pensarse en la luz como descompuesta en dos haces incoherentes de la misma intensidad, con polarizaciones lineales y tales que la dirección de oscilación eléctrica de una sea perpendicular al plano formado por las direcciones del haz y de visión, y que la dirección de oscilación del otro caiga en ese plano. Se obtiene entonces en la luz dispersa dos componentes incoherentes, con polarizaciones mutuamente perpendiculares, aunque en general de distinta intensidad: Esto es: la luz dispersa está parcialmente polarizada.

Si luz no-polarizada atraviesa la solución, la luz dispersa es siempre parcialmente polarizada lineal (nunca elíptica). La dirección de la oscilación eléctrica de la parte polarizada es, o perpendicular al plano de las direcciones del haz y de visión, o bien yace en dicho plano, según sean el tamaño de las partículas y el plano de visión.

Este teorema es por supuesto cierto solamente bajo la suposición de partículas con forma esférica, pero probablemente no sea dudoso que valga siempre para el caso de suspensiones coloidales amorfas (también no-dicroicas).

Para las suspensiones con partículas muy pequeñas se observa solamente la denominada primera dirección de polarización; para partículas más grandes puede no obstante hallarse también la segunda, como veremos.

Intensidad de la luz dispersa perpendicularmente al haz incidente.

21. Por lo general se observa con luz no-polarizada, así que solamente nos interesan dos casos: I. $\theta=\pi/2$, II. $v=\varphi=\pm\pi/2$. En ambos casos $E_\varphi = M_\theta = 0$, y queda solamente J_θ , que denotaremos en los dos casos como J_I y J_{II} . J_I es la intensidad de la radiación cuya dirección de oscilación es perpendicular al, como lo llamaremos brevemente, plano de visión. J_{II} es la intensidad de la oscilación en el plano de visión. Ante todo, (44) y (45) da para los dos casos:

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} I. \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{sen}\varphi = v \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = -\Pi_\nu(v), \quad \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} = -(1-v^2) \cdot \Pi'_\nu(v) - v \cdot \Pi_\nu(v) \end{array} \right.$$

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{II.} \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \text{sen}\vartheta = \pm v \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = \pm \left\{ (1-v^2) \cdot \Pi'_\nu(v) - v \cdot \Pi_\nu(v) \right\}, \quad \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} = \mp \Pi_\nu(v) \end{array} \right.$$

Esto se insertará en (78). Queremos primero restringirnos al caso de que solamente observemos perpendicularmente a la radiación. Pondremos así $v=0$ y volvemos a las fórmulas (40), (41). Resulta:

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| -\frac{a_1}{2} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (-1)^{\sigma+1} \cdot \frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}} \cdot \left(\frac{a_{2\sigma+1}}{2(\sigma+1)} + p_{2\sigma} \right) \right|^2 \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} (-1)^{\sigma+1} \cdot \frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}} \cdot \left(a_{2\sigma} - \frac{p_{2\sigma-1}}{2\sigma-1} \right) \right|^2 \end{array} \right.$$

Estas fórmulas están escritas de tal manera que en cada sumando haya dos coeficientes del mismo orden de magnitud (compárese con **17.**). En el ejemplo numérico, como mencionaré más a menudo, me limitaré a los coeficientes a_1, a_2, p_1 . Calcularé con las siguientes fórmulas:

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2 \\ J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \frac{a_1 - p_1}{2} \right|^2 \end{array} \right.$$

J_{II} tiene solamente para las partículas más grandes un valor considerable, y asimismo predomina J_I . Esta es la intensidad de la radiación de Rayleigh, y precisamente en ángulo recto a la oscilación eléctrica excitada, donde tiene su máximo. Bajo otro ángulo su intensidad es:

$$J = J_1 \cdot \text{sen}^2 \vartheta$$

y la radiación total resulta ser:

$$R = J_1 \cdot 2\pi r^2 \cdot \int_0^\pi \text{sen}^3 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{8\pi}{3} \cdot r^2 \cdot J_1$$

También se puede calcular, cuando se mide la radiación de Rayleigh en la dirección principal (J_I) su valor total, esto es, también el valor de la pérdida que sufre la luz incidente. Usaremos en lo que sigue la cantidad:

$$(83) \quad R = \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2$$

con lo que al mismo tiempo el valor de J_I es:

$$(84) \quad J_I = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{R}{r^2}$$

Cómo se calcula el valor total de la radiación II, se verá en **26.**

Radiación de muchas partículas.

22. Hasta ahora hemos restringido el cálculo a la luz dispersa por una esfera aislada. Queremos volver nuevamente al caso de que haya muchas esferas repartidas en el medio, todas del mismo diámetro 2ρ y con el mismo comportamiento óptico m' . Aparece sobre cada esfera no solamente la radiación incidente, sino también la luz dispersa por las otras esferas. La influencia de esa segunda oscilación del éter sobre el suceso en cada esfera y el cambio causado por ello en la radiación lateral global ha sido examinado teóricamente para partículas extremadamente pequeñas por L. Lorenz, y J. C. Maxwell-Garnett ha seguido mediante el cálculo calcular las consecuencias de la teoría de Lorenz para la óptica de las suspensiones coloidales metálicas. (compárese con la sección 1.). Resulta de ello que las partículas suspendidas han de estar muy juntas para que la reacción de la luz emergente lateral sobre la radiación precedente sea sensible.

Las suspensiones coloidales de los metales en agua se considerarán en lo que sigue como en dilución infinita, y toda la radiación emergente lateral se calculará multiplicando la radiación dispersa por la presencia una sola partícula por el número de partículas presentes.

Si se tuviesen dudas contra la validez de esta suposición, podría examinarse experimentalmente con facilidad, diluyendo más la solución. Si nuestra suposición es correcta, puede demostrarse que los colores de la suspensión deben permanecer invariados y que en todas las regiones del espectro la absorción es proporcional a la concentración. Caso que la suposición fuese falsa, debería presentarse un cambio de colores, como Kirchner y Zsigmondy han observado en soluciones concentradas de oro en gelatina (v. sección 1.). Hasta donde yo sé, hasta ahora no se ha tenido éxito en conseguir suspensiones en agua con semejante concentración. En cualquier caso me limitaré a las suspensiones en dilución ordinaria.

Indicaremos en lo que sigue la concentración de la solución en milímetros cúbicos del metal por milímetro cúbico de agua. Si N es el número de partículas por milímetro cúbico, 2ρ su diámetro y por tanto $V = 4\pi\rho^3/3$, la concentración es:

$$(85) \quad C = N \cdot V = \frac{\lambda'^3}{6\pi^2} \cdot N \cdot \alpha^3$$

Por otro lado, de (83) resulta el valor absoluto de la radiación de Rayleigh:

$$R = N \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2$$

y así:

$$(86) \quad R = F_1 \cdot C$$

donde F_1 es una cantidad independiente de la concentración, pero que depende del tamaño de la partícula y de la longitud de onda. Usaremos para esa cantidad F_1 dos formas diferentes, según sean las partículas pequeñas o grandes:

$$(87) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{a_1}{2\alpha^3} \right|^2$$

$$(88) \quad F_1 = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \frac{1}{\alpha^3} \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2$$

La primera fórmula es más cómoda para partículas pequeñas mientras que, como veremos, a_1 se toma proporcional a α^3 para esferas muy pequeñas. (62) nos da:

$$\frac{a_1}{2\alpha^3} = u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1}$$

donde u_1, v_1, w_1 toman el valor 1 para diámetros de partícula muy pequeños. Resulta también:

$$(89) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1} \right|^2$$

y para las partículas más pequeñas:

$$(90) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2} \right|^2$$

Esta fórmula (90) no es otra que la conocida fórmula de Rayleigh¹¹⁾. Ésta afirma que, a concentración constante, la radiación de una suspensión es tanto mayor cuanto mayor sean las partículas. Y la intensidad de la radiación es por cierto directamente proporcional al volumen de la partícula. Además, por lo general dominan las radiaciones de onda corta *cuando el factor $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$, dependiente de los atributos ópticos de las esferas, no varía mucho con el color de la luz*. Esta última condición ciertamente no aparece en los metales; la luz que dispersan las suspensiones coloidales metálicas con partículas diminutas, por eso, no es azul por lo general, como las otras suspensiones turbias, sino que tiene un color característico para cada metal respectivo. Si $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$ es constante, se tiene la conocida ley de Rayleigh, en la que para diferentes colores y las mismas circunstancias la radiación es proporcional a λ'^{-4} .

La fórmula (88) puede servirnos para obtener las leyes de la radiación de Rayleigh hasta la región de partículas muy grandes. Como hemos visto (en la sección 15), para partículas muy grandes a_1 varía como una función periódica del diámetro, con amplitud constante. De (88) se sigue, por consiguiente, que a concentración constante la radiación de Rayleigh decae con tamaños de partícula creciente, supuesto que las partículas son similares. Y resulta, por último, que la radiación de Rayleigh, como se ve de las fluctuaciones periódicas, es inversamente proporcional al volumen de las partículas.

I. A concentración constante, y para partículas muy pequeñas, la radiación de Rayleigh aumenta cuando el diámetro crece, y es aproximadamente proporcional al volumen de la partícula; no obstante, cuando las partículas son lo bastante grandes, alcanza un máximo y decrece a partir de ahí rápida y continuamente cuando las partículas se hace más grande; a partir de ahí siempre se producen máximos más y más tenues de forma periódica.

II. Supuesto que las esférulas se componen de material perfectamente conductor, o en general perfectamente blanco, el diámetro de partícula para el que se obtiene el máximo de radiación es proporcional a la longitud de onda, y el valor máximo de la radiación en sí es inversamente proporcional a la longitud de onda.

El segundo teorema, que puede leerse de forma inmediata a partir de la fórmula (88), no vale, por supuesto, para soluciones coloidales metálicas.

Se puede acaso, con ciertas reservas, definir de otro modo (como en conductores) quizá como una *resonancia óptica* a este máximo de radiación, el cual también debe presentarse en la turbidez de sólidos no conductores (turbidez mástica, chorros de vapor, etc.). Hay que tener a la vista, no obstante, que esta "resonancia óptica" solamente conlleva máximos bastante planos, y que en consecuencia, cuando las partículas son grandes y con una cuidadosa igualdad de todas las partículas, el espectro de energías de la radiación difusa solamente indica una altura escasa

¹¹⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47, p. 379. 1899.

alrededor de un valor medio. La luz dispersa será, para terminar, casi blanca para sólidos turbios para partículas no conductoras (vapor, turbidez mástica), con tan sólo un ligero matiz de color. De manera parecida se comportan también las suspensiones metálicas; como veremos, aparecen en general p. ej. con oro el amarillo, oportunamente su color dorado propio.

Radiación de Rayleigh en suspensiones de oro.

23. Comienzo ahora a calcular los atributos ópticos de una suspensión de partículas minúsculamente pequeñas de esferas de oro en agua; primero, la radiación de Rayleigh. Pongo como base en lo que sigue cantidades que resultan cuando se traza una curva lo más suave posible a través de los valores numéricos medidos por von Hagen y Rubens¹²⁾. Solamente he cambiado algo el valor del coeficiente de reflexión en el violeta, que fue dado seguramente demasiado pequeño por von Hagen y Rubens.¹³⁾

λ	R (HR)	$\nu\kappa$ (HR)	R calc.	$\nu\kappa$ calc.	m	m'^2	λ'
420	0,293	1,72	0,332	1,70	1,70 - i 1,70	0,00 - i 3,20	313
450	0,331	1,73	0,338	1,72	1,73 - i 1,72	-0,017 - i 3,32	336
500	0,470	2,07	0,480	2,02	1,10 - i 2,02	-1,60 - i 2,49	374
525	---	---	0,613	2,23	0,79 - i 2,23	-2,45 - i 1,98	393
550	0,740	2,32	0,730	2,45	0,57 - i 2,45	-3,20 - i 1,57	412
600	0,884	2,91	0,850	2,96	0,38 - i 2,96	-4,84 - i 1,26	450
650	0,889	3,58	0,888	3,54	0,41 - i 3,54	-6,97 - i 1,63	487

En esta tabla la primera columna contiene la longitud de onda del color respectivo en el vacío, las dos siguientes los coeficientes de reflexión y de absorción según Hagen y Rubens, la tercera y cuarta columna las cantidades calculadas por mí, m es el índice de refracción complejo en el vacío del oro calculado de ahí, m'^2 el cuadrado del índice de refracción complejo en agua ($m'^2 = m^2/m_0^2$), y finalmente λ' la longitud de onda en el agua [en nanómetros].

En lo sucesivo introduciremos una abreviatura cómoda:

$$(91) \quad \frac{a_1}{2\alpha^3} = \mathbf{A}_1$$

La radiación de Rayleigh se calcula con (87) como:

$$(92) \quad F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot |\mathbf{A}_1|^2$$

$$\mathbf{A}_1 = u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1}$$

La radiación para partículas infinitamente pequeñas se da cuando se hacen u_1, v_1, w_1 iguales a 1. Para oro, se obtienen los siguientes valores de $(\mathbf{A}_1)_0 = (m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$:

¹²⁾E. Hagen y H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1 y 432. 1908

¹³⁾Compárese con E. Hagen y H. Rubens, ibid. p. 453

$\lambda =$	420	450	500	525
	0,579-i0,675	0,602-i0,666	0,807-i1,180	1,330-i1,440
$\lambda =$	550	600	650	
	1,925-i1,211	1,880-i0,391	1,545-i0,180	

en cualquier caso diferentes a los que obtendríamos para conductividad infinitamente grande. Para conductividad perfecta se obtiene con la fórmula (65):

$$(\mathbf{A}_1)_0 = 1$$

totalmente independiente de la longitud de onda. En general A_l tiene para metales la forma:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}'_1 - i \cdot \mathbf{A}''_1$$

y se tiene $|\mathbf{A}_1| = \mathbf{A}'_1{}^2 + \mathbf{A}''_1{}^2$ Para dejar clara la diferencia respecto a conductores perfectos, para los cuales sería $|A_l|^2 = 1$, daré asimismo el valor de $|A_l|^2$ para el oro

420	450	500	525	550	600	650
0,790	0,805	2,05	3,84	5,18	3,70	2,42

Podemos hacer un cuadro del espectro de energías de la radiación lateral para partículas muy pequeñas, el cual es igual al producto de la concentración, el volumen de la partícula y la cantidad $24\pi^3 \cdot |A_l|^2 / \lambda^4$

La siguiente tabla da dichas cantidades tanto para esferas perfectamente conductoras como para esferas de oro :

	420	450	500	525
$24\pi^3 \cdot I / \lambda^4$	$7,76 \times 10^{16}$	$5,85 \times 10^{16}$	$3,81 \times 10^{16}$	$3,13 \times 10^{16}$
$24\pi^3 \cdot \mathbf{A}_1 ^2 / \lambda^4$	$6,12 \times 10^{16}$	$4,71 \times 10^{16}$	$7,77 \times 10^{16}$	$11,95 \times 10^{16}$
	550	600	650	
$24\pi^3 \cdot I / \lambda^4$	$2,59 \times 10^{16}$	$1,82 \times 10^{16}$	$3,81 \times 10^{16}$	
$24\pi^3 \cdot \mathbf{A}_1 ^2 / \lambda^4$	$13,37 \times 10^{16}$	$6,70 \times 10^{16}$	$3,17 \times 10^{16}$	

Como unidad de longitud, cosa que haré en lo sucesivo, he escogido el milímetro.

Con la excepción de azul extremo y del violeta, la radiación de las esferas de oro es más fuerte que la que habría de ser para esferas perfectamente conductoras.

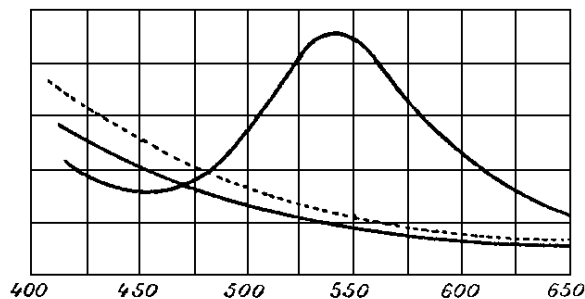


Fig. 11. Radiación dispersa por una dispersión infinitamente diluida. [Curva en trazo grueso: partículas de oro. Curvas inferiores: partículas infinitamente conductoras].

Puede decirse también que los átomos de oro resuenan con la longitud de onda, y de forma máxima en el verde amarillento. Debería entonces, no obstante, aceptarse que éstos están mejor acoplados con el éter oscilante para partículas grandes que para partículas pequeñas, porque la radiación emergente crece con el volumen de las partículas.

La figura 11 representa gráficamente la radiación emergente de partículas pequeñas de oro y de partículas pequeñas infinitamente conductoras (la curva de puntos da la

radiación de éstas últimas tras añadir la primera oscilación al agregar la primera oscilación magnética (compárese con 18.)). Esta última radiación obedece con bastante aproximación la ley de Rayleigh (proporcional a λ^{-4}).

Para hallar la radiación para partículas más gruesas, debo calcular u_1, v_1, w_1 , las cuales se componen de series en α^2 (o, respectivamente, en $\beta^2 = m^2 \alpha^2$). Hice los cálculos para los valores de α indicados en la Tabla I., y al mismo tiempo calculé A_1 para el caso de un conductor perfecto y para los mismos valores de α^2 .

Tabla I - Valores de los coeficientes $A_1 = a_1/2\alpha^3$.

α^2	Conductor perfecto	Oro		
		420	450	500
0	1,00	0,579 - i 0,675	0,602 - i 0,666	0,807 - i 1,180
0,2	1,04 - i 0,065	0,484 - i 0,755	0,505 - i 0,743	0,528 - i 1,312
0,4	1,04 - i 0,188	0,343 - i 0,750	0,368 - i 0,757	0,216 - i 1,211
0,6	0,961 - i 0,318	0,224 - i 0,699	0,244 - i 0,706	0,042 - i 1,029
0,8	0,831 - i 0,410	0,145 - i 0,632	0,156 - i 0,640	-0,047 - i 0,849
1,0	0,638 - i 0,437	0,094 - i 0,559	0,100 - i 0,566	-0,056 - i 0,715
1,5	0,405 - i 0,366	0,038 - i 0,401	0,043 - i 0,406	-0,044 - i 0,480
2,0	0,265 - i 0,256	0,028 - i 0,297	0,031 - i 0,299	-0,015 - i 0,349
2,6	0,190 - i 0,176	0,026 - i 0,225	----	----

α^2	Oro			
	525	550	600	650
0	1,330 - i 1,440	1,925 - i 1,211	1,880 - i 0,391	1,545 - i 0,180
0,2	0,850 - i 1,823	1,602 - i 2,050	2,190 - i 0,977	1,920 - i 0,515
0,4	0,263 - i 1,640	0,975 - i 2,040	1,750 - i 1,874	1,767 - i 1,080
0,6	-0,028 - i 1,347	0,057 - i 1,719	0,807 - i 1,980	1,233 - i 1,492
0,8	-0,114 - i 1,061	-0,107 - i 1,306	0,160 - i 1,612	0,673 - i 1,431
1,0	-0,126 - i 0,855	-0,134 - i 1,014	0,095 - i 1,240	0,353 - i 1,191
1,5	-0,075 - i 0,554	-0,079 - i 0,627	0,009 - i 0,721	0,124 - i 0,718
2,0	-0,029 - i 0,395	-0,022 - i 0,435	0,032 - i 0,479	0,096 - i 0,471
2,5	----	----	----	----

He calculado asimismo la radiación (87):

$$F_1 = \frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left| \frac{a_1}{2\alpha^3} \right|^2 = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \alpha^3 \cdot |A_1|^2$$

El diámetro de partícula apropiada para cada valor de α^2 :

$$2\rho = \frac{\lambda'}{\pi} \cdot \sqrt{\alpha^2}$$

puede obtenerse de la siguiente tabla:

α^2	$\lambda=420$	450	500	525	550	600	650
0,2	44,6	47,8	53,2	55,9	58,6	64,0	69,3
0,4	63,1	67,6	75,2	79,1	82,9	90,5	98,1
0,6	77,3	82,9	92,2	96,8	101,5	110,8	120,1
0,8	89,3	95,8	106,5	111,8	117,2	128,0	138,7
1,0	99,8	107,0	119,0	125,0	131,0	143,0	155,0
1,5	122,2	131,1	145,8	153,1	160,5	175,2	190,0
2,0	141,1	151,3	168,3	176,8	185,3	202,2	219,3
2,5	157,7	169,1					

Diámetro de partícula en nanómetros

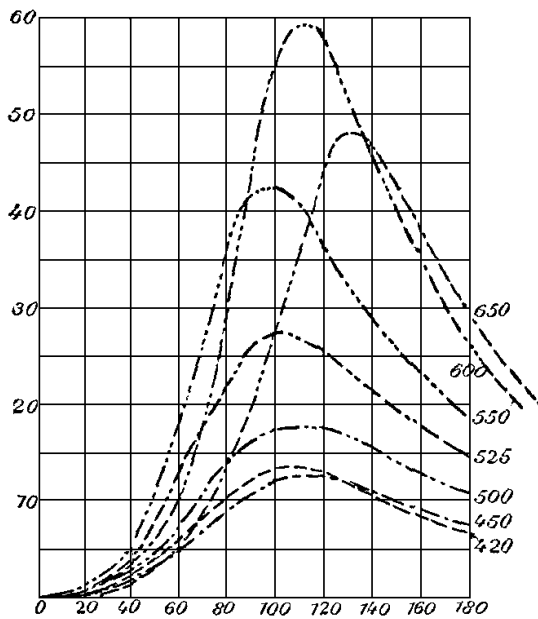


Fig. 12. "Resonancia óptica" de esferas de oro. [Abscisa: diámetros en nanómetros]

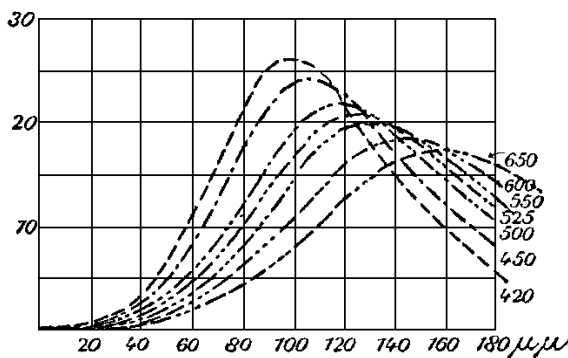


Fig. 13. "Resonancia óptica" de esferas perfectamente conductoras. [Abscisa: diámetros en nm]

Las curvas que interpretan la dependencia de la radiación con el diámetro de la partícula se muestran en la Fig. 12.

La abscisa represente el diámetro de partícula en nm, la ordenada da la intensidad total R de la radiación emitida por milímetro cúbico de una solución en concentración 10^{-6} (1 mm³ por litro de agua), y viene dada como tanto por mil de la intensidad de un haz de luz incidente de un milímetro cuadrado.

La cantidad F_1 puede ser obtenida a partir de la cantidad dada por la ordenada, multiplicando por 10^3 . Como comparación he dibujado en la Fig. 13 las curvas correspondientes (únicamente la radiación de Rayleigh) en la misma escala para esferas perfectamente conductoras. El diámetro para el cual se da el máximo de radiación es proporcional a la longitud de onda λ' , y es:

$$2\rho_{Max} = 0,324 \cdot \lambda'$$

Los máximos decaen con longitudes de onda crecientes como $1/\lambda'$

La radiación emitida por las partículas de oro es por lo general considerablemente mayor que la de las partículas perfectamente conductoras, como se ve en el azul y el violeta. Como acaba de verse, es como si la "resonancia" de las partículas se combinara con la resonancia de los átomos de oro. La subida mayor se tiene para la curva de 600 nm (amarillo-naranja). Los diámetros de partículas para los máximos de intensidad son:

	420	450	500	525	550	600	650
$2\rho_{\text{Max}}$	105	111	110	100	96	113	131
λ'	113	336	374	393	412	450	487
$2\rho_{\text{Max}}/\lambda'$	0,336	0,331	0,294	0,255	0,233	0,252	0,269

$2\rho_{\text{Max}}$ varía en general entre $\lambda'/4$ y $\lambda'/3$.

A partir de las curvas de la Fig. 12 puede obtenerse fácilmente el espectro de energía de la radiación emergente para distintos tamaños de partícula. Puede deducirse de las curvas las siguientes cantidades:

2ρ	420	450	500	525	550	600	650
20	0,262	0,199	0,338	0,546	0,637	0,299	0,139
40	2,10	1,60	2,72	4,62	5,90	2,92	1,35
60	6,2	5,0	8,0	13,7	19,7	12,3	5,9
80	10,4	9,1	14,1	22,9	37,8	33,0	14,7
100	13,2	12,0	17,2	27,1	42,3	55,5	29,0
120	12,5	12,0	17,1	25,0	36,0	57,5	45,0
140	10,0	10,5	15,0	20,8	27,9	44,5	46,2
160	7,9	8,5	12,4	17,1	22,5	33,3	36,8
180	6,3	7,2	10,4	13,8	17,7	25,0	28,0

Con estos valores se construye la Fig. 14. De ahí se ve:

Las partículas pequeñas de oro con forma esférica deben verse de color amarillo-verdoso en el ultramicroscopio. Cuanto mayor se hacen, tanto más varían su color hacia el amarillo y el rojo amarillento. A concentración constante la máxima dispersión de luz corresponde a soluciones cuyo diámetro sea de entre 100 y 140 nm, y sus partículas dispersan luz principalmente de color anaranjado. Las soluciones que dispersan fuertemente son por ello de vistosos colores marrones.

Que estos fenómenos de color están condicionados por el comportamiento óptico especial del oro es algo que puede verse cuando se construye la curva de luz correspondiente a partir de la "curva de resonancia" de partículas esféricas perfectamente conductoras. En la Fig. 15 he hecho esto para tamaños de partícula $2\rho = 100, 120, 140, 160$ y 180 nm. Son todos asimismo para medios turbios. Mientras que a $2\rho = 100$ la curva va aumentando bastante hacia el violeta, se hace plana con tamaños mayores y alcanza un máximo bastante débil, que cae a 180 nm para una longitud de onda mayor de 650 nm. La luz dispersa es así, para partículas mayores de 100 nm, bastante blanca, con un débil matiz de color que, dependiendo del tamaño de las partículas, puede ser azul, verde,

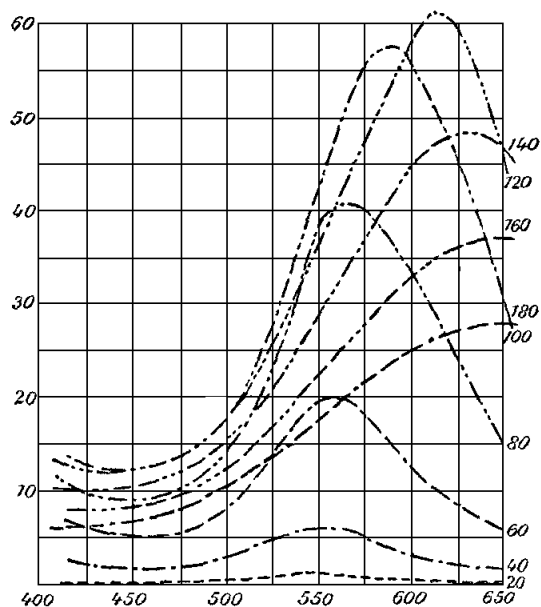


Fig. 14. Radiación dispersa por una solución coloidal de oro.

amarillo o rojo. A 180 nm, no obstante, debe ser claro el naranja, según la Fig. 15; esto depende de que aquí nos hemos limitado a la radiación de Rayleigh. Si hubiésemos tenido en cuenta también las siguientes ondas parciales, entonces se harían planas todas las curvas y en particular la última, como muestra un fácil cómputo.

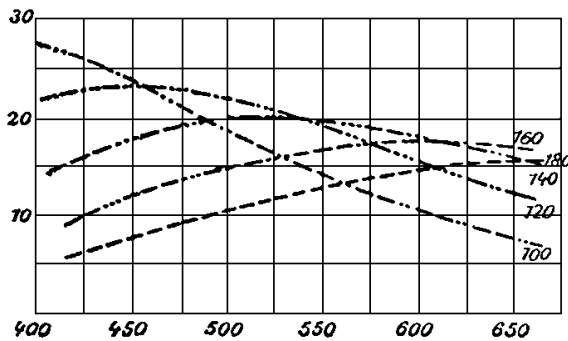


Fig. 15. Luz dispersa por esferas grandes, perfectamente conductoras.

Colores parecidos, como en las partículas perfectamente conductoras simuladas, se obtienen también con partículas sin color. Se puede, a partir de las fórmulas utilizadas por mí, calcular fácilmente p. ej. el fenómeno de los chorros de vapor coloreado, y se pueden obtener curvas parecidas a las de la Fig. 15, para otros tamaños.

Polarización de la luz dispersa por soluciones de oro.

24. Volvemos al cálculo de los coeficientes a_2 y p_1 . Introducimos aquí también para mayor comodidad nuevas definiciones:

$$(93) \quad \mathbf{A}_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}$$

A partir de (62), (73) y (74), se sigue:

$$(94) \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot u_2 \frac{m'^2 - v_2}{m'^2 + 1,5 \cdot w_2}, \quad \mathbf{P}_1 = u_1 \cdot \frac{v_1 - 1}{1 + 2w_1}$$

y para valores pequeños de α :

$$(95) \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 1,5}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{\alpha^2}{30} \cdot (1 - m'^2)$$

Aquí u_1, v_1, w_1 son las funciones de α^2 ya utilizadas en el cálculo de a_1 ; u_2, v_2, w_2 se deducen de las fórmulas (57) y (27) a (30).

A partir de los valores de \mathbf{A}_2 y \mathbf{P}_1 indicados en las tablas II y III puede verse que la segunda onda parcial eléctrica y la primera magnética pueden surgir con valor considerable respecto a la radiación de Rayleigh. Aparecen de forma más intensa aproximadamente hacia 550 nm. Calcúlese a partir de (82) para 550 nm la tasa J_{II}/J_I para la radiación dispersa perpendicularmente a la radiación incidente:

$$(96) \quad \frac{J_{II}}{J_I} = \frac{|a_2 - p_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{|A_2 + P_1|^2}{|A_2|^2}$$

y se obtiene:

α^2	pequeño	1	2
J_{II}/J_I	$0,016 \cdot \alpha^4$	0,059	0,642
2ρ	---	131 nm	185,3 nm

Con ayuda de estas cantidades se construye la Fig. 16. Se puede también, como es costumbre, dar el contenido de la radiación en luz polarizada como porcentaje, esto es

$$P = \frac{J_I - J_{II}}{J_I + J_{II}}$$

En nuestro ejemplo es:

α^2	1	2
P	0,885	0,22
2ρ	131 nm	185,3 nm

La cantidad P se representa como la segunda curva en la Fig. 16.

Cuando la radiación (dispersada por) una solución coloidal de oro a 90° respecto a la radiación incidente no es totalmente polarizada se sigue que la solución contiene partículas cuyo diámetro es mayor de 100 nm. Para un tamaño de partícula de 130 nm la polarización es aproximadamente del 90 por ciento.

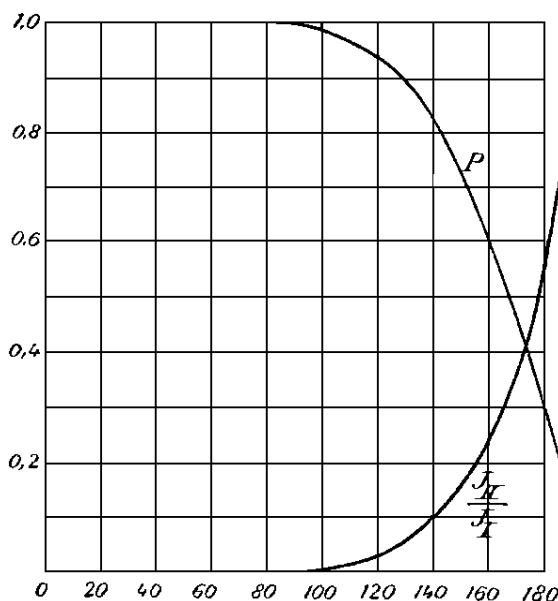


Fig. 16. Polarización de la luz dispersa a 90° con longitud de onda 550 nm.

Tabla II - Valores de $A_2 = -\frac{a_2}{2 \cdot \alpha^3}$

α^2	420	450	500	525	550	600	650
Pequeño	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$
	0,058 - i 0,053	0,060 - i 0,052	0,087 - i 0,081	0,124 - i 0,085	0,149 - i 0,061	0,138 - i 0,021	0,118 - i 0,010
1	0,047 - i 0,059	0,049 - i 0,058	0,063 - i 0,101	0,102 - i 0,124	0,152 - i 0,114	0,157 - i 0,043	0,132 - i 0,023
2	0,053 - i 0,118	0,057 - i 0,119	0,038 - i 0,188	0,052 - i 0,258	0,108 - i 0,322	0,264 - i 0,261	0,260 - i 0,151
2,5	0,039 - i 0,140						

Tabla III - Valores de $P_1 = \frac{p_1}{2 \cdot \alpha^3}$

α^2	420	450	500	525	550	600	650
Pequeño	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$	$\alpha^2 x$
	0,033 + i 0,107	0,034 + i 0,111	0,087 + i 0,083	0,115 + i 0,066	0,140 + i 0,052	0,195 + i 0,042	0,266 + i 0,054
1	0,045 + i 0,065	0,045 + i 0,066	0,063 + i 0,042	0,072 + i 0,031	0,081 + i 0,025	0,100 + i 0,020	0,117 + i 0,021
2	0,064 + i 0,072	0,065 + i 0,073	0,078 + i 0,051	0,087 + i 0,042	0,094 + i 0,037	0,110 + i 0,036	0,123 + i 0,041
1,5	0,065 + i 0,071						

Las soluciones cuyas partículas son mayores de 100 nm son aquellas que principalmente radian en amarillo y rojo. En lo que sigue veremos que siempre son azul-transparente.

Solamente las partículas de soluciones azuladas de oro irradian luz que, a 90° respecto a la radiación incidente, está escasamente polarizada.

Este teorema, no obstante, ha de expresarse con reserva, ya que se deduce bajo la suposición de forma esférica de las partículas. De todos modos hay soluciones azuladas que a menos de 90° irradian luz casi totalmente polarizada. Pero seguramente puede decirse que no puede haber soluciones rojas que no den luz totalmente polarizada a menos de 90°. Cuando las observaciones arrojan otro resultado¹⁴⁾, se deduce de ello con seguridad que la solución utilizada era inhomogénea, y que contenía partículas rojas muy poco dispersantes pero fuertemente absorbente, y proporcionalmente menos partículas azuladas, fuertemente dispersantes.

25. Queremos ahora pasar nuevamente a calcular la polarización de la luz a diversos ángulos respecto a la radiación incidente. Indicaremos con γ el ángulo respecto a la dirección de donde viene la radiación incidente. En los dos casos principales I y II (sección 21) resulta:

$$I. \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad v = \cos \gamma$$

$$J_I = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \Pi_\nu + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot (v \cdot \Pi_\nu - (1-v^2) \cdot \Pi'_\nu) \right\} \right|^2$$

$$II. \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad v = \cos \gamma$$

$$J_{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot (v \cdot \Pi_\nu - (1-v^2) \cdot \Pi'_\nu) + \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \Pi_\nu \right\} \right|^2$$

Lo que sigue depende sólo del valor relativo J_I/J_{II} , así que queremos calcular solamente las cantidades:

$$\mathbf{J}_I = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{\lambda'^2} \frac{J_I}{\alpha^6}, \quad \mathbf{J}_{II} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{\lambda'^2} \frac{J_{II}}{\alpha^6}$$

En lo que sigue nos limitaremos como siempre a los primeros elementos. Se tiene:

$$(97) \quad \begin{aligned} \mathbf{J}_I &= |\mathbf{A}_1 - (\mathbf{A}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \cos \gamma|^2 \\ \mathbf{J}_{II} &= |\mathbf{A}_1 \cdot \cos \gamma - \mathbf{A}_2 \cdot \cos 2\gamma - \mathbf{P}_1|^2 \end{aligned}$$

Aquí \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{P}_1 son las cantidades cuyos valores se deducen de las tablas I, II, III. Mediante interpolación gráfica se encuentra de dichas tablas:

$2\rho =$	160 nm	180 nm
$\mathbf{A}_1 =$	-0,08 - i 0,63	-0,03 - i 0,47
$\mathbf{A}_2 =$	0,15 - i 0,22	0,12 - i 0,30
$\mathbf{A}_3 =$	0,09 + i 0,03	0,02 + i 0,03
	<i>para $\lambda = 550$ nm.</i>	

Si se inserta esto en (97), $\mathbf{J}_I + \mathbf{J}_{II}$ da la radiación total en su dependencia del ángulo γ , $\mathbf{J}_I - \mathbf{J}_{II}$ el excedente de la luz polarizada sobre la no polarizada, $P = (\mathbf{J}_I - \mathbf{J}_{II})/(\mathbf{J}_I + \mathbf{J}_{II})$ es el contenido porcentual de luz polarizada. Puesto que depende de valores relativos, he dividido los valores de \mathbf{J} por $(\mathbf{J}_I + \mathbf{J}_{II})_{90^\circ}$; esto es, he tomado la radiación obtenida a 90° como unidad. Los valores calculados son:

¹⁴⁾ Compárese con p. ej. E. Müller, Ann. d. Phys. **24**, p. 13, 16. 1907.

		$2\rho=160 \text{ nm.}$										
		0°	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°	160°	180°
Rad. total		0,64	0,67	0,75	0,88	0,97	1,00	1,06	1,35	2,01	2,76	3,17
Polarizada		0	0,02	0,06	0,18	0,44	0,62	0,80	0,97	0,72	0,29	0
P		0	0,03	0,09	0,21	0,46	0,62	0,76	0,72	0,36	0,10	0

		$2\rho=180 \text{ nm.}$										
		0°	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°	160°	180°
Rad. total		0,12	0,17	0,37	0,68	0,95	1,00	1,04	1,33	2,16	3,30	3,85
Polarizada		0	-0,02	-0,10	-0,15	0,06	0,31	0,62	1,10	0,65	0,35	0
P		0	-0,11	-0,09	-0,22	0,06	0,31	0,60	0,82	0,30	0,10	0

En ambos casos el máximo de polarización de 90° se desplaza hacia la región de γ creciente, en un caso ($2\rho=160 \text{ nm}$) para $\gamma=110^\circ$, en otro caso ($2\rho=180 \text{ nm}$) hacia $\gamma=120^\circ$. El que salgan estos ángulos depende probablemente de la naturaleza óptica del oro, dado que para otros metales los ángulos encontrados experimentalmente son, en la mayoría de los casos, más pequeños. El signo negativo de algunos números en el caso $2\rho=180 \text{ nm}$ significa que aquí hay existe un excedente de luz polarizada *que oscila perpendicularmente a la radiación de Rayleigh*.

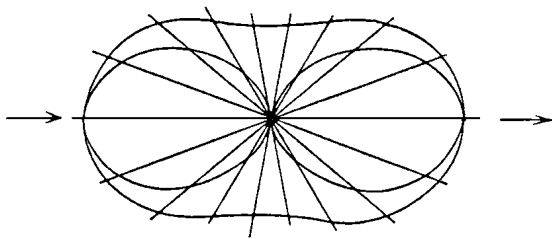


Fig. 17. Diagrama de radiación de una esfera infinitamente pequeña de oro.

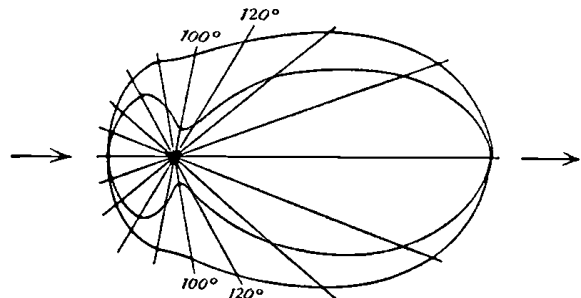


Fig. 18. Diagrama de radiación de una esfera de oro de 160 nm de diámetro.

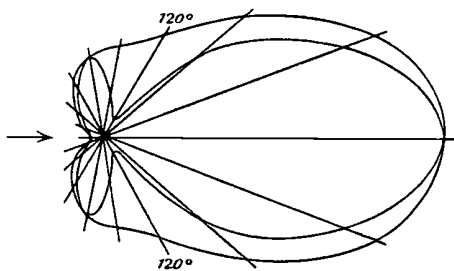


Fig. 19. Diagrama de radiación de una esfera de oro de 180 nm de diámetro.

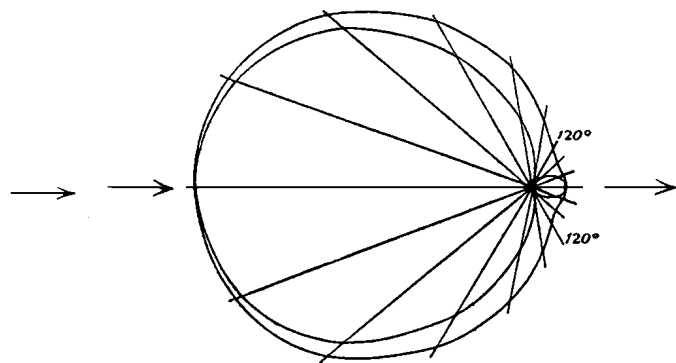


Fig. 20. Diagrama de radiación de una esfera perfectamente conductora e infinitamente pequeña.

Lo más llamativo de las cantidades halladas, sin embargo, es la gran variabilidad de los valores con el ángulo de dispersión. Para partículas grandes predomina de modo extraordinariamente intenso la radiación dispersa por el lado hacia donde va la luz que atraviesa la suspensión. He intentado hacer visible esta relación mediante unos diagramas de radiación,

dando la intensidad de la radiación como la longitud del radiovector que sale de la partícula. Las curvas exteriores en las figs. 17-20 cortan los radios en segmentos proporcionales a la intensidad de la radiación completa, y las curvas interiores dan del mismo modo la radiación *no polarizada*, el segmento intermedio del radiovector es asimismo proporcional a la radiación polarizada.

En resumen podemos decir:

Si el máximo de polarización de la luz dispersa lateralmente por una solución turbia está desplazado de 90° hacia la zona de γ crecientes, eso es un indicio seguro de que la solución contiene partículas muy grandes. Al mismo tiempo la radiación lateral dispersa hacia el lado a donde va la radiación excitada ($\gamma > 90^\circ$) es extraordinariamente más intensa que la del otro lado ($\gamma < 90^\circ$).

He construido asimismo, para comparación, el diagrama para partículas muy pequeñas, y también para partículas muy pequeñas con una conductividad supuestamente perfecta (Figs. 17, 20). Viendo éstas, puede notarse que las relaciones de intensidad son justo lo contrario que para las partículas grandes de oro. Caso de que existiera cualquier duda acerca de que sea correcta la explicación conseguida aquí para los fenómenos de polarización observados por los Sres. F. Ehrenhaft¹⁵⁾ y E. Müller¹⁶⁾, podría decidirse fácilmente la pregunta mediante una comparación, probablemente a ojo desnudo, de la intensidad dispersa a diferentes ángulos.

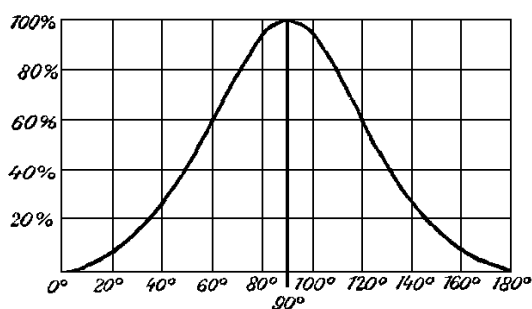


Fig. 21. Polarización de la luz dispersa por partículas infinitamente pequeñas.

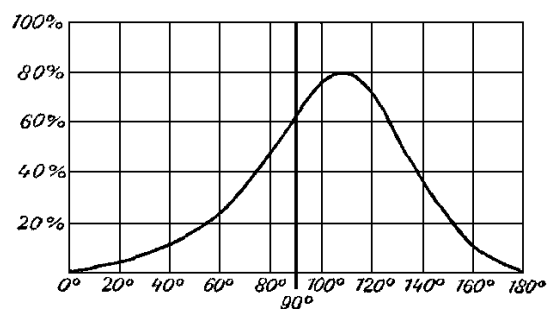


Fig. 22. Polarización de la luz dispersa por partículas de 160 nm.

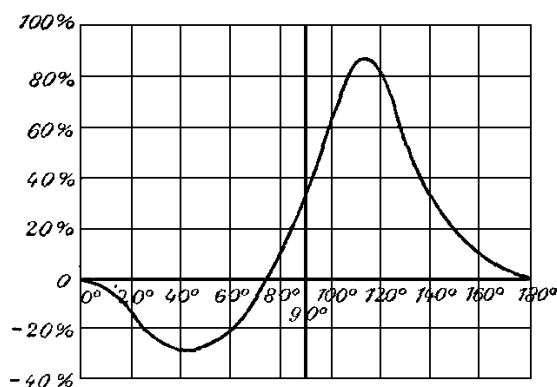


Fig. 23. Polarización de la luz dispersa por partículas de 180 nm.

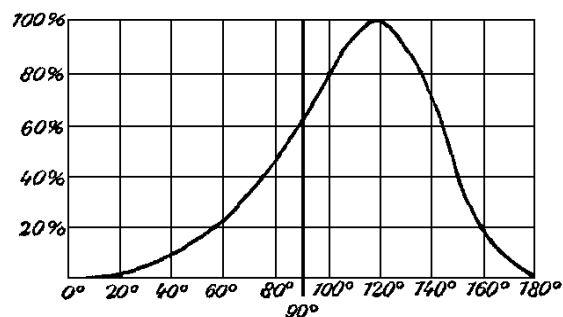


Fig. 24. Polarización de la luz dispersa por partículas infinitamente conductoras y pequeñas.

Las curvas de las cantidades P (figs. 21-24) no necesitan comentario.

¹⁵⁾F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. **11**. p. 489. 1903.

¹⁶⁾E. Müller, Ann. d. Phys. **24**. p. 1. 1907.

La absorción en los medios turbios.

26. Para calcular la absorción, examinaremos cuánta energía consumiría una partícula en el caso de que estuviese aislada. El coeficiente de absorción de la solución se obtiene de ahí multiplicándolo por el número de partículas por milímetro cúbico.

Consideremos que alrededor del centro de la partícula yace una superficie esférica de radio r , y sea $x=2\pi r/\lambda'$ un número muy grande. La densidad de flujo de la energía que atraviesa esa superficie hacia afuera es en cada momento:

$$\mathbf{E}_\vartheta \cdot \mathbf{H}_\varphi - \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}_\vartheta$$

Debemos integrar ese flujo de energía momentánea sobre la duración de un segundo para obtener la intensidad de luz. Se obtiene, no obstante, a partir de (2):

$$\mathbf{E}_\vartheta = \text{Re}[E_\vartheta \cdot e^{2\pi i n t}], \quad \mathbf{H}_\vartheta = \text{Re}[H_\vartheta \cdot e^{2\pi i n t}], \quad \text{etc.}$$

Re[] significa "parte real de". Insertando esto, se obtiene la integral temporal buscada:

$$\int_{t=0}^{t=1} (\mathbf{E}_\vartheta \cdot \mathbf{H}_\varphi - \mathbf{E}_\varphi \cdot \mathbf{H}_\vartheta) \cdot dt = |(E_\vartheta \cdot H_\varphi) - (E_\varphi \cdot H_\vartheta)|$$

Debe señalarse respecto al paréntesis que debe hacerse el "producto escalar" de las dos cantidades complejas, esto es, el producto de ambos valores absolutos con el coseno de la diferencia de fase. Es:

$$E_\vartheta = E'_\vartheta + i \cdot E''_\vartheta, \quad H_\varphi = H'_\varphi + i \cdot H''_\varphi$$

donde $E'_\vartheta, E''_\vartheta$ etc. deben ser cantidades reales, así que resulta:

$$(E_\vartheta \cdot H_\varphi) = E'_\vartheta \cdot H'_\varphi + E''_\vartheta \cdot H''_\varphi$$

Para la multiplicación escalar de las dos cantidades vale la misma regla que para la multiplicación habitual, así que en lo que sigue omitiremos el paréntesis. Donde se tengan que multiplicar números complejos E y H , siempre nos referiremos al producto escalar. Podemos, mediante (4), reemplazar las cantidades complejas H_ϑ y H_φ por $i \cdot M_\vartheta$ y $i \cdot M_\varphi$. La intensidad de las componentes normales de la luz que atraviesa la superficie esférica es entonces, salvo un factor numérico:

$$E_\vartheta \cdot iM_\varphi - E_\varphi \cdot iM_\vartheta$$

Ese factor numérico se elige tal que la intensidad de la radiación que atraviesa la solución sea igual a 1. Para E_ϑ, M_φ etc, tenemos que insertar las cantidades $E_{\vartheta a} + E_{\vartheta a}$, $M_{\varphi a} + M_{\varphi a}$ etc mediante (51) y (52). Entonces la integral de superficie que describe la cantidad total de luz que sale de dicha superficie, se divide en tres partes:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_\vartheta \cdot iM_\varphi - E_\varphi \cdot iM_\vartheta) \cdot r^2 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ II &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta a} \cdot iM_\varphi + E_\vartheta \cdot iM_{\varphi a} - E_{\varphi a} \cdot iM_\vartheta + E_\varphi \cdot iM_{\vartheta a}) \cdot r^2 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ III &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta a} \cdot iM_{\varphi a} - E_{\varphi a} \cdot iM_{\vartheta a}) \cdot r^2 \cdot \text{sen}\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \end{aligned}$$

La parte I contiene el flujo de energía de la radiación directa cuando no hay ninguna influencia sobre la partícula, está claro de antemano que I debe ser nulo; la parte III es una

cantidad positiva, a saber, la cantidad total de la energía dispersa lateralmente, esto da asimismo la parte del coeficiente de absorción que hay que poner en el cálculo de la radiación dispersa. La parte II es negativa, a saber, la pérdida total de energía de la radiación que atraviesa el sistema, y da asimismo el coeficiente total de absorción que está causado, tanto por la radiación dispersa como por la absorción efectiva de la energía dispersa en las partículas.

Habiendo aceptado que $x=2\pi r/\lambda'$ es infinitamente grande respecto a 1, podemos mediante (29a) y (19) poner:

$$I_\nu(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad I'_\nu(x) = \text{cos}\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$K_\nu(-x) = e^{-ix} \quad K'_\nu(-x) = -i \cdot e^{-ix}$$

En lo sucesivo sean las siguientes abreviaturas:

$$A_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \text{cos}\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$B_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{2\nu+1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$C_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot e^{-ix}$$

$$D_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi} \cdot \frac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot e^{-ix}$$

así que se obtienen para los factores de los productos escalares que se han de calcular:

$$E_\vartheta + E_{\vartheta a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi}$$

$$E_\varphi + E_{\varphi a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta}$$

$$-i \cdot (M_\vartheta + M_{\vartheta a}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta}$$

$$i \cdot (M_\varphi + M_{\varphi a}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu + C_\nu}{r} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu + D_\nu}{r} \cdot \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi}$$

La intensidad de luz se calcula como:

$$(E_\vartheta + E_{\vartheta a}) \cdot i(M_\varphi + M_{\varphi a}) - (E_\varphi + E_{\varphi a}) \cdot i(M_\vartheta + M_{\vartheta a})$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(A_\nu + C_\nu)(B_\mu + C_\mu)}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right)$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(A_\nu + C_\nu)(A_\mu + D_\mu) + (B_\nu + C_\nu)(B_\mu + D_\mu)}{r^2} \cdot \frac{1}{\text{sen}\vartheta} \cdot \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{B_\mu}{\partial \vartheta} \right)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(B_\nu + D_\nu) \cdot (A_\mu + D_\mu)}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta} \cdot \frac{\partial B_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \varphi} \right)$$

[N.T. En el original, la segunda sumatoria en el segundo término de la derecha aparece como $\mu=\lambda \dots \infty$]

Podemos realizar la integración sobre la superficie esférica. Resulta:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\text{sen} \vartheta \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\text{sen} \vartheta} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_\nu \cdot \frac{\partial^2 P_\mu}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\text{sen} \vartheta}$$

Con el uso de la ecuación (11) se tiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right) \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$= \mu \cdot (\mu + 1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_\nu \cdot P_\mu \cdot \text{sen} \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

Asimismo, de (46):

$$= 0, \quad \nu \neq \mu$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}, \quad \nu = \mu$$

Lo mismo se obtiene cuando se sustituye para P_ν, P_μ en $\mathbf{B}_\nu, \mathbf{B}_\mu$. Finalmente sale:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[P_\nu \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \varphi} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \cdot d\varphi - \int_0^\pi \left[P_\nu \cdot \frac{\partial B_\mu}{\partial \vartheta} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot d\vartheta = 0$$

El flujo de energía que sale por la superficie esférica es por tanto:

$$2\pi \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} ((A_\nu + C_\nu) \cdot (B_\nu + C_\nu) + (A_\nu + D_\nu) \cdot (B_\nu + D_\nu)) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}$$

Este término se descompone en las tres partes antes mencionadas:

$$I = 4\pi \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu \cdot B_\nu) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} = 0$$

$$II = 2\pi \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (A_\nu + B_\nu) \cdot (C_\nu + D_\nu) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}$$

$$= \frac{\lambda'^2}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (ie^{-ix} x (a_\nu - p_\nu) e^{-ix})$$

$$= \frac{\lambda'^2}{2\pi} \text{Im} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (a_\nu - p_\nu) \right)$$

$$III = 2\pi \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (C_\nu^2 + D_\nu^2) \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1} = \frac{\lambda'^2}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}$$

Si N es el número de partículas por milímetro cúbico, entonces II da como coeficiente de absorción de la solución por milímetro:

$$(98) \quad k = N \cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot (a_{\nu} - p_{\nu}) \right)$$

La pérdida mediante radiación sola por milímetro, según III, suma:

$$(99) \quad k' = N \frac{\lambda'^2}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_{\nu}|^2 + |p_{\nu}|^2}{2\nu + 1}$$

El símbolo $\operatorname{Im}(\)$ en (98) significa que, de los números complejos encerrados entre paréntesis, hay que tomar la parte imaginaria. La línea vertical en (99) significa que, de las cantidades que se encuentran entre ellas, hay que tomar su valor absoluto.

Absorción de suspensiones coloidales de oro.

27. Para las soluciones coloidales podemos restringirnos a los coeficientes a_1, a_2, p_1 . Como antes, introduciremos las cantidades

$$\mathbf{A}_1 = \frac{a_1}{2\alpha^3}, \quad \mathbf{A}_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}$$

La concentración de la solución es:

$$C = N \cdot V, \quad V = \frac{4\pi\rho^3}{3} = \frac{\alpha^3 \cdot \lambda'^3}{6\pi^2}$$

con lo que se obtiene:

$$(100) \quad \begin{cases} k = C \cdot K \\ K = \frac{6\pi}{\lambda'} \cdot \operatorname{Im}(-\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{P}_1) \end{cases}$$

La cantidad K varía para diámetros muy pequeños sólo lentamente conforme la partícula se hace más grande.

Para suspensiones muy pequeñas del metal en la solución, los colores son independientes del tamaño de partícula, y el coeficiente de absorción es directamente proporcional a la concentración de la solución.

Este teorema, por supuesto, solamente tiene validez hasta un cierto límite en la pequeñez de la partícula, en la cual los átomos de oro se comportan de forma ópticamente diferente a la de pequeñas esferas. Probablemente sería muy interesante investigar la absorción de soluciones con partículas extremadamente pequeñas y, en cierto modo, seguir ópticamente la manera en que las partículas de oro se forman a partir de los átomos.

En el caso de que las partículas de oro fuesen mayores de unos 10 nm, el teorema dejaría de ser válido. He tomado los valores de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{P}_1$ a partir de las tablas I, II, III, y con ellos he construido para cada color la curva que describe la dependencia de la absorción con el diámetro de la partícula (de modo parecido a las curvas de radiación de la fig. 12). A partir de esos diagramas he leído los coeficientes de absorción para los diámetros enumerados en la siguiente tabla. Los valores vienen dados en las mismas unidades que como se dio anteriormente para la energía dispersa (p. 421) [N.T: sección 23, junto a la Figura 12]. Representan asimismo la

pérdida de luz en el camino de 1 mm a través de una solución de concentración 10^{-6} (1 mm³ de oro en un litro de agua), en tantos por mil. La cantidad K se obtiene asimismo a partir de éstas multiplicando por 10^3 .

Absorción por oro coloidal.

2p	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 nm	42,7	38,8	62,2	76,6	61,6	18,5	8,0
40 nm	46,5	42,0	66,0	86,5	77,7	25,0	11,3
60 nm	48,8	45,4	67,4	88,4	96,1	37,3	16,4
80 nm	46,5	44,8	62,5	81,0	97,0	65,0	27,1
100 nm	41,0	41,0	52,2	66,3	82,2	85,0	44,5
120 nm	34,6	34,8	42,8	51,2	61,0	77,5	58,7
140 nm	29,4	29,7	35,9	41,9	48,6	57,0	56,1
160 nm	25,7	26,1	30,8	36,0	41,2	45,1	45,6
180 nm	24,0	24,8	28,0	33,0	37,0	37,7	36,5

Estas filas numéricas se vuelven a dar en forma gráfica en la fig. 25 como espectros de absorción para distintos tamaños de partícula.

Puede verse para suspensiones muy finas de oro el conocido máximo de absorción desplazado de las soluciones de oro rojo rubí en el verde a cerca de 525 nm de longitud de onda.

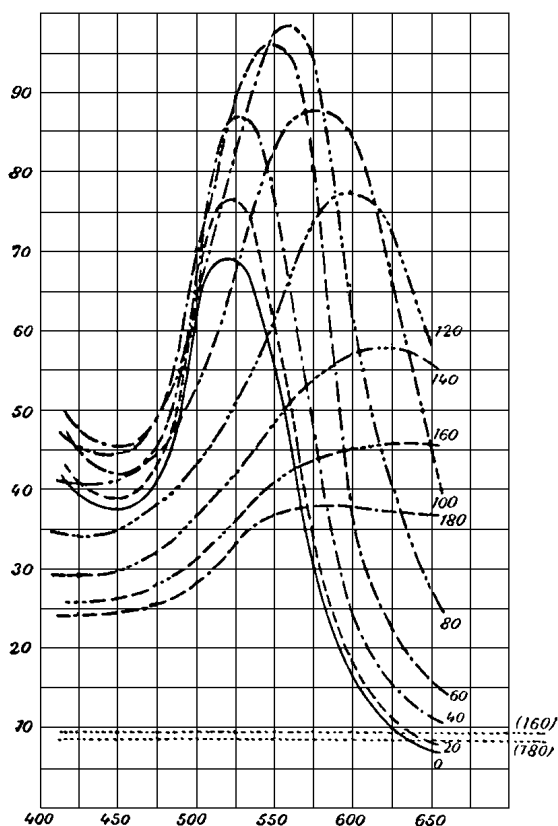


Fig. 25. Absorción de soluciones coloidales de oro.

Si aumenta el tamaño de partícula, la absorción a concentración constante crece en primer lugar en todo el espectro, los colores varían poco, pero poco a poco se obtiene un tono azulado, moviéndose el máximo algo hacia la derecha. Un cambio agudo tiene lugar cuando el tamaño de la partícula se hace igual a unos 100 nm. Para ese tamaño, la solución es violeta. Para 120 y 140 se ven ya los espectros característicos de soluciones de oro azul intenso, para 160 el azul índigo, para 180 el azul verdoso. Se obtiene, en efecto, para diversos tamaños de partícula todos los colores observados en las soluciones coloidales de oro.

28. Queda claro de lo anterior que el color de las soluciones de oro se basa en primer lugar en la propia absorción de la luz en las partículas de oro. Con partículas perfectamente conductoras no se observaría nada. Aquí la pérdida de luz se debería totalmente a la dispersión de luz lateral y las curvas de absorción serían por eso idénticamente iguales a las anteriormente

dibujadas en la fig. 15 (cuando se añaden entonces las primeras ondas parciales superiores, esto es, las pérdidas correspondientes a los coeficientes p_1, a_2, p_2). Estas curvas aparecen absolutamente diferentes a las curvas de absorción de las suspensiones de oro, siempre describirían colores mates, y para partículas infinitamente pequeñas la absorción sería nula.

En ese caso, para diámetros mayores de partícula, contribuye la pérdida de luz mediante dispersión lateral en el color de la solución. Las soluciones azules son al mismo tiempo aquellas que muestran una fuerte dispersión rojoamarillenta. Es interesante, de todos modos, calcular aisladamente ambos sumandos del coeficiente de absorción. Para el cálculo práctico se obtiene de (99) la fórmula:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} k' = C \cdot K' \\ K' = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \alpha^3 \cdot \left(|a_1|^2 + |p_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right) \\ = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left(|a_1|^2 + |p_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right) \end{array} \right.$$

[N.T. En el último término, aparece $24\pi^2$ en el original]

Hasta $2\rho=100$ nm K' es idéntico a la cantidad F_1 calculada en 23. (fig. 14) Para diámetros mayores de partícula aparecen los coeficientes P_1 y A_2 , si bien la radiación de Rayleigh predomina siempre hasta 180 nm. He obtenido para las partículas aproximadas las cantidades P_1 y A_2 de las tablas II y III mediante interpolación gráfica, y he calculado K' para los mismos tamaños para los cuales ya conocemos K . Resulta entonces.

$$(102) \quad K'' = K - K'$$

la medida de la fracción de la luz perdida en las propias partículas. En la siguiente tabla se muestran los valores así calculados de K'' prescindiendo de nuevo del factor 10^3 .

Coefficientes de absorción pura.

2ρ	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 nm	42,4	38,6	61,9	76,1	61,0	18,2	7,9
40 nm	44,4	40,4	63,3	81,9	71,8	22,1	9,9
60 nm	42,6	40,4	59,4	74,7	76,4	25,0	10,5
80 nm	35,9	35,6	48,3	58,1	59,2	32,0	12,4
100 nm	27,4	28,7	34,9	39,0	39,8	29,5	25,5
120 nm	21,1	22,0	25,2	25,6	24,5	19,7	13,6
140 nm	17,2	18,0	20,1	19,9	19,1	11,9	9,6
160 nm	14,0	14,8	16,4	16,1	15,2	10,0	8,1
180 nm	11,9	12,9	14,1	14,3	13,3	8,8	6,5

Estas filas numéricas se han representado gráficamente en las curvas de la fig. 26. Estas curvas de absorción pura siempre tienen su máximo en el verde entre $\lambda=525$ y $\lambda=550$ [nm]. Si se

compara la fig. 26 con la fig. 14, no se aprecia en todo un cierto paralelismo entre absorción y dispersión. Así, para tamaños pequeños de partículas, donde el máximo de dispersión se halla en el amarillo verdoso, la dispersión crece muy rápidamente con el tamaño de partícula, mientras que la absorción muestra al mismo tiempo un crecimiento débil. Más tarde, en tanto que el máximo de dispersión se desplaza hacia la derecha, sucede que también el máximo de la absorción pura se mueve un poco hacia la derecha, si bien permanece siempre en el verde. Pero junto a esos cambios, proporcionalmente insignificantes, aparece otro cambio que evidentemente no depende de la naturaleza especial del oro, y que en último término predomina sobre los demás: cuanto mayor se hace la partícula, tanto más baja y plana se hace la curva. Esto es, por lo dicho anteriormente, claro; cuando las partículas son grandes hasta cierto punto, se hacen finalmente opacas para todos los colores, y cuanto más grandes se hacen, más pequeña se hace la suma de las secciones eficaces. Si se quisiera dejar de lado el efecto de la difracción y calcular sólo la sombra geométrica, el coeficiente de absorción sería $k_0=N \cdot q$, donde a concentración 10^{-6} :

$$N = \frac{10^{-6}}{\frac{4\pi}{3} \rho^3}, \quad q = \pi \cdot \rho^2$$

asimismo:

$$k_0 = N \cdot q = \frac{3}{4\rho} \cdot 10^{-6}$$

Así se calcularía para $2\rho=180$: $k_0=8,3$ por mil, para $2\rho=160$: $k_0=9,4$ por mil. He anotado esos dos valores de k_0 en las Figs. 25, 26 como líneas, naturalmente rectas, puesto que k_0 no depende del color.

Puede verse que la difracción causa el que la absorción se hace notablemente más grande. Además para el amarillo y el rojo la mayor parte de la luz se alejará de la partícula por reflexión, mientras que en la mitad izquierda del espectro aproximadamente la mitad de la luz perdida es absorbida por la partícula.

Los colores de las soluciones coloidales de oro se explican mediante el efecto combinado de dos propiedades de las partículas de oro. Las partículas de

oro tienen un máximo nítido de su capacidad de absorción en el verde, y en segundo lugar un máximo de su capacidad de reflexión en el amarillo rojizo. Las partículas muy pequeñas reflejan débilmente y absorben fuertemente, por lo cual vuelven la solución de rojo-rubí. Las partículas grandes reflejan mucho, y al mismo tiempo la curva de absorción pura para ellas se hace más baja y plana, por lo cual vuelven la solución azul. Para el color de las soluciones más grandes es decisiva solamente la capacidad del oro de reflejar fuertemente la parte amarillo-rojiza del espectro, por lo cual sus colores se hacen menos intensamente azul-verdoso.

Este teorema se demuestra sin duda únicamente bajo la suposición de partículas con forma esférica. Sin embargo, también para las partículas con forma de hojas y bastoncillos se debe distinguir de modo análogo entre las capacidades de absorción y de reflexión de las partículas.

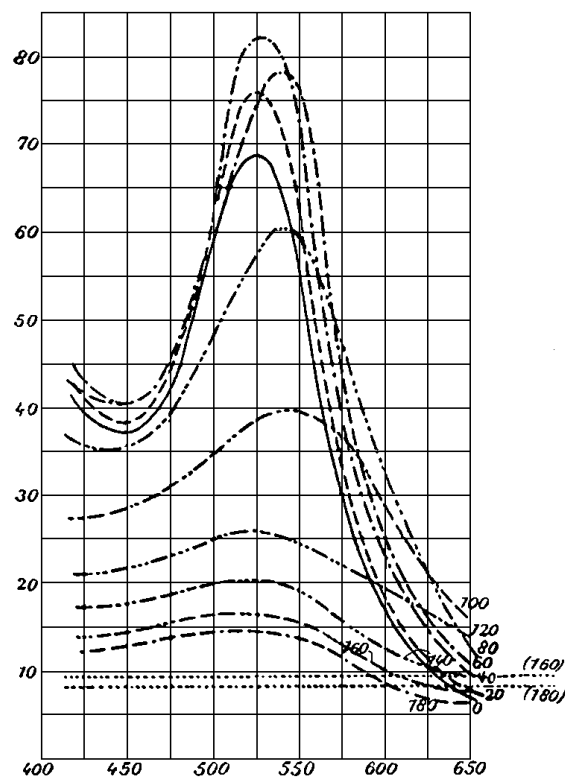


Fig. 26. "Absorción pura" en soluciones coloidales de oro.

La comparación de los resultados teóricos contenido en este trabajo con los resultados experimentales la reservaré hasta después de la aparición del trabajo del Sr. Steubing. Debe aquí, no obstante, manifestarse que de esas medidas se obtiene el que, en efecto, las conocidas propiedades ópticas del oro se siguen obteniendo para las partículas ultramicroscópicas y que se llegan a explicar completamente las propiedades ópticas de las soluciones coloidales, aunque por otro lado, para explicarlo todo de forma verosímil, la teoría necesita desarrollarse para el caso de que se tengan partículas elipsoidales (hojas o bastoncillos).

Resultados.

1. El problema de calcular las propiedades ópticas de los medios turbios se ha resuelto bajo dos suposiciones simplificadoras: primera, que las partículas puedan verse con forma esféricas, segunda, que el medio esté infinitamente diluido. La segunda suposición corresponde con seguridad a las soluciones coloidales usuales.

2. La luz dispersa por las partículas pequeñas puede calcularse como serie de "ondas parciales", y hay dos grupos de ondas parciales, que corresponden a oscilaciones eléctricas y magnéticas de la partícula. De estas ondas parciales, para partículas no muy grandes, se necesita tener solamente un número finito, y la v -ésima onda eléctrica va paralela a la $(v-1)$ -ésima onda magnética.

Para soluciones coloidales con partículas muy pequeña solamente la primera oscilación eléctrica, la "radiación de Rayleigh" tiene un valor apreciable. Para soluciones coloidales mayores además aparecen la segunda oscilación eléctrica y la primera magnética.

3. La suposición de conductividad perfecta de la esfera, que da lugar a simplificaciones no permitidas de las fórmulas, conduce a otro resultado, a saber, que la v -ésima oscilación parcial magnética va paralela con la v -ésima eléctrica. Con ello, para medios de partículas pequeñas, además de la radiación de Rayleigh debería ser apreciable la primera oscilación magnética, y se cumpliría el teorema de Thomson sobre un máximo de polarización a 120° . Como esta suposición es falsa, dicho resultado no puede, por supuesto, confirmarse empíricamente.

4. Si la solución es atravesada por un haz de luz no polarizado, la radiación dispersa lateralmente es, de forma total o parcial, polarizada linealmente (jamás polarizada elípticamente).

5. Hasta un tamaño de partícula de unos 100 nm, la luz dispersa lateralmente por las partículas de oro es casi sólo la radiación de Rayleigh, la cual tiene a 90° su máximo de polarización (que es del 100%). Si se hacen más grande las partículas, el valor de la luz no polarizada crece muy rápidamente a 90° y el máximo de polarización se mueve hacia adelante, para tamaños de 160 y 180 nm cae hacia 110° y 120° . Al mismo tiempo, la simetría inicial de la radiación de Rayleigh se ve perturbada debido a las interferencias de las ondas parciales, por lo cual la mayor parte de la radiación difusa se aleja por el lado hacia donde va la luz incidente. En la última relación, las partículas imaginarias infinitamente pequeñas y perfectamente conductoras reflejarían la luz de modo contrario. Las partículas de oro grandes, que muestran esa proporción anómala de polarización, tienen una radiación difusa amarillo-rojiza y colorean la solución de azul. No puede haber partículas de color rojo que se comporten así.

6. A concentración constante, la radiación difusa por un medio de partículas muy pequeñas es proporcional al volumen de la partícula. En soluciones más grandes, crece con el tamaño de la partícula y alcanza por último un máximo cuya posición depende de la longitud de onda. Y en una solución de partículas perfectamente conductoras el diámetro de éstas para el

cual se tiene la radiación máxima, es proporcional a la longitud de onda ($0,324 \lambda'$); para partículas de oro no rige una regla tan simple, y el diámetro alcanzado por la partícula siempre se halla entre $\lambda'/4$ y $\lambda'/3$.

7. El color de la luz dispersa lateralmente por partículas esféricas perfectamente conductoras, así como en general para esferas perfectamente blancas, cuando son muy pequeñas, es azul-violeta, correspondiéndose con la ley de Rayleigh (radiación proporcional a λ'^{-4}). Esferas más grandes emitirían una luz casi blanca, con una débil tonalidad mate de color que depende del tamaño de las partículas. Una resonancia óptica, que vendría caracterizada por un color particularmente intenso, está, por lo menos para partículas con forma esférica, excluida, y no es posible una explicación de la vivaz coloración de las soluciones coloidales mediante resonancia.

8. La radiación difusa por partículas de oro es por lo general mucho más fuerte que la que cabría esperar para partículas perfectamente conductoras del mismo tamaño. Además para las partículas más finas se muestra un máximo agudo en el verde amarillento. Más tarde el máximo de radiación se eleva particularmente en el amarillo rojizo. De quererse hablar de resonancia, debería hablarse de una resonancia de los átomos de oro, la cual se superpondría a los fenómenos esperados para las partículas perfectamente conductoras incoloras.

9. Las soluciones de partículas de oro infinitamente pequeñas muestran (en marcado contraste con las que cabría esperar para partículas perfectamente conductoras) una absorción característica, que sólo depende de la cantidad de metal suspendido (la concentración), pero no del grado de finura de la suspensión. Sería interesante investigar experimentalmente, cómo variaría para partículas extremadamente pequeñas, que sólo estuviera compuesta por unos pocos átomos.

10. En general la absorción de las soluciones coloidales de oro depende de dos propiedades del oro metálico: las capacidades de absorción y de reflexión. Las soluciones en las que la reflexión difusa retrocede frente a la propia absorción muestran el máximo de absorción, que cae en el verde, son por ello de color rojo-rubí. Las soluciones que muestran reflexión difusa fuerte son, por contra, azul-transparente, porque el oro refleja principalmente la luz amarillo-rojiza.

11. Para que la teoría esté completa es absolutamente necesario investigar también el comportamiento de las partículas elipsoidales.

Greifswald, Instituto de Física

(Entregado 7 Enero 1908)