Números reales

1

1.1 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Calcular para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Ejercicio 1.2. Encontrar aquellos valores de x que verifican que:
a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$,
b) $x^2 - 5x + 9 > x$,
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$,
d) $x^2 \leqslant x$,
e) $x^3 \leqslant x$,
f) $x^2 - (a+b)x + ab < 0$.

Ejercicio 1.3. Discutir para qué valores de x se verifica que:
a) $|x-1|\,|x+2| = 3$,
b) $|x^2 - x| > 1$,
c) $|x-1| + |x+1| < 1$,
d) $|x+1| < |x+3|$.

Ejercicio 1.4. Resolver las siguientes inecuaciones:
a) $|\,x-5\,| < |\,x+1\,|$,
b) $|\,x-3\,| < 0$.

Ejercicio 1.5. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$?

Ejercicio 1.6. Calcular, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes conjuntos
a) $A = [0,1] \cup [2,3[$,
b) $A = \{2n : \ n \in \mathbb{N}\}$,
c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 + 2x + 1\right| < \dfrac{1}{2}\right\}$,
d) $A = [0,+\infty[\cap\mathbb{Q}$.

1.1.1 Principio de inducción

Ejercicio 1.7. Demostrar que $1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.8. Demostrar que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1$ para cualquier natural mayor o igual que dos.

Ejercicio 1.9. Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

Ejercicio 1.10. Demostrar por inducción que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.11. Demostrar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.12. Demostrar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para $n \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.1. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $n^3 + 5n$ son divisibles por 6.

Ejercicio 1.2. Demostrar por inducción que todos los números de la forma $3^{2n} - 1$ son divisibles por 8.

Ejercicio 1.3. Pruébese que para todo natural $n \geq 2$ se verifica que 3 *no* divide a $n^3 - n + 1$.

Ejercicio 1.4. Pruébese que para todo natural $n \geq 2$ se verifica que: 5 divide a $n^5 - n$.

Ejercicio 1.5. Demostrar que $(1 + x)^n > 1 + nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > -1$.

Ejercicio 1.6. Demostrar que $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}$, para cualquier natural n y cualquier real x positivo distinto de uno.

Ejercicio 1.7. Probar que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entonces se verifica que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 1.8. Demostrar que, dado un natural n, $\sqrt{n}$ es natural o irracional.

Ejercicio 1.9. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.