RELACIÓN 4^{a} DE EJERCICIOS.
MATEMÁTICAS 1. INGENIERÍA QUÍMICA.

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y) = (x^2, y^2, x - y)$, $\quad g(x, y, z) = x^2 + 2y - z$. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad h = g \circ f$.

   (a) Calcular $Df(1, -1)$ y $g'(1, 1, 2)$.

   (b) Aplicar la regla de la cadena para calcular $Dh(1, -1)$.

2. Sea f la función definida como $f(x, y, z) = (3x - 2y + z, x + 3y - 2z)$. Probar que f es diferenciable en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ y obtener la diferencial en (1,1,1).

3. Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ de la función $F(u, v) = u^2+3uv+4u^2$, siendo $u = 2-2xy^2$ y $v = 1 + x$:

   a) Mediante la regla de la cadena.

   b) Sustituyendo u y v por sus valores.

4. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x, y, z) = (\text{sen}(xy + z), (1 + x^2)^{yz})$ y $g(u, v) = (u + e^v, v + e^u)$.

   (a) Probar que f es diferenciable en $(1, -1, 1)$, que g es diferenciable en $(0, \frac{1}{2})$ y calcular las diferenciales en sendos puntos.

   (b) Calcular $D(g \circ f)(1, -1, 1)$

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$. Calcular, mediante la definición, $D_1f(1, 0)$ y $D_2f(1, 0)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida mediante:

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

   Se pide:

   (a) Calcular las derivadas parciales en $(0, 0)$ y estudiar su continuidad.

   (b) Estudiar la diferenciabilidad de f en el origen.

   (c) Calcular las derivadas cruzadas de orden 2 en el origen.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = x^2 \text{sen}\frac{1}{x} + y^2 \text{sen}\frac{1}{y}, \quad f(x, 0) = f(0, y) = 0$$

   Estudiar la diferenciabilidad de f en el origen y la continuidad de las derivadas parciales en $(0, 0)$.

8. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x+y)^p sen(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xsen(\frac{1}{x^2+y^2})$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$

   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(0,0) = 0$

9. Calcular las derivadas parciales respecto a x y a y de las siguientes funciones

   (a) $F(u,v) = e^{uv}$, $\quad u = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $\quad v = arctg(\frac{y}{x})$.

   (b) $G(u,v) = \frac{senu}{v}$, $\quad u = y^2 - x$, $\quad v = 5x$.

10. Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (e^{x+y}, cos(x-y), x^2 sen\frac{1}{y}),\ \text{si } y \neq 0$$

$$f(x,0) = (e^x, cosx, 0)$$

11. Encontrar la derivada direccional de f en a según la dirección de h en los siguientes casos:

    (a) $f(x,y) = xy^2$, $\quad a = (2,1)$, $\quad h = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$.

    (b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, $\quad a = (1,1,0)$, $\quad h = (0,0,1)$.

12. Sea f_p la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_p(x,y) = \frac{x^p}{x^2+y^2},\ \text{si } (x,y) \neq (0,0),\quad f_p(0,0) = 0.$$

    Discútase, según los valores de $p \in N$:

    (a) La diferenciabilidad de f_p en (0,0).

    (b) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida como:

$$F(x,y) = (x + \cos y, f_4(x,y)).$$

    Justifíquese la diferenciabilidad de $G(x,y) = F \circ F + F$ en (0,0) y calcúlese $G'(0,0)$.

13. Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4}$ para $(x,y) \neq (0,0)$, $g(0,0) = 0$.

(a) Calcular $\frac{\partial}{\partial x}g(0,0)$, $\frac{\partial}{\partial y}g(0,0)$.

(b) Calcular las derivadas direccionales de g en (0,0).

(c) ¿Es g diferenciable en (0,0)? ¿Son $\frac{\partial}{\partial x}g$, $\frac{\partial}{\partial y}g$ continuas en $(0,0)$?.

14. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $h(0,0) = 0$.

    (a) Demostrar que h tiene derivadas parciales en (0,0).

    (b) Demostrar que h no es continua en el origen.

    (c) ¿Es h diferenciable en (0,0)?.

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{3x^2y - 2x^3}{x^2+y^4}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

    (a) Compruébese que f admite derivada en $(0,0)$ según cualquier dirección.

    (b) Veáse que f no es diferenciable en $(0,0)$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 0$, si $y \neq x^2$, $f(x,y) = x$ si $y = x^2$; demostrar que f tiene derivada direccional en todas las direcciones pero no es diferenciable en $(0,0)$.

17. Determinar la dirección respecto de la cual, la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xy^2 + yz + z^2x^2$ en el punto $(1,2,-1)$, tenga un valor máximo.

18. Sean las funciones $f(x,y,z) = (e^x + y^2, ke^z + y)$ (donde $k \in R$ es un parámetro), $g(u,v) = v^2 + \log u$ si $u > 0$. ¿Qué valor debe tomar k para que la derivada direccional máxima de $(g \circ f)$ en $(0,0,0)$ sea igual a 1?.

19. La distribución de la temperatura en una placa metálica viene dada por $T(x,y) = K(x^2e^y + y^2e^x)$ donde K en una constante positiva. Calcular la dirección en la que la temperatura aumenta más rapidamente en el punto $(1,0)$.

20. Determinar los gradientes en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$ de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

    (b) $f(x,y,z) = xyz$

21. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$.

22. Utilícese la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$, en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.

    (b) $g(x,y) = \log(x+y)$, $x > 0$, $y > 0$, en un entorno de (1,1).

(c) $h(x,y,z) = e^{a(x+y+z)},\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, en un entorno de (0,0,0).

23. Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones y decidir si son absolutos o no

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3x^2y.$
    (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4.$
    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = sen(xy).$
    (e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2zx - xy.$
    (f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad f(x,y,z) = xy + xz + yz.$

24. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real de dos variables reales, dada por

$$g(x,y) = e^{ax+y^2} + b\sin(x^2+y^2)\ \forall (x,y).$$

    Discutir los valores de a y b para que g tenga un extremo relativo en $(0,0)$.

25. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos parámetros, y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estudiar la existencia de extremos relativos de f en función de los parámetros.

26. Calcúlense los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los dominios dados:

    a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.
    b) $g(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3$ en el disco $\{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

27. Una placa circular plana tiene la forma del disco $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluyendo el borde, se calienta de manera que la temperatura en un punto (x,y) es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

    Determinar los puntos con mayor y menor temperatura de la placa, así como la temperatura en cada uno de ellos.

28. Encontrar los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$ en los que la funcion $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza sus extremos absolutos.

29. Estudiar los extremos absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

30. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy - x^2 + 8a^4$, con $a \in \mathbb{R}$.

31. Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

32. Estúdiese si la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$ tiene mínimo absoluto en $\mathbb{R}^3$.

33. Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (b) $f(x,y) = xye^{x+2y}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) $f(x,y) = (1 + e^y)\cos(x) - ye^y, \ \forall (x,y) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

    (d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3pxy, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, según los distintos valores de p.

34. Encontrar los puntos donde la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = x^2+y^2-xy-x-y$ alcanza sus extremos absolutos siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x + y \leq 3\}$.

35. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$

    (a) Pruébese que sobre toda recta de la forma $y = \lambda x$ la función f alcanza un extremo relativo en $(0,0)$

    (b) Descríbanse los conjuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que f toma valores negativos y valores positivos. Dedúzcase que f no alcanza ningún extremo relativo en $\mathbb{R}^2$