TEOREMA DE ESTRUCTURA DE LOS JORDAN-ISOMORFISMOS DE LAS C*-ALGEBRAS

por

ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

(Publicado en la «Revista Matemática Hispano - Americana», 4.ª Serie - Tomo XXXVII - Núms. 3-4)

MADRID
Talleres Gráficos Vda. de C. Bermejo
J. García Morato, 122.-Tel. 233 06 19
1977

TEOREMA DE ESTRUCTURA DE LOS JORDAN-ISOMORFISMOS DE LAS C*-ALGEBRAS

por

ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

Extracto

En [4] (II-3-U) dábamos una demostración «directa» —en términos de la teoría general de las álgebras de Banach, sin utilizar el cómodo, pero poco elegante, artificio de las $*$-representaciones y posterior aplicación de los métodos de las álgebras de von Neumann— del conocido teorema de estructura de los isomorfismos de C*-álgebras ([5], 4.1.21), al que creímos dar también un lenguaje definitivo, quedando en la siguiente forma:

«Sean A y B C*-álgebras, G un isomorfismo de A sobre B. Entonces G se escribe de manera única en la forma $G = G_2 G_1$, donde G_1 es un automorfismo $*$-positivo de A, y G_2 un $*$-isomorfismo de A sobre B.» (Calificábamos un automorfismo H como $*$-positivo cuando fuese $(H(a^*))^* = H^{-1}(a)$ para todo a del álgebra, y su espectro estuviese contenido en el conjunto de los números reales positivos.)

Retocando convenientemente la demostración que hicimos de este teorema y utilizando los resultados de Sinclair sobre Jordan-derivaciones de las álgebras de Banach semisimples, demostraremos (Sección II: Teorema) el análogo teorema de estructura para Jordan-isomorfismos de C*-álgebras, afirmando que un tal Jordan-isomorfismo se descompone de una única manera en producto de un auténtico automorfismo $*$-positivo del álgebra inicial con un Jordan-$*$-isomorfismo.

I. Resultados previos

Si A es un álgebra asociativa, se define el producto de Jordan por la fórmula

$$a \perp b = (1/2)(a\, b + b\, a), \qquad a, b \in \mathrm{A}.$$

Si A tiene elemento unidad (I), el concepto de elemento inversible, así como el de inverso de un tal elemento, se puede caracterizar en términos del producto de Jordan; concretamente:

«b es el inverso de a ($a, b \in \mathrm{A}$) si, y solamente si, $a \perp b = \mathrm{I}$ y $a^2 \perp b = a$» ([2], I.11).

De aquí que si A y B son álgebras complejas, y G es un Jordan-isomorfismo de A sobre B (biyección lineal verificando $\mathrm{G}(a_1 \perp a_2) = \mathrm{G}(a_1) \perp \mathrm{G}(a_2)$), si A posee unidad (I) —en cuyo caso obligadamente G (I) es la unidad de B— y si $a \in \mathrm{A}$, será, desde luego,

$$sp\,(\mathrm{G}(a)) = sp\,(a).$$

Caso de no existir unidad en A, se extenderá G, de la única manera posible, en un Jordan-isomorfismo de las respectivas unitizaciones y se razonará de manera análoga, teniéndose en cualquier caso:

1. Si G es un Jordan-isomorfismo de álgebras complejas, será

$$sp\,(\mathrm{G}(a)) = sp\,(a)$$

para todo a del álgebra inicial.

De los trabajos de Sinclair utilizaremos los siguientes resultados:

2. ([7], introducción). Todo Jordan-isomorfismo de álgebras de Banach semisimples es continuo.

3. Todo Jordan-automorfismo de un álgebra de Banach compleja semisimple, cuyo espectro esté contenido en el semiplano

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

es un auténtico isomorfismo.

Se consigue este resultado a partir de que, aun sin la hipótesis de semisimplicidad, el tal Jordan-automorfismo es de la forma e^{D} con D Jordan-derivación continua ([7], lema 1), y de que toda Jordan-derivación continua de un álgebra de Banach semisimple es auténtica derivación ([6], teorema 3.3).

De los resultados que obtuvimos en [4] para conseguir el teorema que ahora pretendemos generalizar, nos serán útiles:

4. ([4], II-3-m_1). Sean a y b elementos de una C*-álgebra, el último de ellos normal; z un número complejo. Si z pertenece al espectro de a, entonces se verifica que

$$\| b - a \| \geqslant d\,(z,\ sp\,(b)).$$

5. ([4],II-3-S). Sea A una C*-álgebra; la aplicación $D \longrightarrow e^D$ es un homeomorfismo del conjunto de las derivaciones $*$-antisimétricas de A $((D\,(a^*))^* = -D\,(a),\ \forall\, a \in A)$ sobre el conjunto de los automorfismos $*$-positivos de A.

6. ([4], II-3-T). Sea A una C*-álgebra, G un automorfismo $*$-positivo de A; existe un único automorfismo $*$-positivo F de A tal, que $F^2 = G$ (F se escribirá $G^{1/2}$ o $\sqrt{G}$).

7. ([4], II-3-1). Sea G un isomorfismo de la C*-álgebra A sobre la C*-álgebra B; se verifica

$$\| G^{\bullet}\, G \| = \| G \|^2$$

($G^{\bullet}$ designa el isomorfismo $b \longrightarrow (G^{-1}\,(b^*))^*$ de B sobre A).

En los corolarios utilizaremos un resultado de Kadison:

8. ([3], teorema 5). Todo Jordan-$*$-isomorfismo de C*-álgebras es isométrico.

Nota.—Los resultados 4, 5, 6, 7 y 8, demostrados en los respectivos trabajos originales para C*-álgebras con unidad, siguen siendo válidos para C*-álgebras sin unidad sin más que utilizar convenientemente el recurso de la unitización.

II. Demostración del teorema

Si A y B son C*-álgebras, y si G es un Jordan-isomorfismo de A sobre B, G^{-1} y G^* $(a \longrightarrow (G\,(a^*))^*)$ son evidentemente Jordan-isomorfismos de B sobre A y A sobre B, respectivamente, de manera que si definimos $G^{\bullet} = G^{*-1}\,(= G^{-1\,*})$, $G^{\bullet}$ será también un Jordan-isomorfismo de B sobre A.

Son de comprobación inmediata las siguientes propiedades:

a) $(G_2 G_1)^{\cdot} = G_1^{\cdot} G_2^{\cdot}$ ($G_1 : A \longrightarrow B$, $G_2 : B \longrightarrow C$, G_1 y G_2 Jordan-isomorfismos y A, B, C, C*-álgebras).

b) $\| G^{\cdot} \| = \| G^{-1} \|$. (Se hace uso implícitamente de que, en vista de la semisimplicidad de las C*-álgebras, todo Jordan-isomorfismo de C*-álgebras es automáticamente continuo (I.2).

c) $G^{\cdot\cdot} = G$.

Un Jordan-automorfismo G de una C*-álgebra A lo llamaremos •-simétrico (o $*$-unitario) cuando sea

$$G^{\cdot} = G \;(\Longleftrightarrow G^* = G^{-1}),$$

lo que equivale también claramente a

$$(G(a^*))^* = G^{-1}(a), \quad \forall\, a \in A.$$

Según esto, la definición que adelantábamos en el extracto de automorfismo •-positivo es equivalente a la de automorfismo •-simétrico y de espectro contenido en R_+.

Fijados ya los conceptos imprescindibles, pasemos a la demostración del lema fundamental (es un retoque de [4], II-3-m):

LEMA.—Sean A y B, C*-álgebras y G un Jordan-isomorfismo de A sobre B: entonces $G^{\cdot} G$ es un auténtico automorfismo •-positivo de A.

DEMOSTRACIÓN.—Sea a un elemento cualquiera de A, y z un número complejo: se verifica

$$\begin{aligned} \| a \| \, \| G^{\cdot} G(a) - z a \| &\geq \| a^* \perp (G^{\cdot} G(a) - z a) \| = \\ &= \| G^{\cdot} (G(a)^* \perp G(a) - z G^*(a^* \perp a)) \| \geq \\ &\geq \| G \|^{-1} \| G(a)^* \perp G(a) - z G^*(a^* \perp a) \|. \end{aligned}$$

(La primera desigualdad es inmediata, la igualdad siguiente es una identidad de no difícil comprobación a partir de las definiciones de las operaciones $*$ y •, y la última desigualdad, consecuencia de ser

$$\| F(w) \| \geq \| F^{-1} \|^{-1} \| w \|$$

para cualquier elemento w de un espacio de Banach y para cualquier biyección lineal continua F de este espacio en otro, y de que

$$\| G^{\cdot -1} \| = \| G^{-1 \cdot} \| = \| G \|$$

por b).)

Pongamos ahora $s = \| a^* \perp a \|$; se tiene: $s \in sp\,(a^* \perp a)$, por ser $a^* \perp a$ positivo, y $s \geqslant (1/2)\, \| a \|^2$ por ser

$$a^* \perp a \geqslant (1/2)\, a^* a \geqslant 0\,;$$

de la primera afirmación, previo I.1, resulta:

$$z\, s \in sp\, (z\, G^* \,(a^* \perp a)),$$

y como $G\,(a)^* \perp G\,(a)$ es un elemento normal de B, obtenemos aplicando I.4:

$$\| G\,(a)^* \perp G\,(a) - z\, G^*\,(a^* \perp a) \| \geqslant d\,(z\, s,\; sp\,(G\,(a)^* \perp G\,(a))).$$

Como $G\,(a)^* \perp G\,(a)$ es positivo, su espectro está contenido en $\mathbb{R}_+$ (conjunto de los números reales no negativos), con lo que

$$\begin{aligned} \| G\,(a)^* \perp G\,(a) - z\, G^*\,(a^* \perp a) \| &\geqslant d\,(z\, s,\, \mathbb{R}_+) = \\ &= s \cdot d\,(z,\, \mathbb{R}_+) \geqslant (1/2)\, \| a \|^2\, d\,(z,\, \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

(Se ha utilizado, finalmente, que la homotecia $w \longrightarrow s\, w$ transforma z en $s\, z$ y $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$.) Enlazando con la desigualdad de partida, previa división por $\| a \|$ (en el caso $a = 0$, la desigualdad que establecemos a continuación es trivial):

$$\| G^* G\,(a) - z\, a \| \geqslant (1/2)\; \| G \|^{-1}\, d\,(z,\, \mathbb{R}_+)\, \| a \|, \quad \forall\, (z,\, a) \in \mathbb{C} \times A.$$

Fijemos $z \notin \mathbb{R}_+$ (en consecuencia $d\,(z,\, \mathbb{R}_+) > 0$); conocidos resultados de la teoría de operadores, nos llevan a concluir, a la vista de la anterior desigualdad, que el elemento $G^* G - z\, I$ del álgebra de Banach BL (A), de los operadores lineales continuos en A, es, o inversible, o interior al conjunto de los no inversibles, con lo que, en cualquier caso, z no podrá pertenecer a la frontera de $sp\,(G^* G)$.

Hemos demostrado así que la forntera de $sp\,(G^* G)$ está contenida en $\mathbb{R}_+$, lo que, si se tiene en cuenta que $sp\,(G^* G)$ es acotado y que $\mathbb{R}_+$ no corta el plano complejo, implica claramente que el propio espectro de $G^* G$ está contenido en $\mathbb{R}_+$.

Siendo $G^* G$ entonces un Jordan-automorfismo de A, cuyo espectro está contenido en $\mathbb{R}_+$, y con más razón en

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) > 0 \}$$

(obsérvese que $0 \notin sp\,(G^* G)$, por ser $G^* G$ inversible), será, en vista de I.3, un auténtico automorfismo, y como por las propiedades a) y c) resulta ser •-simétrico, responde, pues, a la definición de automorfismo •-positivo y el lema queda demostrado.

Podemos ya demostrar el teorema objeto esencial de este trabajo:

Teorema. — Sean A y B C*-álgebras, G un Jordan-isomorfismo de A sobre B. Entonces G se escribe de manera única en la forma $G = G_2 G_1$, donde G_1 es un automorfismo •-positivo de A, y G_2 un Jordan-*-isomorfismo de A sobre B.

Demostración.—Según nuestro lema previo, $G^{\cdot} G$ es un automorfismo •-positivo de A; si existe una descomposición $G = G_2 G_1$ en las condiciones del enunciado (será, en particular, $G_2^{*} = G_2 \Longrightarrow G_2^{\cdot} = G_2^{-1}$), se tendría

$$G^{\cdot} G = G_1^{\cdot} G_2^{\cdot} G_2 G_1 = G_1^{2},$$

con lo que G_1 no podría ser otro que $\sqrt{G^{\cdot} G}$ (en el sentido de I.6) y entonces, obligadamente, $G_2 = G G_1^{-1}$; esto prueba la unicidad de la descomposición, caso de existir, y nos pone en la pista para demostrar la existencia.

En efecto, basta poner

$$G_1 = \sqrt{G^{\cdot} G} \quad \text{y} \quad G_2 = G G_1^{-1};$$

G_1 es, evidentemente, un automorfismo •-positivo de A y la igualdad $G = G_2 G_1$ es trivial; todo se reduce a comprobar que G_2 es un Jordan-*-isomorfismo; ahora bien, G_2 es un Jordan-isomorfismo (téngase en cuenta que G_1^{-1}, siendo automorfismo, es con más razón Jordan-automorfismo), además, como G_1^{-1} es •-simétrico, por serlo G_1, se tiene

$$\left.\begin{aligned} G_2^{\cdot} G_2 &= G_1^{-1} G^{\cdot} G G_1^{-1} = \\ &= G_1^{-1} G_1^{2} G_1^{-1} = I_A \\ G_2 G^{\cdot}_2 &= G G_1^{-1} G_1^{-1} G^{\cdot} = \\ &= G (G_1^{2})^{-1} G^{\cdot} = G (G^{\cdot} G)^{-1} G^{\cdot} = I_B \end{aligned}\right\} \Longrightarrow G_2^{\cdot} = G_2^{-1} \Longrightarrow G_2^{*} = G_2,$$

con lo que, en efecto, G_2 es un Jordan-*-isomorfismo, y el teorema queda demostrado.

III. Corolarios y consecuencias

1. Sean A y B, C^*-álgebras y G un isomorfismo (resp.: antiisomorfismo) de A sobre B. Entonces G se escribe de manera única en la forma $G = G_2 G_1$, donde G_1 es un automorfismo $\bullet$-positivo de A, y G un $*$-isomorfismo (resp.: $*$-antiisomorfismo) de A sobre B.

En efecto, siendo los isomorfismos y los antiisomorfismos Jordan-isomorfismos, se podrá aplicar el teorema de la sección anterior en el que el factor G_2 $(= G\, G_1^{-1})$ tendrá igual carácter que G, por ser G_1^{-1} obligadamente automorfismo.

2. Si dos C^*-álgebras son Jordan-isomorfas (resp.: isomorfas, antiisomorfas), también son Jordan-$*$-isomorfas (resp.: $*$-isomorfas, $*$-antiisomorfas).

Es claro a partir del teorema de la sección II y del anterior corolario.

3. Si G es un Jordan-isomorfismos de C^*-álgebras, es

$$\| G^* G \| = \| G \|^2$$

(en consecuencia:

$$\| G^* \| = \| G^{-1} \| = \| G \|).$$

Demostración.—Sea $G = G_2 G_1$ la descomposición que asegura el teorema de la sección II. Como se vio en la demostración del mismo, es obligadamente $G^* G = G_1^2$, con lo que, aplicando I.7 al automorfismo G_1, se tendrá

$$\| G^* G \| = \| G_1^2 \| = \| G_1^* G_1 \| = \| G_1 \|^2$$

(se ha tenido en cuenta que G_1 es $\bullet$-simétrico, por ser $\bullet$-positivo). Por otra parte, siendo G_2 Jordan-$*$-isomorfismo, es automáticamente isométrico (I.8), con lo que

$$\| G \| = \| G_2 G_1 \| = \| G_1 \|.$$

Comparando las dos igualdades obtenidas resulta

$$\| G^* G \| = \| G \|^2,$$

tal como queríamos.

4. El radio espectral de un Jordan-automorfismo «normal» G de una C*-álgebra (G conmuta con $G^\cdot \Longleftrightarrow$ G conmuta con G*) es igual a $\| G \|$.

Demostración.—Aplicando convenientemente el corolario anterior, se tiene

$$\| G \|^2 = \| G^\cdot G \| = \sqrt{\| (G^\cdot G)^\cdot G^\cdot G \|} = \sqrt{\| G^\cdot G G^\cdot G \|} =$$
$$= \sqrt{\| (G^2)^\cdot G^2 \|} = \| G^2 \|.$$

Y por recurrencia,

$$\| G^{2^n} \| = \| G \|^{2^n},$$

con lo que

$$r(G) = \lim \| G^{2^n} \|^{1/2^n} = \| G \|,$$

tal como afirmábamos.

5. Sean A y B C*-álgebras; G un Jordan-isomorfismo de A sobre B, y $G = G_2 G_1$ la descomposición que garantiza el teorema de la sección II. Entonces, G_2 materializa la distancia de G al conjunto de los Jordan-$*$-isomorfismos de A sobre B (que vale exactamente $\| G \| - 1$).

Para la demostración necesitamos su verificación en el siguiente caso particular:

Lema.—Si H es un automorfismo $*$-positivo de una C*-álgebra A, es

$$\| H - I \| = \| H \| - I.$$

Demostración.—Según I.5, H es de la forma e^D, con D derivación $*$-antisimétrica; si r es un número real, $i\,r\,D$ es una derivación $*$-simétrica y, en consecuencia, $e^{i r D}$ es un $*$-automorfismo, con lo que

$$\| e^{i r D} \| = 1, \quad \forall\, r \in \mathbb{R}$$

(consecuencia particular de I.8); entonces ([1], 1-10-13) D es un elemento hermitiano del álgebra de Banach BL(A), de donde ([1], I-10-17; el resultado se debe a Sinclair) $r(D) = \| D \|$. Si se tiene en cuenta que $sp\,(D)$ contiene únicamente números reales, así como que $sp\,(D)$ es simétrico respecto al origen (la aplicación

$$L \longrightarrow L^* : a \longrightarrow (L\,(a^*))^*$$

es un automorfismo antilineal del álgebra BL (A), con lo que

$$sp\,(L^*) = \overline{sp\,(L)}\,;$$

en consecuencia, como es $D^* = -D$ y $sp\,(D) \subseteq \mathbb{R}$, será

$$sp\,(D) = -\,sp\,(D),$$

concluimos que

$$\| D \| \in sp\,(D).$$

Aplicando el *spectral mapping theorem*, será

$$e^{\| D \|} \in sp\,(e^D),$$

de donde fácilmente

$$\| H \| = \| e^D \| = e^{\| D \|}.$$

Utilizando el desarrollo en serie de la exponencial

$$\| H - I \| = \| e^D - I \| \leqslant e^{\| D \|} - 1 = \| H \| - 1\,;$$

y, como la desigualdad opuesta es evidente, queda demostrado el lema.

Demostración del corolario 5.—Se tiene

$$\begin{aligned} \| G - G_2 \| &= \| G_2\,G_1 - G_2 \| = \| G_2\,(G_1 - I) \| = \\ &= \| G_1 - I \| = \| G_1 \| - 1 = \| G \| - 1 \end{aligned}$$

(se ha aplicado que G_2 es una isometría —I.8— y el lema anterior). Se tiene así que la distancia de G al Jordan-$*$-isomorfismo G_2 vale exactamente $\| G \| - 1$; mientras que, obligadamente, para cualquier Jordan-$*$-isomorfismo F de A sobre B. será

$$\| G - F \| \geqslant \| G \| - \| F \| = \| G \| - 1.$$

6. Sea G un Jordan-automorfismo de una C*-álgebra; las dos afirmaciones siguientes equivalen:

a) G es un Jordan-$*$-automorfismo.

b) G es normal y su espectro está contenido en la circunferencia

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Demostración.—(a) $\Longrightarrow$ (b). Si G es un Jordan-$*$-automorfismo es por definición $G^* = G$, con lo que evidentemente G es normal; además, G es una biyección lineal isométrica (I.8), con lo que el resto de la afirmación (b) se obtiene inmediatamente.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Si G es normal y sus valores espectrales son de módulo uno, aplicando el corolario 4, será $\| G \| = 1$. Si $G = G_2 G_1$ es la descomposición en el sentido del teorema de la sección II, se tendrá

$$\| G_1 \| = \| G \| = 1,$$

por ser G_2 isométrico; pero siendo G_1 $*$-positivo, le podremos aplicar el lema demostrado en la presente sección:

$$\| G_1 - I \| = \| G_1 \| - 1 = 0 \Longrightarrow G_1 = I \Longrightarrow G = G_2,$$

y por tanto G es Jordan-$*$-automorfismo.

7. Sean A y B, C*-álgebras; el conjunto de los Jordan-isomorfismos de A sobre B es uniformemente cerrado en el espacio de Banach BL (A, B) de las aplicaciones lineales continuas de A en B.

Demostración.—Sea $G = \lim G_n$ ($G \in$ BL (A, B)), donde cada G_n es un Jordan-isomorfismo de A sobre B; dado por demostrado, lo que es elemental, que G es un Jordan-homomorfismo de A en B, todo se reduce a ver que es biyectivo; pero esto queda patente si se tiene en cuenta que la sucesión convergente $\{G_n\}$ es necesariamente acotada, que

$$\| G_n^{-1} \| = \| G_n \|$$

(corolario 3) y por tanto la sucesión $\{G_n^{-1}\}$ es igualmente acotada, lo que, junto con la desigualdad

$$\| G_n^{-1} - G_m^{-1} \| \leqslant \| G_n^{-1} \| \| G_m^{-1} \| \| G_n - G_m \|,$$

muestra que, en realidad, la sucesión $\{G_n^{-1}\}$ es de Cauchy y por tanto convergente. Si es F su límite, es claro que $G F = I_B$ y $F G = I_A$, lo que demuestra el carácter biyectivo de G.

Nota.—El conjunto de los isomorfismos de A sobre B (A y B,

(C^*-álgebras) es claramente un cerrado relativo al conjunto de los Jordan-isomorfismos de A sobre B, con lo que, en vista del anterior corolario, también es cerrado de BL (A, B). Más sorprendente es el hecho de que también el conjunto de los Jordan-isomorfismos de A sobre B, que no son isomorfismos, es cerrado en BL (A, B), consecuencia inmediata del corolario anterior y de que el conjunto de los isomorfismos de A sobre B es también *abierto* relativo al conjunto de los Jordan-isomorfimos, lo que se pone de manifiesto a continuación:

Si no existen isomorfismos de A sobre B, no hay nada que demostrar; en caso contrario, sea G_0 un tal isomorfismo. La aplicación $F \longrightarrow G_0 F$ es un homeomorfismo del conjunto de los Jordan--automorfismos de A sobre el conjunto de los Jordan-isomorfismos de A sobre B, que transforma el conjunto de los automorfismos de A en el conjunto de los isomorfimos de A sobre B; hemos reducido así el problema al caso A = B. Sea entonces F un automorfismo de A y sea H un Jordan-automorfismo de A en la situación

$$\| F - H \| < \| F^{-1} \|^{-1},$$

será

$$\| I - F^{-1} H \| < 1,$$

con lo que

$$sp\,(F^{-1} H) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}:$$

aplicando I.3, $F^{-1} H$ será un automorfismo, lo que obliga a que H lo sea igualmente; así, pues, en el conjunto de los Jordan-automorfismos de A, la bola abierta de centro F y radio $\| F^{-1} \|^{-1}$ contiene únicamente automorfismos, lo que prueba que, en efecto, el conjunto de los automorfismos de A es un abierto relativo al primer conjunto.

8. Si G es un Jordan-automorfismo $*$-simétrico de una C^*-álgebra, se verifica

$$sp\,(G) \subseteq \mathbb{R}.$$

En efecto, basta considerar que $sp\,(G^2) \subseteq \mathbb{R}_+$, según el lema de la sección II, y que

$$sp\,(G^2) = \{z^2 \mid z \in sp\,(G)\}\ .$$

(*spectral mapping theorem*).

9. Sean A y B, C^*-álgebras y G un Jordan-homomorfismo de A sobre B; G se escribe de manera única en la forma $G = G_2 G_1$, donde G_1 es un Jordan-$*$-homomorfismo de A sobre B, y G_2 un automorfismo $\bullet$-positivo de B.

Demostración.—G es automáticamente continuo ([7], introducción; [8], 5.8) y por tanto *Ker* (G) es un Jordan-ideal cerrado de A. Pero es sabido ([8], teorema 5.3) que todo Jordan-ideal cerrado de una C^*-álgebra es auténtico ideal, con lo que ([12], 1.8.2) A/*Ker* (G) es una nueva C^*-álgebra. Sea $G = H \cdot F$ la descomposición canónica del Jordan-epimorfismo G, donde F es la sobreyección canónica de A sobre A/*Ker* (G), que es un auténtico $*$-epimorfismo, y H el Jordan-isomorfismo de A/*Ker* (G) sobre B inducido por G. Si aplicamos a H^{-1} el teorema de la sección II, tendremos una única posible escritura $H = H_2 H_1$, con H_1 Jordan-$*$-isomorfismo de A/*Ker* (G) sobre B, y H_2 automorfismo $\bullet$-positivo de B. Basta entonces poner $G_1 = H_1 F$ y $G_2 = H_2$, para tener demostrada la existencia de la descomposición propuesta en el enunciado.

En cuanto a la unicidad, sea $G = G'_2 G'_1$ otra posible descomposición en las mismas condiciones del enunciado: evidentemente,

$$Ker\,(G'_1) = Ker\,(G) \quad \text{y} \quad H = G'_2\, L,$$

donde L es el Jordan-isomorfismo de A/*Ker* (G) sobre B inducido por G'_1; L es entonces claramente un Jordan-$*$-isomorfismo y G'_2 es, por hipótesis, un automorfismo $\bullet$-positivo de B. Como $H = H_2 H_1$ era la única posible descomposición de H en estas condiciones, será

$$G'_2 = H_2\,(= G_2)$$

y obligadamente

$$G'_1 = G_1 = G_2'^{-1}\, G = G_2^{-1}\, G.$$

Apéndice

Se habrá podido apreciar, a lo largo de todo el trabajo, la importancia que ha tenido, para el desarrollo del mismo, el resultado I-3, debido a Sinclair. Merece la pena notar que dicho resultado, en el caso de C^*-álgebras, se puede establecer con independencia de la aportación de Sinclair, si bien nunca lo hemos visto publicado.

Para ello, hagamos un análisis de los antecedentes del problema, que nos llevarán a comprobar que la aportación esencial de Sinclair es:

1. ([6], lema 3.2). *Toda Jordan-derivación continua de un álgebra de Banach deja invariantes los ideales primitivos,*

cuya veracidad para C*-álgebras estableceremos de manera elemental, incluso sin la hipótesis de continuidad.

Dichos antecedentes son:

2. ([10], teorema 3.1). Toda Jordan-derivación de un álgebra prima es derivación.

Que lleva implícitamente (ver demostración de [6], teorema 3.3):

3. Toda Jordan-derivación de un álgebra semisimple, que deje invariantes los ideales primitivos, es derivación.

4. (Implícitamente en [9], III.9.4, lema 8 (ii).) Todo automorfismo continuo de un «álgebra no asociativa normada completa» A (espacio de Banach complejo dotado canónicamente de una aplicación bilineal continua $(a, b) \longrightarrow a \cdot b$ de A × A en A; los conceptos de automorfismo y derivación de una tal álgebra se explican por sí solos) cuyo espectro esté contenido en

$$\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid |\arg(z)| < 2\pi/3\}$$

es de la forma e^D, con D derivación continua.

Estos antecedentes, junto con el resultado fundamental de Sinclair (1), llevan ya de manera elemental a:

5. ([6], teorema 3.3). Toda Jordan-derivación continua de un álgebra de Banach semisimple es derivación ((3) y (1).)

6. Todo Jordan-automorfismo, de un álgebra de Banach compleja semisimple cuyo espectro esté contenido en

$$\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid |\arg(z)| < 2\pi/3\}$$

es automorfismo. (Se aplicará (4) al álgebra de Jordan subyacente y posteriormente (5); I.3 aparece como caso particular.)

Analizado el problema, veamos su tratamiento en el caso de C*-álgebras.

Lema.—Toda Jordan-derivación de una C*-álgebra deja invariantes los ideales biláteros cerrados.

Demostración (idéntica a la hecha para derivaciones en [11], 2. proposición). Sean M y D, respectivamente, el ideal y la Jordan-derivación en cuestión, y sea $m \in M$. Se tiene

$$m = m_1^2 - m_2^2 + i\,(m_3^2 - m_4^2), \qquad \text{con} \qquad m_i \in M \;\; (i = 1, 2, 3, 4),$$

y como es

$$D\,(m_i^2) = D\,(m_i \perp m_i) = 2\,m_i \perp D\,(m_i) = m_i\,D\,(m_i) + D\,(m_i)\,m_i \in M,$$

el lema queda demostrado.

Como todo ideal primitivo es cerrado, (1) se verifica en nuestro caso, aun sin la hipótesis de continuidad; teniendo en cuenta, finalmente, que toda C*-álgebra es semisimple y (3), resulta:

Teorema.—Toda Jordan-derivación de una C*-álgebra es derivación.

Bibliografía

[1] Bonsall, F. F. y Duncan, J.: *Complete normed algebras.* Springer Verlag, 1973.

[2] Jacobson, N.: *Structure and representations of Jordan algebras.* American Mathematical Society, 1968.

[3] Kadison, R. V.: *Isometries of operator algebras.* «Annals of Mathematics», 54, 2, 325-338, 1951.

[4] Palacios, A. R.: *Contribución a la teoría de las C*-álgebras con unidad.* Tesis. Publicaciones de la Universidad de Granada, 1974.

[5] Sakai, S.: *C*-algebras and W*-algebras.* Springer-Verlag, 1971.

[6] Sinclair, A. M.: *Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebras.* «Proc. Amer. Math, Soc.», 24, 209-214, 1970.

[7] — — *Jordan automorphisms on a semisimple Banach algebra.* «Proc. Amer. Math. Soc.», 25, 526-528, 1970.

[8] Civin, P. y Yood, B.: *Lie and Jordan structures in Banach algebras.* «Pacific J. of Math.», 15, 3, 775-797, 1965.

[9] Dixmier, J.: *Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien.* Gauthier-Villars, 1969.

[10] HERSTEIN, I. N.: *Jordan derivations of prime rings.* «Proc. Amer. Math. Soc.», 8, 1104-1110, 1957.

[11] MILES, P.: *Derivations on B^*-algebras.* «Pacific J. of Math.», 14, 1359-1366, 1964.

[12] DIXMIER, J.: *Les C^*-álgebres te leurs representations.* Gauthier-Villars, 1969.