20

SOBRE EL ESPECTRO DE DERIVACIONES Y AUTOMORFISMOS DE LAS ALGEBRAS DE BANACH

por

Camilo Aparicio del Prado y Angel Rodríguez Palacios

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXXIX, cuadernos 1.° y 2.°)

MADRID - 1985

Sobre el espectro de derivaciones y automorfismos de las álgebras de Banach

Por Camilo Aparicio del Prado y Angel Rodríguez Palacios

Recibido: 11 diciembre 1982

Presentado por el académico numerario A. Dou

En este trabajo damos una condición necesaria y suficiente para que un compacto de $\mathbb{C}$ sea el espectro de una derivación (respectivamente un automorfismo) de un álgebra de Banach compleja de producto no cero. Imponiendo una débil perfección algebraica adicional, automáticamente satisfecha si el álgebra es semiprima, se obtiene una mayor información sobre el espectro, que en el caso de una derivación implica que el cero está en la envolvente convexa del mismo. La técnica empleada consiste en expresar la condición para que un operador lineal sea una derivación (respectivamente un automorfismo) de un álgebra A mediante condiciones que han de satisfacer ciertos operadores lineales asociados al dado sobre el espacio de las aplicaciones bilineales y continuas de $A \times A$ en A. Al proceder así tan sólo se utiliza que el producto de A es una aplicación bilineal y continua de $A \times A$ en A, lo que permite expresar los resultados en términos de álgebras no asociativas.

Definición 1. Un *álgebra A* es un par ordenado (X, ψ) en que X es un espacio vectorial real o complejo y ψ es una aplicación bilineal de $X \times X$ en X; cuando no haya lugar a confusión notaremos xy en lugar de $\psi(x, y)$ para x e y en X. Si además X es de Banach y ψ es continua, A se llama un *álgebra normada completa*.

Una aplicación lineal D de X en X verificando:

$$D(xy) = xD(y) + D(x)y \quad (x, y \in X)$$

se llama una *derivación* del álgebra A.

Una biyección lineal F de X sobre X verificando:

$$F(xy) = F(x)F(y) \quad (x, y \in X)$$

se llama un *automorfismo* del álgebra A.

Definición 2. Sea X un espacio de Banach complejo, $BL(X)$ el álgebra de Banach de los operadores lineales continuos en X y $T \in BL(X)$. Sea n un número natural, $n \geqslant 2$, e Y_n el espacio de Banach de las aplicaciones n-lineales y continuas de $X \times \overset{(n}{\cdots} \times X$ en X. Definimos los siguientes operadores:

$$T_0^n(f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$
$$T_i^n(f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, T(x_i), \ldots, x_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

donde $f \in Y_n$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Proposición 3. En el ambiente de la definición anterior las siguientes afirmaciones son de fácil comprobación:

i) $T_0^n, T_i^n \in BL(Y_n)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
ii) La aplicación de $BL(X)$ en $BL(Y_n)$ que a T le hace corresponder T_0^n es homomorfismo que conserva la unidad.
iii) Para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la aplicación de $BL(X)$ en $BL(Y_n)$ que a T le hace corresponder T_i^n es un antihomomorfismo que conserva la unidad.
iv) $\{T_0^n, T_1^n, T_2^n, \ldots, T_n^n\}$ es un subespacio conmutativo del álgebra $BL(Y_n)$.
v) T es una derivación del álgebra $A = (X, \psi)$ si, y sólo si:

$$T_0^2(\psi) = (T_1^2 + T_2^2)(\psi)$$

vi) En el caso en que T sea biyectiva, T es un automorfismo del álgebra $A = (X, \psi)$ si, y sólo si:

$$T_0^2(\psi) = T_1^2 T_2^2(\psi).$$

Teorema 4. Sea D una derivación continua y F un automorfismo continuo de un álgebra $A = (X, \psi)$ compleja normada completa con producto no cero, entonces:

i) Existen $\lambda, \mu \in Sp(D)$ tales que $\lambda + \mu \in Sp(D)$.
ii) Existen $\lambda, \mu \in Sp(F)$ tales que $\lambda\mu \in Sp(F)$

Donde $Sp(\,.)$ denota el espectro del operador en cuestión en el álgebra de Banach $BL(X)$.

Demostración. Por ser D derivación del álgebra A, es:

$$D_0^2(\psi) = (D_1^2 + D_2^2)(\psi)$$

y como $\psi \neq 0$, se tiene que el operador $D_0^2 - (D_1^2 + D_2^2)$ no es inyectivo y, por tanto, $0 \in Sp(D_0^2 - (D_1^2 + D_2^2))$. Como $\{D_0^2, D_1^2, D_2^2\}$ es un subconjunto conmutativo del álgebra $BL(Y_2)$, en virtud de ([2], teorema 11.23) obtenemos:

$$Sp(D_0^2 - (D_1^2 + D_2^2)) \subset Sp(D_0^2) - Sp(D_1^2) - Sp(D_2^2)$$

y teniendo en cuenta ii) y iii) de la proposición 3, y utilizando ([1], proposición 4, pág. 20), se tiene:

$$Sp(D_0^2) \subset Sp(D) \quad ; \quad Sp(D_1^2) \subset Sp(D) \quad \text{y} \quad Sp(D_2^2) \subset Sp(D)$$

con lo que concluimos:

$$0 \in Sp(D) - Sp(D) - Sp(D)$$

quedando así demostrado i).

La demostración de ii) es análoga utilizando que $F_0^2(\psi) = F_1^2 F_2^2(\psi)$.

Veamos a continuación que la información que proporciona el teorema 4 respecto al espectro de una derivación o un automorfismo continuos es óptima en la hipótesis de dicho teorema.

Teorema 5. Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ verificando que existen $\lambda, \mu \in K$ con $\lambda + \mu \in K$ (respectivamente $\lambda\mu \in K$ y $0 \notin K$). Entonces existe un álgebra de Banach A de producto no cero y una derivación continua (respectivamente un automorfismo continuo) de A tal que su espectro sea K.

Demostración. Sea B el álgebra compleja normada de dimensión 3 cuya tabla de multiplicación referida a una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ viene dada por:

$$u_1u_2 = u_2u_1 = u_3 \quad \text{y} \quad u_iu_j = 0 \quad \text{si} \quad (i, j) \neq (1, 2), (2, 1)$$

El operador lineal D (respectivamente F) de B en B cuya expresión referida a dicha base viene dada por:

$$D(u_1) = \lambda u_1 \quad , \quad D(u_2) = \mu u_2 \quad \text{y} \quad D(u_3) = (\lambda + \mu)u_3$$

$$(\text{respectivamente } F(u_1) = \lambda u_1 \quad , \quad F(u_2) = \mu u_2 \quad \text{y} \quad F(u_3) = \lambda\mu u_3)$$

es una derivación (respecto un automorfismo) de B.

Sea C el álgebra de Banach $C(K)$ con producto cero y T el operador de $C(K)$ en $C(K)$ definido por:

$$T(f)(z) = zf(z) \quad (z \in K, f \in C(K))$$

claramente T es lineal y continuo y obviamente es una derivación (respectivamente un automorfismo, pues $0 \notin K$) de C. Además, como:

$$(T - \lambda I)(f)(z) = (z - \lambda)f(z) \quad (z \in K, f \in C(K))$$

es claro que $T - \lambda I \in inv\,(BL(C(K)))$ si, y sólo si, $\lambda \notin K$, es decir, $Sp(T) = K$.

Sea A el álgebra producto $B \times C$ con operaciones definidas puntualmente y norma del máximo. Entonces A es un álgebra de Banach de producto no cero y el operador de A en A dado por:

$$(x, y) \to (D(x), T(y)) \quad (\text{respectivamente } (x, y) \to (F(x), T(y)))$$

es una derivación continua (respectivamente un automorfismo continuo) de A cuyo espectro es K.

Si en el teorema 4 exigimos una débil perfección algebraica adicional, obtenemos una considerable mayor información acerca del espectro.

Teorema 6. Sea D una derivación continua y F un automorfismo continuo de un álgebra A compleja normada completa con producto no cero. Supongamos además que el anulador de A:

$$An(A) = \{a \in A : aA = Aa = \{0\}\}$$

verifica la condición:

$$An(A) \cap A^2 = \{0\}$$

siendo $A^2 = \{xy : x, y \in A\}$, entonces:

i) Si n es un natural, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{Sp}(D)$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \in Sp(D)$.

ii) Si n es un natural, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in Sp(F)$ tales que $\lambda_1 \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n \in Sp(F)$.

Demostración. Notemos por f_2 el producto del álgebra A, f_2 es una aplicación bilineal continua y no nula de $A \times A$ en A verificando:

$$D(f_2)(x_1, x_2) = f_2(D(x_1), x_2) + f_2(x_1, D(x_2))$$

y

$$F(f_2)(x_1, x_2) = f_2(F(x_1), F(x_2))$$

Sea n un natural, $n \geqslant 3$, y supongamos que existe una aplicación f_{n-1} $(n-1)$-lineal continua y no nula de $A \times \overset{(n-1}{\cdots} \times A$ en A verificando:

$$\begin{gathered} f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in A^2, \text{ y} \\ D(f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})) = f_{n-1}(D(x_1), x_2, \ldots, x_{n-1}) + \\ + f_{n-1}(x_1, D(x_2), \ldots, x_{n-1}) + \cdots + f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, D(x_{n-1})) \end{gathered}$$

para $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$. Consideremos ahora las aplicaciones n-lineales y continuas de $A \times \overset{(n}{\cdots} \times A$ en A.

$$\left.\begin{aligned} g_n(x_1, \ldots, x_n) &= f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n \\ h_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_n f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}\right. \quad (x_1, \ldots, x_n \in A)$$

al menos una de ellas es no nula, pues en caso contrario:

$$f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A^2 \cap An(A) = \{0\}$$

y f_{n-1} sería nula. Denotemos por f_n dicha aplicación y supongamos, por ejemplo, que $f_n = h_n$. Entonces tenemos:

$$D(f_n(x_1, ..., x_n) = D(x_n f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})) = x_n D(f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})) +$$
$$+ D(x_n) f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = x_n(f_{n-1}(D(x_1), ..., x_{n-1}) + \cdots$$
$$+ f_{n-1}(x_1, ..., D(x_{n-1})) + D(x_n) f_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = f_n(D(x_1), ..., x_{n-1}, x_n) +$$
$$\cdots + f_n(x_1, ..., D(x_{n-1}), x_n) + f_n(x_1, ..., x_{n-1}, D(x_n))$$

Análogamente se comprueba:

$$F(f_n(x_1, ..., x_n)) = f_n(F(x_1), ..., F(x_n))$$

Así, para cada natural n, $n \geqslant 2$, hemos probado la existencia de una aplicación f_n, n-lineal continua y no nula de $A \times \overset{(n}{\cdots} \times A$ en A tal que:

$$D_0^n(f_n) = (D_1^n + D_2^n + \cdots + D_n^n)(f_n)$$

$$F_0^n(f_n) = F_1^n F_2^n \cdot \cdots \cdot F_n^n(f_n)$$

A partir de estas dos igualdades la demostración se concluye de manera análoga a la del teorema 4.

Corolario 7. Sea D una derivación continua de un álgebra A compleja normada completa con producto no cero y verificando:

$$An(A) \cap A^2 = \{0\}$$

entonces $0 \in$ co $Sp(D)$ (envolvente convexa del espectro de D).

Demostración. Como para todo natural n existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in Sp(D)$, tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \in Sp(D)$, al ser $|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n| \leqslant r(D)$ (radio espectral de D) y:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n} \in \text{co } Sp(D)$$

se deduce que 0 es adherente a co $Sp(D)$ y como la envolvente convexa de un compacto de $\mathbb{C}$ es un compacto, concluimos $0 \in$ co $Sp(D)$.

Sería interesante si al igual que en el caso del teorema 4, la información que proporciona el teorema 6 es óptima. Es decir, dado un compacto K de $\mathbb{C}$ verificando la condición i) (respectivamente ii) y $0 \notin K$) del teorema 6, nos preguntamos por la existencia de un álgebra A en las hipótesis de dicho teorema y de una derivación (respectivamente un automorfismo) de A cuyo espectro sea K. En el caso particular de que el compacto K verifique que existe un complejo λ tal que $\{\lambda, 2\lambda, -\lambda\} \subset K$ (respectivamente $\{\lambda, 1/\lambda, \lambda^2\} \subset K$ y $0 \notin K$)

puede adaptarse la manera de proceder en el teorema 5 para ver que la respuesta es afirmativa. Concretamente, sea B el álgebra compleja normada de dimensión 3 cuya tabla de multiplicar referida a una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ viene dada por:

$$u_1u_2 = u_2u_1 = u_3 \quad ; \quad u_3u_3 = u_1 \quad \text{y} \quad u_iu_j = 0 \quad \text{si} \quad (i, j) \neq (1, 2), (2, 1), (3, 3)$$

El operador lineal D (respectivamente F) de B en B cuya expresión referida a dicha base viene dada por:

$$D(u_1) = 2\lambda u_1 \quad , \quad D(u_2) = -\lambda u_2 \quad \text{y} \quad D(u_3) = \lambda u_3$$

$$(\text{respectivamente } F(u_1) = \lambda^2 u_1 \quad , \quad F(u_2) = 1/\lambda u_2 \ \text{y} \ F(u_3) = \lambda u_3)$$

es una derivación (respectivamente un automorfismo) de B. Como el álgebra B verifica $An(B) = \{0\}$, por un procedimiento análogo al del teorema 5 se puede encontrar un álgebra de Banach A de producto no cero verificando $An(A) \cap A^2 = \{0\}$ (la condición $An(B) = \{0\}$ fuerza que en el álgebra $A = B \times C$ se tenga $An(A) \cap A^2 = \{0\}$) y una derivación continua (respectivamente un automorfismo continuo) de A tal que su espectro sea K.

BIBLIOGRAFIA

[1] BONSALL, F. F., DUNCAN, J.: *Complete normed algebras*, Springer-Verlag (1973).
[2] RUDIN, W.: *Funtional Analysis*, McGraw-Hill (1973).

Departamento de Teoría de Funciones.
Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.