Actas de las V Jornadas Matemáticas
Hispano-Lusitanas, Aveiro (1978), 179-200

# RANGO NUMERICO Y DERIVACIONES CERRADAS DE LAS ALGEBRAS DE BANACH

Angel Rodríguez Palacios.
Dpto. de Teoría de Funciones.
Universidad de Granada.

## a b s t r a c t

Let K be a non-empty, compact, convex subset of $\mathbb{C}$ ; Ea(K) the extremal algebra of K, and u the generator of Ea(K). It is known that the pair (Ea(K),u) is characterized by the facts: V(u) = K and tha the mapping $\{1,u\} \longrightarrow \{1,a\}$ ( a any element of any unital complex Banach algebra A verifying $V(a) \subseteq K$ ) is extended to give an continuous homomorphism with norme one (that we shall note $f \rightarrow f(a)$), from Ea(K) into A.

The mapping $\{1,u\} \rightarrow \{0,1\}$ is extended to the smallest closed derivation of Ea(K) whose domain we shall note $Ea^1(K)$ (Section II); if $f \in Ea^1(K)$, f' will denote the image of f by this derivation.

We proof (Theorem II-9): If A is an unital complex Banch algebra, X an unital Banach A-module, D a closed derivation of A taking values in X, a an element of the domain of D such that $V(a) \subseteq K$ , $f \in Ea^1(K)$, then f(a) belongs to the domain of D and $\|D(f(a))\| \leq \|f'\| \, \|D(a)\|$ .

Really this theorem is an easy consequence of more general techniques (Theorems III-5 and III-7) which are used to obtain interesting bounds for the derivatives of functions defined by the holomorphic functional calculus for a single variable (proposition IV-1), from which is obtained the inequality (Corollary IV-3): $\|f(b)-f(a)\| \leq \|f'\| \, \|b-a\|$ ($f \in Ea^1(K)$, a,b elements of an unital complex Banach algebra, not necessarily commuting, in the conditions $V(a), V(b) \subseteq K$).

## I. Ideas previas sobre el álgebra extremal de una parte convexo-compacta de $\mathbb{C}$.

Este trabajo se enmarca dentro de la teoría de "rango numérico en álgebras de Banach unitales", cuyos conceptos, resultados, terminología y símbolos pueden verse en [2] y [3].

Si a es un elemento de un álgebra de Banach unital, V(a) designará el rango numérico del elemento a.

El concepto de álgebra extremal nace del siguiente teorema de Bollobás:

1. Teorema ([1], theorem; ver [3] , pag 61, theorem 9)

Sea K una parte convexo-compacta no vacía de $\mathbb{C}$; existe un par (B,u), donde B es un álgebra de Banach compleja unital y u es un elemento de B tal que la subálgebra cerrada engendrada por $\{1,u\}$ es B, verificando:

a) V(u) = K

b) Si a es un elemento de cualquier álgebra de Banach compleja unital en la situación $V(a) \subseteq K$, la aplicación $\{1,u\} \to \{1,a\}$ se extiende en un homomorfismo continuo (evidentemente único) de B en A de norma uno.

Una consecuencia evidente del teorema es la unicidad del par (B,u) salvo isomorfismos isométricos, razón por la que a dicho par (o bien, por abuso de lenguaje, a su primera componente) se le conoce con el nombre de "álgebra extremal de K" y se nota $Ea(K)$; a u se le llama "el generador" de $Ea(K)$.

El hecho, evidente a partir del teorema, de que $Ea(K)$ es conmutativa y Sp(u)=K (Sp:espectro) junto con el hecho de ser $Ea(K)$

semisimple (esto no es elementalmente deducible del teorema de Bollobás pero sí, de una concreta materialización de $E_\alpha(K)$ como álgebra de funciones debida a Crabb, Duncan y Mc Gregor [6] ; ver [3], págs.: 53-61), permite identificar $E_\alpha(K)$, por medio del homomorfismo de Gelfand ([4] , pag. 82 theorem 4; pag. 98 theorem 2), con un álgebra de funciones continuas en K con valores complejos de manera que la unidad de $E_\alpha(K)$ se identifica con la función constantemente igual a uno y "el generador" u pasa a ser la función $z \to z$ de K en $\mathbb{C}$. Considerada así $E_\alpha(K)$ como álgebra de funciones continuas en K, se tendrá:

2.- a) La norma de $E_\alpha(K)$ mayora a la del supremo

b) $E_\alpha(K)$ contiene las restricciones a K de las funciones holomorfas en un entorno de K.

Sea $f \in E_\alpha(K)$ y a un elemento de un álgebra de Banach compleja unital A en la situación $V(a) \subseteq K$; notaremos $f(a)$ $(\in A)$ a la imagen de f por el homomorfismo que asegura el teorema de Bollobás. Como por dicho teorema es

$$\| f(a) \| \leq \| f \|$$

se tendrá evidentemente:

3. <u>Proposición</u>.- Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $A_K = \{a \in A \ / \ V(a) \subseteq K\}$ (que es una parte convexo-cerrada de A); para cada elemento f de $E_\alpha(K)$, pongamos $\hat{f}: a \to f(a)$ de $A_K$ en A; se verifica:

a) La convergencia $\{f_n\} \to f$ en la topología de la norma de $E_\alpha(K)$ fuerza la convergencia $\{\hat{f}_n\} \to \hat{f}$ uniformemente en $A_K$

b) En consecuencia, si $f \in E_\alpha(K)$, $\hat{f}$ es una función continua de $A_K$ en A(Tómese f como límite en $E_\alpha(K)$ de polinómios y aplíquese (a)).

Para la demostración del resultado fundamental de nuestro trabajo (teorema III.5) necesitaremos un resultado de Browder [5] que paso a exponer.

Pongamos $\omega(z) = \sup \{ |e^{wz}| / w \in K \}$ $(z \in \mathbb{C})$ y sea D(K) el conjunto de las funciones enteras $\emptyset$ tales que $\|\emptyset\| = \sup \{\omega(z)^{-1}|\emptyset(z)| \; / \; z \in \mathbb{C} \} < +\infty$. $(D(K), \| \; \|)$ es un espacio de Banach, y se verifica:

<u>4. Teorema</u> ([5] , ver [3] pág. 59 theorem 5 y pág. 64 remark 2).-

(a) $\emptyset \in D(K) \Rightarrow \emptyset' \in D(K)$ y la aplicación $d: \emptyset \to \emptyset'$ es un operador lineal continuo en D(K).

(b) D(K) se identifica con el dual de Ea(K) de manera que es $d = L_u^*$ ($L_u : a \to ua$ de Ea(K) en Ea(K); u: "el generador" de Ea(K)).

## II. <u>La derivación intrínseca de Ea(K)</u>.

Dada un álgebra A y un A-módulo bilátero X, entenderemos por <u>derivación de A con valores en X</u> una aplicación lineal D definida en una subálgebra (dom(D)) de A, tomando valores en X y verificando $D(ab) = a\,D(b) + D(a)b$, $\forall a,b \in \mathrm{dom}(D)$. Cuando se tenga X= A hablaremos simplemente de una derivación de A.

Sea K una parte convexo-compacta de $\mathbb{C}$ con más de un elemento (el caso de reducirse K a un sólo punto supone excepcionalidad -- para el tratamiento aunque trivialidad para la certeza de los resultados por ser entonces $Ea(K) = \mathbb{C}$): Ea(K) contiene el álgebra de las funciones polinómicas que es, entonces, isomorfa al álgebra de los polinómios formales con coeficientes complejos con lo que la aplicación $P \to P'$ (P: función polinómica) es una derivación de Ea(K).

1. Lema.- La derivación $P \to P'$ de Ea(K) es precerrada.

Demostración.- Sea $\{P_n\} \to 0$, $\{P'_n\} \to f$ en Ea(K); Para cada par de puntos distintos z,w de K pongamos:

$g_n(t) = P_n\ (z + t(w-z))$, $\quad h(t) = (w-z)\ f\ (z + t(w-z)) \quad (0 \leq t \leq 1)$;

se tendrá en vista de I2.a, $\{g_n\} \to 0$ y $\{g'_n\} \to h$ uniformemente en $[0,1]$ con lo que un clásico teorema (ver, por ejemplo, [8] pag. 152- teorema 7.17) nos asegura: $h \equiv 0 \Rightarrow f = 0$.

2. Definición.- El cierre de la derivación precerrada $P \to P'$ de Ea(K) es una derivación cerrada de Ea(K) que llamaremos "la derivación intrínseca" de Ea(K), su dominio se notará $Ea^1(K)$, si $f \in Ea^1(K)$ $f'$ designará la imagen de f por la derivación intrínseca de Ea(K). $Ea^1(K)$ con la norma $\|f\|_1 = \|f\| + \|f'\|$ es un álgebra de Banach unital que contiene densamente al álgebra de las funciones polinómicas en K.

El dominio de la n-ésima iteración de la derivación intrínseca de Ea(K) se notará $Ea^n(K)$ y, para cada elemento f del mismo, $f^{(n}$ designará su imagen por dicha n-ésima iteración. Pondremos $Ea^{\infty}(K) = \bigcap_{n \in N} Ea^n(K)$. $Ea^n(K)$ con la norma

$\|f\|_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\|f^{(k}\|}{k!}$ es un álgebra normada unital; la complitud de esta álgebra así como la densidad en ella de las funciones polinómicas requiere previamente establecer la posibilidad de "integrar" de manera continua en Ea(K); ésta y otras cuestiones, relacionadas con la derivación intrínseca de Ea(K), se resumen a continuación:

3. Proposición (a) $Ea^{\infty}(K)$ contiene las restricciones a K de todas las funciones holomorfas en un entorno de K. Si f es una tal función, se tiene: $(f / K)^{(n} = f^{(n} / K \quad (n \in N)$ donde en el segundo

miembro la derivación se entiende en el sentido usual para funciones holomorfas.

(b) El núcleo de la derivación intrínseca de $Ea(K)$ se reduce a los múltiplos escalares de la unidad.

(c) Sea $z \in K$, $g \in Ea(K)$; la ecuación

$$\left.\begin{array}{l} f' = g \\ f(z) = 0 \end{array}\right\} \quad ( f \in Ea^1(K) )$$ admite una única solución $I_z(g)$; $I_z$ es un operador continuo en $Ea(K)$ y $\| I_z^n \| = \dfrac{\|( u - z )^n\|}{n!}$ ( u: "el generador" de $Ea(K)$ , $n \in N$ ).

(d) $(Ea^n(K), \| \|_n)$ es un álgebra de Banach unital conteniendo densamente el álgebra de las funciones polinómicas en K.

Veamos previamente un lema:

<u>4.Lema.</u>- Sea $z \in K$, P un polinomio verificando $P^{(i}(z) = 0$ ( $0 \leq i \leq n-1$ ) y a un elemento,de un álgebra de Banach compleja unital, tal que $V(a) \subseteq K$; es:

$$\| P(a) \| \leq \frac{\| P^{(n} \|}{n!} \|( a - z )^n\|$$ ( la norma de $P^{(n}$ tomada en $Ea(K)$ ).

<u>Demostración</u>.- $V(z + t(a - z)) \subseteq K$ ( $0 \leq t \leq 1$ ), con lo que, por el <u>teorema I.1</u> , será: $\| P^{(n}(z + t(a - z)) \| \leq \| P^{(n} \|$ utilizando la fórmula ( comprobable por integración por partes e inducción ):

$$P(a) = \frac{(a - z)^n}{(n - 1)!} \int_0^1 (1 - t)^{n-1} P^{(n}(z + t(a - z))dt$$ , se tiene:

$$\| P(a) \| \leq \frac{\| P^{(n} \|}{(n - 1)!} \|(a - z)^n \| \int_0^1 (1 - t)^{n-1} dt \quad .$$

Demostración de la proposición 3.-

de (a).- Si f es una función holomorfa en un entorno de K, todo se reduce a demostrar que $f/K \in Ea^1(K)$ y $(f/K)' = f'/K$ ; el resto es una sencilla inducción. Pero como la derivación intrínseca de Ea(K) es cerrada y de dominio denso, por [7]-teorema III.3, es $f(u) \in Ea^1(K)$ y la imagen de f(u) por la derivación intrínseca es ( [7]-nota III.5 ) f'(u) ( f(u) y f'(u) en el sentido del cálculo funcional holomorfo ); que f(u) y f'(u) coinciden, respectivamente, con f/K y f'/K es de comprobación elemental.

de (b).- Sea $f \in Ea^1(K)$ tal que $f' = 0$ ; se tendrá $\{P_n\} \rightarrow f$ , $\{P_n'\} \rightarrow 0$ en Ea(K) para una cierta sucesión de funciones polinómicas $\{P_n\}$ . Un razonamiento análogo al de la demostración del lema 1, termina la prueba.

de (c).- La unicidad de solución de la ecuación propuesta es consecuencia de (b). En cuanto a la existencia, empecemos considerando g de tipo polinómico y sea $I_z(g)$ el único polinomio primitivo de g que se anula en z; el lema 4 ( particularizado en $n = 1$ , $a = u$ ) da: $\| I_z(g) \| \leq \|g\| \, \|u - z\|$ , donde las normas de $I_z(g)$ y de g se consideran en Ea(K). La aplicación lineal y continua $I_z$ definida en la subálgebra densa de las funciones polinómicas se extiende de manera continua, con igual nombre, a la totalidad de Ea(K) siendo $I_z(g)$ ( para g arbitrario en Ea(K) ) una solución de la ecuación propuesta.

Si g ( $\in$ Ea(K) ) es polinómica, el lema 4 permite escribir

$\| I_z^n(g) \| \leq \frac{\|g\|}{n!} \|(u - z)^n\|$ , desigualdad que, por continuidad,

valdrá para g arbitraria en Ea(K) con lo que será

$\| I_z^n \| \leq \dfrac{\|(u-z)^n\|}{n!}$ ; la igualdad resulta de considerar que

$$I_z^n(1) = \frac{(u-z)^n}{n!} .$$

de (d).- Sea $\{f_i\}$ una sucesión de Cauchy en $Ea^n(K)$; será $\{f_i^{(j}\}$ de Cauchy en $Ea(K)$ $(0 \leq j \leq n)$ y en consecuencia $\{f_i^{(j}\} \to g_j$ en $Ea(K)$; como, por (b), $I_z(f_i^{(j+1}) - f_i^{(j}$ es un escalar $(0 \leq j \leq n-1)$ y $I_z$ es continuo, también $I_z(g_{j+1}) - g_j$ será un escalar, con lo que: $g_j' = g_{j+1}$. Así, si ponemos $f = g_o$, ha resultado ser $g_j \equiv f^{(j}$ $(0 \leq j \leq n)$ con lo que $\{f_i^{(j}\} \to f^{(j}$, que es equivalente a la convergencia de $\{f_i\}$ hacia f en $Ea^n(K)$.

Para ver la densidad de las funciones polinómicas en $Ea^n(K)$, sea $f \in Ea^n(K)$ y $\{P_i\}$ una sucesión de funciones polinómicas convergente a $f^{(n}$ en $Ea(K)$; pongamos

$Q_i = I_z^n(P_i) + \displaystyle\sum_{j=o}^{n-1} \frac{f^{(j}(z)}{j!}(u-z)^j$ ; $\{Q_i\}$ es una nueva sucesión de funciones polinómicas que puede comprobarse que converge a f en $(Ea^n(K), \| \|_n)$ sin más que considerar la identidad

$f - \displaystyle\sum_{j=o}^{n-1} \frac{f^{(j}(z)}{j!}(u-z)^j = I_z^n(f^{(n})$ y las que se obtienen de ella por sucesivas derivaciones.

La idea del lema 4 podemos ahora compendiarla en la siguiente

5.Proposición.- Sea A un álgebra de Banach compleja unital, $A_K = \{x \in A \ / \ V(x) \leq K\}$, $a,b \in A_K$ en la situación $ab = ba$ y $f \in Ea^n(K)$ ; entonces:

$$\| f(a) - \sum_{k=o}^{n-1} \frac{f^{(k}(b)}{k!}(a-b)^k \| \leq \frac{\|f^{(n}\|}{n!} \|(a-b)^n\| .$$

Demostración.- Si P es un polinomio, la fórmula

$$(*)\quad P(a) - \sum_{k=o}^{n-1} \frac{P^{(k}(b)}{k!}(a-b)^k = \frac{(a-b)^n}{(n-1)!}\int_o^1 (1-t)^{n-1}P^{(n}(b + t(a-b))dt$$

es verificable por inducción bajo la hipótesis esencial de conmutar a y b.

Sea $f \in Ea^n(K)$, por 3.d, existe una sucesión de polinimios $\{ P_i \}$ convergiendo a f en $( Ea^n(K), \| \|_n )$ lo que fuerza la convergencia $\{ P_i^{(k} \} \to f^{(k}$ $( 0 \leq k \leq n )$ en Ea(K) lo que a su vez, por I.3.a, obliga a:

$$\{P_i(a)\} \longrightarrow f(a)$$

$$\{P_i^{(k}(b)\} \longrightarrow f^{(k}(b) \qquad ( 0 \leq k \leq n-1 )$$

$$\{P_i^{(n}(b + t(a-b))\} \longrightarrow f^{(n}(b + t(a-b)) \text{ uniformemente en } [0,1]$$

Podemos pues tomar límites en (*) obteniendo:

$$(**)\quad f(a) - \sum_{k=o}^{n-1} \frac{f^{(k}(b)}{k!}(a-b)^k = \frac{(a-b)^n}{(n-1)!}\int_o^1 (1-t)^{n-1}f^{(n}(b + t(a-b))dt$$

fórmula de la que es clara consecuencia la tesis de nuestra proposición.

Para el caso particular n = 1, la tesis de la proposición 5 va a subsistir aun sin la hipótesis de conmutar a y b como consecuencia de que la función $\hat{f}$ ( ver proposición I.3 ), cuando $f \in Ea^1(K)$ , va a ser "diferenciable" en el más fuerte sentido posible de la palabra. Pero esto requiere nuevas técnicas que constituyen el objetivo esencial de este trabajo y que paso a exponer.

## III. Los resultados fundamentales.

Si A es un álgebra de Banach unital y X es un A-módulo de Banach bilátero unital (en el sentido de ser $\|ax\| \leq \|a\|\,\|x\|, \|xa\| \leq \|x\|\,\|a\|$ y $1.x = x.1 = x$ ), $A\times X$ se considerará automáticamente como una nueva álgebra de Banach unital con el producto :

$$(a,x)(b,y) = (ab, ay + xb)$$

y la norma : $\|(a,x)\| = \|a\| + \|x\|$ (la unidad de este álgebra es $(1,0)$).

Pondremos : $\Pi_A : (a,x) \longrightarrow a$ de $A \times X$ en $A$

$\Pi_X : (a,x) \longrightarrow x$ de $A \times X$ en $X$.

1.Lema.- Si $n \in N$ y $(a,x) \in A \times X$ es :

a) $\Pi_A[(a,x)^n] = a^n$

b) $\|\Pi_X[(a,x)^n]\| \leq n \|a\|^{n-1} \|x\|$ .

Demostración.- Inducción.

2.Corolario.- Si D es una derivación de A con valores en X; y $a \in \mathrm{dom}(D)$ es :

$$\|D(a^n)\| \leq n \|a\|^{n-1} \|D(a)\| .$$

Demostración.- la aplicación $a \longrightarrow (a, D(a))$ es un homomorfismo de dom(D) en $A\times X$ con lo que $(a,D(a))^n = (a^n, D(a^n))$ y basta aplicar 1.b .

3.Lema.- Si $(a,x) \in A\times X$ , es :

$$\|\Pi_X(e^{(a,x)})\| \leq \|x\| \, e^{\text{Máx Re } V(a)} .$$

Demostración.- de 1.b se deduce :

$$\|\Pi_X(e^{(a,x)})\| \leq \|x\| \, e^{\|a\|} ;$$

poniendo $a + \frac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ en lugar de $a$ y teniendo en cuenta que $(a + \frac{1}{\alpha}, x) = (a,x) + \frac{1}{\alpha}(1,0)$ con lo que $e^{(a+\frac{1}{\alpha},x)} = e^{\frac{1}{\alpha}} e^{(a,x)}$ resulta : $\|\Pi_X(e^{(a,x)})\| \leq \|x\| \, e^{\frac{\|1+\alpha a\|-1}{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ ;

tomando límites $(\alpha \to 0)$ el lema queda demostrado como consecuencia de [2]-pag.17-theorem 5.

Sea K una parte convexo-compacta, no vacía de $\mathbb{C}$ y $\omega(z)$ como en la notación previa al teorema I.4 .

- **4.Lema**.- Si $(a,x)\in A\times X$ y $V(a)\subseteq K$, es :

$$\left\| \Pi_X \left[ e^{z(a,x)} \right] \right\| \leq |z|\, \|x\|\, \omega(z) \qquad (z\in \mathbb{C}).$$

Demostración.- Aplicando el lema 3 al par $(za,zx)$ :

$$\left\| \Pi_X \left[ e^{z(a,x)} \right] \right\| \leq |z|\, \|x\|\, e^{\text{Máx}\{\mathrm{Re}(zw)/\ w\in V(a)\}} \leq$$

$$\leq |z|\, \|x\|\, e^{\text{Máx}\{\mathrm{Re}(zw)\ /\ w\in K\}} =$$

$$= |z|\, \|x\|\, \text{Máx}\left\{ |e^{zw}|\ /\ w\in K \right\} = |z|\, \|x\|\, \omega(z).$$

**5.Teorema fundamental**.- **Sea K una parte convexo-compacta no vacía de $\mathbb{C}$, a un elemento de un álgebra de Banach unital A en la situación $V(a)\subseteq K$, y x un elemento cualquiera de un A-módulo de Banach bilátero unital X; la aplicación $\{1,u\}\longrightarrow\{(1,0),(a,x)\}$ se extiende en un (único) homomorfismo continuo G del álgebra de Banach $(Ea^1(K),\|\ \|_1)$ en $A\times X$. Si $f\in Ea^1(K)$ es :**

a) $\Pi_A\left[G(f)\right] = f(a)$

b) $\left\|\Pi_X\left[G(f)\right]\right\| \leq \|f'\|\,\|x\|$

**Demostración.- Sea** $x'$ un funcional lineal continuo en X de norma menor o igual que uno, y pongamos :

$$\emptyset(z) = \left\langle x', \frac{\Pi_X\left[e^{z(a,x)}\right]}{z} \right\rangle, \quad (z\in\mathbb{C}).$$

**Entonces** por **el lema 4** $\emptyset\in D(K)$ y $\|\emptyset\|\leq\|x\|$ (ver notación previa a I.4) como es :

$$\emptyset^{(n}(0) = \left\langle x', \Pi_X\left[\frac{(a,x)^{n+1}}{n+1}\right]\right\rangle$$ ( $n\in N$ ), si P es un polinomio de coeficientes $z_0\ldots z_k$ y d designa la aplicación $\emptyset\longrightarrow\emptyset'$ de D(K) en D(K), se tendrá:

$$\left\langle x', \Pi_X(P(a,x))\right\rangle = \sum_{n=1}^{k} z_n n \left\langle x', \Pi_X\left[\frac{(a,x)^n}{n}\right]\right\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} z_n n \emptyset^{(n-1}(0) = \Big(\sum_{n=1}^{k} z_n n d^{n-1}\Big)(\emptyset)(0) = P'(d)(\emptyset)(0),$$ de donde

$$\left|\left\langle x' , \pi_X(P(a,x))\right\rangle\right| \leq \omega(0) \| P'(d)(\phi)\| = \| P'(d)(\phi)\| \leq$$
$$\leq \| P'(d)\| \, \|\phi\| \leq \| P'(d)\| \, \|x\|$$

y, por la arbitrariedad de x': $\|\pi_X(P(a,x))\| \leq \|P'(d)\| \, \|x\|$.
Pero, por <u>I.4.b</u>: $\| P'(d)\| = \| P'(L_u^*)\| = \|(P'(L_u))^*\| =$
$= \| P'(L_u)\| = \| L_{P'(u)}\| = \| P'(u)\|$ , con lo que
$\|\pi_X(P(a,x))\| \leq \|P'\| \, \|x\|$ , donde la norma de P' se ha tomado en Ea(K). La aplicación $P \longrightarrow P(a,x)$ del álgebra ( densa en $(Ea^1(K), \| \;\|_1)$ ) de las funciones polinómicas en K en el álgebra A×X es un homomorfismo continuo pues $\|P(a,x)\| =$
$= \|\pi_A(P(a,x))\| + \|\pi_X(P(a,x))\| \overset{1.a}{=} \|P(a)\| + \|\pi_X(P(a,x))\| \leq$
$\leq \|P\| + \|P'\| \, \|x\| \leq \text{máx}(1,\|x\|)( \|P\| + \|P'\| ) =$
$= \text{máx}(1,\|x\|) \, \|P\|_1$ . La extensión a $Ea^1(K)$, por continuidad, de este homomorfismo proporciona el homomorfismo G del teorema. Las propiedades (a) y (b) son elementalmente deducibles a partir de su verificación para polinomios.

El teorema que acabamos de demostrar va a poder ser reenunciado con más claridad si se considera su verificación en un caso particular y se codifica este caso con una adecuada notación.

<u>6.Definición</u>.- Sea A un álgebra de Banach unital y X un A-módulo de Banach bilátero unital; para cada a de A, pongamos $L_a^X: x \longrightarrow ax$ , $R_a^X: x \longrightarrow xa$ de X en X ; $L_a^X$ y $R_a^X$ son elementos del álgebra de Banach BL(X) que queda automáticamente convertida en un A-módulo de Banach bilátero unital sin más que definir:
$a.T = L_a^X T$ , $T.a = R_a^X T$ ( $a \in A$ , $T \in BL(X)$ ).

Sea $a \in A$ en la situación $V(a) \subseteq K$ y apliquemos el teorema anterior sustituyendo X por BL(X) y <u>x</u> por la identidad de X ($I_X$):

sea G el homomorfismo que asegura dicho teorema. Si $f \in Ea^1(K)$, por convenio de símbolos, pondremos:

$\pi_{BL(X)}(G(f)) = d\hat{f}^X(a)$ y le llamaremos diferencial formal de la función $\hat{f}$ relativa a X en el punto a. En el caso $X = A$ pondremos simplemente $d\hat{f}(a)$ y el formalismo de la definición quedará justificado cuando demostremos que en efecto $d\hat{f}(a)$ es "la diferencial" en el punto $\underline{a}$ de la función $\hat{f}$ de $A_K$ en A ( notación de la <u>proposición I.3</u> ).

Por el <u>teorema 5</u>, será $\| d\hat{f}^X(a) \| \leq \| f' \|$ .

Con la notación convenida, el contenido del <u>teorema 5</u> se puede expresar:

<u>7.Teorema</u>.- **En las mismas** hipótesis del <u>teorema 5</u>, la **aplicación** $f \longrightarrow ( f(a) , d\hat{f}^X(a)(x) )$ es un homomorfismo continuo **del álgebra de Banach** $( Ea^1(K) , \| \ \|_1 )$ en $A \times X$ .

<u>Demostración</u>.- **En vista** de la densidad de los polinomios en $Ea^1(K)$, bastará comprobar que, si P es un polinomio, se verifica $( P(a) , d\hat{P}^X(a)(x) ) = P(a,x)$ ; lo que, por linealidad, equivale a demostrar: $( a^n , d\hat{P}_n^X(a)(x) ) = (a,x)^n$ $( n \in N )$ siendo $P_n$ el polinomio $z \rightarrow z^n$ ; y esta última fórmula se demuestra por recurrencia teniendo en cuenta que, por definición, $( a^n , d\hat{P}_n^X(a) ) = ( a , I_X )^n$ en el álgebra $A \times BL(X)$ .

Como quiera que este teorema lo vamos a aplicar al estudio de derivaciones cerradas de álgebras de Banach unitales, vamos a empezar viendo que la hipótesis que haremos, sobre que la unidad del álgebra pertenezca al dominio de la derivación, no es en absoluto restrictiva.

8. Proposición.- Sea D una derivación cerrada de un álgebra de Banach unital A con valores en un A-módulo bilátero de Banach unital X; la aplicación $\tilde{D}$: $z + a \longrightarrow D(a)$ de $\mathbb{C} + \mathrm{dom}(D)$ en X es una derivación cerrada de A con valores en X y $1 \in \mathrm{dom}(\tilde{D})$.

Demostración.- Si $1 \in \mathrm{dom}(D)$ se comprueba que $D(1) = 0$ con lo que $\tilde{D} = D$ y la tesis de la proposición es evidente.

Si $1 \notin \mathrm{dom}(D)$ es ( [7]-demostración del lema III.1 ) $d(1,\mathrm{dom}(D)) \geqslant 1$ ; comprobado que $\mathbb{C} + \mathrm{dom}(D)$ es una subálgebra de A y que $\tilde{D}$ es una derivación de A con valores en X, veamos que $\tilde{D}$ es cerrada: sea $\{z_n + a_n\} \to a$ y $\{\tilde{D}(z_n + a_n)\} = \{D(a_n)\} \to x$ ( $z_n \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathrm{dom}(D)$ ), será $|z_n - z_m| \leq \|(z_n + a_n) - (z_m + a_m)\|$ como consecuencia de $d(1,\mathrm{dom}(D)) \geqslant 1$ ; así la sucesión $\{z_n\}$ es de Cauchy y convergerá a un número z y $\{a_n\} \to a - z$ ; como $\{D(a_n)\} \to x$ y D es cerrada, obtenemos que $a - z \in \mathrm{dom}(D)$ y $x = D(a - z)$ ; o, lo que es lo mismo, $a = z + (a - z) \in \mathrm{dom}(\tilde{D})$ y $x = \tilde{D}(a)$ .

9. Teorema.- Sea K una parte convexo-compacta no vacía de $\mathbb{C}$, A un álgebra de Banach unital, X un A-módulo de Banach bilátero unital, D una derivación cerrada ( $1 \in \mathrm{dom}(D)$ ) de A con valores en X. Si $a \in \mathrm{dom}(D)$, $V(a) \subseteq K$ y $f \in Ea^1(K)$ , es $f(a) \in \mathrm{dom}(D)$ y $D(f(a)) = d\hat{f}^X(a)(D(a))$ ( en consecuencia: $\|D(f(a))\| \leq \|f'\| \, \|D(a)\|$ ).

Demostración.- Todo se reduce a comprobar que ( $f(a)$ , $d\hat{f}^X(a)(D(a))$ ) pertenece a la gráfica de D. Pero la gráfica de D es una subálgebra cerrada de $A \times X$ que incluye a $\{(1,0) , (a,D(a))\}$ y ( $f(a)$ , $d\hat{f}^X(a)(D(a))$ ) pertenece con seguridad a la subálgebra cerrada engendrada por $\{(1,0), (a,D(a))\}$ por ser la imagen de f por un homomorfismo continuo ( teorema 7 ) de $Ea^1(K)$ ( engendrada algébrico-topológicamente por $\{1 , u\}$ ) en el que $\{1 , u\}$ se transforma en $\{(1,0),\ (a,\ D(a))\}$

10. Nota.- Obsérvese que el teorema 9 resuelve un problema extremal en rango numérico. En efecto: fijemos K y también un polinomio P y obsérvese que, como consecuencia del teorema, el máximo de los números de la forma $\| D\,[P(a)] \| \,/\, \| D(a) \|$ (donde:

- a es un elemento, de un álgebra de Banach unital A arbitraria, en la situación $V(a) \subseteq K$

- D es una derivación cerrada de A ( $1 \in \mathrm{dom}(D)$ ) en un A-módulo de Banach bilátero unital X arbitrario.

- $a \in \mathrm{dom}(D)$ y $D(a) \neq 0$)

Se alcanza precisamente para el caso:

**A = Ea(K) , a = u "el generador" de Ea(K), X = Ea(K) y D = la derivación intrínseca de Ea(K).**

Si el módulo X es conmutativo es elemental comprobar, que $d\hat{f}^{X}(a)\,[x] = f'(a).x$ y es de notar también cómo el teorema 9 se hubiera podido demostrar (para X conmutativo) elementalmente sin necesidad de las técnicas desarrolladas en esta sección.

En el caso no conmutativo se tiene el siguiente anecdótico resultado:

11. Proposición.- En las hipótesis del teorema 5

Sea $f \in Ea^{2}(K)$; es:

$$\| d\hat{f}^{X}(a)\,[x] - f'(a).x \| \leq (\tfrac{1}{2})\, \| f'' \| \, \| xa - ax \| .$$

12. Corolario.- En las hipótesis del teorema 9, si se supone adicionalmente $f \in Ea^{2}(K)$, es:

$$\| D\,[f(a)] - f'(a).D(a) \| \leq (\tfrac{1}{2})\ \| f'' \|\ \| D(a)a - aD(a) \|$$

La demostración de la proposición 11 depende esencialmente del siguiente

13. Lema.- Sea $n \in N$, $(a,x) \in A \times X$, es:

$$\| \Pi_{X}\,[(a,x)^{n}] - na^{n-1}x \| \leq \frac{n(n-1)}{2}\, \| a \|^{n-2} \| xa - ax \|$$

Demostración.- Comprobada la validez para $n = 1$, procedemos por inducción; pongamos $y_n = \pi_X\left[(a,x)^n\right]$, será:

$$(a^{n+1}, y_{n+1}) = (a,x)^{n+1} = (a,x)\,(a^n, y_n) = (a^{n+1}, ay_n + xa^n) \Longrightarrow$$

$$y_{n+1} = ay_n + xa^n \Longrightarrow$$

$$y_{n+1} - (n+1)a^n x = a(y_n - na^{n-1}x) + (xa^n - a^n x) \Longrightarrow$$

$$\| y_{n+1} - (n+1)\, a^n x \| \leq \|a\|\, \| y_n - na^{n-1}x \| + \| xa^n - a^n x \|$$

Pero:

$\| y_n - na^{n-1}x \| \leq \frac{n(n-1)}{2} \|a\|^{n-2} \| xa - ax \|$, por la hipótesis de inducción; y como la aplicación $b \to xb - bx$ es una derivación de A con valores en X totalmente definida, se tendrá por el corolario 2

$$\| xa^n - a^n x \| \leq n\, \|a\|^{n-1}\, \| xa - ax \|$$

con lo que:

$$\| y_{n+1} - (n+1)\, a^n x \| \leq \frac{(n+1)n}{2} \|a\|^{n-1}\, \| xa - ax \|$$

Esquema de la demostración de la proposición 11

Del lema anterior se obtiene

$$(1)\ \left\| \pi_X\left[e^{(a,x)}\right] - e^a x \right\| \leq \frac{1}{2}\, e^{\|a\|}\, \| xa - ax \|$$

y, por un razonamiento análogo al del lema 3,

$$(2)\ \left\| \pi_X\left[e^{(a,x)}\right] - e^a x \right\| \leq \frac{1}{2} e^{\text{Máx. Re } V(a)}\, \| xa - ax \|$$

de donde:

$$(3)\ \left\| \pi_X\left[e^{z(a,x)}\right] - z e^{za} x \right\| \leq \frac{1}{2}\, |z|^2\, \omega(z)\, \| xa - ax \|$$

A partir de aquí un razonamiento paralelo al seguido en la demostración del teorema 5 nos lleva a:

$$(4)\ \left\| \pi_X\left[P(a,x)\right] - P'(a)\, x \right\| \leq \frac{1}{2} \|P''\|\, \| xa - ax \|$$

para cada polinomio P (la norma de P" tomada en Ea(K)).

La demostración se termina teniendo en cuenta que

$\Pi_X \left[P(a,x)\right] = d\,\hat{P}^X(a)\left[x\right]$ y la densidad de los polinomios en $(Ea^2(K), \| \|_2)$ (II,3.d).

## IV. Aplicación a la acotación de diferenciales.

En esta sección nos proponemos dar auténtico sentido de diferencial a la diferencial formal $d\hat{f}(a)$ ( $f \in Ea^1(K)$ , $V(a) \subseteq K$ ) definida en III.6 .

Un primer caso en que dicha diferencial formal es perfectamente interpretable es aquel en que $f = g/K$ , donde $g$ es una función holomorfa en un entorno abierto $\Omega$ de K ( una tal función f pertenece automáticamente a $Ea^1(K)$; ver II.3.a ): para ello, sea A un álgebra de Banach compleja unital, $A_\Omega = \{ x \in A \ / \ sp(x) \subseteq \Omega \}$, $A_K = \{ x \in A \ / \ V(x) \subseteq K \}$ , $\hat{f}: x \longrightarrow f(x)$ de $A_K$ en A , $\tilde{g}: x \longrightarrow g(x)$ ( en el sentido del cálculo funcional holomorfo ) de $A_\Omega$ en A . Se verifica:

**1. Proposición.-**

a) $A_\Omega$ es abierto

b) $A_K \subseteq A_\Omega$

c) $\hat{f}$ es la restricción a $A_K$ de $\tilde{g}$

d) $\tilde{g}$ es diferenciable en cada punto de $A_\Omega$ y su diferencial en cada punto a de $A_K$ es $d\hat{f}(a)$ . En consecuencia, para un tal punto a, se verifica: $\| d\tilde{g}(a) \| \leq \| g'/K \|$ , donde la norma de $g'/K$ se toma en $Ea(K)$ .

Demostración.- (a) es conocido y de demostración elemental. (b) es consecuencia de ser $sp(x) \subseteq V(x)$ , $\forall x \in A$ ( [2]-pág. 19- -theorem 6 ). (c) es consecuencia de la compatibilidad del cálculo funcional holomorfo con los homomorfismos continuos de álgebras de Banach uníferas ( póngase $f = g(u)$ en $Ea(K)$ ; u: "el generador" de $Ea(K)$ ).

Probemos (d).- Sea $(a,x) \in A \times A$ con $sp(a) \subseteq \Omega$, entonces ( [7]-II.1 ) $sp(a,x) = sp(a) \subseteq \Omega$ y ( [7]-II.4 ) $g(a,x) = ( g(a) , d\tilde{g}(a)(x) )$ donde $d\tilde{g}(a)$ designa la diferencial en el sentido de Frechet de la función $\tilde{g}$ en el punto $\underline{a}$, cuya existencia es conocida. Si, en particular, exigimos $V(a) \subseteq K$, consideramos la igualdad $f = g(u)$ en $( Ea^1(K) , \| \ \|_1 )$ y aplicamos la compatibilidad del cálculo funcional holomorfo con el homomorfismo de álgebras de Banach uníferas que afirma el teorema III.7, obtenemos: $d\tilde{g}(a)(x) = d\hat{f}(a)(x)$ y, en vista de la arbitrariedad de $\underline{x}$ en A : $d\tilde{g}(a) = d\hat{f}(a)$ . La acotación $\| d\tilde{g}(a) \| \leq \| g'/K \|$ es consecuencia de la definición de $d\hat{f}(a)$ ( III.6 ) y de **I.3.a** .

2.Teorema.- Sea A un álgebra de Banach compleja unital , $A_K = \{ x \in A \ / \ V(x) \leq K \}$ , $a_o \in A_K$ y $f \in Ea^1(K)$; se verifica:

$$\lim_{\substack{a \to a_o \\ a \in A_K - \{a_o\}}} \frac{\| f(a) - f(a_o) - d\hat{f}(a_o)(a - a_o) \|}{\| a - a_o \|} = 0 .$$

Demostración.- Tomemos $\{ P_n \} \longrightarrow f$ en $( Ea^1(K) , \| \ \|_1 )$ donde cada $P_n$ es una función polinómica en K ( restricción a K de una función polinómica en $\mathbb{C}$, $g_n$ ): sean $n,m \in N$ y $a_o, a \in A_K$ , la función

$\emptyset$: $t \longrightarrow ( \tilde{g}_m - \tilde{g}_n - ( d\tilde{g}_m(a_o) - d\tilde{g}_n(a_o) ) )( a_o + t(a - a_o))$

de $[0,1]$ en A es derivable en $[0,1]$ y

$\emptyset'(t) = ( d\tilde{g}_m(a_o+t(a-a_o)) - d\tilde{g}_n(a_o+t(a-a_o))-(d\tilde{g}_m(a_o)-d\tilde{g}_n(a_o)))(a-a_o)$

de donde, por el teorema clásico del valor medio:

$$\|\phi(1)-\phi(0)\| \leq 2\|a-a_o\| \sup_{0\leq t\leq 1} \|d(\tilde{g}_m-\tilde{g}_n)(\,a_o+t(a-a_o)\,)\| \leq$$

$\leq 2\|a-a_o\|\,\|P'_m-P'_n\|$ , sin más que tener en cuenta que $a_o+t(a-a_o)\in A_K$ y la proposición anterior. Tomando límites $(\,m\rightarrow\infty\,)$ :

$$\|\,f(a)-f(a_o)-(\,g_n(a)-g_n(a_o)\,)-(\,d\hat{f}(a_o)-d\tilde{g}_n(a_o)\,)(a-a_o)\| \leq$$

$\leq 2\|a-a_o\|\,\|f'-P'_n\|$ ( se ha aplicado el teorema III.7 y la proposición anterior ) $\Longrightarrow$

$$\frac{\|f(a)-f(a_o)-d\hat{f}(a_o)(a-a_o)\|}{\|a-a_o\|} \leq 2\|f'-P'_n\| + \frac{\|g_n(a)-g_n(a_o)-d\tilde{g}_n(a_o)(a-a_o)\|}{\|a-a_o\|}$$

Para cada $\varepsilon>0$ , sea $n\in N$ en la situación $\|f'-P'_n\|<\varepsilon/3$ y $\delta>0$ / $0<\|x-a_o\|<\delta$ $(\,x\in A\,)$ $\Longrightarrow$

$$\frac{\|g_n(x)-g_n(a_o)-d\tilde{g}_n(a_o)(x-a_o)\|}{\|x-a_o\|}<\varepsilon/3$$ , se tendrá:

$$\frac{\|f(a)-f(a_o)-d\hat{f}(a_o)(a-a_o)\|}{\|a-a_o\|}<\varepsilon$$ siempre que

$0<\|a-a_o\|<\delta$ y $a\in A_K$ .

3.Corolario.- Sea $f\in Ea^1(K)$, $a,b\in A_K$ ; se verifica : $\|f(b)-f(a)\| \leq \|f'\|\,\|b-a\|$ .

Demostración.- La función $\phi(t)=f(\,a+t(b-a)\,)$ $(\,t\in[0,1]\,)$ es, como consecuencia del teorema anterior, derivable en $[0,1]$ y $\phi'(t)=d\hat{f}(\,a+t(b-a)\,)(b-a)$ . Aplíquese el teorema del valor medio.

4.Nota.- El operador $d\hat{f}(a_o)$ queda perfectamente determinado por la propiedad que afirma el teorema 2 si $\mathring{K}\neq\emptyset$ ( no se precisa que $a_o\in\mathring{A}_K$ ) e incluso sin esta condición cuando A sea una $B^*$-álgebra ( K, como en todo el resto del trabajo, se supone no reducido a un punto ).

REFERENCIAS


1.- BOLLOBAS, B.: "The numerical range inBanach algebras and com- complex functions of exponential type". Bull. London Math. Soc., 3 (1.971), 27-33

2.- BONSALL, F.F.- DUNCAN, J. : "Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras". London Math. Soc. Lecture Note Series, 2.Cambridge, 1.971.

3.- BONSALL-DUNCAN.- "Numerical ranges II". London Math. Soc. Lecture Note Series, 10.Cambridge, 1.973.

4.- BONSALL- DUNCAN.- "Complete normed algebras". Springer Verlag, 1.973.

5.- BROWDER, A. : "States, numerical ranges, etc." Proceedings of the Brown informal analysis seminar. Summer, 1.969.

6.- CRABB, M.J.-DUNCAN, J.- Mc GREGOR, C. M.: "Some extremal problems in the theory of numerical ranges" Acta Math. 128 (1.972), 123-42.

7.- RODRIGUEZ PALACIOS, A. : "Derivaciones cerradas de las álgebras de Banach". Aparecerá en Cuadernos del Dpto. de Estadistica Mat. de Granada.

8.- RUDIN, W. : "Principios de análisis matemático" Ediciones del Castillo S.A. Madrid, 1.966.