NÚMEROS HIPERCOMPLEJOS EN DIMENSIÓN INFINITA

Discurso a pronunciar por
Angel Rodríguez Palacios
en el acto de su recepción
como Académico Numerario de la
Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada.

Excelentísimo Señor Presidente,
Ilustrísimos Señores Académicos,
Señoras y Señores:

Es para mí un agradable deber manifestar mi más profundo agradecimiento a los miembros de la Sección de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Granada por proponerme como miembro de número de esta Institución, así como a la totalidad de los miembros de la mísma por sumarse unánimemente a dicha propuesta.

Decir que "el honor que esta designación supone para mí es inmerecido" resulta siempre un tópico que, en la ocasión presente, puede estar muy cerca de la verdad objetiva: de la mayoría de los aquí presentes es de sobra conocido mi sistemático alejamiento de todo cargo directivo y, en consecuencia, de toda responsabilidad de organización que no sea la necesaria y suficiente para el mantenimiento de un grupo de investigación razonablemente productivo. Quiero entender por tanto que, ante la imposibilidad en este caso de denunciar "el pecado" sin que cargue con las culpas "algún pecador", La Academia, bajo el pretexto de mi designación, ha querido conceder cierto reconocimiento a toda una generación de matemáticos (de la que sí que me gustaría ser considerado como un modesto representante) que, arrancando de una situación de precariedad de medios actualmente inimaginable, ha intentado con mayor o menor éxito elevar el nivel de la investigación matemática en España (prácticamente inexistente hace no muchos años) hasta posiciones de digna competitividad con la que se realiza allende nuestras fronteras.

Esté o no en lo cierto, es deber de bien nacido aceptar los honores que a uno le ofrecen, e intentar corresponder a ellos convenientemente dentro de las limitaciones de tiempo y dotes personales que cada uno soporta. Me pongo pues a partir de este momento a disposición de la Academia en tanto en cuanto pueda ser útil en la consecución de los fines que esta digna Institución persigue.

Uno de los mayores problemas que se me plantearon ante la agradable obligación de tener que escribir este discurso fue el de elegir el tema a desarrollar. A fuer de sincero, la solución a este problema no se me presentaba nada fácil: para bien o para mal, los temas en los que he investigado hasta el momento presente se encuadran totalmente dentro de la Matemática Pura y Dura (también llamada Fundamental) la cual, cuando se especializa, resulta ininteligible no sólo para el no especialista sino incluso para otro matemático que trabaje en temas ligeramente distantes. En concreto, los "bichos" con los que yo suelo "experimentar" son el fruto de un "cruce" un tanto heterodoxo del Álgebra con el Análisis Funcional, y como tales disfrutan de una "exótica belleza" sólo perceptible por quien posee un mínimo de lenguaje básico en estas dos ramas de la Matemática. Tampoco podía optar por hablar de la aplicabilidad de los resultados obtenidos, puesto que normalmente los resultados en Matemática Pura a corto plazo, y salvo contadas excepciones que no hacen sino confirmar la regla, no sirven absolutamente para nada, como no sea para fundamentar sobre ellos nuevos resultados teóricos igualmente inútiles por el momento para resolver cualquier problema que pueda llamar la atención del hombre medio.

En la búsqueda del tema "menos inapropiado" para este discurso las circunstancias no obstante han sido relativamente piadosas conmigo, puesto que recientemente mi colega de la Universidad de Málaga José Antonio Cuenca [18] y yo mísmo [50] hemos demostrado simultáneamente, aunque por distintos métodos, la existencia de lo que técnicamente se llaman "álgebras absolutamente valuadas infinito-dimensionales con división unilateral", y que, en opinión de mi colega Wend Werner de la Universidad de Paderborn, podrían ser consideradas como "conjuntos de números de dimensión infinita". Aunque el concepto de "número" está aun por precisar y en realidad no exista convenio universalmente aceptado sobre lo que tal palabra deba significar (ver [22]), no cabe duda de que la propia palabra resulta atractiva en tanto en cuanto todos consideramos que tal concepto pertenece al acervo de la cultura universal y nadie niega que la sucesiva ampliación del concepto de "número" a lo largo de la Historia ha contribuido de manera notable a clarificar gran número de ideas y está en la base de gran parte de la tecnología que hoy disfrutamos. A título de ejemplo, ningún científico actual se sentirá tentado a despreciar a los números complejos, otrora tan controvertidos. El tema elegido pudiera llegar a ser atractivo también por su carácter incidentalmente "interdisciplinar", debido a que la construcción que se hace en [50] de los números de dimensión infinita involucra de manera esencial relevantes resultados de la Física Teórica, como son las Relaciones Canónicas de Anticonmutación en Mecánica Cuántica, así como sus representaciones.

Sin entrar todavía en precisiones, conviene notar que, tras el descubrimiento ya más que secular de los cuaternios y poco más tarde de los octoniones (o números de Cayley), la conmutatividad y asociatividad de la multiplicación deben de dejar de ser considerados privilegio de los conjuntos de números. No así la existencia de "valor absoluto" o la posibilidad de "dividir" (dado por supuesto que se puede sumar, restar y multiplicar). Si exigimos además que nuestros números se "soporten" sobre los números reales, se llega así a que los conjuntos de números deben ser "álgebras reales no necesariamente asociativas absolutamente valuadas con división". Entendidos en tal sentido, un teorema de F. B. Wright [58], que recogemos en nuestro Teorema 2, asegura que, en esencia, no hay más conjuntos de números que los reales, los complejos, los cuaternios y los números de Cayley, que por cierto son conjuntos de números "pequeños" (en lenguaje técnico, no se salen del ambiente de la dimensión finita, donde la absoluta valuación ya por sí sola fuerza la división). Si queremos seguir agrandando el concepto de número, tendremos que renunciar en consecuencia a alguna de las exigencias antes mencionadas y, en realidad, con una "semi-renuncia" a la posibilidad de dividir (se podrá dividir "por un lado" pero no "por el otro", cosa que a nadie debe sorprender si se tiene en cuenta la posible no conmutatividad de la multiplicación), daremos via libre al nacimiento de los números de dimensión infinita.

Con el pretexto de exponer la construcción de estos estrafalarios conjuntos de números, así como estudiar en profundidad su estructura tal cual se hace en [50], hemos dedicado nuestro trabajo a recopilar, lo más ordenadamente que hemos sido capaces, los resultados que se conocen en torno a las álgebras absolutamente valuadas, incluyendo alguna que otra novedad fruto del intento de poner el máximo orden en el material recopilado.

Hemos intentado que el trabajo sea a un tiempo inteligible para el no especialista y útil para el experto, bien que a lo peor, por aquello de que "no se puede estar en Misa y repicando", acaso no hayamos conseguido ni lo uno ni lo otro. Esperando que este temor no se confirme, pasamos ya a entrar en materia.

1. Complejos, Cuaternios y Octoniones.

No presentaremos aquí el cuerpo de los números reales que se supone (y así debe ser reconocido) patrimonio de la humanidad, cuyo concepto intuitivo se pierde en la noche de los tiempos como abstracción de la medida del tiempo y del desplazamiento unidimensional, y cuya formulación rigurosa no obstante es relativamente reciente y se debe principalmente a Richard Dedekind y Georg Cantor. Aunque para el científico actual pueda parecer casi ofensivo, sí presentaremos la construcción de los números complejos a partir de los reales. Sírvame de disculpa por un lado el hecho históricamente corroborado del terror que en tiempos pretéritos inspiró a los matemáticos la consideración de "números irreales" (también llamados "imaginarios"), y por otra parte el intento que hacemos de introducir los números complejos de una manera que, aunque bien conocida, no está excesivamente divulgada y que en nuestra exposición inspirará más tarde la construcción de los cuaternios.

Cualquiera que haya tenido un mínimo contacto con la matemática de nuestro siglo, tanto en sus aspectos puros como en los aplicados, se habrá encontrado con la necesidad de considerar matrices con coeficientes en un cuerpo prefijado. En cuanto a nuestros intereses concierne, es suficiente por el momento pensar que el cuerpo en cuestión es el de los números reales (que denotaremos por $\mathbb{R}$ y que nuestras matrices tienen sólamente dos filas y dos columnas. El conjunto de estas matrices, que denotaremos por $M_2(\mathbb{R})$, se parece bastante a un conjunto de "números":

-se pueden sumar asociativa y conmutativamente mediante la expresión

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \ ,$$

hay "cero" para esta suma (a saber, la matriz $\mathbf{0} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) y el problema de la sustracción con minuendo y sustraendo arbitrario siempre tiene solución,

-también podemos multiplicar dos de nuestras matrices por la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ae+bg & arf+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \ ,$$

y esta multiplicación es distributiva respecto de la suma,

-finalmente podemos considerar el producto de un número real r por una de nuestras matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definido por

$$r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix} \ ,$$

operación que satisface las siguientes propiedades de buen comportamiento con respecto a la suma y multiplicación anteriormente consideradas:

$$(r+s)\alpha = r\alpha + s\alpha$$

$$r(\alpha+\beta) = r\alpha + r\beta$$

$$1\alpha = \alpha$$

$$(rs)\alpha = r(s\alpha)$$

$$(r\alpha)\beta = r(\alpha\beta) = \alpha(r\beta)\ ,$$

cualesquiera que sean r, s en $\mathbb{R}$ y α, β en $M_2(\mathbb{R})$.

En vista de las propiedades arriba destacadas para las tres operaciones, éstas confieren a $M_2(\mathbb{R})$ la estructura de "álgebra" sobre $\mathbb{R}$. El parecido de $M_2(\mathbb{R})$ con un conjunto de "números" es aún mayor si se tiene en cuenta que su multiplicación es asociativa y que admite un elemento "neutro", a saber la matriz $\mathbf{1} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, que satisface

$$\mathbf{1}\alpha = \alpha\mathbf{1} = \alpha$$

cualquiera que sea α en $M_2(\mathbb{R})$. Por contra, $M_2(\mathbb{R})$ se distancia de los "números" por cuanto que su multiplicación no es conmutativa (patología no excesivamente importante) y sobre todo por que el problema de la "división" por elementos distintos del cero no siempre tiene solución (recuérdese que un álgebra A se dice ser de división si, para cualesquiera a, b en A con $a \neq 0$, cada una de las ecuaciones $ax = b$ y $xa = b$ con incógnita x en A tiene solución única). Así por ejemplo, si α denota la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, la ecuación $\alpha\xi = \mathbf{1}$ con incógnita ξ en $M_2(\mathbb{R})$ no tiene solución, puesto que de tenerla se derivaría la contradicción

$$\alpha = \alpha\mathbf{1} = \alpha(\alpha\xi) = \alpha^2\xi = \mathbf{0}\xi = \mathbf{0}\ .$$

La simple presencia de un tal elemento $\alpha \neq \mathbf{0}$ con $\alpha^2 = \mathbf{0}$, prohíbe también la existencia en $M_2(\mathbb{R})$ de uno de los ingredientes más deseados en los conjuntos de "números" como es el "valor absoluto" $|.|$ que, a poca imaginación que se le ponga, tendría que satisfacer por un lado $|\alpha| \neq 0$ y por otro $|\alpha|^2 = |\alpha^2| = |\mathbf{0}| = 0$, lo que no es posible puesto que el valor absoluto debe ser un número real.

Todas las patologías del álgebra $M_2(\mathbb{R})$ arriba reseñadas desaparecen en algunas de sus "subálgebras". Así, por ejemplo $\mathbb{R}\mathbf{1}$ es una subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$ que, abstractamente considerada, no es otra cosa que una copia fiel del cuerpo de los números reales. Pero las patologías de $M_2(\mathbb{R})$ desaparecen también en una subálgebra estrictamente más grande. En efecto, el conjunto

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ d = a \text{ y } c = -b \right\}$$

es una subálgebra de $M_2(\mathbb{R})$ que contiene estrictamente a $\mathbb{R}\mathbf{1}$. Como quiera que la multiplicación en $\mathbb{C}$ no es otra cosa que la restricción de la multiplicación en $M_2(\mathbb{R})$, la asociatividad no se pierde ganándose incluso la conmutatividad en el proceso de restricción. Si $z = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ es un elemento de $\mathbb{C}$, escribiremos $\overline{z} := \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ (la matriz traspuesta de z, que sigue perteneciendo a $\mathbb{C}$) y $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ (la raíz cuadrada no negativa del determinante de z). Uno comprueba entonces directamente la igualdad

$$z\overline{z} = \overline{z}z = |z|^2\mathbf{1},$$

con lo que, si $z \neq \mathbf{0}$, z es inversible en el sentido usual asociativo con inverso $(|z|^{-2})\overline{z}$, lo que conlleva automáticamente el que, para cualquier w que fijemos en $\mathbb{C}$, la ecuación $z\xi = w$ con incógnita ξ en $\mathbb{C}$ tiene solución única. Tenemos así que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, copia fidedigna del familiar cuerpo de los números complejos. Para $z = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ en $\mathbb{C}$, la bien conocida expresión $z = a + ib$ se justifica ahora sin más que definir $i := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e identificar cada número real r con $r\mathbf{1}$.

Para z en $\mathbb{C}$, $|z|$ es siempre un número real no negativo, que es cero si y sólo si $z = \mathbf{0}$. Además, para z y w en $\mathbb{C}$, se verifica la desigualdad

$$|z + w| \leq |z| + |w| \ ,$$

así como la igualdad

$$|zw| = |z| \ |w| \ ,$$

que es consecuencia de la regla del determinante de un producto de matrices. Ni que decir tiene que, si r es un número real visto como complejo (en la forma $r\mathbf{1}$), el valor absoluto de r no es otra cosa que el que ya él tenía como número real, con lo que también

$$|rz| = |r||z|$$

para r en $\mathbb{R}$ y z en $\mathbb{C}$. Así $|.|$ se convierte en un “valor absoluto” en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ se convierte en un álgebra “absolutamente valuada”.

La operación “paso a conjugado” $z \to \overline{z}$ satisface

$$\overline{(\overline{z})} = z$$

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{zw} = \overline{z}\overline{w} \ ,$$

para cualesquiera z, w en $\mathbb{C}$, amén de

$$\overline{rz} = r\overline{z}$$

para r en $\mathbb{R}$ y z en $\mathbb{C}$, es decir, el paso a conjugado es una "involución de álgebra" en $\mathbb{C}$.

Una vez presentado someramente el cuerpo de los números complejos y antes de entrar en la construcción de los cuaternios, permítasenos notar que en la extensión de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ perdemos esencialmente algo de la riqueza estructural de los números reales como es su carácter de "cuerpo ordenado", ganando a cambio grandes ventajas, que se han convertido en herramientas cruciales en la matemática pura y aplicada, como son el "teorema fundamental del álgebra", afirmando la existencia de raíces en $\mathbb{C}$ para todo polinomio no constante en una variable con coeficientes complejos (en particular reales), y la teoría de las funciones holomorfas de variable compleja de la que derivan los llamados "métodos complejos" de aplicación insustituible en muchos problemas que es su planteamiento sólo involucran números reales. Remitimos al lector al bellísimo libro "Numbers" [22] como complemento a nuestros comentarios sobre los números complejos así como al resto del material que reseñaremos en esta sección.

El cuerpo de los números complejos es una extensión "relativamente pequeña" del cuerpo de los números reales, en el sentido de tener "dimensión finita" sobre $\mathbb{R}$; más concretamente $\mathbb{C}$ es 2-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Si por "número" entendemos un elemento de un cuerpo que es extensión finito-dimensional de $\mathbb{R}$, entonces no hay más "números" que los complejos. Este es el contenido del llamado teorema final de la aritmética que se puede derivar sin gran dificultad del teorema fundamental del álgebra. Naturalmente hay otros cuerpos distintos de $\mathbb{C}$ que extienden a $\mathbb{R}$ (obligadamente de dimensión infinita), como por ejemplo el cuerpo de fracciones del álgebra de los polinomios en una variable con coeficientes reales, pero a nadie se le ocurriría llamar "números" a los elementos de tales cuerpos.

Así, si queremos agrandar los números más allá de los complejos, no tendremos más remedio que debilitar el concepto de cuerpo, renunciando a la conmutatividad de la multiplicación, y buscar con afán álgebras asociativas (no conmutativas) con división y de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. El matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) intentó sin éxito a lo largo de su vida activa la construcción de una tal álgebra en dimensión tres, y parece ser que murió sin saber si tal construcción era o no posible. Hoy sabemos que el intento de Hamilton estaba destinado al fracaso e incluso disponemos de la siguiente demostración expectacularmente sencilla, que tomamos casi literalmente de [22, pp. 189-190]. Si A es un álgebra asociativa con división y de dimensión tres sobre $\mathbb{R}$, entonces del teorema final de la aritmética se desprende fácilmente que A debe contener una copia de $\mathbb{C}$. Llamando i a la unidad imaginaria de esta copia y $\mathbf{1}$ a la unidad de A, podemos elegir j en A de manera que $\{\mathbf{1}, i, j\}$ sea una base de A, con lo que tendremos

$$ij = a\mathbf{1} + bi + cj$$

para convenientes a, b, c en $\mathbb{R}$. Como $i^2 = -\mathbf{1}$ y $i(ij) = i^2 j = -j$, obtenemos

$$-j = ai - b\mathbf{1} + cij = ai - b\mathbf{1} + c(a\mathbf{1} + bi + cj) = (ca - b)\mathbf{1} + (cb + a)i + c^2 j \ ,$$

de donde deducimos $c^2 = -1$, lo que es imposible siendo c un número real.

En realidad hoy sabemos que, incluso renunciando a la asociatividad de la multiplicación, las únicas dimensiones permitidas para un álgebra de división de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ son $1, 2, 4$ y 8. Este es un profundo resultado de R. Bott y J. Milnor [11] (ver también [22, Capítulo 11];), cuya demostración reposa en métodos topológicos y del que se desconoce por el momento una prueba puramente algebraica.

No obstante el obligado fracaso de Hamilton en la búsqueda de álgebras asociativas de división de dimensión tres sobre $\mathbb{R}$, fue el propio Hamilton el que construyó sus famosos "cuaternios", que resuelven afirmativamente el problema de la existencia de álgebras asociativas de división de dimensión cuatro sobre $\mathbb{R}$, permitiendo así el agrandamiento natural del concepto de "número". Hoy día los cuaternios se pueden presentar de una manera fácil muy parecida a la presentación que hemos hecho de los complejos a partir de los números reales. Para ello consideraremos el álgebra asociativa $M_2(\mathbb{C})$ de todas las matrices con dos filas y dos columnas con coeficientes complejos, que aunque tiene estructura natural de álgebra sobre $\mathbb{C}$ es mejor para nuestros propósitos verla sólamente como álgebra sobre $\mathbb{R}$. Al igual que $M_2(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{C})$ posee determinantes patologías que le alejan de lo que debe ser un conjunto de "números", pero contiene al conjunto

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \ : \ z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

como subálgebra, y tal subálgebra que es claramente de dimensión cuatro sobre $\mathbb{R}$ va a resultar ser de división, siendo de hecho copia del álgebra de los cuaternios construida originalmente por Hamilton de manera más artesanal.

Si $h = \left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{smallmatrix}\right)$ es un elemento de $\mathbb{H}$, escribiremos $\overline{h} := \left(\begin{smallmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{smallmatrix}\right)$ (la matriz traspuesta de la obtenida conjugando los coeficientes de h, que afortunadamente sigue perteneciendo a $\mathbb{H}$ y $|h| := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ (la raíz cuadrada no negativa del determinante de h). Se tiene entonces

$$h\overline{h} = \overline{h}h = |h|^2\mathbf{1} ,$$

con lo que, si $h \neq \mathbf{0}$, h es inversible con inverso $(|h|^{-2})\overline{h}$, y así el álgebra asociativa $\mathbb{H}$ es de división. Al igual que en la construcción que hicimos de $\mathbb{C}$, el paso a conjugado $h \to \overline{h}$ es una involución de álgebra en $\mathbb{H}$ y $h \to |h|$ es un valor absoluto en $\mathbb{H}$.

Como anécdota histórica representativa del cariño que Hamilton dispensaba a sus cuaternios, diremos que gracias a uno de sus escritos (con ocasión del décimo-quinto aniversario de su descubrimiento) hoy sabemos la fecha exacta del nacimiento de los cuaternios en la cabeza de su creador, a saber, el 16 de Octubre de 1843, así como otros detalles más o menos científicos sobre las circunstancias que acompañaron el descubrimiento (ver [22, p. 191]). Entre otras, que el acontecimiento tuvo lugar mientras Hamilton paseaba con su señora (por Dublín), hecho que consideramos debe no ser emulado por el científico actual en una situación parecida.

No obstante el entusiasmo de Hamilton por sus cuaternios y sin detrimento de sus múltiples aplicaciones en matemáticas, hay que decir que la importancia de éstos no es comparable a la de los números complejos. La no conmutatividad de $\mathbb{H}$ parece ser hasta el momento un obstáculo insalvable para un desarrollo razonablemente fructífero de una teoría de funciones holomorfas con variable cuaterniónica (ver [6]). Por otra parte $\mathbb{H}$ contiene como subálgebra una sóla copia de $\mathbb{R}$, a saber, los múltiplos reales de la unidad, pero contiene infinitas copias de $\mathbb{C}$ sin que sea posible destacar abstractamente ninguna de ellas, lo que constituye otra dificultad añadida en cualquier trabajo que involucre a los cuaternios.

Como ocurría con los números complejos para el teorema final de la aritmética, también los cuaternios significan un techo en el intento de agrandar el concepto de número. Así F. G. Frobenius demostró en 1877 que $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ son las únicas álgebras asociativas de división y dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. En realidad el teorema de Frobenius afirma más, a saber, si A es un álgebra asociativa real sin divisores de cero y si A es “algebraica” (en el sentido de que la subálgebra que genera cada elemento de A es finito-dimensional), entonces A es copia de $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. En vista del teorema de Frobenius, un nuevo intento de agrandamiento del concepto de número pasa obligadamente por la renuncia a la asociatividad de la multiplicación y, según el teorema de Bott-Milnor anteriormente comentado, la única dimensión finita permisible será la dimensión ocho. En efecto existen álgebras de división de dimensión ocho sobre $\mathbb{R}$, siendo la más destacable de todas el álgebra de los octoniones (o números de Cayley) que presentaremos a continuación.

De acuerdo con la información que se recoge en [22, p. 250], los octoniones fueron descubiertos por John T. Graves en Diciembre de 1843, sólo dos meses después del descubrimiento de Hamilton, y el propio Graves comunicó su resultado a Hamilton en una carta de fecha 4 de Enero de 1844. No obstante, el resultado no fue publicado hasta 1848. En el interin, Arthur Cayley redescubrió los octoniones en 1845 y publicó su descubrimiento ese mismo año.

El conjunto de los octoniones $\mathbb{O}$ se puede presentar como el conjunto de las matrices de la forma (z, u), donde el primer coeficiente z es un número complejo arbitrario, mientras que el segundo coeficiente u es un elemento arbitrario del espacio vectorial $\mathbb{C}^3$. La suma en $\mathbb{O}$, así como el producto de un número real por un elemento de $\mathbb{O}$, se definen por las correspondientes operaciones hechas coeficiente a coeficiente. Para z en $\mathbb{C}$, $\overline{z}$ denotará como anteriormente el conjugado de z, y para u en $\mathbb{C}^3$, $\overline{u}$ denotará el elemento de $\mathbb{C}^3$ obtenido a partir de u conjugando cada una de sus coordenadas. Así mismo, para $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{C}^3$, escribiremos

$$< u, v > := \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \ ,$$

$$u \times v := (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \ .$$

Podemos entonces definir una multiplicación en $\mathbb{O}$ por la fórmula

$$(z, u)(w, v) := (zw - < u, v >, zv + wu - \overline{u} \times \overline{v}) \ .$$

Con las operaciones arriba definidas $\mathbb{O}$ se convierte en un álgebra sobre $\mathbb{R}$ que no es asociativa, si bien está "muy cerca" de serlo. Concretamente, para cualesquiera x, y en $\mathbb{O}$ se verifican las igualdades

$$x^2 y = x(xy)$$

$$y x^2 = (yx)x \ ,$$

en otras palabras $\mathbb{O}$ es un álgebra "alternativa". El por qué del adjetivo "alternativa" se debe a que se puede demostrar sin gran problema que un álgebra satisface las dos identidades anteriores si y sólo si el "asociador" $[x, y, z] := (xy)z - x(yz)$ es una función alternante de sus variables. Con un poco más de esfuerzo se puede probar incluso que un álgebra es alternativa si y sólo si la subálgebra que engendran cada dos de sus elementos es asociativa (teorema de Artin). Como en el caso de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$, se pueden definir una involución de álgebra $^{-}$ y un valor absoluto $|.|$ en $\mathbb{O}$ mediante las fórmulas

$$\overline{(z,u)} := (\overline{z}, -u)$$

$$|x| := \sqrt{|z|^2 + \|u\|^2} \ ,$$

donde, para $u = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbb{C}^3$, $\|u\| := \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2}$ no es otra cosa que la norma euclídea de u. Como ya ocurría en el caso de los complejos y los cuaternios, para x en $\mathbb{O}$ se tiene

$$x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2 \mathbf{1} \ ,$$

de donde, teniendo en cuenta que $\mathbb{O}$ es un álgebra alternativa, se llega sin gran dificultad a que $\mathbb{O}$ es un álgebra de división.

Una primera manera de ver que el álgebra de los octoniones que acabamos de presentar no se queda en una mera anécdota lo constituye el llamado "teorema extendido de Frobenius", demostrado por Max Zorn en 1933, que afirma que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ son las únicas álgebras reales alternativas algebraicas sin divisores de cero. Digamos también que cada una de las álgebras $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ se puede construir a partir de su precursora $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$, respectivamente, por un procedimiento unificador conocido por el nombre de "proceso de duplicación de Cayley-Dickson". Así, si $\mathbb{K}$ designa cualquiera de las álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ y si $^{-}$ denota el paso a conjugado en $\mathbb{K}$ (que en $\mathbb{R}$ no puede ser otra cosa que la identidad), podemos considerar el espacio vectorial de las matrices de una fila y dos columnas con coeficientes en $\mathbb{K}$ con la multiplicación definida por

$$(a,b)(c,d) := (ac - d\overline{b}, \overline{a}d + cb) \ ,$$

obteniendo así una copia de $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$, respectivamente. En este proceso de duplicación, el paso a conjugado y el valor absoluto del álgebra resultante se obtienen de los correspondientes del álgebra de partida por las fórmulas

$$\overline{(a,b)} := (\overline{a}, -b)$$

$$|(a,b)| := \sqrt{(|a|^2 + |b|^2} \ .$$

Pensando ya en concluir esta sección, remitimos al lector interesado en ampliar su información sobre las álgebras reales finito-dimensionales de división a las referencias [4], [8], [9], [10], [28], [42] y [43]. Por otra parte, parece también conveniente enumerar una serie de propiedades comunes a las álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, a cuyo conocimiento hemos dedicado prioritariamente la presente sección.

Si A denota cualquiera de las álgebras reales $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$, se tiene:

1) A tiene unidad $\mathbf{1}$*,*

2) A posee una involución de álgebra $^-$ satisfaciendo que, para cada a en A, $a\overline{a}$ coincide con $\overline{a}a$, y tanto $a\overline{a}$ como $\overline{a}+a$ pertenecen a $\mathbb{R}\mathbf{1}$.

3) A es cuadrática (es decir, la subálgebra que genera cada elemento de A es de dimensión dos como máximo).

4) A es un álgebra absolutamente valuada (es decir, se puede definir un valor absoluto $|.|$ sobre A).

5) El valor absoluto $|.|$ de A deriva de un producto escalar $(.|.)$ en A por la fórmula $|a| = \sqrt{(a|a)}$.

6) A es un álgebra de división.

7) A es alternativa.

8) A es finito-dimensional.

9) Si $(.|.)$ y $^-$ denotan respectivamente el producto escalar dado en (5) y la involución dada en (2), entonces, para cualesquiera a, b, c en A, se verifica $(ab|c) = (a|c\overline{b}) = (b|\overline{a}c)$.

La mayoría de las propiedades que acabamos de enumerar han sido ya previamente reseñadas en nuestra exposición, y las restantes son de fácil verificación a partir de la introducción que hemos hecho de las álgebras $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Recalcaremos no obstante que las propiedades enumeradas arriba están lejos de ser independientes las unas de las otras. Así por ejemplo las implicaciones $(1)+(2) \Rightarrow (3)$ y $(4)+(8) \Rightarrow (6)$ son elementales. Otras dependencias más profundas se expondrán en la sección siguiente. Notaremos también que es fácil corroborar que la involución cuya existencia se afirma en (2), y que llamaremos "cayleyana", es única bajo las condiciones que allí se requieren, pero no tan fácil (aunque también cierto) que el valor absoluto cuya existencia se garantiza en (4) es también único. En la tercera sección de nuestro trabajo tendremos oportunidad de conocer álgebras que admiten más de un valor absoluto. Pero si dos valores absolutos en un álgebra la hacen a un tiempo completa, entonces tienen que coincidir (este resultado es consecuencia de otro más general, a saber [50, Teorema 4], que reseñaremos en la sección tercera, e implica la unicidad del valor absoluto en las álgebras absolutamente valuadas de dimensión finita). En el caso particular de las álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, la unicidad del valor absoluto se debe originalmente a A. Ostrowski y la demostración puede consultarse por ejemplo en [1, Teorema 11.14].

2. El teorema de Albert-Urbanik-Wright y sus consecuencias.

A lo largo de la sección anterior hemos intentado comunicar subliminarmente al lector lo que para nuestros intereses conviene entender por "conjunto de números", haciendo hincapié en que tales conjuntos deben de ser álgebras reales absolutamente valuadas y con división, e incluso hemos presentado cuatro modelos que responden a estos requerimientos, a saber, las álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Podemos preguntarnos ahora si hay más conjuntos de números, y la contestación es claramente afirmativa. Así por ejemplo el espacio vectorial real de $\mathbb{C}$ con su valor absoluto usual se puede convertir en álgebra real absolutamente valuada (automáticamente de división en vista entre otras cosas de la finita dimensión) añadiéndole cualquiera de las tres multiplicaciones siguientes

$$z \odot_1 w := \overline{zw},$$

$$z \odot_2 w := z\overline{w},$$

$$z \odot_3 w := \overline{z}w.$$

Junto con $\mathbb{C}$ con su producto usual, obtenemos así cuatro conjuntos de números en dimensión dos, cada uno de los cuales no puede ser copia de ninguno de los otros. Esto se ve fácilmente puesto que $\mathbb{C}$ con su producto usual tiene unidad, $(\mathbb{C}, \odot_1)$ (conocida como álgebra de McClay) no tiene ni unidad por la derecha ni unidad por la izquierda, $(\mathbb{C}, \odot_2)$ tiene unidad por la derecha pero no por la izquierda, mientras que $(\mathbb{C}, \odot_3)$ tiene unidad por la izquierda pero no por la derecha. El lector puede ahora imaginar cómo obtener conjuntos de números en dimensión cuatro distintos de $\mathbb{H}$, así como en dimensión ocho distintos de $\mathbb{O}$. Como ya bien sabemos, la dimensión finita distinta de $1, 2, 4$ y 8 está prohibida para los conjuntos de números (incluso si pasamos por alto la exigencia de existencia de valor absoluto). Pero ¿existen conjuntos de números en dimensión infinita?. Preguntas como ésta serán contestadas a lo largo de esta sección.

Pero empecemos haciendo un poco de historia. Después de un resultado de Ostrowski en 1918 asegurando que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ *son las únicas álgebras reales asociativo-conmutativas absolutamente valuadas con unidad*, las álgebras absolutamente valuadas comienzan a ser tratadas sistemáticamente en un contexto general no necesariamente asociativo por Abraham Adrian Albert (1905-1972), quien en un primer trabajo [2] fechado en 1947 demuestra como principal resultado que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ *son las únicas álgebras reales absolutamente valuadas finito-dimensionales y con unidad.* Esta bella caracterización intrínseca de los cuatro conjuntos de números presentados en la Sección 1 sería perfeccionada más tarde por el propio Albert en [3] demostrando que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ *son las únicas álgebras reales absolutamente valuadas algebraicas* *y con unidad*. Es de destacar también en los trabajos de Albert la introducción en el estudio de las álgebras absolutamente valuadas de la técnica de la “isotopía”, que precisaremos más adelante y que se ha convertido en una herramienta definitiva para el posterior desarrollo de la teoría. Tras un trabajo de F. B. Wright [58], cuya reseña aplazamos por unos momentos, los resultados de Albert son perfeccionados, ahora hasta extremos posiblemente imprevisibles con anterioridad, en un artículo de K. Urbanik y F. B. Wright [57] fechado en 1960, en el que se demuestra el siguiente teorema, sin duda el más importante de la teoría de las álgebras absolutamente valuadas.

Teorema 1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *y* $\mathbb{O}$ *son las únicas álgebras reales absolutamente valuadas con unidad.*

Según este teorema, la simple presencia de unidad en un álgebra absolutamente valuada ya implica la finita dimensión y por tanto que el álgebra es de división. La grandeza del teorema es tanto mayor por cuanto que en el mísmo artículo de Urbanik-Wright se da el primer ejemplo conocido en la literatura de un álgebra absolutamente valuada de dimensión infinita (obviamente sin unidad). Como quiera que en la siguiente sección de nuestro trabajo tendremos oportunidad de hablar ampliamente de este tipo de ejemplos, volvamos sobre el teorema de Albert-Urbanik-Wright y digamos en primera instancia que de él se deduce fácilmente que la *única álgebra compleja absolutamente valuada con unidad es* $\mathbb{C}$.

Aplazábamos antes la reseña del artículo de Wright [58], y es ahora el momento de decir que en él se da respuesta negativa a la pregunta que hacíamos hace no mucho sobre si existían números de dimensión infinita. A la vista del título de nuestro trabajo el lector podría pensar entonces que éste está a punto de concluir. Tal lector no estaría en lo correcto puesto que, como relataremos en la última sección, debilitando ligeramente el concepto de “número” que hasta ahora arrastramos, podremos por fin dar nacimiento a los números de dimensión infinita. Hemos aplazado el resultado de Wright porque, aunque conseguido con anterioridad al Teorema 1, ahora es un corolario relativamente fácil del mísmo. Enunciamos a continuación en forma precisa el teorema de Wright incluyendo algún perfeccionamiento conseguido recientemente en [50].

Teorema 2. *Para un álgebra real absolutamente valuada A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Existen a y b en A tales que, para cualquier c en A, cada una de las ecuaciones $ax = c$ y $xb = c$ con incógnita x en A tiene solución única.

ii) Existe a en A tal que, para cualquier c en A, cada una de las ecuaciones $ax = c$ y $xa = c$ con incógnita x en A tiene solución única.

iii) A es un álgebra de división.

iv) A es de dimensión finita.

v) A es "isótopa" a $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$.

Lo primero que procede ahora es explicar el concepto de "isotopía" que aparece en la afirmación (v) del teorema y que, como anteriormente se dijo, se debe a Albert. Si B es un álgebra absolutamente valuada y ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 son isometrías lineales de B sobre B, entonces el espacio vectorial de B con su valor absoluto se puede convertir en una nueva álgebra absolutamente valuada sin más que añadirle la nueva multiplicación $\odot$ definida por

$$x \odot y := \phi_1(\phi_2(x)\phi_3(y)) \ .$$

Cada terna de isometrías (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) de B sobre B hace nacer así una "isótopa" de B. El lector se habrá apercibido ahora de que las exóticas álgebras absolutamente valuadas de dimensión dos sobre $\mathbb{R}$ que presentábamos al comienzo de la presente sección no son otra cosa que isótopas de $\mathbb{C}$ (por cierto que, salvo copia, las tres que presentábamos son las únicas isótopas de $\mathbb{C}$ que no son copias de $\mathbb{C}$).

En lo que concierne a la demostración del Teorema 2 a partir del Teorema de Albert-Urbanik-Wright, notemos en primer lugar que cada una de las afirmaciones que allí se enumeran es claramente más débil que la siguiente, con lo que bastaría probar que la más suave de ellas, a saber la (i), fuerza la más fuerte, a saber la (v). En realidad la simple implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es independiente del Teorema de Albert-Urbanik-Wright y de considerable dificultad (de hecho éste es el perfeccionamiento recientemente conseguido en [50] del teorema original de Wright, al que antes hacíamos alusión). Contentémosnos por tanto en demostrar que la afirmación (ii) fuerza la (v). Denotando por $|.|$ el valor absoluto de A, es claro que el elemento a de A cuya existencia se postula en (ii) se puede suponer que satisface adicionalmente la condición $|a| = 1$. Entonces, de las hipótesis que admitimos para tal elemento a, se desprende que los operadores F y G en A que a cada elemento c de A asocian la única solución x de las ecuaciones $ax = c$ y $xa = c$, respectivamente, son isometrías lineales sobreyectivas. Si definimos un nuevo producto $\odot$ en A por

$$y \odot z := G(y)F(z) \ ,$$

obtenemos entonces una isótopa de A que sorpresivamente tiene unidad (a saber a^2). Por el Teorema 1, tal isótopa es $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$, y la demostración se concluye con la sencilla observación de que la isotopía de álgebras absolutamente valuadas es una relación simétrica. Ni que decir tiene que la esencia del argumento que acabamos de presentar se debe a Albert [2].

Destaquemos, antes de seguir con otras cuestiones, que una consecuencia directa del Teorema 2 es que el *valor absoluto de toda álgebra absolutamente valuada finito-dimensional deriva de un producto escalar*.

La caracterización de las álgebras reales absolutamente valuadas de división que proporciona el Teorema 2 tiene un análogo para el caso de álgebras complejas, que es sensíblemente más fino y al mismo tiempo de demostración más sencilla (de hecho el teorema de Albert-Urbanik-Wright no se necesita). En este caso la condición de "división" puede debilitarse a la de "división por un lado". Un álgebra A se dirá tener división por la izquierda si, para cualesquiera elementos a y b en A con $a \neq 0$, la ecuación $ax = b$ con incógnita x en A tiene solución única (sin que se suponga absolútamente nada acerca del comportamiento de la ecuación $xa = b$). Tenemos entonces el siguiente resultado (ver [50, Proposición 2]).

Proposición 1. *Para un álgebra compleja absolutamente valuada A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Existe un elemento a en A tal que, para cualquier b en A, la ecuación $ax = b$ con incógnita x en A tiene solución única.

ii) A es de división por la izquierda.

iii) A es de división.

iv) A es de dimensión finita.

v) A es una copia de $\mathbb{C}$.

Cualquier demostración completa del teorema de Albert-Urbanik-Wright (Teorema 1) es desde luego lo suficientemente larga y complicada como para no tentarnos a incluirla en nuestro trabajo, que sólo pretende ser una recopilación convenientemente motivada de resultados. Obviamente el lector interesado podría ir al artículo original [57] donde encontraría que el teorema se deriva de una vistosa aplicación de la caracterización de Schoenberg [54] de los espacios prehilbertianos con la que se consigue probar que las álgebras absolutamente valuadas con unidad son automáticamente algebraicas, y del ya comentado resultado de Albert sobre tales álgebras. Más instructivo resulta a nuestro juicio dar unas indicaciones sobre cómo se puede abordar la prueba de dicho teorema a la luz de los conocimientos actuales.

En realidad hoy día se puede “diseccionar” la demostración del Teorema 1 en dos partes: una puramente analítica y otra puramente algebraica. La parte analítica consiste en probar que el valor absoluto de un álgebra absolutamente valuada con unidad deriva de un producto escalar. Esta cuestión está actualmente completamente clarificada puesto que es extremadamente fácil probar que las álgebras absolutamente valuadas con unidad son casos muy particulares de las llamadas “álgebras normadas suaves”, y sabemos que la norma de toda álgebra normada suave deriva de un producto escalar (un resultado conseguido en [45] y cuya demostración ha sido considerablemente simplificada en [48]). Como quiera que las álgebras normadas suaves aparecerán obligadamente en la última sección de nuestro trabajo, bueno será centrar aquí someramente estas nuevas estructuras. El concepto de álgebra normada es la debilitación del de álgebra absolutamente valuada cuando al sucedáneo del valor absoluto, que ahora se le llama “norma” y se le denota por $\|.\|$, se le libera de la restrictiva igualdad $\|ab\| = \|a\| \; \|b\|$ y se le somete únicamente a la desigualdad $\|ab\| \leq \|a\| \; \|b\|$. Un álgebra normada suave no es otra cosa que un álgebra normada A con unidad $\mathbf{1}$ satisfaciendo $\|\mathbf{1}\| = 1$ y tal que “la bola unidad de A” (a saber, el conjunto $\{a \in A \; : \; \|a\| \leq 1\}$) admite un único hiperplano tangente en $\mathbf{1}$. Incidentalmente notaremos que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *y* $\mathbb{O}$*, provistas de su valor absoluto, son las únicas álgebras reales alternativas normadas suaves* [39].

Una vez sabido que el valor absoluto de un álgebra absolutamente valuada con unidad deriva de un producto escalar, la parte algebraica de la demostración del Teorema 1 comenzaría ahora con la observación de que, si el valor absoluto de un álgebra real absolutamente valuada A (con o sin unidad) deriva de un producto escalar, entonces podemos aislar la siguiente información: existe una forma bilineal simétrica no degenerada $< .|. >$ en A, a saber el propio producto escalar, satisfaciendo

$$< ab|ab >=< a|a >< b|b >$$

para cualesquiera a, b en A. Llegamos así de manera natural al concepto de las llamadas “álgebras que admiten composición”, así como al problema de la determinación de las mísmas. Este problema fue ya considerado y resuelto por A. Hurwitz en 1898 bajo las hipótesis adicionales de existencia de unidad y de dimensión finita, y más tarde I. Kaplansky [29] (ver también [59, Capítulo 2]) demostraría que la hipótesis de dimensión finita en el teorema de Hurwitz es superflua. Cuando el teorema de Hurwitz-Kaplansky se aplica a álgebras reales se obtiene que las únicas álgebras reales con unidad que admiten composición son $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2$ (con la multiplicación definida coordenada a coordenada), $\mathbb{H}, M_2(\mathbb{R}), \mathbb{O}$ y una cierta álgebra $\mathbb{O}'$ de dimensión ocho que es alternativa no asociativa y que (al igual que $\mathbb{R}^2$ y $M_2(\mathbb{R})$) tiene divisores de cero. Como esta última patología le está prohibida a las álgebras absolutamente valuadas, la demostración del teorema de Albert-Urbanik-Wright queda entonces concluida.

Terminemos nuestro comentario a la demostración del Teorema 1 diciendo que las dos etapas en que hemos sugerido dividirla en realidad se solapan un poco. La causa estriba en que, cuando en [45] (o [48]), se consigue demostrar el carácter prehilbertiano de las álgebras normadas suaves, simultáneamente se obtiene una rica información algebraica sobre las mísmas que a su vez es provista por una parte del argumento de la prueba del teorema de Hurwitz-Kaplansky. Digamos también que una demostración completa de una versión particular (suficiente para nuestros intereses) de éste último teorema puede consultarse en [22].

Una vez caracterizadas las álgebras absolutamente valuadas de dimensión finita mediante el Teorema 2, el resto de esta sección lo dedicaremos a reseñar otros resultados conocidos sobre condiciones suficientes sobre un álgebra absolutamente valuada que implican la dimensión finita. La demostración de este tipo de resultados involucra siempre de manera más o menos esencial el Teorema de Albert-Urbanik-Wright.

En este orden de ideas empezaremos comentando el trabajo de Urbanik [56] en el que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ son caracterizadas entre las álgebras absolutamente valuadas mediante una condición llamada de "reversibilidad". Un elemento a de un álgebra A se llama reversible si podemos encontrar otro elemento b en A de manera que

$$a + b - ab = a + b - ba = 0 \ ,$$

y se dice que A satisface la condición de reversibilidad si todos sus elementos, salvo posiblemente los de un conjunto numerable, son reversibles. Si A es cualquiera de las álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ u $\mathbb{O}$, todo elemento a de A distinto del $\mathbf{1}$ es reversible (basta tomar arriba $b = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - a)^{-1}$), luego A satisface la condición de reversibilidad. Se demuestra en [56] el siguiente resultado.

Teorema 3. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *y* $\mathbb{O}$ *son las únicas álgebras absolutamente valuadas que satisfacen la condición de reversibilidad.*

Urbanik y Wright en su ya referido famoso artículo [57] demuestran que $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *y el álgebra de McClay son las únicas álgebras reales conmutativas absolutamente valuadas.* Una consecuencia no difícil de este resultado y del

Teorema 1 (ver [36, Teorema 2.1] para detalles) es que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ *son las únicas álgebras reales absolutamente valuadas de potencias asociativas* (un álgebra se llama de potencias asociativas si la subálgebra que engendra cada uno de sus elementos es asociativa). En consecuencia $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ *son las únicas álgebras reales asociativas absolutamente valuadas* y, más en general, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ *son las únicas álgebras reales alternativas absolutamente valuadas.* Estos hechos sugieren que la presencia de identidades familiares en un álgebra absolutamente valuada debe implicar la dimensión finita. En esta dirección se encuadra el trabajo de M. L. El-Mallah y A. Micali [37] en el que como principal resultado se demuestra que *toda álgebra "flexible" absolutamente valuada es finito-dimensional.* La identidad de "flexibilidad", a saber $(ab)a = a(ba)$, es relativamente poco restrictiva: las álgebras que son o bien alternativas (en particular las asociativas) o bien conmutativas son automáticamente flexibles. Por otra parte, existen álgebras flexibles absolutamente valuadas que no son ni alternativas ni conmutativas, como por ejemplo el álgebra de los "para-cuaternios" $\overset{*}{\mathbb{H}}$ y la de los "para-octoniones" $\overset{*}{\mathbb{O}}$, que se obtienen de $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, respectivamente, de manera análoga a como el algebra de McClay (que a partir de ahora se denotará por $\overset{*}{\mathbb{C}}$) se deriva de $\mathbb{C}$.

A partir del trabajo de El-Mallah y Micali, El-Mallah se dedica en cuerpo y alma al doble objetivo de determinar con precisión las álgebras flexibles absolutamente valuadas y de debilitar la hipótesis de flexibilidad a la de que todo elemento del álgebra conmute con su cuadrado. Fruto de sus trabajos [31], [32], [33], [34] y [35] es el siguiente resultado.

Teorema 4. *Para un álgebra real absolutamente valuada A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *A es flexible.*

ii) *A es de dimensión finita y todo elemento de A conmuta con su cuadrado.*

iii) *A es copia de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \overset{*}{\mathbb{C}}, \mathbb{H}, \overset{*}{\mathbb{H}}, \mathbb{O}, \overset{*}{\mathbb{O}}$ o del álgebra de los "pseudo-octoniones".*

Aparece aquí el álgebra de los "pseudo-octoniones", por cierto la única álgebra real absolutamente valuada flexible que desconocíamos hasta el momento, introducida por S. Okubo en [40] (ver también [38, p. 65-71]). El espacio vectorial de esta álgebra (a la que denotaremos por $\mathbb{P}$) puede ser visto como el subespacio vectorial real de $M_3(\mathbb{C})$ formado por aquellas matrices de tres filas y tres columnas con coeficientes complejos que tienen traza cero y quedan invariantes tras conjugar sus coeficientes y trasponer (el lector puede fácilmente verificar que este espacio vectorial tiene dimensión ocho sobre $\mathbb{R}$). La multiplicación en $\mathbb{P}$ (que denotaremos por $*$) se puede dar a conocer también de manera fácil a partir de la multiplicación usual en $M_3(\mathbb{C})$ (que denotaremos por yuxtaposición) y de la función traza en $M_3(\mathbb{C})$ (que denotaremos por tr) sin más que elegir uno cualquiera de los dos números complejos μ solución de la ecuación $3\mu(1-\mu)=1$ y escribir entonces, para x, y en $\mathbb{P}$,

$$x * y := \mu xy + (1-\mu)yx - \frac{1}{3}tr(xy)\mathbf{1} \ ,$$

donde $\mathbf{1}$ designa la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Para convencerse de que $x * y$ no se sale de $\mathbb{P}$, se recomienda al lector tener en cuenta la igualdad $\overline{\mu} = 1-\mu$. Si definimos

$$(x|y) := \frac{1}{6}tr(xy) \ ,$$

entonces $(.|.)$ se convierte en un producto escalar en $\mathbb{P}$ y la norma que deriva de este producto escalar es un valor absoluto en $\mathbb{P}$.

En relación con el Teorema 4, parece ser un problema abierto hasta el momento si toda álgebra absolutamente valuada A en la que todo elemento conmute con su cuadrado es automáticamente finito-dimensional. La respuesta es afirmativa si adicionalmente el valor absoluto de A deriva de un producto escalar [32], o si A posee una involución de álgebra $^-$ que satisface $|\overline{a}| = |a|$ y $a\overline{a} = \overline{a}a$ para todo a en A [31], condiciones éstas que se verifican en cualquier álgebra absolutamente valuada que contenga un idempotente no nulo que conmuta con todos los elementos del álgebra [35]. Es de destacar también que la segunda de estas condiciones, añadida a un álgebra algebraica absolutamente valuada, fuerza la finito-dimensionalidad [34], lo que constituye una respuesta parcial al problema de si toda álgebra absolutamente valuada algebraica es finito-dimensional.

Terminaremos esta sección comentando una nueva condición suficiente de finito-dimensionalidad para las álgebras absolutamente valuadas. La condición en cuestión es la siguiente: se supondrá que el valor absoluto de nuestra álgebra absolutamente valuada A deriva de un producto escalar $(.|.)$ y que, para cada a en A, existe un elemento a^* en A (que se puede probar fácilmente ser único) verificando

$$(ab|c) = (b|a^*c) \tag{1}$$

y

$$(ba|c) = (b|ca^*) \tag{2}$$

para cualesquiera b, c en A. Para a y b en A, la condición de absoluta valuación

$$(a^*b|a^*b) = |a^*|^2(b|b)$$

se puede "linealizar" en la variable b, obteniéndose

$$(a^*b|a^*c) = |a^*|^2(b|c) \ ,$$

con lo que de la igualdad (1) deducimos

$$(a(a^*b)|c) = |a^*|^2(b|c) \ ,$$

y por la no degeneración del producto escalar

$$a(a^*b) = |a^*|^2 b \ . \tag{3}$$

Resulta así que, para cualesquiera a, b en A con $a \neq 0$, la ecuación $ax = b$ tiene solución $x = |a^*|^{-2}a^*b$, que fácilmente se ve ser única; dicho en otros términos: A tiene división por la izquierda. Utilizando ahora la igualdad (2) en lugar de la (1) obtenemos de manera análoga que A tiene división por la derecha. Finalmente, siendo A de división, la finito-dimensionalidad de A se deduce del Teorema 2. Si no quedamos contentos con la simple dimensionalidad finita y queremos intentar el siempre pesado objetivo de determinar con precisión las álgebras que estamos considerando en el presente momento, parece más recomendable profundizar un poco más en las consecuencias de nuestros postulados de manera que se nos permita apelar finalmente al Teorema 4 en vez de al 2. Lo primero que hay que decir es que, para un álgebra absolutamente valuada A sujeta a la condición que estábamos considerando, el operador $a \to a^*$ es una involución de álgebra en A. El lector no tropezará con dificultad alguna en la verificación de este hecho, excepto posiblemente en lo que concierne a la igualdad $(ab)^* = b^*a^*$. Para ver esto, sea a un elemento arbitrario de A y elíjase u en A con $|u| = 1$. Se tiene entonces

$$|a|^2 = |au|^2 = (au|au) = (u|a^*(au)) \leq |u|\,|a^*(au)| = |a^*|\,|a| \ ,$$

con lo que $|a| \leq |a^*|$, y cambiando a por a^*, se llega a $|a| = |a^*|$. Es ahora el momento de utilizar un argumento en [19] consistente en "linealizar" esta última igualdad en la forma

$$(a^*|b) = (a|b^*)$$

para obtener entonces de (1) y (2)

$$((ab)^*|c) = (c^*|ab) = (a^*c^*|b) = (a^*|bc) = (b^*a^*|c)$$

y llegar así, utilizando de nuevo la no degeneración del producto escalar, a la igualdad $(ab)^* = b^*a^*$, tal como deseábamos. Por otra parte, de (3) y de la igualdad análoga que podríamos haber obtenido utilizando (2) en vez de (1), deducimos

$$a(a^*b) = (ba^*)a \ . \tag{4}$$

Ahora, en términos de la isótopa B obtenida de A por consideración del nuevo producto

$$a \odot b := a^*b^* \ ,$$

la igualdad (4) se lee diciendo que B es flexible. Por el Teorema 4, B habrá de ser buscada entre alguna de las álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \overset{*}{\mathbb{C}}, \mathbb{H}, \overset{*}{\mathbb{H}}, \mathbb{O}, \overset{*}{\mathbb{H}}$ y $\mathbb{P}$. De hecho no todas las posibilidades son compatibles con nuestra situación, debido a que las igualdades (1) y (2) para A se traducen en términos de la isótopa B diciendo que el producto escalar de B es "asociativo", es decir: se verifica

$$(a \odot b|c) = (a|b \odot c) = (b|c \odot a) \ ,$$

condición que se satisface para B igual a $\mathbb{R}, \overset{*}{\mathbb{C}}, \overset{*}{\mathbb{H}}, \overset{*}{\mathbb{O}}$ y $\mathbb{P}$ pero no para B igual a $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$. Eliminados pues estos tres últimos valores para B, queda aun el problema de "deshacer" la isotopía o, lo que es lo mismo, determinar la función $*$. Ciertamente, del comportamiento que conocemos para $*$ en A, se deduce que $*$ debe ser una involución de álgebra isométrica en B y, tomando para B cualquiera de los cinco valores permisibles, uno comprueba sin dificultad que, recíprocamente, el álgebra A que se obtiene de B deshaciendo la isotopía por medio de cualquier involución de álgebra isométrica $*$ en B es una solución a nuestro problema. Tropezamos así con el problema de clasificar las involuciones de álgebra isométricas en las álgebras $\mathbb{R}, \overset{*}{\mathbb{C}}, \overset{*}{\mathbb{H}}, \overset{*}{\mathbb{O}}$ y $\mathbb{P}$, que no parece estar resuelto, que sepamos, hasta este momento para las tres últimas. En todo caso, $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ poseen dos involuciones de álgebra isométricas esencialmente distintas, a saber la cayleyana y la "no cayleyana" isométrica (que para $\mathbb{C}$ no es otra que la identidad), que vistas en $\overset{*}{\mathbb{C}}, \overset{*}{\mathbb{H}}$ y $\overset{*}{\mathbb{O}}$, respectivamente, siguen siendo involuciones de álgebra isométricas también esencialmente distintas, mientras que $\mathbb{P}$ posee al menos una involución de álgebra isométrica (a saber, visto $\mathbb{P}$ dentro de $M_3(\mathbb{C})$, la trasposición). En consecuencia obtenemos al menos ocho soluciones para nuestra álgebra A, a saber $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}, \overset{*}{\mathbb{C}}$, más tres nuevas álgebras exóticas deducibles de $\mathbb{H}, \mathbb{O}$ y $\mathbb{P}$ por una sencilla isotopía perfectamente descriptible en cada caso. Obviamente desearíamos saber si hay o no más soluciones posibles para nuestra álgebra A. En todo caso, del principio de nuestro argumento y de lo que sabemos sobre álgebras complejas absolutamente valuadas con división por un lado, se desprende que $\mathbb{C}$ *es la única álgebra compleja absolutamente valuada cuyo valor absoluto deriva de un producto escalar que satisface una cualquiera de las condiciones (1) o (2) para conveniente función* $a \to a^*$.

3. Una transición entre los números de dimensión finita y los de dimensión infinita.

Como ya comentábamos en la sección anterior, la mayoría de los resultados que allí hemos reseñado no tendrían mayor relevancia de no existir álgebras absolutamente valuadas de dimensión infinita. Dedicaremos esta sección a la exposición de los ejemplos de álgebras absolutamente valuadas infinito-dimensionales que podríamos llamar "clásicos", en el sentido de que todo parecido de estas álgebras con un conjunto de números se reduce a la pura coincidencia de poseer un valor absoluto. Aprovecharemos también la ocasión para enfatizar las "patologías" que tales álgebras pueden padecer en general, así como para reseñar los pocos resultados positivos conocidos sobre álgebras absolutamente valuadas arbitrarias.

Como también adelantamos en la Sección 2, el primer ejemplo de un álgebra absolutamente valuada de dimensión infinita aparece en el trabajo de Urbanik y Wright [57]. La idea utilizada en la fabricación de este ejemplo permite de hecho la construcción de una amplia gama de álgebras absolutamente valuadas infinito-dimensionales, algunas de las cuales aparecen como herramientas útiles en la teoría de los espacios de Banach (ver por ejemplo [7, p. 25] y la demostración del Teorema 3.a.10 de [30]), bien que no hemos podido decidir quién es antes, si la gallina o el huevo, debido a que ni Urbanik y Wright citan a los Banach-espacistas ni los Banach-espacistas citan a Urbanik y Wright. En cualquier caso, la construcción de estos ejemplos es más ingeniosa que difícil ("se le podría haber ocurrido a cualquiera"), y con las referencias que obran en nuestro poder la paternidad del descubrimiento hay que atribuirla a Urbanik y Wright.

La construcción comienza con la consideración de un conjunto infinito arbitrario U y la selección de una función inyectiva ϑ de $U \times U$ en U (precisamente la existencia de una tal función caracteriza a los conjuntos infinitos). Acto seguido se fija el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$, que puede ser indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y se considera el espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ de todas las funciones de U en $\mathbb{K}$ que valen cero en todos los elementos de U excepto acaso en los de un subconjunto finito. Identificando cada elemento u de U con la función que vale uno en u y cero en los restantes elementos de U, U se convierte en una base algebraica de este espacio (que resulta así de dimensión infinita). Se puede definir entonces una multiplicación en $\mathcal{A}$ por simple extensión por bilinealidad de la función ϑ o, lo que es lo mismo y acaso el lector prefiera, por la fórmula de “convolución” que, para f, g en $\mathcal{A}$, determina el valor de la multiplicación $f * g$ en un elemento arbitrario de U por

$$(f * g)(u) := \sum_{\vartheta(v,w)=u} f(v)g(w) \ ,$$

donde el lector deberá tener en cuenta que, en vista del carácter inyectivo de ϑ, la suma que aparece en esta fórmula tiene a lo más un término, así como la más que familiar convención de que una suma sin términos debe valer cero. El álgebra sobre $\mathbb{K}$ que se obtiene así (que denotaremos por $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$) posee “muchos” valores absolutos (una patología cuya posible presencia debe no ser olvidada en lo que sigue). En efecto: si $1 \leq p \leq \infty$ y f es un elemento de $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$, podemos definir $|f|_p$ por

$$|f|_p := (\sum_{u \in U} |f(u)|^p)^{1/p}$$

si $p \neq \infty$, y por

$$|f|_p := Max\{|f(u)| \ : \ u \in U\}$$

en caso contrario, comprobando en todo caso sin problemas que $|.|_p$ se convierte en un valor absoluto en $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$. Fijado un concreto valor de p, el álgebra absolutamente valuada resultante de añadir a $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$ el valor absoluto $|.|_p$ será denotada por $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$. Por un sencillo proceso de “completación” podemos obtener a partir de $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$ un álgebra absolutamente valuada completa de dimensión infinita, que denotaremos por $\mathcal{C}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$ y cuyo espacio de Banach no es otro que el familiar espacio $\ell_p(U, \mathbb{K})$ si $p \neq \infty$, o $c_0(U, \mathbb{K})$ si $p = \infty$. Si se elige U igual al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, ϑ igual a cualquier biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $p = 2$, entonces $\mathcal{C}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$ no es otra cosa que el ejemplo de Urbanik-Wright, mientras que los anteriormente comentados ejemplos que aparecen en la teoría de los espacios de Banach corresponden a la elección $U = \mathbb{N}$, ϑ una particular biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ (que no especificaremos aquí) y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quedando ahora la variable p libre de todo requerimiento.

Como quiera que el valor absoluto de $\mathcal{C}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$ sólo procede de un producto escalar en el caso $p = 2$, una primera consecuencia de la construcción anterior es la existencia en dimensión infinita de álgebras absolutamente valuadas cuyo valor absoluto no procede de un producto escalar, contrariamente a lo que ocurre en dimensión finita e igualmente contrariamente a lo que se conjetura en la introducción de [35].

Otra consecuencia de nuestra construcción es la existencia incluso de álgebras absolutamente valuadas completas sin “unicidad” del valor absoluto. En efecto: si $1 \leq p < q \leq \infty$, $\mathcal{C}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$ es un álgebra absolutamente valuada completa que, a nivel puramente algebraico, puede verse de manera natural como subálgebra de $\mathcal{C}(U, \vartheta, \mathbb{K}, q)$, pero el valor absoluto que la primera álgebra hereda de ésta última no coincide con el suyo propio. En este ejemplo el lector puede verificar que el nuevo valor absoluto en $\mathcal{C}(U, \vartheta, \mathbb{K}, p)$ no es completo, así como que es más chico que el de partida. Ninguno de estos hechos es anecdótico puesto que en general, *si dos valores absolutos coexisten en una misma álgebra y uno de ellos es completo, entonces éste (el completo) mayora al otro*, afirmación de la que se desprende que *dos valores absolutos completos en una misma álgebra están obligados a coincidir*. Estas aseveraciones no son sino consecuencias muy particulares de un teorema demostrado en [50] que reza como sigue.

Teorema 5. *Si A es un álgebra normada completa (cuya norma denotamos por $\|.\|$), si B es un álgebra absolutamente valuada arbitraria (cuyo valor absoluto denotamos por $|.|$) y si ϕ es un "homomorfismo" de A en B (a saber, una función lineal ϕ de A en B que satisface $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para cualesquiera x, y en A), entonces se tiene $|\phi(x)| \leq \|x\|$ para todo x en A.*

La demostración de este teorema de "continuidad automática no-asociativa" se basa en resultados previamente conseguidos en [46] y en un curioso aprovechamiento de la patología que obligadamente sufren las álgebras absolutamente valuadas infinito-dimensionales como consecuencia de la lectura por el contrarecíproco de la implicación $(i) \Rightarrow (iv)$ en el Teorema 2.

En relación con la construcción de Urbanik-Wright que hemos reseñado, quizá sea interesante señalar que, en esencia, el papel que en ella desempeña el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ puede ser jugado por cualquier álgebra absolutamente valuada prefijada, obteniéndose así nuevas álgebras absolutamente valuadas sobre el mismo cuerpo de escalares que tuviera el álgebra de partida. Esto da cierta luz sobre el problema de qué espacios de Banach admiten una multiplicación que convierta a la norma en un valor absoluto, a saber: la clase de estos espacios de Banach es estable por paso a ℓ_p-sumas $(1 \leq p < \infty)$ o c_0-sumas de longitud arbitrariamente infinita de copias de uno dado en la clase. Ligeros retoques en la construcción de Urbanik-Wirght permiten mostrar que la clase de espacios de Banach que consideramos es también estable por paso a ℓ_∞-sumas de longitud infinita de copias de uno dado en dicha clase.

Pasamos ahora a comentar otro procedimiento de construcción de álgebras absolutamente valuadas de dimensión infinita que en realidad desemboca en una relevante particularización del método anteriormente reseñado, pero que tiene interés en sí mismo y será especialmente útil en la línea de saber lo que se puede esperar o no de un álgebra absolutamente valuada de dimensión infinita. La idea original del nuevo método, consistente en enlazar la construcción de Urbanik-Wright con las "álgebras libres no asociativas" se debe a M. Cabrera, fue anunciada en la introducción de [15] y posteriormente fue expuesta con precisión en mi trabajo [50], dando naturalmente los debidos honores a su autor. Como quiera que su formulación involucra conceptos y métodos de "álgebra universal no-asociativa" (cuyo simple nombre asusta a cualquiera), pedimos al lector un esfuerzo de imaginación que nos libere de un excesivo rigor en la exposición, que por otra parte sería impropio de un trabajo como el que traemos entre manos. El lector que se emperre en tener una idea totalmente precisa de este tipo de cuestiones puede consultar [59] o el libro de N. Jacobson [26].

Ahora se parte como único ingrediente de un conjunto V no necesariamente infinito, a partir del cual uno puede considerar el conjunto U de todas las "palabras no asociativas con letras en V". Para guiar la intuición diremos que el conjunto U se puede construir inductivamente como sigue: las palabras de "grado" 1 son justamente los elementos de V, las palabras de "grado" 2 se obtienen simplemente yuxtaponiendo dos palabras de grado 1 de todas las maneras posibles y, en general, si se suponen conocidas todas las palabras de "grado" estrictamente menor que un determinado número natural $n \geq 2$, entonces las palabras de "grado" n se obtienen yuxtaponiendo de todas las maneras posibles dos palabras de "grado" estrictamente menor que n, con la precaución de que la suma de los "grados" de las palabras que se yuxtaponen sea igual a n y de que las palabras de grado estrictamente mayor que 1 deben ser encerradas entre paréntesis previamente a la yuxtaposición. Para conseguir que esta yuxtaposición sea totalmente no asociativa se conviene en que dos palabras son iguales si y si sólo si tienen exactamente la misma escritura. Así por ejemplo, para v en V, la palabra $(vv)v$ es distinta de la palabra $v(vv)$. El punto crucial de enlace con la construcción de Urbanik-Wright radica en que, al contrario de lo que hubiese ocurrido si hubiéramos considerado "palabras asociativas" (que se construyen de manera análoga pero sin encerrar entre paréntesis las palabras previamente a su yuxtaposición), en nuestro caso la función que a cada par ordenado de palabras asocia la yuxtaposición de sus coordenadas en el mismo orden que aparecen en el par es una función inyectiva (aunque no sobreyectiva) de $U \times U$ en U (ver [59, Proposición 2, p. 2] o [26, Lema en p. 24]). Si llamamos ϑ a esta función y si como antes $\mathbb{K}$ designa indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, podemos considerar entonces el álgebra $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$ en el sentido que dimos a este símbolo con ocasión de la construcción de Urbanik-Wright. Como quiera que U y ϑ nacen naturalmente del conjunto de partida V, el álgebra $\mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$ se denota simplemente por $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ y se conoce con el nombre de "álgebra no asociativa libre sobre

$\mathbb{K}$ engendrada por V". La razón de este nombre radica en que, recordando las inclusiones naturales $V \subset U \subset \mathcal{A}(U, \vartheta, \mathbb{K})$, $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ satisface la siguiente "propiedad universal": $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ *contiene a* V *y, siempre que se tenga un álgebra* A *sobre* $\mathbb{K}$ *y una función arbitraria de* V *en* A*, dicha función se puede extender de una y una sóla manera en un homomorfismo de* $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ *en* A ([59, Teorema 1 en p. 3] o [26, p. 25]). Como consecuencia de la construcción de Urbanik-Wright resulta ahora que, *el álgebra no asociativa libre sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *engendrada por un conjunto arbitrario admite "muchos" valores absolutos.* El álgebra absolutamente valuada que resulta de añadir al álgebra libre $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ uno de los valores absolutos $|.|_p$ que aparecen en la construcción de Urbanik-Wright se denotará por $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$.

El lector que haya tenido la deferencia de leer este trabajo hasta el momento en que nos encontramos estará ya curado de espanto con respecto a la complejidad y abundancia de conceptos algebraicos que nos hemos visto obligados a introducir de la mano de las álgebras absolutamente valuadas. No tendrá por tanto especial inconveniente en aguantar unas pocas más definiciones en orden a poder codificar algunas otras patologías que la dimensión infinita puede ocasionar en las álgebras absolutamente valuadas. Por "ideal" de un álgebra A entenderemos un subespacio (sea M) de A tal que, para cualesquiera a en A y m en M, se tenga que tanto am como ma se quedan en M. Obviamente A y $\{0\}$ son ideales de A y, en el caso de que éstos sean los únicos ideales de A y la multiplicación de A no sea idénticamente cero, A se dice ser "simple". En otros términos, A es simple si cada elemento de A puede ser obtenido a partir de cualquier elemento no nulo a de A por suma finita de productos en los que aparezca a como factor. Así por ejemplo, la división por un lado fuerza la simplicidad y, en consecuencia, las álgebras absolutamente valuadas de dimensión finita son simples. En dimensión infinita las cosas pueden no ir tan bien. Para convencernos, sea V un conjunto con un sólo elemento v, sea $\mathbb{K}$ como anteriormente cualquiera de los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, fijemos p con $1 \leq p \leq \infty$, y consideremos el álgebra absolutamente valuada sobre $\mathbb{K}$ $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$ construida anteriormente. Por la "propiedad universal" existe un homomorfismo ϕ de $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$ en $\mathbb{K}$ tal que $\phi(v) = 1$. El conjunto de los elementos que anulan a ϕ es entonces un ideal de $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$ distinto de $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$ y de $\{0\}$, con lo que $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$ es un álgebra absolutamente valuada que no es simple. Si alguien sospecha que esta patología puede deberse a la no complitud de $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, p)$ no está en lo cierto, puesto que, si se elige $p = 1$, es fácil comprobar que la desigualdad $|\phi(x)| \leq |x|$ es válida cualquiera que sea x en $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, 1)$ y en consecuencia, si $\mathbf{A}$ denota la completación de $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}, 1)$, ϕ se extiende en un homomorfismo $\hat{\phi}$ de $\mathbf{A}$ en $\mathbb{K}$ que satisface $|\hat{\phi}(a)| \leq |a|$ para todo a en $\mathbf{A}$. Ahora el conjunto de los elementos de $\mathbf{A}$ que anulan a $\hat{\phi}$ es un ideal "cerrado" de $\mathbf{A}$ distinto de $\mathbf{A}$ y $\{0\}$; en otros términos:

A es un álgebra absolutamente valuada completa que, no solamente no es simple, sino que ni tan siquiera es "topológicamente simple".

Si ahora fijamos el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{C}$, el álgebra compleja absolutamente valuada completa **A** que venimos considerando va a permitir la construcción de un álgebra real absolutamente valuada completa especialmente perversa. Tal álgebra no es otra que la subálgebra real cerrada **B** de **A** dada por $\mathbf{B} := \mathbb{R}v \oplus M$, donde M denota el ya considerado ideal de **A** de los elementos de **A** que anulan a $\hat{\phi}$, provista del valor absoluto que hereda de **A**. Claramente **B** posee un ideal no nulo (a saber M) que tiene una "estructura compleja" que de ninguna manera puede ser extendida a **B**. En realidad se puede demostrar que **B** no posee ninguna "estructura compleja". Las anteriores afirmaciones se pueden formular con precisión en términos del "centroide" y "centroide extendido" de nuestra álgebra **B**. El centroide $\Gamma(A)$ de un álgebra A se define como el conjunto de las funciones lineales f de A en A que satisfacen

$$f(xy) = xf(y) = f(x)y$$

para cualesquiera x, y en A. El centroide de A, con la suma y el producto por escalares definidos "puntualmente" y la multiplicación que se obtiene por "composición" es un álgebra asociativa con unidad sobre el cuerpo de escalares de A. En el caso en que A sea "prima", el centroide de A se puede agrandar hasta conseguir un cuerpo $\mathcal{C}(A)$ (cuya construcción especificaremos más adelante) conocido con el nombre de centroide extendido de A. El álgebra A se dice ser prima si, para cualesquiera ideales no nulos P y Q de A, se pueden encontrar elementos x en P e y en Q satisfaciendo $xy \neq 0$. Obviamente las álgebras absolutamente valuadas son primas y, en consecuencia, podemos pretender determinar su centroide extendido. En realidad como consecuencia directa de los resultados de [15] podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 2. *El centroide extendido de un álgebra compleja absolutamente valuada es copia de $\mathbb{C}$, mientras que el centroide extendido de un álgebra real absolutamente valuada es copia de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*

Como consecuencia, el *centroide de un álgebra compleja absolutamente valuada se reduce a los múltiplos complejos de la identidad, mientras que el centroide de un álgebra real absolutamente valuada o bien se reduce a los múltiplos reales de la identidad o bien es copia de* $\mathbb{C}$. Se tiene así que, si A es un álgebra compleja absolutamente valuada, entonces $\Gamma(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{C}$, y que si A es un álgebra real absolutamente valuada, se podría tener cualquiera de las situaciones $\Gamma(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}$, $\Gamma(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{C}$ o $\left\{\begin{smallmatrix}\Gamma(A)=\mathbb{R}\\ y\\ \mathcal{C}(A)=\mathbb{C}\end{smallmatrix}\right\}$. La primera situación es fácilmente ejemplificable (tómese por ejemplo $A = \mathbb{R}$, $\mathbb{H}$ u

$\mathbb{O}$), la segunda situación se presenta para cualquier álgebra compleja absolutamente valuada vista como real (en particular para $A = \mathbb{C}$), mientras que la tercera (que no puede presentarse en dimensión finita) se ejemplifica, incluso con complitud, tomando como A el álgebra perversa $\mathbf{B}$ que presentábamos anteriormente.

Como decíamos antes, la Proposición 2 es consecuencia particular de los resultados de [15] y de hecho no conocemos ninguna referencia previa donde el contenido de la tal proposición aparezca explícita o implícitamente. No obstante, quien quiera que quisiera convencerse de la veracidad de lo que se afirma en la Proposición 2 a través de los conceptos y métodos de [15] estaría como si dijéramos "matando mosquitos con un cañón". En realidad, la Proposición 2 puede demostrarse de manera relativamente sencilla con las herramientas propias de las álgebras absolutamente valuadas, cosa que haremos a continuación. Es pues ya inaplazable conocer con precisión el concepto de centroide extendido de un álgebra prima [23]. Los elementos del centroide extendido de un álgebra prima A van a ser funciones con comportamiento parecido a aquellas que constituían el centroide. Dos diferencias esenciales van a aparecer no obstante: la primera, que estas funciones, que desde luego tomarán valores en A, no tienen por qué estar definidas en la totalidad de A sino tan sólo en un conveniente ideal no nulo de A que puede depender de la función que se considere; la segunda, que dos de estas funciones se considerarán iguales si toman el mismo valor en todos los elementos comunes a sus respectivos dominios de definición. Ni que decir tiene que a una tal función f se le exigirá un parecido con los elementos del centroide consistente en que satisfaga las dos siguientes igualdades

$$f(ax) = af(x)$$

$$f(xa) = f(x)a$$

para cualesquiera a en A y x en el dominio de definición de f. Dos elementos del centroide extendido se pueden "sumar" sumando sus valores en los elementos comunes a sus respectivos dominios de definición, y se pueden "multiplicar" componiendo sus valores donde esta composición tenga sentido, resultando esta suma y multiplicación compatibles con el concepto de igualdad que para este tipo de funciones hemos convenido. Con esta suma y producto el centroide extendido de A se convierte en un cuerpo que contiene claramente al centroide de A y que extiende al cuerpo de base (que puede verse dentro del centroide como el conjunto de los múltiplos escalares del operador identidad). Si ahora A es un álgebra absolutamente valuada (que sabemos ser automáticamente prima) y tomamos f en el centroide extendido de A y u en el dominio de definición de f con $|u| = 1$, podemos considerar el número $|f(u)|$, que sería un magnífico candidato a "valor absoluto" de f siempre y cuando que nos convenciéramos de que este número no cambia ni si se sustituye f por otro elemento g "igual" a f ni si se sustituye u por un elemento v en el dominio de definición de g con $|v| = 1$. Afortunadamente el viento sopla a favor, ya que entonces uv es un elemento común a los dominios de definición de f y g con lo que, en vista de la "igualdad" de f y g, se tendrá

$$f(uv) = g(uv) \ .$$

Pero por otra parte

$$f(uv) = f(u)v \ \text{ y } \ g(uv) = ug(v) \ ,$$

de donde

$$f(u)v = ug(v)$$

y finalmente, como $|u| = |v| = 1$, obtenemos

$$|f(u)| = |f(u)|\,|v| = |f(u)v| = |ug(v)| = |u|\,|g(v)| = |g(v)| \ ,$$

tal como sospechábamos. Estamos ahora autorizados a escribir $\| f \| := |f(u)|$ y a sospechar que $\| . \|$ es un valor absoluto en el centroide extendido de A, sospecha ésta en cuya verificación el lector no encontrará dificultad alguna. Se tiene entonces que el centroide extendido de A es un álgebra absolutamente valuada asociativa conmutativa y con unidad, lo que a la vista del Teorema 1 (o incluso del precedende de Ostrowski que reseñamos previamente al Teorema 1) lleva a que debe ser copia de $\mathbb{C}$, si el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$, o copia de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, concluyendo así la demostración de la Proposición 2.

No obstante haber sido posible obviar en la demostración de la Proposición 2 los nada fáciles argumentos del artículo [15], diremos que éste contiene la observación, por otra parte inmediata, de que toda álgebra absolutamente valuada es un álgebra normada "ultraprima", así como el resultado, nada inmediato por cierto, de que la Proposición 2 permanece válida si se sustituye allí "álgebra absolutamente valuada" por "álgebra normada ultraprima". No cansaremos al lector con las definiciones del nuevo concepto que aparece y nos limitaremos a referirle a [25] y [15] para los conceptos de "ultraproducto", "ultrapotencia" y ultraprimidad. Digamos, eso sí, que la observación contenida en [15], a la que antes aludíamos, puede ser generalizada sin esfuerzo adicional en el sentido de que todo ultraproducto de álgebras absolutamente valuadas es una nueva álgebra absolutamente valuada, lo que en particular añade una nueva e importante condición de estabilidad a la clase de los espacios de Banach que "soportan" a las álgebras absolutamente valuadas.

Remitiremos también al lector interesado en ampliar información sobre el comportamiento del centroide extendido en álgebras normadas primas a las referencias [5], [14], [17], [49], [52] y [53].

La posibilidad de poder ver a toda álgebra compleja no asociativa libre como álgebra absolutamente valuada nos va a permitir también la construcción de "álgebras de Gelfand-Naimark" terriblemente no asociativas (en el sentido de que no satisfacen ninguna identidad). Esto viene a cuento a raíz de un teorema demostrado en [44] y que afirma que *toda álgebra de Gelfand-Naimark con unidad es alternativa*, y así las álgebras de Gelfand-Naimark que construiremos dentro de poco pondrán de manifiesto que la hipótesis de existencia de unidad en este teorema no se puede soslayar. Pero ¿qué son las álgebras de Gelfand-Naimark y por qué reciben este nombre?. Pues bien, un álgebra de Gelfand-Naimark será un álgebra compleja normada completa (sea A) provista de una involución de álgebra (conjugado-lineal), que se suele denotar por $*$, satisfaciendo

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

para todo elemento a de A. El ejemplo más clásico de álgebra de Gelfand-Naimark asociativa viene dado por el álgebra $BL(H)$ de todos los operadores "acotados" en un espacio de Hilbert complejo H, una vez que se dota a esta álgebra de la "norma de operadores" y de la involución $*$ que a cada elemento T de $BL(H)$ asocia su "adjunto" T^* determinado por el hecho de satisfacer

$$(T(\eta)|\xi) = (\eta|T^*(\xi))$$

para cualesquiera η, ξ en H. Otros ejemplos de álgebras de Gelfand-Naimark asociativas pueden obtenerse a partir del anterior por simple paso a subálgebras "cerradas" e invariantes por $*$. El teorema de Gelfand-Naimark, demostrado en 1943 [24] bajo algunas hipótesis adicionales que hoy se saben ser superfluas (ver [21], [47], [16]), asegura que, salvo copias, ya no hay más ejemplos de álgebras de Gelfand-Naimark asociativas. Ya dijimos antes que toda álgebra de Gelfand-Naimark con unidad está "muy cerca" de ser asociativa puesto que de hecho es alternativa, y es el momento de decir ahora que, a modo de recíproco, toda álgebra de Gelfand-Naimark alternativa se puede ver como subálgebra cerrada y $*$-invariante de un álgebra de Gelfand-Naimark con unidad, así como que la teoría de las álgebras de Gelfand-Naimark alternativas se puede reducir (en un sentido que no precisaremos) a la de las asociativas y a la del álgebra alternativa no asociativa que resulta de "complexificar" $\mathbb{O}$ una vez que a esta complexificación se le provee de conveniente norma e involución ([13], [27], [41]). Ahora las álgebras absolutamente valuadas nos proporcionan ejemplos de álgebras de Gelfand-Naimark que no son alternativas [51]. En efecto: sea V un conjunto numerable infinito, sea $1 \leq p \leq \infty$, y consideremos el álgebra compleja no asociativa libre engendrada por V, $\mathcal{L}(V, \mathbb{C})$. De la propiedad universal de $\mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ es fácil inferir la existencia de una única involución de álgebra (conjugado-lineal) $*$ en $\mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ tal que $v^* = v$ para todo v en V. Si ahora añadimos uno cualquiera de los valores absolutos $|.|_p$ que conocemos en $\mathcal{L}(V, \mathbb{C})$, es igualmente fácil ver que este valor absoluto hace a $*$ isométrica, con lo que pasando a la completación obtenemos un álgebra compleja absolutamente valuada completa con involución de álgebra isométrica. Por un lado una tal álgebra es automáticamente un álgebra de Gelfand-Naimark, y por otro el álgebra que arrastramos contiene al álgebra compleja libre no asociativa engendrada por un conjunto numerable, con lo que no puede satisfacer ninguna identidad (mucho menos puede ser alternativa).

Dedicaremos el final de esta sección a reseñar otra gama de ejemplos de álgebras absolutamente valuadas infinito-dimensionales así como un teorema de caracterización de las mísmas, todo ello debido a K. Urbanik [55]. Ahora el cuerpo de escalares será siempre $\mathbb{R}$ y, como al principio de la construcción de Urbanik-Wright, partiremos de un conjunto infinito U y consideraremos el espacio vectorial real (que denotaremos por Y) de todas las funciones de U en $\mathbb{R}$ que valen cero en todos los elementos de U excepto acaso en los de un subconjunto finito. Como quiera que U se convierte en una base de Y, para definir una multiplicación en Y es suficiente dar a conocer los valores de esta multiplicación en parejas de elementos de U. Para ello seleccionaremos en nuestro caso un subconjunto no vacío T de U cuyo complemento en U tenga el mísmo cardinal que U, un elemento u_0 en T, una función inyectiva ϕ de la familia de los subconjuntos binarios de U en U cuya imagen sea disjunta con T, y una función ψ de $U \times U$ en $\{1, -1\}$ satisfaciendo

$$\psi(u, v) + \psi(v, u) = 0$$

tanto si u, v están a un tiempo en T como si no están a un tiempo en T, y

$$\psi(u, v) = 1$$

en caso contrario. Una vez seleccionados estos ingredientes, para lo que tendremos que haber utilizado alguna vez la "magia" de los conjuntos infinitos, definimos la multiplicación de elementos de U por las fórmulas

$$uv := \psi(u, v)\phi(\{u, v\})$$

si $u \neq v$, y

$$u^2 := \varepsilon(u)u_0$$

donde $\varepsilon(u)$ vale 1 o -1 según que u pertenezca a T o no. Con mayor o menor esfuerzo se comprueba que el álgebra que se obtiene al extender por bilinealidad a Y la multiplicación anterior es un álgebra absolutamente valuada sin más que tomar como valor absoluto $|.|$ de un elemento f en Y el dado por

$$|f| := \sqrt{\sum_{u \in U} |f(u)|^2} \ .$$

Esta álgebra admite incluso una involución de álgebra $*$, determinada sobre los elementos de U por

$$u^* := \varepsilon(u)u \ ,$$

que resulta ser isométrica y satisface

$$f^*f = ff^*$$

para todo f en Y. Además, si para f y g en Y escribimos

$$((f|g)) := \frac{1}{2}(fg^* + gf^*) \ ,$$

entonces se verifica

$$((fg|hl)) = ((fh^*|g^*l))$$

cualesquiera que sean f, g, h, l en Y. Toda la riqueza estructural de Y pasa a su completación, que denotaremos por $X(U, T, u_0, \phi, \psi)$, y que resulta en consecuencia ser un álgebra real absolutamente valuada completa con involución de álgebra isométrica $*$ satisfaciendo

$$a^*a = aa^* \quad \text{y} \quad ((ab|cd)) = ((ac^*|b^*d)) \ ,$$

donde

$$((a|b)) := \frac{1}{2}(ab^* + ba^*) \ .$$

Siguiendo la terminología de Urbanik en [55], codificaremos toda esta información diciendo que $X(U, T, u_0, \phi, \psi)$ es una "$*$-álgebra absolutamente valuada regular". En su intento de clasificar las $*$-álgebras absolutamente valuadas regulares, Urbanik introduce la noción de "similaridad" que no es sino un caso particular de la isotopía introducida por Albert. Si A es una $*$-álgebra absolutamente valuada regular y F es una isometría lineal de A sobre A que conmuta con $*$, entonces el espacio vectorial de A con su valor absoluto y su involución $*$ se puede convertir en una nueva $*$-álgebra absolutamente valuada regular sin más que añadirle la nueva multiplicación $\odot$ definida por

$$a \odot b := F(ab) \ .$$

Las álgebras obtenidas a partir de A por este procedimiento son las llamadas "similares" a A. Por cierto que dos álgebras $X(U, T, u_0, \phi, \psi)$ y $X(U', T', u'_0, \phi', \psi')$, como las que hemos construido anteriormente, son similares si y sólo si $\#U = \#U'$, $\#T = \#T'$ y $\#S = \#S'$, donde $\#$ denota el cardinal del conjunto al que precede, y S (análogamente S') es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen ni a T ni a la imagen de ϕ. Así la "clase de similaridad" de las álgebras que nacen de la construcción de Urbanik depende únicamente de tres cardinales $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ sin otra condición que la de ser ϖ_1 infinito, $\varpi_3 \leq \varpi_1$ y $0 \neq \varpi_2 \leq \varpi_1$, por lo que será denotada por $\chi(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$. Ahora el teorema de estructura de Urbanik para las $*$-álgebras absolutamente valuadas regulares reza como sigue.

Teorema 6. *Toda $*$-álgebra absolutamente valuada regular es similar a $\mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$ (con $*$ igual a la identidad o a la conjugación), o a una de la clase $\chi(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$ para convenientes cardinales $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ con ϖ_1 infinito, $\varpi_3 \leq \varpi_1$ y $0 \neq \varpi_2 \leq \varpi_1$.*

Es de destacar el corolario obvio (que de hecho es pieza clave en la demostración) de que el *valor absoluto de una $*$-álgebra absolutamente valuada regular deriva de un producto escalar.*

4. Números de dimensión infinita.

Recapitulando un poco el material reseñado hasta ahora en nuestro trabajo, en la Sección 1 presentábamos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, el de los complejos $\mathbb{C}$, el de los cuaternios $\mathbb{H}$ y el de los octoniones $\mathbb{O}$ como ejemplos relevantes de conjuntos de números. En la Sección 2 nos preguntábamos si había más conjuntos de números y contestábamos que, si por conjunto de números entendíamos un álgebra real absolutamente valuada con división, entonces en esencia no hay más conjuntos de números que $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$, puesto que todos los conjuntos de números entendidos en tal sentido se pueden obtener por sencillas "distorsiones" de las cuatro álgebras citadas (Teorema 2). En particular todos estos conjuntos de números son de dimensión 1, 2, 4 u 8 sobre $\mathbb{R}$. En la Sección 3 hemos tenido ocasión de conocer abundantes ejemplos de álgebras absolutamente valuadas de dimensión infinita (que obviamente deben fracasar ante el test de la división) observando que, en dimensión infinita, el axioma de la absoluta valuación (incluso con la añadidura de complitud) permite en general la presencia de excesivas patologías que distancian a las álgebras absolutamente valuadas que las sufren del comportamiento razonable que uno puede esperar de un conjunto de números, aunque por tal entendiéramos algo ligeramente más débil que un álgebra real absolutamente valuada con división.

Buscando una causa común a las patologías arriba citadas, podríamos empezar convenciéndonos de que cualquier álgebra absolutamente valuada de dimensión infinita y que admita una involución de álgebra tiene que fracasar incluso al test de la división unilateral. La razón es que la involución cambia el orden de las multiplicaciones, por lo que, si hubiese división por un lado, tendría que haberla por el otro, y así tendríamos auténtica división, lo que como acabamos de recordar le está prohibido a las álgebras absolutamente valuadas de dimensión infinita. En consecuencia los ejemplos de Urbanik reseñados al final de la Sección 3 fracasan ante el test de la división unilateral. Igual le ocurre a las álgebras no asociativas libres, que sabemos se pueden valuar de muy diferentes maneras, pero de las que sabemos también no ser simples, patología ésta que tampoco es compatible con la división unilateral. Rogamos al lector nos dé un voto de confianza temporal y acepte por el momento igualmente que las álgebras absolutamente valuadas que aparecen en la construcción más general de Urbanik-Wright reseñada al comienzo de la Sección 3 también fracasan al test de la división unilateral, con lo que habremos encontrado la patología unificadora que buscábamos.

Pero ¿es esta patología inherente a la dimensión infinita? o bien por el contrario se trata de una simple anécdota que se presenta en los ejemplos "clásicos" de álgebras absolutamente valuadas de dimensión infinita. En otras palabras: ¿existen álgebras absolutamente valuadas infinito-dimensionales con división unilateral?. Bien que sabemos que en el caso complejo la respuesta a esta última pregunta es negativa (Proposición 1), si las cosas fueran más propicias en el caso real, habríamos encontrado lo que sin muchas objecciones podríamos llamar "números de dimensión infinita".

Afortunadamente tales números existen aunque, a lo que sabemos, no han sido presentados en sociedad hasta muy recientemente. Concretamente, las primeras construcciones que conocemos de álgebras reales absolutamente valuadas de dimensión infinita y con división unilateral aparecen simultáneamente en los trabajos de J. A. Cuenca [18] y A. Rodríguez [50]. Los métodos en dichos trabajos son distintos y cada uno tiene sus ventajas y sus inconvenientes: el de Cuenca es más simple y elegante, mientras que el de Rodríguez, sin duda más complicado, permite la construcción de estos exóticos objetos en dimensión infinita "arbitraria".

Aunque utilizando distinta terminología, ambos trabajos utilizan una misma idea de partida, a saber (con la nomenclatura de [50]), la de las "$*$-representaciones unitales" de las álgebras conmutativas normadas suaves. En la Sección 2 tuvimos ya ocasión de presentar el concepto de álgebra normada suave y de reseñar el resultado en [45] según el cual toda álgebra normada suave es un espacio prehilbertiano. En realidad para nuestros intereses presentes sólo necesitamos (y esto tan sólo a efectos de justificar la terminología) un recíproco de este resultado que es algo sorprendente aunque de verificación directa, a saber: todo espacio prehilbertiano real no cero se puede convertir en un álgebra real normada suave. Así, si H es un espacio prehilbertiano real no zero, podemos seleccionar cualquier elemento de norma uno (que denotaremos por $\mathbf{1}$ en vista de que se convertirá en la unidad de la futura álgebra), podemos descomponer H en suma directa de $\mathbb{R}\mathbf{1}$ y de su complemento ortogonal (que denotaremos por E), y finalmente podemos definir una multiplicación en H por la fórmula

$$(\lambda\mathbf{1} + x)(\mu\mathbf{1} + y) := [\lambda\mu - (x|y)]\mathbf{1} + [\lambda y + \mu x] \ , \qquad (5)$$

donde λ y μ son números reales arbitrarios, mientras que x e y son elementos igualmente arbitrarios de E. Es completamente rutinario comprobar que H con esta multiplicación y con la norma que deriva de su producto escalar resulta ser un álgebra real conmutativa normada suave. Digamos también, de nuevo con el único objeto de justificar la nomenclatura, que, salvo copia, no existen más álgebras reales conmutativas normadas suaves que las que acabamos de presentar ([45], [48]). Una tal álgebra $H = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus E$ posee una involución de álgebra canónica $*$ definida por

$$(\lambda\mathbf{1} + x)^* := \lambda\mathbf{1} - x \ ,$$

para λ en $\mathbb{R}$ y x en E, y caracterizada por el hecho de que, para a en H, tanto $a + a^*$ como a^*a pertenecen a $\mathbb{R}\mathbf{1}$.

Supongamos ahora que H es una de nuestras álgebras reales conmutativas normadas suaves, que G es un espacio prehilbertiano real, y que ϕ es una función lineal de H en el álgebra asociativa de todos los operadores lineales en G que satisface

$$\phi(\mathbf{1}) = Id_G \ ,$$

(donde por Id_G denotamos el operador identidad en G),

$$\phi(a^2) = [\phi(a)]^2$$

para todo a en H, y

$$(\phi(a)(\eta)|\xi) = (\eta|\phi(a^*)(\xi))$$

cualesquiera que sean η, ξ en G y a en H. Diremos entonces que ϕ es una $*$-representación unital del álgebra real conmutativa normada suave H en el espacio prehilbertiano G. Podemos ahora enunciar la idea común en [18] y [50], por cierto nada difícil de verificar, para la construcción de álgebras absolutamente valuadas con división unilateral.

Proposición 3. *Si H es un álgebra real conmutativa normada suave y ϕ es una $*$-representación unital de H en su propio espacio prehilbertiano, entonces éste con el nuevo producto $\odot$ dado por*

$$a \odot b := \phi(a)(b)$$

se convierte en un álgebra real absolutamente valuada con división por la izquierda.

Para no animarnos demasiado en principio con el contenido de la proposición anterior, empecemos notando que, si la dimensión de H es finita y distinta de $1, 2, 4$ u 8, entonces la proposición carece de contenido puesto que, de acuerdo con ella y con el Teorema 2, no podrán existir $*$-representaciones unitales de H en el espacio prehilbertiano de H. No podemos por tanto resistir la tentación de reseñar con cierto detalle la bonita construcción de Cuenca en [18] mostrando que el álgebra real conmutativa normada suave de dimensión algebraica infinita numerable admite $*$-representaciones unitales es su propio espacio prehilbertiano y en consecuencia, a través de la Proposición 3, que las álgebras reales absolutamente valuadas infinito-dimensionales con división unilateral tienen derecho a la vida. La piedra filosofal de esta construcción consiste en un ingenioso "proceso de duplicación" asegurando que, si el álgebra real conmutativa normada suave de dimensión finita p admite una $*$-representación unital en el espacio prehilbertiano real de dimensión finita q, entonces el álgebra real conmutativa normada suave de dimensión $p + 1$ admite una $*$-representación unital en el espacio prehilbertiano real de dimensión $2q$. Arrancando entonces de la obvia $*$-representación unital del álgebra real conmutativa normada suave de dimensión uno en el espacio prehilbertiano real de dimensión uno, resulta que el álgebra real conmutativa normada suave de dimensión finita p admite una $*$-representación unital en el espacio prehilbertiano real de dimensión 2^{p-1}. Abusando de la intuición, podríamos hacer tender p a ∞, con lo que tendríamos que el álgebra real conmutativa normada suave de dimensión "∞" admite una $*$-representación unital en el espacio prehilbertiano real de dimensión "∞", que no sería otra cosa que su propio espacio prehilbertiano. Relatamos a continuación cómo este abuso de la intuición no nos ha engañado.

A lo largo de la Sección 3 hemos tenido ocasión de aprender a construir espacios vectoriales con base arbitrariamente prefijada U. En el caso de que el cuerpo de base sea $\mathbb{R}$, que es el que ahora nos interesa, sabemos que el espacio vectorial con base U es el conjunto de las funciones de U en $\mathbb{R}$ que se anulan en todos los elementos de U excepto posiblemente en los de un subconjunto finito, con la suma y producto por escalares definidos puntualmente. Tal espacio se puede convertir en espacio prehilbertiano definiendo el producto escalar de dos de sus elementos f y g por

$$(f|g) := \sum_{u \in U} f(u)g(u) \ .$$

Así U es ahora no sólo una base algebraica sino también una base "ortonormal". Si U se elige infinito numerable, $U = \{u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$, obtenemos el espacio prehilbertiano real H de dimensión algebraica infinita numerable. Convertiremos H en álgebra real conmutativa normada suave sin más que elegir $\mathbf{1} := u_0$ y definir la multiplicación de acuerdo con los criterios que desembocaban en la fórmula (5). Ahora, si para $n \geq 0$ denotamos por H_n el subespacio de H engendrado por $\{u_0, .., u_n\}$, H_n es una subálgebra de H copia fiel del álgebra real conmutativa normada suave de dimensión $n + 1$, y la involución canónica de H_n no es otra que la restricción a H_n de la involución canónica $*$ de H. Para $n \geq 0$ denotaremos por G_n el subespacio de H engendrado por $\{u_0, , ..., u_{2^n - 1}\}$ y demostraremos por inducción que, para cada $n \geq 0$, existe una $*$-representación unital ϕ_n del álgebra real conmutativa normada suave H_n en el espacio prehilbertiano real G_n, que satisface la siguiente condición: cualquiera que sea $m < n$, y cualesquiera que sean a en H_m y b en G_m, se tiene

$$\phi_n(a)(b) = \phi_m(a)(b) \ .$$

Arrancando de la única $*$-representación unital posible ϕ_0 de H_0 en G_0, supongamos que para un cierto $n \geq 0$ hemos podido encontrar una $*$-representación unital de H_n en G_n que satisface la condición requerida. En el intento de definir ϕ_{n+1} obsérvese primero que, como la dimensión de G_{n+1} es dos veces la de G_n, podemos seleccionar una isometría lineal α_n de G_n sobre el complemento ortogonal de G_n en G_{n+1}, con lo que todo elemento de G_{n+1} se escribe de manera única en la forma $b + \alpha_n(c)$ para convenientes b y c en G_n. Obsérvese así mismo que todo elemento de H_{n+1} se escribe de manera única en la forma $a + \lambda u_{n+1}$ para convenientes a en H_n y λ en $\mathbb{R}$. Podemos entonces definir ϕ_{n+1} por la fórmula

$$\phi_{n+1}(a + \lambda u_{n+1})(b + \alpha_n(c)) := \phi_n(a)(b) - \lambda c + \alpha_n(\phi_n(a^*)(c) + \lambda b) \ ,$$

y verificar rutinariamente que ϕ_{n+1} se convierte en una $*$-representación unital de H_{n+1} en G_{n+1} que satisface la deseada condición de que, cualquiera que sea $m < n + 1$, y cualesquiera que sean x en H_m e y en G_m, se verifica

$$\phi_{n+1}(x)(y) = \phi_m(x)(y) \ ,$$

concluyendo así el argumento de inducción. Finalmente, para a y b elementos arbitrarios de H, podemos encontrar $n \geq 0$ tal que $a \in H_n$ y $b \in G_n$, y considerar en consecuencia el elemento de $H \phi_n(a)(b)$, que es independiente del n elegido. Podemos definir pues

$$\phi(a)(b) := \phi_n(a)(b)$$

y comprobar igualmente rutinariamente que ϕ es una $*$-representación unital del álgebra real conmutativa normada suave H en su propio espacio prehilbertiano.

"Pasando a la completación" la $*$-representación unital que se acaba de construir y aplicando la Proposición 3, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 7. *El espacio de Hilbert real infinito-dimensional "separable" se puede convertir en álgebra real absolutamente valuada con división por la izquierda, con respecto a una conveniente multiplicación.*

El adjetivo "separable" significa que el espacio de Hilbert al que se refiere el teorema, aun siendo de dimensión infinita, comparte con $\mathbb{R}$ la propiedad de pequeñez consistente en contener un subconjunto numerable "denso". Como se indica en [18], por ultraproductos de convenientes familias de copias del álgebra absolutamente valuada cuya existencia se afirma en el Teorema 7 se puede conseguir que dicho teorema siga siendo válido para espacios de Hilbert reales "más grandes" que el separable, de hecho de "tamaño" mayor que uno arbitrariamente prefijado. Pero, si queremos que el Teorema 7 permanezca verdadero para cualquier espacio de Hilbert real infinito-dimensional, parece ser necesario recurrir a técnicas más profundas. Así se hace en [50], donde se apela a la teoría de representación de las "Relaciones Canónicas de Anticonmutación", de rancio abolengo en la Mecánica Cuántica. Estas relaciones rigen el comportamiento aleatorio de ciertas partículas conocidas por el nombre de "fermiones" (ver [20, Sección 65]) y, siguiendo la información que se recoge en [12, pp. 223-226], el hecho de haber sido posible representarlas por medio de operadores lineales acotados en los espacios de Hilbert complejos constituye uno de los logros más relevantes de la $\left[\begin{array}{c}\text{matemática aplicada}\\ \text{física teórica}\end{array}\right]$ de nuestro siglo. Es difícil explicar en pocas palabras el significado físico de las Relaciones Canónicas de Anticonmutación pues, como el propio Paul Dirac reconoce en el prólogo a la primera edición de su libro "Principios de Mecánica Cuántica" [20], "Las nuevas teorías, si se consideran independientemente de su estructura matemática, están constituidas por conceptos físicos que no pueden expresarse mediante términos o elementos conocidos previamente, y que ni siquiera pueden explicitarse adecuadamente con palabras". Nos limitaremos pues a enunciar con la usual frialdad matemática el resultado que afirma la posibilidad de representar tales relaciones por medio de operadores lineales acotados en espacios de Hilbert complejos (ver [12, Proposición 5.2.2]).

Proposición 4. *Dado un espacio de Hilbert complejo H, se puede construir un espacio de Hilbert complejo K (el llamado "espacio de Fermi-Fock" de H) y, para cada f en H, podemos disponer de un operador lineal acotado $a(f)$ en K (el llamado "operador de anulación"), de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) La función $f \to a(f)$ es conjugado-lineal.

ii) Para cualesquiera f, g en H se tiene

$$a(f)[a(g)]^* + [a(g)]^* a(f) = (f|g) Id_K$$

(igualdades conocidas como "Relaciones Canónicas de Anticonmutación"), donde Id_K denota el operador identidad en K.

Además, en el caso de que H sea infinito-dimensional, K tiene el mismo "tamaño" que H.

Sea pues H un espacio de Hilbert complejo arbitrario, sean como arriba K el espacio de Fermi-Fock de H y $f \to a(f)$ el paso a operador de anulación, y, para f en H, definamos un nuevo operador lineal acotado $s(f)$ en K por la fórmula

$$s(f) := i\{a(f) + [a(f)]^*\} \ .$$

Denotando como ya es usual para nosotros por $BL(K)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados en K, es fácil entonces deducir que la norma de operadores en el subespacio real cerrado J de $BL(K)$ dado por

$$J := \mathbb{R} \ Id_K + s(H)$$

deriva de un producto escalar. Así J es un espacio de Hilbert real y, como tal, puede convertirse en álgebra real conmutativa normada suave completa sin más que elegir $\mathbf{1} := Id_K$ y definir la multiplicación de acuerdo con los criterios que desembocaban en la fórmula (5). Si el lector ha tenido paciencia para determinar el producto escalar del que deriva la norma de operadores en J, se encontrará ahora con la agradable sorpresa de que la simple inclusión de J en $BL(K)$ se convierte en una $*$-representación del álgebra real conmutativa normada suave completa J en el espacio de Hilbert real G que subyace a K. Si finalmente suponemos que H es de dimensión infinita y "tamaño complejo" arbitrario $\aleph$, sabemos que el "tamaño complejo" de K es también $\aleph$, luego el “tamaño real” de G es $2\aleph = \aleph$ (en vista de la curiosa aritmética de los números transfinitos), mientras que el “tamaño real” de J es claramente $2\aleph + 1 = \aleph$. Tenemos así que J es el álgebra real conmutativa infinito-dimensional normada suave completa de “tamaño” arbitrario, y que esta álgebra admite una $*$-representación unital en un espacio de Hilbert real de su mismo “tamaño”. Sustituyendo pues este espacio de Hilbert por el propio de J y aplicando la Proposición 3, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 8. *Todo espacio de Hilbert real infinito-dimensional se puede convertir en álgebra real absolutamente valuada con división por la izquierda, con respecto a una conveniente multiplicación.*

Utilizando una conocida propiedad adicional de la representación de Fermi-Fock de las Relaciones Canónicas de Anticonmutación, que no hemos incluido en la Proposición 4 para no cansar innecesariamente al lector, se demuestra en [50] que las álgebras reales absolutamente valuadas completas con división por la izquierda que aparecen en el teorema anterior se pueden conseguir incluso con la propiedad de no tener más ideales por la izquierda cerrados que los obligados, a saber $\{0\}$ y la totalidad del álgebra. Como quiera que la división por la izquierda ya prohíbe la existencia de ideales por la derecha (excepto los obligados), el parecido dentro de lo posible con la auténtica división queda relevantemente reforzado. Este parecido se reforzaría aun más si se demostrara que un álgebra absolutamente valuada completa con división por un lado y sin ideales por el otro lado debe ser finito-dimensional (y en consecuencia, de división) o, mejor todavía, que las álgebras absolutamente valuadas sin ideales por la izquierda ni por la derecha deben ser igualmente finito-dimensionales.

Una vez que disponemos de una máquina para fabricar álgebras absolutamente valuadas con división por la izquierda (la Proposición 3) que ha demostrado ser razonablemente productiva (Teoremas 7 y 8), podemos preguntarnos si la máquina en cuestión será suficiente para atender la demanda de tales álgebras que, tras el éxito inicial, se sospecha deberá producirse. La respuesta inmediata es negativa, puesto que, por una parte las álgebras absolutamente valuadas que fabrica la Proposición 3 tienen todas ellas una unidad por la izquierda (con la notación en dicha proposición, el elemento $\phi(\mathbf{1})$), mientras que por otra, la propiedad de división por la izquierda no se pierde en el paso a isótopas y la existencia de unidad por la izquierda sí que puede perderse (piénsese en el álgebra de McClay). Esto en principio no supone una dura ofensa contra la capacidad de trabajo de la Proposición 3, ya que el argumento anterior se puede volver por pasiva para demostrar sin grande esfuerzo la siguiente proposición.

Proposición 5. *Toda álgebra absolutamente valuada con división por la izquierda es isótopa a un álgebra absolutamente valuada con (división por la izquierda y) unidad por la izquierda.*

En efecto: si A es un álgebra absolutamente valuada con división por la izquierda, podemos elegir un elemento a en A con $|a| = 1$ y considerar el operador F en A que a cada elemento b de A asocia la única solución x de la ecuación $ax = b$. F resulta entonces ser una isometría lineal sobreyectiva, con lo que podemos cambiar el producto de A por

$$a \odot b := F(ab)$$

obteniendo así una isótopa de A que tiene unidad por la izquierda, igual por cierto al elemento a elegido. Debemos pues refinar nuestra anterior pregunta en el sentido de si la Proposición 3 fabrica todas las álgebras absolutamente valuadas con unidad por la izquierda y división por la izquierda, a sabiendas de que todo intento de contestar esta pregunta deberá pasar por un estudio sistemático de tales álgebras. Por aquello de que ninguna sorpresa es descartable en matemáticas mientras no tengamos seguridad de que dicha sorpresa no pueda producirse, renunciemos incluso a la hipótesis de división por la izquierda y consideremos un álgebra real absolutamente valuada A sin más requerimientos que el de poseer una unidad por la izquierda. Entonces el conjunto de todos los operadores de multiplicación por la izquierda por elementos de A es un espacio vectorial de operadores lineales en el espacio normado de A que contiene al operador identidad y cuyos elementos son todos múltiplos reales de isometrías. Esta información se abstrae en [50], demostrándose al respecto el siguiente resultado.

Teorema 9. *Si $\mathcal{P}$ es un espacio vectorial de operadores lineales en un espacio normado real cuyos elementos son múltiplos reales de isometrías y que contiene al operador identidad, entonces, para F y G en $\mathcal{P}$, el "producto de Jordan"*

$$F \circ G := \frac{1}{2}(FG + GF)$$

pertenece a $\mathcal{P}$, y $\mathcal{P}$, provisto de este producto y de la norma de operadores, es una copia de alguna de las álgebras reales conmutativas normadas suaves.

Es prácticamente inmediato deducir del teorema que todos los elementos no nulos del espacio de operadores $\mathcal{P}$ que allí aparece son operadores biyectivos, con lo que obtenemos como primera providencia el siguiente corolario.

Corolario 1. *Toda álgebra absolutamente valuada con unidad por la izquierda tiene automáticamente división por la izquierda.*

Igualmente fácil resulta deducir del Teorema 9 el corolario que sigue.

Corolario 2. *Si $\mathcal{P}$ es un espacio vectorial de operadores lineales en un espacio normado real cuyos elementos son múltiplos reales de isometrías y que contiene un operador biyectivo, entonces la norma de operadores en $\mathcal{P}$ deriva de un producto escalar y todos los elementos no nulos de $\mathcal{P}$ son operadores biyectivos.*

Con el simple uso de la última afirmación en el Corolario 2, el lector no encontrará ahora dificultad alguna en demostrar la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ en el Teorema 2, que en su momento dejamos sin abordar y de la que, como comentamos más tarde, depende en parte la prueba del Teorema 5.

En cualquier caso, la mayor importancia del Teorema 9 radica en que, como el lector ya habrá adivinado, de él se desprende de manera nada difícil la respuesta afirmativa a la cuestión que últimamente teníamos en mente, constituyendo así junto con la Proposición 5 lo que podríamos llamar el "teorema final de la aritmética unilateral".

Teorema 10. *Toda álgebra real absolutamente valuada con unidad por la izquierda es copia de una de las que se construyen por el procedimiento que se recoge en la Proposición 3.*

Una versión de este teorema, que es de más fácil lectura y que en esencia recoge toda la información que el teorema encierra, es la siguiente.

Teorema 10′. *Si A es un álgebra real absolutamente valuada con unidad por la izquierda ι, entonces el valor absoluto de A deriva de un producto escalar $(.|.)$ y, para α, β, γ en A con α ortogonal a ι, se tiene*

$$\alpha(\alpha\beta) = -|\alpha|^2\beta \quad y \quad (\alpha\beta|\gamma) = -(\beta|\alpha\gamma)\ .$$

En términos algo más sofisticados, podemos enunciar.

Teorema 10″. *Si A es un álgebra real absolutamente valuada con unidad por la izquierda ι, entonces el valor absoluto de A deriva de un producto escalar $(.|.)$ y, si $*$ denota la única isometría lineal involutiva en A cuyo conjunto de puntos fijos se reduce a $\mathbb{R}\iota$, entonces para cualesquiera α, β, γ en A se tiene*

$$\alpha(\alpha^*\beta) = |\alpha|^2\beta \quad y \quad (\alpha\beta|\gamma) = (\beta|\alpha^*\gamma)\ .$$

El lector advertirá que las dos fórmulas con las que concluye el enunciado anterior son las mísmas que aparecen en un argumento que hacíamos hacia el final de la Sección 2 (fórmulas (3) y (1), respectivamente). Se hacía ver allí de manera sencilla que de hecho, para un álgebra absolutamente valuada arbitraria, (3) es consecuencia de (1) y que (3) fuerza la división por la izquierda. Podemos pues aplicar la Proposición 5 y el Teorema $10''$, para deducir el corolario que sigue.

Corolario 3. *Un álgebra absolutamente valuada tiene división por la izquierda si y sólamente si es isótopa a un álgebra absolutamente valuada A cuyo valor absoluto deriva de un producto escalar $(.|.)$ y que satisface la propiedad de que, para cada α en A, existe un elemento α^* en A verificando*

$$(\alpha\beta|\gamma) = (\beta|\alpha^*\gamma)$$

para cualesquiera β, γ en A.

Digamos también que el teorema de Albert-Urbanik-Wright (Teorema 1) se puede deducir fácilmente del Teorema $10'$ y del teorema extendido de Frobenius (ver [50, Nota 4.(ii)] para detalles).

Podemos ahora ver cómo todas las patologías que en general se podían presentar en las álgebras absolutamente valuadas de dimensión infinita desaparecen en nuestros "conjuntos de números infinito-dimensionales". Así por ejemplo conocíamos álgebras absolutamente valuadas cuyo valor absoluto no se puede derivar de un producto escalar, perversión que no puede presentarse si hay división unilateral en vista (por ejemplo) del Corolario 3. También conocíamos álgebras absolutamente valuadas que no son simples, cosa que obviamente le está prohibida a las de división unilateral. Como consecuencia, el centroide extendido de un álgebra absolutamente valuada A con división unilateral coincide con el centroide, el cual por cierto se reduce siempre a los múltiplos reales del operador identidad, salvo en el caso $A = \mathbb{C}$. Finalmente, conocíamos álgebras absolutamente valuadas (incluso completas) que no tenían unicidad del valor absoluto. Concluiremos nuestro trabajo demostrando que las álgebras absolutamente valuadas (no necesariamente completas) con división unilateral tienen unicidad del valor absoluto. Este resultado se anunció sin demostración en [50, Nota 4.(iii)].

Nuestro argumento comienza con una afirmación que se podría obtener como consecuencia menor del Teorema 5, pero que si así lo hiciéramos estaríamos como en ocasiones similares "matando mosquitos con un cañón". La afirmación en cuestión es la que sigue.

(I). *Si A es un álgebra normada, B es un álgebra absolutamente valuada, ϕ es un homomorfismo de A en B, y suponemos que hay un número real* *positivo ρ tal que*

$$|\phi(a)| \leq \rho \|a\|$$

para todo a en A, entonces se tiene de hecho

$$|\phi(a)| \leq \|a\|$$

para todo a en A.

En efecto, si alguien niega la tesis de esta afirmación, encontrará sin problemas un elemento a en A con $\|a\| = 1$ y $|\phi(a)| > 1$. Definiendo entonces por inducción $a_1 := a$ y $a_{n+1} := aa_n$, se tiene $|\phi(a_n)| = |\phi(a)|^n \to \infty$, mientras que $\|a_n\| \leq 1$, lo que es incompatible con la hipótesis $|\phi(a_n)| \leq \rho\|a_n\|$.

Continuaremos nuestra argumentación con la bien conocida observación de que, si A, B y ϕ son como en (I), pero A se supone adicionalmente de dimensión finita, entonces la existencia del número ρ que allí se postula es un regalo de la hipótesis adicional hecha sobre A. Descendiendo aun más en picado, obtenemos el segundo eslabón en nuestro razonamiento.

(II). *Si $\|.\|$ es una norma en el álgebra real que subyace a $\mathbb{C}$ que convierte a esta álgebra en álgebra normada, se tiene*

$$|z| \leq \|z\|$$

para todo z en $\mathbb{C}$.

Sea ahora A un álgebra real absolutamente valuada con unidad por la izquierda ι, y sea $\|.\|$ una norma de álgebra en A. Entonces, con ayuda del Teorema $10'$, cada elemento a de A que no pertenezca a $\mathbb{R}\,\iota$ se puede escribir en la forma $a = \lambda_0\iota + \mu_0 b$ con λ_0, μ_0 en $\mathbb{R}$, b ortogonal a ι y $|b| = 1$. Si denotamos por F el operador en A dado por $F(x) = bx$, entonces, de nuevo por el Teorema $10'$, tenemos $F^2 = -Id_A$, con lo que $\mathbb{R}\,Id_A + \mathbb{R}\,F$ es un álgebra real de operadores lineales acotados en $(A, \|.\|)$ que, algebraicamente considerada, resulta ser una copia del álgebra real que subyace a $\mathbb{C}$. Sin más que considerar en $\mathbb{R}\,Id_A + \mathbb{R}\,F$ la norma de operadores correspondiente a $\|.\|$ (que denotaremos también, como es costumbre, por $\|.\|$), podemos aplicar (II) para obtener

$$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \leq \|\lambda Id_A + \mu F\|$$

cualesquiera que sean λ, μ en $\mathbb{R}$. Tomando en particular $\lambda = \lambda_0$ y $\mu = \mu_0$, obtenemos

$$|a| = \sqrt{\lambda_0^2 + \mu_0^2} \leq \|\lambda_0 Id_A + \mu_0 F\| \ .$$

Ahora, observando que el operador $\lambda_0 Id_A + \mu_0 F$ no es otra cosa que la multiplicación por la izquierda por a, cuya norma de operador relativa a $(A, \|.\|)$ debe ser menor o igual que $\|a\|$, deducimos

$$|a| \leq \|a\| \ .$$

La desigualdad que acabamos de probar para a en $A \backslash \mathbb{R}\iota$ es también verdadera si a pertenece a $\mathbb{R}\iota$ en vista de que $|\iota| = 1$ y $\iota^2 = \iota$. Tenemos así:

(III). *Si A es un álgebra absolutamente valuada con unidad por la izquierda, y si $\|.\|$ es una norma en A que convierte a A en álgebra normada, entonces, cualquiera que sea a en A, se tiene*

$$|a| \leq \|a\| \ .$$

En consecuencia, *un álgebra con unidad por la izquierda admite a lo más un valor absoluto o, en otros términos, los isomorfismos entre álgebras absolutamente valuadas con unidad por la izquierda son isométricos.* Si ahora A es un álgebra real con división por la izquierda, y si $|.|, |.|'$ denotan dos valores absolutos en A, entonces podemos elegir a' en A con $|a'|' = 1$, escribir $a := |a'|^{-1}a'$, y considerar el operador F (respectivamente, F') que a cada elemento b de A asocia la única solución x de la ecuación $ax = b$ (respectivamente, $a'x = b$). De la demostración de la Proposición 5, sabemos que, definiendo nuevos productos $\odot$ y $\odot'$ en A por las fórmulas

$$\alpha \odot \beta := F(\alpha\beta)$$

$$\alpha \odot' \beta := F'(\alpha\beta),$$

obtenemos sendas álgebras absolutamente valuadas, $(A, |.|, \odot)$ y $(A, |.|', \odot')$, con unidad por la izquierda. Pero es fácil ver que, escribiendo $r := |a'|$, $\phi : \alpha \to r\alpha$ es un isomorfismo de $(A, |.|, \odot)$ sobre $(A, |.|', \odot')$ que, como sabemos, debe ser isométrico. En consecuencia, para α en A,

$$|\alpha| = |\phi(\alpha)|' = |r\alpha|' = r|\alpha|'.$$

Así $|.|$ y $|.|'$ son proporcionales, cosa que, siendo $|.|$ y $|.|'$ valores absolutos, fuerza su coincidencia. Hemos probado así, tal como anunciábamos, el resultado que sigue.

(IV). *Un álgebra real con división unilateral admite a lo más un valor absoluto.*

Referencias

[1] A. A. ALBERT, *Modern Higher Algebra.* Chicago, 1937.

[2] A. A. ALBERT, Absolute valued real algebras. *Ann. Math.* **48** (1947), 495-501.

[3] A. A. ALBERT, Absolute valued algebraic algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 763-768. A note of correction. *Ibid.* **55** (1949), 1191.

[4] S. C. ALTHOEN and L. D. KUGLER, When is $\mathbb{R}^2$ a division algebra?. *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 625-635.

[5] P. ARA, Extended centroid of C^*-algebras. *Arch. Math.* **54** (1990), 358-364.

[6] J. ARIAS DE REINA, Funciones derivables en cuaterniones. *Gac. Mat. (Madrid)* **27** (1975), 127-129.

[7] S. F. BELLENOT, Banach S-algebras and conditional basic sequences in non-Montel Fréchet spaces. *Studia Math.* **79** (1984), 17-33.

[8] G. M. BENKART, D. J. BRITTEN and J. M. OSBORN, Real flexible division algebras. *Canad. J. Math.* **34** (1982), 550-588.

[9] G. M. BENKART and J. M. OSBORN, An investigation of real division algebras using derivations. *Pacific J. Math.* **96** (1981), 265-300.

[10] G. M. BENKART and J. M. OSBORN, Real division algebras and other algebras motivated by physics. *Hadronic J.* **4** (1981), 392-443.

[11] R. BOTT and J. MILNOR, On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958), 87-89.

[12] O. BRATTELI and D. W. ROBINSON, *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics II.* Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York, 1981.

[13] R. B. BRAUN, A Gelfand-Neumark theorem for C^*-alternative algebras. *Math. Z.* **185** (1984), 225-242.

[14] M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, Extended centroid and central closure of semiprime normed algebras: a first approach. *Commun. Algebra* **18** (1990), 2293-2326.

[15] M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, Nonassociative ultraprime normed algebras. *Quart. J. Math. Oxford* **43** (1992), 1-7.

[16] M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, New associative and nonassociative Gelfand-Naimark theorems. *Manuscripta Math.* (en prensa).

[17] M. A. COBALEA y A. FERNANDEZ, Prime noncommutative Jordan algebras and central closure. *Algebras Groups Geom.* **5** (1988), 129-136.

[18] J. A. CUENCA, On one-sided division infinite-dimensional normed real algebras. *Publ. Mat.* **36** (1992), 485-488.

[19] J. A. CUENCA y A. RODRIGUEZ, Structure theory for noncommutative Jordan H^*-algebras. *J. Algebra* **106** (1987), 1-14.

[20] P. A. M. DIRAC, *Principios de Mecánica Cuántica.* Ediciones Ariel, Espluges de Llobregat (Barcelona), 1967 (Traducción al español de la cuarta edición inglesa de: *The principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, 1958).

[21] R. S. DORAN y V. A. BELFI, *Characterizations of C^*-algebras: The Gelfand-Naimark theorems.* Marcel Dekker, New York, 1986.

[22] H.-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL y R. REMMERT, *Numbers.* Graduate texts in Mathematics **123**, Springer-Verlag, New York, 1990.

[23] T. S. ERICKSON, W. S. MARTINDALE III y J. M. OSBORN, Prime nonassociative algebras. *Pacific J. Math.* **60** (1975), 49-63.

[24] I. M. GELFAND y M. A. NAIMARK, On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Mat. Sb.* **12** (1943), 197-213.

[25] S. HEINRICH, Ultraproducts in Banach space theory. *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), 72-104.

[26] N. JACOBSON, *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39**, Providence, Rhode Island, 1968.

[27] A. M. KAIDI, J. MARTINEZ y A. RODRIGUEZ, On a nonassociative Vidav-Palmer theorem. *Quart. J. Math. Oxford* **32** (1981), 435-442.

[28] A. M. KAIDI y A. ROCHDI, Sur les algèbres réelles de Jordan non commutatives de division linéaire de dimension 8. En *Nonassociative algebraic models*, Nova Science Publishers, New York, 1992, pp. 183-194.

[29] I. KAPLANSKY, Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 956-960.

[30]] J. LINDENSTRAUSS y L. TZAFRIRI, *Classical Banach spaces I.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[31] M. L. El-MALLAH, Quelques résultats sur les algèbres absolument valuées. *Arch. Math.* **38** (1982), 432-437.

[32] M. L. El-MALLAH, Sur les algèbres absolument valuées qui vérifient l'identité $(x, x, x) = 0$. *J. Algebra* **80** (1983), 314-322.

[33] M. L. El-MALLAH, On finite dimensional absolute valued algebras satisfying $(x, x, x) = 0$. *Arch. Math.* **49** (1987), 16-22.

[34] M. L. El-MALLAH, Absolute valued algebras with an involution. *Arch. Math.* **51** (1988), 39-49.

[35]] M. L. El-MALLAH, Absolute valued algebras containing a central idempotent. *J. Algebra* **128** (1990), 180-187.

[36] M. L. El-MALLAH y A. MICALI, Sur les algèbres normées sans diviseurs topologiques de zéro. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* **25** (1980), 23-28.

[37] M. L. El-MALLAH y A. MICALI, Sur les dimensions des algèbres absolument valuées. *J. Algebra* **68** (1981), 237-246.

[38] H. C. MYUNG, *Malcev-admissible algebras.* Birkhäuser, Boston, 1986.

[39] J. I. NIETO, Gateaux differential in Banach algebras. *Math. Z.* **139** (1974), 23-34.

[40] S. OKUBO, Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras. *Hadronic J.* **1** (1978), 1250-1278.

[41] R. PAYA, J. PEREZ y A. RODRIGUEZ, Non-commutative Jordan C^*-algebras. *Manuscripta Math.* **37** (1982), 87-120.

[42] J. PETRO, Real division algebras of dimension > 1 contain $\mathbb{C}$. *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 445-449.

[43] A. ROCHDI, Classification des algèbres réelles de Jordan non commutatives de division linéaire de dimension 8. En trámite de publicación.

[44] A. RODRIGUEZ, A Vidav-Palmer theorem for Jordan C^*-algebras and related topics. *J. London Math. Soc.* **22** (1980), 318-332

[45] A. RODRIGUEZ, Nonassociative normed algebras spanned by hermitian elements. *Proc. London Math. Soc.* **47** (1983), 258-274.

[46] A. RODRIGUEZ, The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras. *J. Functional Analysis* **60** (1985), 1-15.

[47] A. RODRIGUEZ, Jordan axioms for C^*-algebras. *Manuscripta Math.* **61** (1988), 297-314.

[48] A. RODRIGUEZ, An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras. *Ann. Sci. Univ. "Blaise Pascal", Clermont II, Sér. Math., Fasc.* **27***ème* (1991), 1-57.

[49] A. RODRIGUEZ, Primitive nonassociative normed algebras and extended centroid. En *Nonassociative algebraic models*, Nova Science Publishers, New York, 1992, pp. 233-243.

[50] A. RODRIGUEZ, One-sided division absolute valued algebras. *Publ. Mat.* **36** (1992), 925-954.

[51] A. RODRIGUEZ, Nonassociative normed algebras: Geometric aspects. En *Proceedings of the 39th. Banach Semester, Warsaw,* 1992 (en prensa).

[52] A. RODRIGUEZ, Jordan structures in Analysis. En *Proceedings of the 1992 Oberwolfach Conference on Jordan algebras* (en prensa).

[53]] A. RODRIGUEZ y A. R. VILLENA, Centroid and extended centroid of JB^*-algebras. En *Nonassociative algebraic models*, Nova Science Publishers, New York, 1992, pp. 223-232.

[54] I. J. SCHOENBERG, A remark on M. M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 961-964.

[55] K. URBANIK, Absolute valued algebras with an involution. *Fundamenta Math.* **49** (1961), 247-258.

[56] K. URBANIK, Reversibility in absolute valued algebras. *Fundamenta Math.* **51** (1962), 131-140.

[57] K. URBANIK y F. B. WRIGHT, Absolute valued algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 861-866.

[58] F. B. WRIGHT, Absolute valued algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 330-332.

[59] K. A. ZHEVLAKOV, A. M. SLIN'KO, I. P. SHESTAKOV y A. I. SHIRSHOV, *Rings that are nearly associative.* Academic Press, New York 1982.