7

LA CONTINUIDAD DEL PRODUCTO DE JORDAN IMPLICA LA DEL ORDINARIO EN EL CASO COMPLETO SEMIPRIMO

Angel Rodríguez Palacios.
Dpto. de Teoría de Funciones.
Universidad de Granada

Dedicado a D. Alfonso Giraúm
en su jubileo científico y
profesional.

RESUMEN.

Se demuestra en este trabajo que, si A es un álgebra asociativa real o compleja semiprima cuyo espacio vectorial subyacente es de Banach, la continuidad del producto de Jordan ((a, b) $\rightarrow \frac{1}{2}$ (ab + ba)) implica la continuidad del producto ordinario.

No se añade dificultad alguna a los razonamientos si se sustituye la hipótesis de asociatividad por la más débil de "alternancia".

I PRELIMINARES ALGEBRAICOS.

I.1 Un álgebra sobre k (k = R ó C) es un espacio vectorial A sobre k dotado canónicamente de una aplicación bilineal (a, b) $\rightarrow$ ab de AxA en A, denominada en general producto. Si este producto es asociativo (resp.: conmutativo), el álgebra se llamará asociativa (resp.: conmutativa).

I.2 Un ideal por la izquierda (resp.: por la derecha, bilátero) de un álgebra A será una variedad lineal M tal que AM $\subset$ M (resp.: MA $\subset$ M, (AM) $\cup$ (MA) $\subset$ M). Si M es un ideal de un álgebra, llamaremos cuadrado de M (M^2) a la varie-

I.3 Dada un álgebra A se definen A^+ y A^- como las álgebras cuyo espacio vectorial subyacentes es el de A y cuyos productos son, respectivamente:

$$(a, b) \rightarrow a \, . \, b = \tfrac{1}{2} (ab + ba)$$
$$(a, b) \rightarrow [a, b] = ab - ba.$$

Evidentemente A^+ es conmutativa.

I.4 Un álgebra A se llama alternativa (resp.: de Jordan) si satisface.

$$a^2b = a(ab), \; ba^2 = (ba)a, \; a,b \in A$$

(resp.: A es conmutativa y $a^2(ab) = a(a^2b)$).

Evidentemente toda álgebra asociativa es alternativa.

La siguiente proposición engloba una lista de conocidas propiedades de las álgebras alternativas que nos serán especialmente útiles en nuestro trabajo.

I.5 PROPOSICION. Sea A un álgebra alternativa: se verifica:

a) A^+ es álgebra de Jordan
b) $aba = 2a. (a \, . \, b) - a^2.b$
c) $[a, [a, b]] = 4 (b. a^2 - (b \, . \, a) \, . \, a)$
d) $[a,b.c] = b. [a,c] + [a,b].c$

En vista de la propiedad a, A^+ se llama el álgebra de Jordan subyacente a A.

El siguiente teorema no es más que una redacción equivalente de un resultado de Slater ([8], theorem D – α). Slater califica de semiprima a un álgebra alternativa (definition 3.1) si cero es el único ideal por la derecha de cuadrado nulo, pero en seguida (lemma 3.2) demuestra que esta definición es equivalente a la nuestra.

I.6 TEOREMA.– Un álgebra alternativa es semiprima si y sólo si lo es el álgebra de Jordan subyacente.

Demostración .– Sea A el álgebra en cuestión. Supongamos, en primer lugar, que A^+ es semiprima y sea M un ideal bilátero de A de cuadrado nulo; como M es también ideal de A^+ y $M^{\cdot 2} \subset M^2 = \{o\}$, concluimos, en vista de que A^+ es se–

Recíprocamente sea [illegible] prima. M un ideal de A^+ de cuadrado nulo y $m \in M$; por 5.b, será $mAm = 0$; por [8] – theorem **D-α** es $m = 0$, con lo que A^+ es semiprima.

I.7 Una derivación de un álgebra A es una aplicación lineal D de A en A satisfaciendo:

$$D(ab) = a\,D(b) + D(a)\,b.$$

Para una derivación D se verifica la fórmula de Leibniz:

$$D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a)\, D^{n-k}(b).$$

II DEMOSTRACION DEL TEOREMA.

II . 1 Un álgebra sobre k, cuyo espacio vectorial subyacente se dote de una norma haciendo el producto continuo, la llamaremos un álgebra normada.

II . 2 Si X e Y son espacios normados y T es una aplicación lineal de X en Y, se define el Conjunto separador de T (S (T)) como el conjunto de los elementos y de Y para los que existe una sucesión $\{x_n\}$, de elementos X convergente a cero, tal que $y = \lim \{T(x_n)\}$.

S (T) es una variable lineal cerrada de Y. Si X e Y son espacios de Banach, T es continua si y solo si $S(T) = 0$, en virtud del teorema de la gráfica cerrada.

II . 3 LEMA. Sea A un álgebra normada y D una derivación de A, entonces el conjunto separador de D es un ideal bilátero.

Demostración.– Sea $b \in S(D)$ y $a \in A$: existe $\{a_n\} \to 0 \mid \{D(a_n)\} \to b$. Se tiene entonces: $\{a_n a\} \to 0$ y $\{a a_n\} \to 0$ mientras que

$$D(a_n a) = D(a_n)\,a + a_n D(a) \to ba$$
$$D(a a_n) = D(a)\,a_n + a D(a_n) \to ab$$

con lo que ab y ba pertenecen también a S (D)

II. 4 LEMA.– Sea D una derivación de un álgebra normada A, y supongamos D^2 continuo: entonces el ideal separador de D es de cuadrado nulo.

$$D^2 (a_n a) = D^2 (a_n \text{[illegible]}) D (a) + a_n D^2 (a)$$

Tomando límites y teniendo en cuenta la continuidad de D^2, resulta:

$$bD(a) = 0$$

En resumen es $S(D)\,\mathrm{imag}(D) = 0$, con lo que también $S(D)\,\overline{\mathrm{imag}(D)} = 0$, por la continuidad del producto. Como se tiene evidentemente $S(D) \subset \overline{\mathrm{imag}(D)}$ el lema queda demostrado.

II. 5 COROLARIO. Toda derivación de cuadrado continuo de un álgebra semiprima normada completa es continua.

II. 6 TEOREMA. Sea A un álgebra alternativa semiprima cuyo espacio vectorial subyacente es de Banach: supongamos el producto de A^+ continuo: entonces también el producto de A es contínuo.

Demostración.– A^+ es semiprima, por el teorema I.6 y, por hipótesis, es normada completa. La aplicación $b \to [a,b]$ es una derivación de A^+ (I.5 d) de cuadrado continuo (I.5,c), con lo que, en vista del corolario anterior (5), es continua.

La aplicación bilineal $(a, b) \to [a,b]$ es, en consecuencia, "Separadamente" continua (téngase en cuenta que $[a,b] = -[a,b]$); el teorema de Banach Steinhaus asegura entonces la continuidad "junta" de dicha aplicación.

Si se tiene en cuenta, finalmente, que es:

$$ab = a.b + \frac{1}{2}[a,b]$$

El teorema queda demostrado.

II. 7 COROLARIO. (Shirali, [7]) Sea A un álgebra asociativa compleja con unidad (e) e involución (*), cuyo espacio vectorial subyacente es de Banach; se supone A *– semisimple, $\|e\| = 1$, $\|a^*\| = \|a\|$ y $\|\frac{1}{2}(ab + ba)\| \leq \|a\|\,\|b\|$; en estas condiciones, el producto de A es continuo.

Demostración.– Recordemos, en primer lugar, el concepto de ***– semisimplicidad**: si A es un álgebra asociativa compleja con involución, un **funcional lineal** t sobre A se llama positivo si es $t(a^*a) \geq 0$, $a \in A$; el *–radical de **A es el conjunto**

$$\{a \in A \mid t(a) = 0,\ t \text{ positivo}\} = \{a \in A \ \ t(a^*a) = 0,\ t \text{ positivo}\}.$$

Fijados estos conceptos y, teniendo en cuenta nuestro "teorema 6." la prueba de nuestro corolario se reducirá a comprobar que sus hipótesis implican que el álgebra en cuestión es semiprima.

En efecto: sea M ideal de A de cuadrado nulo, $m \in M$ y t funcional positivo; como la aplicación (a, b) → t (b^*a) es una forma hermitiana semidefinida positiva, por la desigualdad de Cauchy–Swartz, será

$$0 \leqslant t(m^*m) = t(m^*me) \leqslant \sqrt{t(e)\,t((m^*m)^2)} = 0$$

(téngase en cuenta que es $(m^*m)^2 = 0$ por ser $m^*m \in M$ y M de cuadrado nulo); así pues: $t(m^*m) = 0$, $\forall$ t positivo $\Rightarrow m \in$ * – Rad (A) = 0 $\Rightarrow m = 0$, y A es semiprima.

Se puede demostrar, incluso que un álgebra, que cumpla las premisas de nuestro corolario, es de hecho semisimple en el sentido de Jacobson. ([I], pag 23-27). La continuidad de la involución no se ha utilizado en la demostración, luego es superflua.

III COMPLEMENTOS.

III . 1 El profesor Zelazko, en conversación provada, me ha planteado la posibilidad de que el Teorema II . 6 sea trivial, en el sentido de ser cierto en general, sin la hipótesis de ser A semiprima. El siguiente contraejemplo muestra que esto no es posible:

Sea X un espacio de Banach infinito dimensional, sea $\{x_n\} \cup \{y_\lambda\}$ una base de Hamel para X con $\| x_n \| = \| y_\lambda \| = 1$ y sea, finalmente, $\{z_n\}$ una sucesión de elementos de norma 1 de la variedad lineal engendrada por $\{y_\lambda\}$, por lo demás arbitraria. El producto definido en X por las relaciones sobre los elementos de la base:

$$x_n\, x_m = (n-m)^2\, z_{|n-m|}$$
$$x_n\, y_\lambda = y_\lambda\, x_n = 0$$
$$y_\lambda\, y_\mu = 0$$

verifica claramente:

$(xy)\, z = x(yz) = 0$ $\forall\, x, y, z \in X$; con lo que es trivialmente asociativo

$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) = 0 \ \forall x,y \in X$, con lo que el producto es trivialmente continuo.

III . 2 ANALISIS DE LOS RESULTADOS.

Para una aplicación lineal de un espacio vectorial topológico en otro se define el conjunto separador de manera análoga a II . 2 sin más que sustituir las sucesiones por redes. El Conjunto separador es nulo si y sólo si la gráfica de la aplicación es cerrada.

Si se tiene en cuenta que en la demostración de los lemas II . 3 y II . 4 se utiliza únicamente la continuidad separada del producto, podemos enunciar en general:

A .) Sea A un álgebra dotada de una topología compatible con su estructura lineal y para la que el producto es separadamente continuo, y sea D una derivación de A; entonces el conjunto separador de D es un ideal bilátero que será, además, de cuadrado nulo si D^2 es continuo.

El corolario II . 5 es entonces inmediatamente generalizable sin más que exigir que el espacio vectorial topológico subyacente al álgebra verifique el teorema de la gráfica cerrada (lo que ocurre si es tonelado y B_r – completo; [6], pag. 166); concretamente:

B.) Toda derivación de cuadrado continuo de un álgebra semiprima, cuyo espacio vectorial subyacente es vectorial topológico tonelado y B_r – completo y cuyo producto es separadamente continuo, es continua.

Finalmente, un análisis de la demostración del teorema II . 6, permite enunciar

C.) Sea A un álgebra alternativa semiprima cuyo espacio vectorial subyacente es vectorial topológico tonelado y B_r – completo; supongamos que el producto de A^+ es separadamente continuo: entonces el producto de A es separadamente continuo.

La hipótesis y tesis de continuidad junta de los productos de A^+ y A, respectivamente, en el teorema II . 6 equivalen a las respectivas continuidades separadas por ser, en aquel caso, el espacio vectorial subyacente de Banach; esta equivalencia subsiste en el caso más general de ser dicho espacio vectorial metrizable y tonelado

III . 3 LA CONTINUIDAD *–DEBIL DEL PRODUCTO SE REDUCE A LA CONTINUIDAD *–DEBIL DEL PRODUCTO DE JORDAN EN EL CASO SEMIPRIMO.

Si A es un álgebra normada, consideraremos el siguiente axioma:

A.– El espacio normado subyacente a A es dual topológico de un espacio de Banach (que denotaremos A_* y llamaremos el "predual" de A)

Es conocido ([5]) cómo este axioma caracteriza a las álgebras de Von Neumann en el conjunto de las B * –álgebras así como que, en un álgebra de Von Neumann, el producto es * debil separadamente continuo ($\sigma(A, A_*)$ – continuo en cada variable).

En un algebra, en general no asociativa, normada satisfaciendo el axioma A podemos plantearnos el problema de la continuidad separada *debil de su producto.

El dual topológico de un espacio de Banach con la topología * debil es B_r -completo pero no tonelado (salvo dimensión finita) con lo que 2 – C no es aplicable. No obstante, una ligera modificación en el razonamiento permite enunciar:

B.- TEOREMA.- Sea A un álgebra alternativa semiprima normada verificando el axioma A supongamos el producto de A^+ * – debilmente separadamente continuo; entonces también el producto de A es *–debilmente separadamente continuo.

Demostración: Análoga a la de II . 6 utilizando en lugar del corolario II . 5 la siguiente proposición:

C.– Sea A un álgebra semiprima normada satisfaciendo el axioma A y cuyo producto es *–debilmente separadamente continuo: sea D una derivación cuyo cuadrado es *– debilmente continuo; entonces D es *– debilmente continuo.

Demostración: Por 2 -A, la gráfica de D es *–debilmente cerrada. En estas condiciones todo se reduce al siguiente resultado, consecuencia no dificil de la compacidad * – débil de la bola unidad en el dual de un Banach y del teorema de Smulian para funcionales ([6], pag 149, corolario 2.b).

D.– Todo operador lineal, en el dual de un espacio de Banach, que tenga

III. 4 CONTINUIDAD* DEBIL DEL PRODUCTO EN LAS W*--ALGEBRAS ALTERNATIVAS.

El teorema 3 . B, conseguido anteriormente, me va a permitir anunciar un resultado cuya demostración daré sólo en esquema pues se basa en teorías y resultados aun no publicados.

Llamaremos B*– álgebra alternativa a un álgebra alternativa compleja normada completa con unidad dotada de una involución (*) satisfaciendo

$$\| a^* a \| = \| a \|^2 \ \text{ y } \ \| ab \| \leqslant \|a\| \, \|b\|$$

Existen B*– álgebras alternativas no asociativas; concretamente: el álgebra de los octoniones complejos con una conveniente norma e involución es una B*-álgebra ([3]). Una W*-- álgebra alternativa será, por definición una B*–álgebra alternativa verificando el axioma 3 . A

TEOREMA.

El producto de una W*- álgebra alternativa es *--débilmente separadamente continuo.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACION.

Sea A la W*-álgebra alternativa en cuestión; es prácticamente inmediato que A^+ es una JV– álgebra en el sentido de [2] que satisfará igualmente el axioma 3 . A. Pero, para este tipo de álgebras el profesor Ocaña ([4]) ha demostrado la continuidad separada *- debil de su producto; en consecuencia el producto de A^+ es *--debilmente separadamente continuo. Si demostramos que A es semiprima, la certeza de nuestro teorema es consecuencia inmediata de 3 . B. Sea entonces M un ideal de A de cuadrado nulo y $m \in M$: como $m^*m \in M$ será $(m^*m)^2 = 0 \Rightarrow$

$\|m\|^4 = \|m^*m\|^2 = \|(m^*m)^*(m^*m)\| = \|(m^*m)^2\| = 0 \Rightarrow m = 0$; así pues $M = 0$ y A es semiprima.

BIBLIOGRAFIA

1.- ALONSO CANOVAS, DIEGO: Estructura de Jordan Subyacente a un álgebra de Banach (Memoria de Licenciatura; Universidad de Granada; no publicada).

2.- MARTINEZ MORENO, JUAN: Sobre álgebra de Jordan normadas completas (Tesis Doctoral; Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, 1977).

3.- MOJTAR KAIDI, AMIN: Tesis Doctoral (en preparación).

4.- OCAÑA OCAÑA, FRANCISCO: Tesis Doctoral (en preparación)

5.- SAKAI, SHOICHIRO: C* álgebras and W*– álgebras (Springer–Verlag, 1971).

6.- SCHAEFER, H.H: Topological vector spaces (Springer- Verlag, 1970).

7.- SHIRALI, SATIS: On the Jordan Structure of complex Banach *–álgebras (Pacific J. Math., 27, pag. 397–404; 1968). Correction (ibid., 31, pag. 834; 1969).

8.- SLATER, M.: Ideals in semiprime alternative rings (Journal of Algebra, 8, pg. 60–76; 1968)