Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

JORDAN EPIMORFISMOS SOBRE UN ALGEBRA ALTERNATIVA NORMADA COMPLETA SEMISIMPLE KLEINFELD

Inmaculada P. de Guzman Molina, Angel Rodriguez Palacios

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Málaga
Universidad de Granada

INTRODUCCION: En este trabajo probamos la natural extensión para álgebras alternativas del conocido teorema de Sinclair (Ver (9)), sobre la continuidad automatica de los Jordan-epimorfismos de un álgebra de Banach sobre un álgebra de Banach semisimple. Concretamente:

TEOREMA B : "Todo Jordan-epimorfismo de un álgebra de potencias-asociativas, normada,completa sobre un álgebra alternativa,normada,completa,semisimple Kleinfeld es continuo".

(El concepto de álgebra semisimple Kleinfeld, será presentado en el apartado 2 de este trabajo)

Para su demostración, hacemos uso de la versión alternativa del célebre teorema de Johnson((2)) sobre la unicidad de la topologia de la norma (completa) para un álgebra semisimple : TEOREMA A. (Resultado debido a I. P. de Guzmán ((7))

1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

Si A es un álgebra, el casi-producto de dos elementos de A se define por $a \circ b = a + b - ab$ y llamamos a la operación $a \circ b$ casi-producto.

Si A es un álgebra de Jordan no conmutativa, diremos que $a \in A$ es casi-inversible si existe un elemento $b \in A$ para el cual :

$$\text{i) } a \circ b = b \circ a = o \quad \text{y} \quad \text{ii) } (a \circ a) \circ b = b \circ (a \circ a) = a$$

Si A es un álgebra de Jordan, i) y ii) son equivalentes a : $a \circ b = o$ y $(a \circ a) \circ b = a$. Si A es un álgebra alternativa, ii) se sigue de i). En caso de existir b, diremos que b es un casi-inverso de a.

Un elemento de un álgebra de Jordan no conmutativa tiene al menos un casi-inverso. El conjunto de los elementos casi-inversibles de A se nota por q-Inv(A).

Si A es un álgebra notaremos por A^+ el álgebra obtenida considerando el espacio vectorial de A con el producto $a.b = 1/2(ab + ba)$. Si A es un álgebra de Jordan no conmutativa, A^+ es un álgebra de Jordan.

TEOREMA 1.1:"Toda álgebra de Jordan no conmutativa A, tiene un más grande ideal bilátero consistente, unicamente, de elementos casi-inversibles, al cual llamaremos Radical de Jacobson de A y notaremos por $Rad_J(A)$, verificandose que: $Rad_J(A) \subset Rad_J(A^+)$"

Este resultado se obtiene a partir del análogo conmutativo debido a McCrimmon (ver(6)).

TEOREMA 1.2. : "Sea A un álgebra alternativa semiprima cuyo espacio vectorial subyacente es un espacio de Banach. Entonces, si el producto en A^+ es continuo, el producto en A es tambien continuo".

Este resultado es debido a A. Rodriguez Palacios (8).

2. UNICIDAD DE LA TOPOLOGIA DE LA NORMA (COMPLETA)

Un elemento u de un álgebra A es una unidad modular derecha para un subespacio vectorial E de A, si se tiene:

$\{a - au : a \in A\} \subset E$. Un ideal izquierdo modular es un ideal izquierdo para el cual existe una unidad modular derecha. Si u es una unidad modular derecha para un ideal izquierdo propio L, entonces $u \notin L$.

Un ideal primitivo P es un ideal bilátero para el cual existe un ideal izquierdo modular maximal M, para el cual P es el más grande ideal bilátero con $P \subset M$.

Un álgebra se dice primitiva si $\{o\}$ es un ideal primitivo de A.

Definimos el Radical Kleinfeld de un álgebra A, como el álgebra, si no existen ideales primitivos y la intersección de todos los ideales primitivos, si tales ideales existen. Notaremos el Radical Kleinfeld de un álgebra A por $Rad_K(A)$. El álgebra se dice semisimple Kleinfeld si $Rad_K(A) = \{o\}$ y se dice álgebra Radical si $Rad_K(A) = A$. $Rad_K(A)$ es un ideal bilátero.

LEMA 2.1: "Sea a un elemento de un álgebra normada completa tal que $\|a\|<1$. Entonces existe un elemento $b \in A$ tal que $b \circ a = o$. En particular, si A es un álgebra de potencias-asociativas, existe un elemento $b \in A$ tal que $b \circ a = a \circ b = o$ y $(a \circ a) \circ b = b \circ (a \circ a) = a$"

TEOREMA A: "Toda álgebra alternativa normada completa semisimple Kleinfeld tiene una única topologia de la norma (completa)"

<u>Demostración</u>: Ver(7).

3. RESULTADO PRINCIPAL.

El lema 2.1. nos asegura el siguiente resultado:

PROPOSICION 3.1: " Sea ϕ un epimorfismo de un álgebra de potencias-asociativas normada complete A sobre un álgebra de Jordan no conmutativa B. Entonces $\phi(\overline{Ker(\phi)}) \subset Rad_J(B)$"

COROLARIO 3.2: "Sea ϕ un epimorfismo de un álgebra de potencias-asociativas normada completa sobre un álgebra de

Jordan no conmutativa semisimple Jacobson. Entonces Ker(ϕ) es cerrado.

TEOREMA B: "Todo Jordan epimorfismo ϕ de un álgebra de potencias-asociativas normada completa A sobre un álgebra alternativa normada completa semisimple Kleinfeld B es continuo"

Demostración: Sean las álgebras de Jordan A^+ y B^+. Puesto que $Rad_J(B^+) = Rad_J(B)$ (Ver(5)) y $Rad_J(B) \subset Rad_K(B) = \{0\}$ (Ver(3)), el álgebra de Jordan B^+ es semisimple Jacobson.

Sea el epimorfismo ϕ de A^+ sobre B^+, por el corolario 3.2 Ker(ϕ) es cerrado. Por tanto $A^+/Ker(\phi)$ es un álgebra de Jordan normada completa. Sea $\hat{\phi}: A^+/Ker(\phi) \dashrightarrow B^+$ el isomorfismo canónico derivado de ϕ. Sea $\|b\|_1 = \|\hat{\phi}^{-1}(b)\|$ $(b \in B)$. $\|.\|_1$ es una norma completa en B tal que el producto en B^+ es continuo en $(B, \|.\|_1)$.

Puesto que B es un álgebra alternativa semisimple Kleinfeld, B es un álgebra alternativa semiprima y el teorema 1.2 asegura que el producto en B es tambien continuo en $(B, \|.\|_1)$. Por tanto existe una norma-álgebra $\|.\|_2$ completa en B tal que $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son equivalentes. Entonces, por el teorema A, $\|.\|_2$ y la norma inicial son equivalentes y en consecuencia $\hat{\phi}$ es continuo y por tanto ϕ es tambien continuo.

REFERENCIAS

1. Bonsall, F.F-Duncan, J. "Complete normed algebras" (Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973).
2. B.E.Johnson. "The uniqueness of the (complete) norm topology" .Bull.Amer.Math.Soc.73(L967),537-9.
3. E. Kleinfeld."Primitive alternative rings and semisimplicity". Amer.J.Math,77(1955),725-30.
4. K.McCrimmon."Norms and noncommutative Jordan algebras".Pacific J.Math.L5(1965)925-956.

5. K.McCrimmon."A Characterization of the Jacobson-Smiley Radical".
Journal of Algebra 18.(1971)565-573.

6. K.McCrimmon."The Radical of a Jordan algebra". Proc.N.A.S.62,
(1969),671-8.

7. P. de Guzmám Molina,I. "Algebras alternativas normadas.Teorema de estructura para H -algebras alternativas".Tesis Doctoral.Universidad de Granada.(Por aparecer en Secretariado de Publicaciones).

8. Rodriguez Palacios,A. "Continuidad del producto de Jordan implica la del ordinario en el caso completo semiprimo". Contrib. en Prob. y Est. Ens. de la Mat. y Análisis.(1979) 280-8, Univ. de Granada.

9. Sinclair,A.M. "Jordan automorphisms on a semisimple Banach algebra". Proc.Amer.Math.Soc.25,(1970),526-8.