74

ESTRUCTURAS DE JORDAN EN ANALISIS

por

A. Rodríguez Palacios

(Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LXXXVIII, Cuadernos Segundo-Tercero

MADRID - 1994

Comunicaciones a la Academia

presentadas en las Sesiones Científicas

Estructuras de Jordan en análisis

POR ANGEL RODRÍGUEZ PALACIOS*

Conferencia pronunciada en la Academia
el día 1 de Junio de 1.994.

Abstract

If a unital complete normed nonassociative complex algebra is subjected to the geometric Vidav condition characterizing C*-algebras in the associative context, then it is also "almost" a C*-algebra. Moreover, the symmetrization of its product behaves algebraically and geometrically like the symmetrization of the product of a C*-algebra. In this way Vidav's condition in the general nonassociative setting gives birth to the Jordan identity. In this talk we shall explain in detail the above assertions and study in deep Vidav nonassociative algebras taking as a "leit motiv" the fact that they are "nearly" associative.

Introducción

En esta conferencia expondremos las contribuciones más relevantes del grupo de investigación nucleado en torno al autor, en lo que concierne a una de las parcelas de trabajo en las que dicho grupo se ha destacado más significativamente, a saber, las aproximaciones no-asociativas a las álgebras de operadores lineales continuos en los espacios de Hilbert. Este campo ha sido muy activo entre la comunidad científica en los últimos quince años, pero el punto de enfoque del grupo tiene especial originalidad.

---

* Dpto. de Análisis Matemático. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada. Granada (España).

1. Algebras de Vidav no-asociativas

Un álgebra normada se dice ser "unital" si tiene un elemento unidad **1** verificando $\|\mathbf{1}\| = 1$. Un elemento h de un álgebra compleja normada unital A se dice ser "hermitiano" if $\phi(h) \in \mathbb{R}$ para toda forma lineal continua ϕ sobre A que satisfaga $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1$.Para una tal álgebra $A, H(A)$ denotará el subespacio real cerrado de A de todos sus elementos hermitianos. El teorema de Vidav-Palmer [4; Theorem 6.9] caracteriza las C*-álgebras unitales como aquellas álgebras complejas asociativas normadas completas unitales A verificando $A = H(A) + iH(A)$. Recordamos que las C*-álgebras asociativas no son otra cosa que las álgebras autoadjuntas de operadores lineales continuos en algún espacio de Hilbert complejo que son completas para la norma de operadores. El estudio del axioma de Vidav $A = H(A) + iH(A)$ en el contexto no necesariamente asociativo ha sido llevado a cabo en una serie de artículos ([3], [29], [30], [13], [17] y [12], si bien los resultados al respecto alcanzan su forma definitiva en [18] dando lugar al siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea A un álgebra compleja no-asociativa normada completa unital verificando* $A = H(A) + iH(A)$. *Entonces A es un álgebra de Jordan no-conmutativa,* $H(A) \cap iH(A) = 0$, *la aplicación * definida por* $(h + ik)^* := h - ik$ $(h, k \in H(A))$ *es una involución de álgebra en A, y para todo en A se verifica la igualdad* $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ *(donde, para a y b en* A, $U_a(b) := = (ab)a + (ba)a - ba^2$*).*

Las álgebras de Jordan no-conmutativas se definen como aquellas álgebras que satisfacen las identidades $(ab)a = a(ba)$ y $a^2(ba) = (a^2 b)a$. Las álgebras complejas de Jordan no-conmutativas normadas completas con una involución de álgebra * verificando $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ para todos sus elementos a se llaman JB*-álgebras no commutativas. El recíproco del Teorema 1.1, a saber, toda JB*-álgebra no-conmutativa unital A satisface $A = H(A) + iH(A)$, es también cierto y no difícil de probar.

Las álgebras de Jordan no-conmutativas están bastante cerca de las asociativas en vista de la "asociatividad de las potencias" [25]. En consecuencia, las JB*-álgebras no-conmutativas son "localmente" C*-álgebras, en el sentido de que la subálgebra cerrada engendrada por cualquiera de sus elementos autoadjuntos es una C*-álgebra asociativa y conmutativa. Una información más precisa se puede obtener de la teoría de estructura desarrollada en [14] y [15] (ver también [2] y [5]) que resumimos en los

Teoremas 1.2,, 1.3 y 1.4 que siguen. Dada una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de JB*-álgebras no-conmutativas, llamaremos "una l_∞-suma subdirecta" de la familia dada a cualquier subálgebra cerrada y autoadjunta B de la JB*-álgebra no-conmutativa $\overset{l_\infty}{\underset{i\in I}{\oplus}} A_i$ verificando $\pi_i(B)=A_i$ para todo i en I (donde π_i denota la proyección natural sobre la coordenada i-ésima). Diremos que una JB*-álgebra A es "primitiva" si existe un punto extremo de la bola unidad dual cuyo nucleo no contiene ideales de A distintos de cero. Para C*-álgebras asociativas, este concepto de primitividad coincide con el usual (ver [1] y [14; Lemma 6.5]).

Teorema 1.2. *Toda JB*-álgebra no-conmutativa es una l_∞-suma subdirecta de una conveniente familia de JB*-álgebras no-conmutativas primitivas.*

Las JB*-álgebras no-conmutativas que son conmutativas (téngase en cuenta que "no-" significa usualmente "no necesariamente") se llaman simplemente JB*-álgebras. Un álgebra A sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se dice ser cuadrática si tiene elemento unidad **1**, $A\neq\mathbb{K}\mathbf{1}$, y para cada a en A existen α,β en $\mathbb{K}$ verificando $a^2+\alpha a+\beta\mathbf{1}=0$.

Teorema 1.3. *Las JB*-álgebras no-conmutativas primitivas son las siguientes:*

i) las JB-álgebras primitivas.*
ii) las JB-álgebras no-conmutativas simples cuadráticas, y*
iii) las JB-álgebras no-conmutativas obtenidas a partir de una C*-álgebra asociativa cambiando el producto asociativo "ab" por $a\circ b:=\lambda ab+(1-\lambda)ba$, donde λ es un número real fijo satisfaciendo $0\leq\lambda\leq 1$*

Teorema 1.4. *Dado un espacio de Hilbert real E de dimensión >1 con un producto anticonmutativo $\wedge$ satisfaciendo $(x\wedge y|z)=(x|y\wedge z)$ y $\|x\wedge y\|\leq\|x\|\|y\|$ para cualesquiera x, y, z en E, considérese el álgebra normada real B cuyo espacio normado es $\mathbb{R}\mathbf{1}\overset{l_2}{\oplus}E$ y cuyo producto viene dado por*

$$(\alpha\mathbf{1}+x)(\beta\mathbf{1}+y):=[\alpha\beta-(x|y)]\mathbf{1}+\alpha y+\beta x+x\wedge y.$$

*Entonces la complexificación de B, con la involución * definida por*

$$[\alpha\mathbf{1}+x+i(\beta\mathbf{1}+y)]^*:=\alpha\mathbf{1}-x-i(\beta\mathbf{1}-y)$$

y la norma dada por

$$\|b+ic\|^2 := \|b\|^2 + \|c\|^2 + 2\left[\|b\|^2\|c\|^2 - (b|c)^2\right]^{1/2},$$

es una JB-álgebra no-conmutativa simple cuadrática. Además, todas las JB*-álgebras no-conmutativas simples cuadráticas se pueden construir de esta manera.*

De los Teoremas 1.2, 1.3 y 1.4 se desprende que la teoría de estructura de las JB*-álgebras no-conmutativas estará acabada en primera instancia si somos capaces de describir las JB*-álgebras primitivas. Las JB*-álgebras fueron introducidas en [27] donde se prueba que están en correspondencia uno a uno con las JB-álgebras [11]. En particular se demuestra en [27] que la única álgebra de Jordan compleja excepcional simple $M_3^8(\mathbb{C})$ se puede estructurar de manera esencialmente única como JB*-álgebra. Las JB*-álgebras están también en dependencia con los JB*-triples [26] ya que ellas son de manera natural JB*-triples y, recíprocamente, los JB*-triples se pueden ver como JB*-subtriples de JB*-álgebras [10; Corollary 2]. La descripción de las JB*-álgebras primitivas ha sido obtenida recientemente en [9] juntando la teoría clásica de JB- y JB*-álgebras con las técnicas de Zel'manov en la demostración de su famoso teorema de clasificación de álgebras de Jordan primas no degeneradas [31]. Tenemos así el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Las JB*-álgebras primitivas son las siguientes*:

i) $M_3^8(\mathbb{C})$
ii) *las JB*-álgebras simples cuadráticas (dadas por el Teorema 1.4 tomando* $\wedge = 0$)
iii) *las subálgebras de Jordan cerradas y *-invariantes de* $M(A)$ *que contienen a A, donde A es cualquier C*-álgebra asociativa primitiva y* $M(A)$ *denota la C*-álgebra de los multiplicadores de A, y*
iv) *las subálgebras de Jordan cerradas y *-invariantes de* $M(A)$ *contenidas en* $H(M(A),\tau)$ *y que contienen a* $H(A,\tau)$, *donde A es cualquier C*-álgebra asociativa primitiva,* τ *es una *-involución en A, y* $H(.,\tau)$ *denota el conjunto de todos los elementos* τ *-invariantes.*

Recordamos que la C*-álgebra $M(A)$ de los multiplicadores de una C*-álgebra dada *A* se puede reconocer, una vez que *A* se representa de forma fiel y no degenerada en un espacio de Hilbert complejo, como el conjunto de aquellos elementos b en el biconmutante de A que satisfacen $bA \subseteq A$ y $Ab \subseteq A$ [16].

Vamos a concluir esta sección reseñando un resultado conseguido muy recientemente en [24] y que, en un cierto sentido, mejora en Teorema 1.1. Dado un espacio normado X y un elemento $\mathbf{1}$ en X con $\|\mathbf{1}\| = 1$, definimos el "índice multiplicativo" $m(X,\mathbf{1})$ de X en $\mathbf{1}$ como el ínfimo de las normas de todas las aplicaciones bilineales continuas $f: X \times X \to X$ que verifican $f(x,\mathbf{1}) = f(\mathbf{1},x) = x$ para todo x en X. Así mismo definimos el conjunto $H(X,\mathbf{1})$, de los elementos "hermitianos" de X relativos a $\mathbf{1}$, como

$$\{x \in X : \phi(x) \in \mathbb{R} \text{ para todo } \phi \text{ en } X^* \text{ con } \|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1\}.$$

Teorema 1.6. *Sea X un espacio de Banach complejo y sea* $\mathbf{1}$ *un elemento en X con* $\|\mathbf{1}\| = 1$*.Entonces X es el espacio de Banach de una JB*-álgebra no-conmutativa con unidad* $\mathbf{1}$ *si (y sólamente si)* $X = H(X,\mathbf{1}) + iH(X,\mathbf{1})$ *y* $m(X,\mathbf{1}) = 1$.

2- Algebras de Gelfand-Naimark no-asociativas

Muy anterior a la caracterización de Vidav-Palmer de las C*-álgebras asociativas es la bien conocida de Gelfand-Naimark afirmando que las C*-álgebras asociativas no son otra cosa que aquellas álgebras asociativas complejas normadas completas con involución de álgebra * verificando $\|a^* a\| = \|a\|^2$ para todos sus elementos a [8]. Este último axioma ha sido considerado también en el ambiento no-asociativo resultando ser considerablemente más restrictivo que el de Vidav siempre y cuando que se suponga la existencia de unidad. El resultado fundamental en esta dirección se obtuvo en [17] a partir de una versión "suave" del Teorema 1.1 previamente probada en [12] y de un resultado en [28] sobre isometrías de las JB-álgebras.

Teorema 2.1. *Sea A un álgebra compleja no-asociativa normada completa con unidad,* $\mathbf{1}$, *y sea * una involución conjugado-lineal en el espacio vectorial de A verificando* $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ *y* $\|a^* a\| = \|a\|^2$ *para todo a en A. Entonces A es un álgebra alternativa y * es una involución de álgebra en A.*

Recordamos que un álgebra A se dice ser alternativa si satisface las identidades $a^2 b = a(ab)$ y $ba^2 = (ba)a$ .Una definición equivalente consiste en exigir que la subálgebra que engendran dos elementos arbitrarios de A sea asociativa [25]. Las álgebras complejas alternativas normadas completas con involución de álgebra $*$ satisfaciendo $\|a * a\| = \|a\|^2$ se llaman C*-álgebras alternativas. Las álgebras alternativas son álgebras de Jordan no-conmutativas y no es difícil ver que las C*-álgebras alternativas son JB*-álgebras no-conmutativas. Mejor aún, las C*-álgebras alternativas son precisamente aquellas JB*-álgebras no-conmutativas que son alternativas. En consecuencia, del Teorema 1.2 deducimos el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Toda C*-álgebra alternativa es una l_∞-suma subdirecta de una conveniente familia de C*-álgebras alternativas primitivas.*

El álgebra de los octoniones complejos se puede estructurar de manera esencialmente única como C*-álgebra alternativa ([12],[6]), y esta C*-álgebra alternativa es primitiva ya que es de hecho simple. Ahora la teoría de estructura de las C*-álgebras alternativas se concluye con el siguiente teorema ([14],[6]).

Teorema 2.2. *Toda C*-álgebra alternativa primitiva es o bien asociativa o bien la C*-álgebra de los octoniones complejos.*

Las álgebras complejas no-asociativas normadas completas con unidad **1** e involución de álgebra $*$ satisfaciendo $\|a * a\| = \|a *\| \|a\|$ no son otra cosa que las anteriormente consideradas C*-álgebras alternativas [17]. Ahora, en el contexto del nuevo axioma $\|a * a\| = \|a *\| \|a\|$ resulta sugestivo preguntarse si es posible relajar la hipótesis $(ab)^* = b^* a^*$ a la más débil $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ sin perturbar la caracterización de las C*-álgebras alternativas (tal como ocurre en la situación "fuerte" estudiada en el Teorema 2.1). La contestación a esta pregunta es "casi" afirmativa. Así se asegura en el siguiente teorema demostrado recientemente en [7] usando como herramientas fundamentales los Teoremas 1.1, 1.4 y 2.1.

Teorema 2.3. *Sea A un álgebra compleja no-asociativa normada completa con unidad* **1**, *y sea $\circ$ una involución conjugado lineal en el espacio vectorial de A verificando $\mathbf{1}^\circ = \mathbf{1}$ y $\|a^\circ a\| = \|a^\circ\| \|a\|$ para todo en A. Entonces A es alternativa y (con la única posible excepción del caso en que A sea isométricamente isomorfa a la C*-álgebra $\mathbb{C}^2$) $\circ$ es una involución de álgebra en A y se tiene $\|a^\circ a\| = \|a\|^2$ para todo en A. En el caso excepcional de la C*-álgebra $\mathbb{C}^2$, las involuciones $\circ$ que satisfacen los requisitos anteriores son exactamente las funciones de la forma $a \to a^* + \overline{f(a)}\mathbf{1}$, donde $*$ denota la* *involución de C*-álgebra y f es cualquier forma lineal en* $\mathbb{C}^2$ *tal que* $f(1)=0$ *y* $f(a^*)=-\overline{f(a)}$ *para todo a en* $\mathbb{C}^2$.

Nota final. Como se dijo en la introducción, lo expuesto anteriormente no es más que una pequeña parte de la producción científica de un grupo de investigación nucleado en torno al autor a partir de 1977. Este grupo, de composición variable en función del tiempo y de la situación profesional de sus componentes, tiene aportaciones significativas en terrenos tan distantes como pueden ser el álgebra pura o la geometría de los espacios de Banach, a más por supuesto en el campo de las álgebras normadas asociativas o no, con independencia de su relación con las C*-álgebras. El lector interesado en conocer más completamente la producción del grupo puede consultar los "surveys" [19], [20], [21], [22] y [23].

Agradecimiento. El autor quiere agradecer profundamente al Profesor Dr. D. Baltasar Rodríguez Salinas la deferencia que ha tenido invitándole a presentar públicamente esta comunicación ante la Real Academia de Ciencias de Madrid.

Referencias

[1] C.A. AKEMAN y B. RUSSO, Geometry of the unit sphere of a C*-algebra and its dual, *Pacific J. Math.* **32** (1970), 575-585.

[2] K. ALVERMANN y G. JANSSEN, Real and complex non-conmutative Jordan Banach algebras, *Math. Z.* **185** (1984), 105-113.

[3] F.F. BONSALL, Jordan algebras spanned by hermitian elements of a Banach algebra, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **81** (1977), 3-13.

[4] F.F. BONSALL y J. DUNCAN, "Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras", London Math. Soc. Lecture Note Series **2**, Cambridge University Press, 1971.

[5] R.B. BRAUN, Structure and representations of non-conmutative C*-Jordan algebras, *Manuscripta Math.* **41** (1983), 139-171.

[6] R.B. BRAUN, A. Gelfand-Neumark theorem for C*-alternative algebras. *Math. Z.* **185** (1984), 225-242.

[7] M. CABRERA y A. RODRIGUEZ, New associative and nonassociative Gelfand-Naimark thorems, *Manuscripta Math.* **79** (1993), 197-208.

[8] R.S. DORAN y V.A. BELFI, *Characterizations of C*-algebras: The Gelfand-Naimark theorems*. Marcel Dekker, New York and Basel, 1986.

[9] A. FERNÁNDEZ, E. GARCÍA y A. RODRÍGUEZ, A. Zel'manov prime theorem for JB*-algebras, *J. London Math. Soc.* **46** (1992), 319-335.

[10] Y. FRIEDMAN y B. RUSSO, The Gelfand-Naimark theorem for JB*-triples, *Duke Math. J.* **53** (1986), 139-148.

[11] H. HANCHE-OLSEN y E. STORMER, "Jordan operator algebras", Monograph Stud. Math. **21**, Pitman, 1984.

[12] A.M. KAIDI, J. MARTÍNEZ y A. RODRÍGUEZ, On a nonassociative Vidav-Palmer theorem, *Quart. J. Math. Oxford* **32** (1981), 435-442.

[13] J. MARTÍNEZ, JV-algebras, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **87** (1980), 47-50.

[14] R. PAYA, J. PÉREZ y A. RODRÍGUEZ, Non-conmutative Jordan C*-algebras, *Manuscripta Math.* **37** (1982), 87-120.

[15] R. PAYA, J. PÉREZ y A. RODRÍGUEZ, Type I factor representations of non-conmutative JB*-algebras, *Proc. London Math. Soc.* **48** (1984), 428-444.

[16] G.K. PEDERSEN, *C*-algebras and their automorphism groups*. Academic Press, London, 1979.

[17] A. RODRÍGUEZ, A. Vidav-Palmer theorem for Jordan C*-algebras and related topics, *J. London Math. Soc.* **22** (1980), 318-332.

[18] A. RODRÍGUEZ, Nonassociative normed algebras spanned by hermitian elements, *Proc. London Math. Soc.* **47** (1983), 258-274.

[19] A. RODRÍGUEZ, Infinite-dimensional sets of constant width and their applications. *Extracta Math.* **5** (1990), 41-52 (Segunda edición en: *Actas del II Congreso de Análisis Funcional*, Jarandilla de la Vera-Cáceres-España, 20-27, Junio 1990, 140-151).

[20] A. RODRÍGUEZ, An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras, *Ann. Sci. Univ. "Blaise Pascal", Clermont II, Sér. Math.* **27** (1991), 1-57.

[21] A. RODRÍGUEZ, Números hipercomplejos en dimensión infinita. *Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada.* Granada, 1993.

[22] A. RODRÍGUEZ, Nonassociative normed algebras: Geometric aspects. En *Functional analysis and operator theory* (Warsaw 1992). Banach Center publications 30, 299-311, Warsaw, 1994.

[23] A. RODRÍGUEZ, Jordan structures in Analysis. En *Jordan algebras* (Oberwolfach 1992), 97-186, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[24] A. RODRÍGUEZ, A Banach space characterization of JB*-algebras. *Math. Japon.* (en prensa).

[25] R.D. SCHAFER, "An introduction to nonassociative algebras", Academic Press, New York, 1966.

[26] H. UPMEIER, "Symmetric Banach Manifolds and Jordan C*-algebras", North Holland, Amsterdam 1985.

[27] J.D.M. WRIGHT, Jordan C*-algebras, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 291-302.

[28] J.D.M. WRIGHT y M.A. YOUNGSON, On isometries of Jordan algebras, *J. London Math. Soc.* **17** (1978), 339-344.

[29] M.A. YOUNGSON, A Vidav theorem for Banach Jordan algebras, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **84** (1978), 263-272.

[30] M.A. YOUNGSON, Hermitian operators on Banach Jordan algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **22** (1979), 93-104.

[31] E. ZEL' MANOV, On prime Jordan algebras II, *Siberian Math. J.* **24** (1983), 89-104.