EL CENTROIDE EXTENDIDO DE UNA JB*-ALGEBRA NO-CONMUTATIVA

A.Rodriguez Palacios y A.R.Villena Muñoz

Universidad de Granada

Abstract

Ara obtains in [1] a description of the extended centroid of a C*-algebra as a certain ring of partially defined continuous functions on the primitive spectrum of the algebra. We extend this description to n.c.JB*-algebras by describing the extended centroid of such an algebra as a certain ring of partially defined continuous functions on the set of its "cores" in the Hogben-McCrimonn sense.

1980 A.M.S. Classification: 46H05, 17A01.

Siguiendo una familiar terminología en la teoría clásica de los espacios de Banach, un operador lineal parcialmente definido sobre un espacio vectorial X será una aplicación lineal f de un subespacio de X (llamado el dominio de f y denotado por $dom(f)$) en X. La suma $f+g$ (resp.: la composición gf) de dos operadores lineales parcialmente definidos sobre X se define como el nuevo operador lineal parcialmente definido con dominio $dom(f) \cap dom(g)$ (resp.: $\{x \in dom(f) : f(x) \in dom(g)\}$) y valores $f(x)+g(x)$ (resp.: $g(f(x))$) para todo x en su dominio. Si f y g son operadores lineales parcialmente definidos sobre X diremos que g es una extensión de f si $dom(f) \subseteq dom(g)$ y $g(x)=f(x)$ $\forall x \in dom(f)$. Si A es un álgebra no-asociativa, un centralizador parcialmente definido en A será un operador lineal parcialmente definido en A cuyo dominio es un ideal bilátero de A y tal que $f(ab)=af(b)$ y $f(ba)=f(b)a$ $\forall a \in A$, $\forall b \in dom(f)$. Un ideal I de A se dice esencial si $I \cap J \neq 0$ para todo ideal no cero de A. Un centralizador esencialmente definido en A será un centralizador parcialmente definido en A cuyo dominio es un ideal esencial.

El álgebra A se dice semiprima si el único ideal de cuadrado cero es el cero.

Si A es un álgebra semiprima, la relación $\simeq$, definida sobre el conjunto de todos los centralizadores esencialmente definidos en A por $g \simeq h \Leftrightarrow$ existe un centralizador esencialmente definido f en A tal que g y h son extensiones de f, es una relación de equivalencia. La suma y composición de centralizadores esencialmente definidos, como operadores parcialmente definidos, es también un centralizador esencialmente definido. Además, estas operaciones son compatibles con la anterior relación de equivalencia, y el centroide extendido, $C(A)$, de A se define como el conjunto cociente con las operaciones inducidas. Cada clase de equivalencia contiene un único centralizador esencialmente definido maximal, y sustituyendo cada clase por tal centralizador podemos evitar el paso a cociente.

En [3] se inicia un estudio sistemático del centroide extendido de un álgebra normada semiprima y en [1] se consigue una descripción del centroide extendido de una C*-algebra como cierto anillo de funciones continuas parcialmente definidas en el espectro primitivo del álgebra.

Nosotros conseguimos extender esta descripción al caso de las JB*-algebras no-conmutativas.

DEFINICION.

Un álgebra no-asociativa A se llama álgebra de *Jordan no-conmutativa* si verifica:

i) $a(ba) = (ab)a \quad \forall a, b \in A,$

ii) $a^2(ba) = (a^2 b)a \quad \forall a, b \in A.$

Los U-operadores se definen como $U_a(b) = a(ba) + (ba)a - ba^2 \;\; \forall a, b \in A$

Si A es un álgebra de Jordan diremos que un subespacio I de A es un *ideal interno* de A si $U_I(A_1') \subseteq I$, donde A_1 denota la unitización de A. Diremos que un ideal interno I de A es *x-modular* (para algún $x \in A$) si verifica las condiciones:

$U_{1-x}(A) \subseteq I,$

$\{(1-x), A_1, I\} \subseteq I$, (donde $\{a,b,c\} = (a.b).c + a.(b.c) - b.(a.c)$)

$x - x^2 \in I.$

Diremos que un ideal interno M es *x-maximal* si es maximal entre todos los ideales internos x-modulares propios. Diremos que es *maximal-modular* si es x-maximal para algún x de A, y definimos el *corazón* de un tal ideal interno M como el mayor ideal de A contenido en M (véase [5]).

Si A es un álgebra de Jordan n.c. diremos que un subespacio M de A es un *ideal interno maximal-modular de A* si es un ideal interno maximal-modular del álgebra de Jordan A^+ [1] y definimos el *corazón* de un tal ideal interno M como el mayor ideal de A contenido en M. Notaremos por $Cor(A)$ el conjunto de los corazones de A.

Es fácil comprobar a partir de [5; Proposition 5.5] que los corazones son ideales primos y por tanto podemos considerar en $Cor(A)$ la topología de Jacobson, inducida por el espectro primo de A.

Una *JB*-álgebra no-conmutativa* A es un álgebra de Jordan n.c. compleja normada completa con una involución de álgebra * verificando $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3$ $\forall a \in A$. Tales álgebras son la extensión no-asociativa de las C*-álgebras y nuestra intención es describir su centroide extendido. Para ello, lo primero que hacemos es establecer lo que entendemos por "espectro primitivo" para una tal álgebra. Este bien pudiera ser el conjunto de los corazones, o bien, en vista de [6; Lemma 6.5], pudiera ser el conjunto de los M-ideales primitivos $Prim(A)$ del espacio de Banach subyacente [2].

Posteriormente conseguimos un teorema de Dauns-Hofmann para JB*-álgebras n.c. estableciendo para una tal álgebra A *-isomorfismos $\Gamma(A) \cong C_b(Prim(A)) \cong C_b(Cor(A))$, del centroide extendido $\Gamma(A)$ de A en las funciones continuas y acotadas en cualquiera de los espacios $Prim(A)$ o $Cor(A)$.

---

1 A^+ como espacio vectorial es el mismo A y el nuevo producto viene dado por $a.b = 1/2(ab+ba)$ para a y b en A.

2 Si X es un espacio de Banach y f es un punto extremo de la bola unidad de su dual topológico, al mayor M-ideal contenido en Ker(f) lo llamaremos M-ideal primitivo. Véase [2].

DEFINICION

Si X es un espacio topológico denotamos por $\mathfrak{D}$ el conjunto de todos los subconjuntos abiertos y densos de X, con el orden dado por la inclusión, y denotamos por $\mathfrak{C}(X)$ el límite directo algebraico $\lim\limits_{U\in\mathfrak{D}} C(U)$. Es fácil ver que $\mathfrak{C}(X)$ es un anillo *-regular con involución definida positiva[3] y $\mathfrak{C}(X)_b = \lim\limits_{U\in\mathfrak{D}} C(U)$.

Nuestro principal resultado es el siguiente:

TEOREMA.

Sea A una JB*-álgebra n.c. *Entonces $C(A) \cong \mathfrak{C}(Cor(A)) \cong \mathfrak{C}(Prim(A))$.*

Hacemos un breve resumen de su demostración.

En primer lugar transferimos de forma natural la involución de A a $C(A)$ convirtiendose este último de este modo en un anillo *-regular con involución definida positiva. Por [4; Corollary 1.2] $C(A)$ es entonces el anillo clásico de cocientes de su anillo de elementos acotados, $C(A)_b$. Nos basta entonces con describir $C(A)_b$.

Si denotamos por $\mathfrak{I}$ el conjunto de los ideales cerrados esenciales de A y $W(I)=\{J\in Prim(A):\ I\not\subseteq J\}$. Comprobamos que $W(I)$ son justamente los abiertos densos de $Prim(A)$, y obtenemos:

$$\mathfrak{C}(Prim(A))_b = \lim_{I\in\mathfrak{I}} C_b(W(I)) = \lim_{I\in\mathfrak{I}} C_b(Prim(I)) = \lim_{I\in\mathfrak{I}} \Gamma(I) = C(A)_b$$

con lo que $C(A)=\mathfrak{C}(Prim(A))$. También comprobamos que $\mathfrak{C}(Prim(A)) = \mathfrak{C}(Cor(A))$ y el resultado quedaría probado.

Como consecuencia inmediata obtenemos que si A es una JB*-álgebra n.c. prima entonces $C(A)=\mathbb{C}$.

---

3 Un anillo R von Newmann regular con una involución $*$ tal que $r^*r=0 \Rightarrow r=0$ es llamado anillo $*$-regular. Para un álgebra racional con unidad $*$-regular, R, definimos el conjunto de sus elementos acotados como: $R_b=\{ r\in R:\ \exists n\in\mathbb{N},\ \exists r_1,\dots,r_k\in R:\ r^*r+\sum r_i^*r_i=n \}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] P.ARA, "Extended centroid of C*-algebras", *Archiv. der Math.*. Por aparecer.

[2] E.BEHRENDS, "*M-Structure and the Banach-Stone Theorem*". Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York 1979.

[3] M.CABRERA and A.RODRIGUEZ, "Extended centroid and central closure of semiprime normed algebras. A first approach". Preprint.

[4] D.HANDELMAN, "Rings with involution as partially ordered abelian groups", *Rocky Mountain J. Math. 11* (1981) 337-381.

[5] L.HÖGBEN and K.McCRIMMON, "Maximal modular inner ideals and the Jacobson radical of a Jordan algebra", *Journal of Algebra, 68*, (1981) 155-169.

[6] R.PAYA, J.PEREZ and A.RODRIGUEZ,"Non-commutative Jordan C*-algebras", *Manuscripta Math.,37* (1982), 87-120.

A.Rodriguez Palacios y A.R.Villena Muñoz.

Departamento de Análisis Matemático.

Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.

18071 Granada, ESPAÑA.